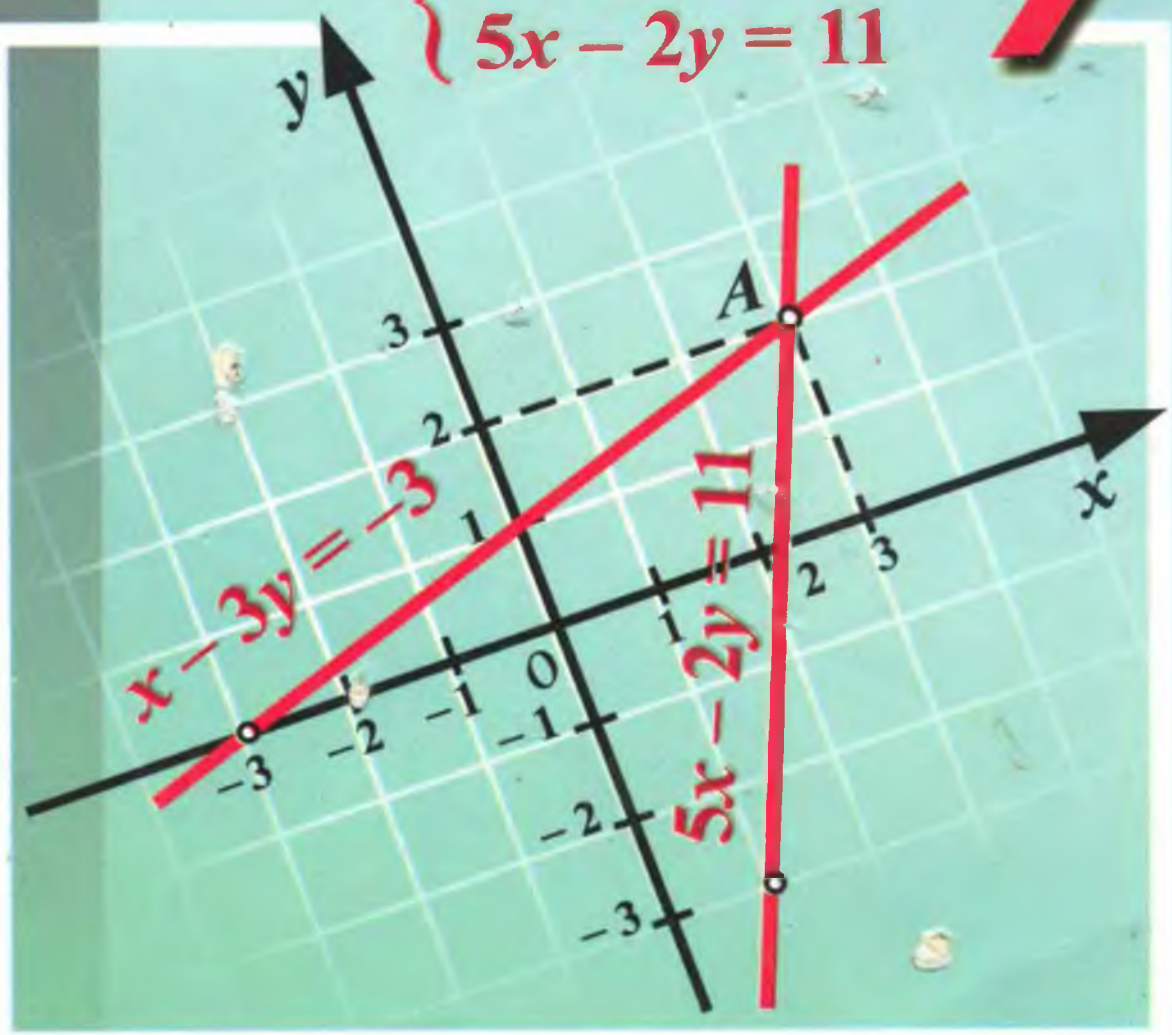
Василий Кравчук
Галина Янченко

АЛГЕБРА

КЛАСС

7

$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases}$$



УДК 51
ББК 22.1я721
К 77

Перевод с украинского *Сергея Мартынюка*

Редакторы *Ярослав Гапюк, Ярослав Гринчишин, Сергей Мартынюк*

Литературное редактирование *Оксаны Давыдовой, Маргариты Бильчук*

Художественное оформление *Елены Соколюк, Светланы Демчак*

Макет *Андрея Кравчука*

Рекомендован Министерством образования и науки Украины (письмо №1/11-2153 от 28.04.2007 года)

Кравчук Василий, Янченко Галина

К 77 Алгебра: Учебник для 7 класса. — Тернополь: Підручники і посібники, 2007. — 224 с.

ISBN 978-966-07-0897-6

УДК 51
ББК 22.1я721

ISBN 978-966-07-0897-6

© Кравчук В., Янченко Г., 2007
© Мартынюк С., перевод с укр., 2007

ЮНЫЕ ДРУЗЬЯ!

Вы начинаете изучать одну из основных математических дисциплин — алгебру. Надеемся, что учебник, который вы держите в руках, поможет вам не потеряться в лабиринтах этой пока еще непознанной науки.

Что касается особенностей учебника, то материал, который вы будете изучать, разделен на четыре раздела, семь параграфов, а параграфы — на пункты.

Каждый пункт начинается изложением теоретического материала. Некоторые пункты содержат дополнительный материал под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше».

Далее следует рубрика «Примеры решения упражнений». Это подсказка. Она поможет вам ознакомиться с основными видами упражнений, способами их решения и научит правильно записывать решение.

Примеры решения упражнений

Прочитав теоретический материал и поразмыслив над примерами решения задач, стоит сначала решать устные упражнения и более простые задачи (уровень А), а потом переходить к более сложным (уровень Б). Задачи уровня В — для самых смекалистых — тех, кто хочет уметь и знать больше и иметь самые высокие оценки. Для некоторых задач этого уровня приведены решения.

Уровень А

Уровень Б

Уровень В

Для самостоятельной работы дома рекомендуются задачи, номера которых выделены (например, **343**).

Рубрика «Упражнения для повторения» поможет периодически повторять основные виды упражнений.

После изучения параграфа вы сможете повторить и систематизировать материал, ответив на вопросы и решив задачи в конце параграфа.

Свои знания вы сможете проверить, решив задания для самопроверки.

Искренне желаем успеха!

Раздел I. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Алгебра длительное время была частью арифметики — одной из древнейших математических дисциплин. Слово «арифметика» в переводе с греческого означает «искусство чисел». Алгебру же после выделения ее в отдельную науку рассматривали как искусство решать уравнения.

В даном разделе мы выясним, что такое уравнение, линейное уравнение, что значит решить уравнение, как решать задачи с помощью уравнений.

— x кг

$$4x = 2x + 1$$

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Понятие уравнения

1. Что такое уравнение. Рассмотрим задачу.

Масса 4 больших и 15 малых деталей равна 270 г. Масса большой детали в три раза больше массы малой. Какова масса малой детали?

Пусть масса малой детали равна x г, тогда масса большой — $3x$ г. Масса 15 малых деталей равна $15x$ г, а 4 больших — $4 \cdot 3x = 12x$ (г). По условию задачи сумма этих масс равна 270 г:

$$15x + 12x = 270.$$

Мы пришли к равенству, которое содержит неизвестное число, обозначенное буквой x (еще говорят: равенство содержит переменную x). Чтобы решить задачу, нужно найти значение x, при котором равенство $15x + 12x = 270$ является верным числовым равенством.

Равенство с неизвестным значением переменной называют ***уравнением с одной переменной*** (или *уравнением с одним неизвестным*).

2. Корень уравнения. Рассмотрим уравнение $3x = x + 6$. Подставляя вместо переменной x некоторые числа, будем получать числовые равенства, которые могут быть верными или неверными. Например:

при $x = 3$ получим равенство $3 \cdot 3 = 3 + 6$, которое является верным;

при $x = 4$ получим равенство $3 \cdot 4 = 4 + 6$, которое является неверным.

Значение переменной, при котором уравнение превращается в верное числовое равенство, называют ***корнем, или решением уравнения***.

Итак, число 3 является корнем уравнения $3x = x + 6$, а число 4 — нет.

3. Количество корней уравнения. Уравнения могут иметь разное количество корней. Например:

уравнение $3x = 9$ имеет только один корень — число 3;

уравнение $(x - 2)(x - 6) = 0$ имеет два корня — числа 2 и 6;

уравнению $x + 0 = x$ удовлетворяет любое число x; говорят, что это уравнение имеет бесконечно много корней.

Уравнение может и не иметь корней. Рассмотрим, например, уравнение $x + 1 = x$. Для любого числа x значение левой части уравнения на 1 больше значения правой части. Следовательно, какое бы число x мы не взяли, равенство $x + 1 = x$ будет неверным. Поэтому это уравнение не имеет корней.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Решим уравнение, составленное выше по условию задачи о больших и малых деталях:

$$15x + 12x = 270; \quad 27x = 270; \quad x = 270 : 27; \quad x = 10.$$

Таким образом, масса малой детали равна 10 г.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Является ли число 2,5 корнем уравнения $3x - 0{,}5 = 2(x + 1)$?

• Если $x = 2{,}5$, то:

значение левой части уравнения равно: $3 \cdot 2{,}5 - 0{,}5 = 7{,}5 - 0{,}5 = 7$;

значение правой части равно: $2(2{,}5 + 1) = 2 \cdot 3{,}5 = 7$.

Значения обеих частей уравнения равны, поэтому $x = 2{,}5$ — корень данного уравнения. •

Пример 2. Решить уравнение:

а) $3(x - 7) = 12$; **б)** $(2x + 1)(2x - 4) = 0$; **в)** $x^2 + 7 = 3$.

• **а)** $3(x - 7) = 12$; $x - 7 = 12 : 3$; $x - 7 = 4$; $x = 4 + 7$; $x = 11$.

Ответ. 11.

б) Произведение равно нулю только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно, $2x + 1 = 0$ или $2x - 4 = 0$; $x = -0{,}5$ или $x = 2$.

Ответ. –0,5; 2.

в) $x^2 + 7 = 3$; $x^2 = 3 - 7$; $x^2 = -4$. Квадрат числа не может быть равен отрицательному числу. Поэтому данное уравнение корней не имеет.

Ответ. Уравнение корней не имеет. •

Устно

1. Какие из записей являются уравнениями:

а) $4x + 7$; **б)** $4x - x = 15$; **в)** $14 - 2{,}5 = 11{,}5$;

г) $8(x - 3) = 34$; **д)** $5x - 2x + 5$; **е)** $x > 2$?

2. Является ли число 2 корнем уравнения:

а) $5x = 3x + 4$; **б)** $2x + 8 = 7x$; **в)** $10 - y = y(y + 2)$?

3. Сколько корней имеет уравнение:

а) $2x = 1$; **б)** $2x = 0$; **в)** $x = x + 3$;

г) $2 + x = x + 2$; **д)** $x(x - 5) = 0$; **е)** $\left(\frac{2}{5} - 0{,}4\right)(x - 2) = 0$?

Уровень А

4. Докажите, что число 1,5 является корнем уравнения:

а) $4x - 3 = x + 1{,}5$; **б)** $2(1 - 2x) + x = -5x + 5$.

5. Докажите, что число 8 является корнем уравнения:

а) $0{,}5x + 6 = 2x - 6$; **б)** $4(x + 3) = 49 - (x - 3)$.

6. Укажите уравнение, для которого число 3 является корнем:

а) $7x - 12 = 3x$; **б)** $2x - 4x + 8 = 1$; **в)** $3(8 - y) = 5y$.

7. Укажите уравнение, для которого число 2 является корнем:
а) $6x = -2 + 7x$; б) $2(y - 5) + 7 = 1$; в) $5 - (6 - x) = x$.

Решите уравнение:

8. а) $5x + 3 = 18$; б) $1{,}7x - 2 = 3{,}1$; в) $4 - 4y = 6$;
г) $-1{,}2y = 0{,}03$; д) $-4(x + 8) = -108$; е) $5(2y + 1) = -1$;
ж) $12{,}6 = 6(x + 2{,}5)$; з) $z : 1{,}5 = -7$; и) $(0{,}7x + 1) : 0{,}5 = 4$.

9. а) $6 + 3z = 15$; б) $2x - 11 = -3$; в) $7 - 6x = 10$;
г) $4(2x + 3) = -4$; д) $-2(3 + y) = 10{,}06$; е) $(5z + 4) : 3 = -17$.

Уровень Б

10. Запишите уравнение, которое имеет:
а) единственный корень — число 4; б) два корня — числа –4 и 4.

11. Является ли число 1,5 корнем уравнения:
а) $x - 1 = |1 - x|$; б) $x + |-x| = 0$?

12. Докажите, что число 2 является корнем уравнения $4 - x = |-x|$.

Решите уравнение:

13. а) $(3x + 7)(3x - 2) = 0$; б) $x^2 + 8 = 4$.

14. а) $(4x - 6)(2x + 6) = 0$; б) $2x^2 + 7 = 1$.

Уровень В

15. Найдите такое число a, чтобы корнем уравнения $2x + a = -1$ было число 1.

16. Уравнение $5x = a - 3$ имеет тот же корень, что и уравнение $2x - 7 = 1$. Найдите a.

17. Не выполняя вычислений, докажите, что число 2 не является корнем уравнения $135x(1297x - 468) - 114(273x + 575) - 2125 = 0$.

18. Решите уравнение:
а) $(x - 1)(2x - 1)(3x - 1) = 0$; б) $x^2(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0$.

Упражнения для повторения

19. Найдите:
а) $\frac{3}{7}$ от 2,1; б) 0,4 от 4; в) 28% от 2,5.

20. Магазин закупил товар на 50 000 грн., продал его и получил 7,5% прибыли. Сколько прибыли (в гривнях) получил магазин?

21. Заготовленные в карьере 400 т руды вывезли 3 самосвала. Первый самосвал вывез 30% всей руды, второй — на 12 т больше, чем первый. Сколько тонн руды вывез третий самосвал?

22. Упростите выражение:

а) $4x - 7x + 8 + 11x - 3$;
б) $8a + 5b - 2 - 9a - 4b$;
в) $7(3c + 1) - 5c + 2$;
г) $2b - 4(1 - 2b)$;
д) $x - (4 + x) - (x - 3)$;
е) $2a - 2b - 4(3b + 1) + a$.

2. Решение уравнений. Свойства уравнений

Решение любого уравнения сводится к выполнению определенных преобразований, в результате которых данное уравнение заменяют более простым.

Решим, например, уравнение:

$$5(x - 2) + 11 = 3x + 9. \quad (1)$$

1. Раскроем скобки:

$$5x - 10 + 11 = 3x + 9. \quad (2)$$

2. Приведем подобные слагаемые в левой части уравнения:

$$5x + 1 = 3x + 9. \quad (3)$$

3. Перенесем слагаемые с переменной x в левую часть уравнения, а без переменной — в правую, изменив их знаки на противоположные:

$$5x - 3x = 9 - 1. \quad (4)$$

4. Приведем подобные слагаемые в каждой части уравнения:

$$2x = 8. \quad (5)$$

5. Разделим обе части уравнения на 2:

$$x = 4.$$

Таким образом, уравнение (1) имеет единственный корень — число 4.

При решении уравнения (1) мы выполняли некоторые преобразования: раскрывали скобки, приводили подобные слагаемые, переносили слагаемые из одной части уравнения в другую, делили обе части уравнения на число. С этими преобразованиями связаны следующие *основные свойства уравнений:*

Свойство 1. *В любой части уравнения можно раскрыть скобки или привести подобные слагаемые.*

Свойство 2. *Любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный.*

Свойство 3. *Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.*

Если в некотором уравнении выполнить одно из преобразований, указанных в свойствах 1, 2 или 3, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и начальное уравнение.

Решая уравнение (1), мы последовательно получали уравнения (2), (3), (4), (5). Все они вместе с уравнением (1) имеют один и тот же корень — число 4.

Для тех, кто хочет знать больше

Свойства уравнений можно обосновать, используя следующие свойства числовых равенств:

Если $a = b$ — верное числовое равенство и c — некоторое число, то:

$a + c = b + c$	*Если к обеим частям верного числового равенства прибавить одно и то же число, то получим верное числовое равенство.*
$ac = bc$	*Если обе части верного числового равенства умножить на одно и то же число, то получим верное числовое равенство.*
$a : c = b : c$, где $c \neq 0$	*Если обе части верного числового равенства разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получим верное числовое равенство.*

Из первого свойства числовых равенств можно получить такое следствие: *если из одной части верного числового равенства перенести в другую часть слагаемое, изменив его знак на противоположный, то получим верное числовое равенство.*

Используя свойства числовых равенств, докажем, например, что уравнение

$$3x = x + 2 \qquad (6)$$

имеет те же корни, что и уравнение

$$3x - x = 2. \qquad (7)$$

(Это свойство 2 для уравнения $3x = x + 2$.)

● Пусть $x = a$ — произвольный корень уравнения (6). Тогда $3a = a + 2$ — верное числовое равенство. Перенесем слагаемое a в левую часть равенства, изменив его знак на противоположный. Получим верное числовое равенство $3a - a = 2$, из которого следует, что $x = a$ является корнем уравнения (7). Мы доказали, что произвольный корень уравнения (6) является корнем уравнения (7).

Наоборот, пусть $x = b$ — произвольный корень уравнения (7). Тогда числовое равенство $3b - b = 2$ является верным. Перенесем слагаемое $-b$ в правую часть равенства, изменив его знак на противоположный. Получим верное числовое равенство $3b = b + 2$, из которого следует, что $x = b$ *является* корнем уравнения (6). Мы доказали, что произвольный корень уравнения (7) является корнем уравнения (6).

Таким образом, уравнения (6) и (7) имеют одни и те же корни. ●

Уравнения, имеющие одни и те же корни, называют *равносильными*. Следовательно, уравнения (6) и (7) являются равносильными.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Решить уравнение $\frac{1}{7}(x-8) = \frac{1}{14}(3x-31)$.

● Умножив обе части уравнения на 14, получим:

$14 \cdot \frac{1}{7}(x-8) = 14 \cdot \frac{1}{14}(3x-31)$; $\quad 2(x-8) = 3x - 31$; $\quad 2x - 16 = 3x - 31$;

$2x - 3x = -31 + 16$; $\quad -x = -15$; $\quad x = 15$.

Ответ. 15. ●

Пример 2. Решить уравнение $25(z-3)+100z=125$.

• Разделив обе части уравнения на 25, получим:

$z-3+4z=5$; $5z=5+3$; $5z=8$; $z=1{,}6$.

Ответ. 1,6. •

Устно

23. Назовите свойство уравнений, на основании которого выполнен переход от первого уравнения ко второму:

а) $2x-5=1$; $2x=1+5$;

б) $3x+2=5x+4$; $3x-5x=4-2$;

в) $2(x-2)=x$; $2x-4=x$;

г) $\frac{1-4x}{3}=x$; $1-4x=3x$.

24. Обе части уравнения $x(x-1)=2x$ разделили на x и получили уравнение $x-1=2$. Имеют ли эти уравнения одни и те же корни? Можно ли, решая уравнение $x(x-1)=2x$, делить обе его части на x?

25. Объясните каждый шаг решения уравнения:

а)
$3(x-2)=5x+4$
$3x-6=5x+4$
$3x-5x=4+6$
$-2x=10$
$x=10:(-2)$
$x=-5$;

б)
$\frac{1+2x}{3}=4+x$
$3\cdot\frac{1+2x}{3}=3(4+x)$
$1+2x=12+3x$
$2x-3x=12-1$
$-x=11$
$x=-11$.

Уровень А

Решите уравнение:

26. **а)** $7x-4=3x-9$; **б)** $2x+3(x+1)=8$.

27. **а)** $8x+4=3x+4$; **б)** $4(x-3)=x$.

28. **а)** $30(x+2)=15(x-2)$; **б)** $200(x-1)=300$.

29. **а)** $161(2x+2)=161x$; **б)** $50(x+3)=250(x+1)$.

30. **а)** $\frac{2}{7}x=4$; **б)** $\frac{1}{60}(x+1)=\frac{1}{30}$; **в)** $\frac{1}{3}(x-2)=x$.

31. **а)** $\frac{1}{4}x=3$; **б)** $\frac{1}{15}(x-5)=1$; **в)** $x-1=\frac{1}{3}x$.

Уровень Б

Решите уравнение:

32. а) $200(x-5)=100(x+1)+500$; б) $350x+250(5x-4)-800=0$;

в) $\frac{1}{30}(2x-5)+\frac{7}{30}=\frac{17}{30}x$; г) $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)(x+1)=\frac{1}{12}$.

33. а) $210(x-12)+140(x+18)=70$; б) $\frac{2}{15}(1-x)-\frac{4}{15}(1+x)=\frac{7}{15}$.

34. а) $\frac{x-1}{12}=\frac{2x+1}{6}$; б) $\frac{1-3x}{21}=\frac{x+5}{14}$.

35. а) $\frac{3x+1}{24}=\frac{1-x}{8}$; б) $\frac{3+x}{15}=\frac{2x+3}{25}$.

Уровень В

36. Решите уравнение:

а) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)$;

б) $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{3}=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{4}$.

Упражнения для повторения

37. Найдите значение выражения:

а) $2(a+1)-4(a-2)$ при $a=-0{,}1$;

б) $1{,}4x-(1+0{,}7x)-(3{,}3x-2)$ при $x=2{,}25$;

в) $-2(a+b-2)-a+2b-4$ при $a=3$; $b=-1$.

38. В седьмых классах 84 учеников, что составляет $\frac{2}{21}$ всех учеников школы. Сколько всего учеников в школе?

39. В городе сейчас 52 000 жителей. Известно, что население этого города каждый год увеличивается на 4%.

а) Сколько жителей будет в городе через год?

б) Сколько жителей было в городе год назад?

3. Линейные уравнения с одной переменной

Рассмотрим уравнения:

$2x = -4$; $-1{,}7x = 5{,}1$; $\frac{2}{3} \cdot x = 0$; $0x = 2{,}4$.

Левая часть каждого из этих уравнений является произведением некоторого числа и переменной, а права часть — некоторым числом. Такие уравнения называют *линейными* уравнениями с одной переменной.

Определение **Уравнение вида $ax = b$, где a и b — некоторые известные числа, а x — переменная, называют линейным уравнением с одной переменной.**

Числа a и b называют *коэффициентами* линейного уравнения.

Когда при решении уравнения выполняют некоторые преобразования, приводя данное уравнение к более простому, то во многих случаях этим «простым» уравнением является именно линейное уравнение.

Выясним, сколько корней может иметь линейное уравнение. Для этого рассмотрим сначала три следующих уравнения:

1) $3x = 2$; 2) $0x = 2$; 3) $0x = 0$.

1) Чтобы решить уравнение $3x = 2$, достаточно обе его части разделить на 3. Получим один корень: $x = \frac{2}{3}$.

2) В уравнении $0x = 2$ значение левой части равно 0 для любого числа x. Правая же часть уравнения не равна нулю. Следовательно, данное уравнение корней не имеет.

3) Равенство $0x = 0$ является верным для любого числа x. Поэтому корнем уравнения $0x = 0$ является любое число (уравнение имеет бесконечно много корней).

В общем случае для линейного уравнения $ax = b$ получим:

если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{b}{a}$;

если $a = 0$, а $b \neq 0$, то уравнение корней не имеет;

если $a = 0$ и $b = 0$, то корнем уравнения является любое число (уравнение имеет бесконечно много корней).

Итог: количество корней линейного уравнения

	Коэффициенты	*Корни*
$ax = b$ — *линейное уравнение*	$a \neq 0$	$\frac{b}{a}$ — единственный корень
	$a = 0$ и $b \neq 0$	корней нет
	$a = 0$ и $b = 0$	корнем является любое число (уравнение имеет бесконечно много корней)

Для тех, кто хочет знать больше

Уравнения с модулями

Напомним, что модулем положительного числа и числа 0 является это же число, модулем отрицательного числа является противоположное ему число:

$$|a| = a, \text{ если } a \geq 0; \quad |a| = -a, \text{ если } a < 0.$$

Так, $|1{,}4| = 1{,}4$; $|0| = 0$; $|-2| = 2$. Модуль любого числа x является неотрицательным числом, то есть $|x| \geq 0$.

Уравнения $|x| = 3$, $|x - 5| = 1$, $|2x - 3| = 0$, $|x| + 3x = 1$ содержат *переменную под знаком модуля*. Такие уравнения называют *уравнениями с модулем*.

Уравнение вида $|x| = a$. Решая уравнение вида $|x| = a$, где a — некоторое известное число, можно использовать геометрический смысл модуля числа: модуль числа x — это расстояние от начала отсчета до точки, изображающей число x на координатной прямой.

Рассмотрим уравнение $|x| = 2$. На координатной прямой существуют две точки, расположенные на расстоянии 2 единицы от начала отсчета. Это точки, соответствующие числам 2 и –2 (рис. 1). Поэтому уравнение $|x| = 2$ имеет два корня: 2 и –2.

Рис. 1

Уравнение $|x| = 0$ имеет один корень — число 0, а уравнение $|x| = -2$ не имеет корней (модуль любого числа x является неотрицательным числом и не может быть равен –2).

В общем случае уравнение $|x| = a$:

имеет два корня a и $-a$, если $a > 0$;

имеет один корень 0, если $a = 0$;

не имеет корней, если $a < 0$.

Решение уравнений с модулями, исходя из определения модуля числа.

Решим уравнение

$$|x| + 3x = 4. \qquad (1)$$

Это уравнение нельзя привести к виду $|x| = a$, где a — некоторое число. Для его решения рассмотрим два случая.

1. Если x — неотрицательное число ($x \geq 0$), то $|x| = x$ и уравнение (1) принимает вид $x + 3x = 4$, откуда $x = 1$. Число 1 — неотрицательное (удовлетворяет неравенству $x \geq 0$), поэтому оно является корнем уравнения (1).

2. Если x — отрицательное число ($x < 0$), то $|x| = -x$ и уравнение (1) принимает вид $-x + 3x = 4$, откуда $x = 2$. Число 2 не является отрицательным (не удовлетворяет неравенству $x < 0$), поэтому оно не является корнем уравнения (1).

Таким образом, уравнение $|x| + 3x = 4$ имеет один корень $x = 1$.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Решить уравнение $5(2x - 1) = 4x - 23$.

● $10x - 5 = 4x - 23$; $10x - 4x = -23 + 5$; $6x = -18$; $x = -3$.

Ответ. –3. ●

Пример 2. Решить уравнение $3x - 4 = 3(x - 2)$.

● $3x - 4 = 3x - 6$; $3x - 3x = -6 + 4$; $0x = -2$ (или $0 = -2$).

Ответ. Уравнение корней не имеет. ●

Пример 3. Решить уравнение $3x - 2(x - 1) = x + 2$.

● $3x - 2x + 2 = x + 2$; $3x - 2x - x = 2 - 2$; $0x = 0$ (или $0 = 0$).

Ответ. Корнем уравнения является любое число. ●

Пример 4. Решить уравнение $\frac{2x-1}{18} = \frac{x}{12} + \frac{1}{9}$.

● Умножив обе части уравнения на 36 (36 — наименьшее общее кратное знаменателей дробей), получим:

$36 \cdot \frac{2x-1}{18} = 36 \cdot \left(\frac{x}{12} + \frac{1}{9}\right)$; $2(2x - 1) = 3x + 4$; $4x - 2 = 3x + 4$;

$4x - 3x = 4 + 2$; $x = 6$.

Ответ. 6. ●

Итог. При решении уравнения нужно придерживаться следующей схемы:

1. Если в уравнении есть выражения с дробными коэффициентами, то умножить обе его части на наименьший общий знаменатель дробей.

2. Раскрыть скобки.

3. Перенести все слагаемые, содержащие переменную, в одну часть уравнения (как правило, в левую), а слагаемые, не содержащие переменной, — в другую часть (в правую).

4. Привести подобные слагаемые.

5. Разделить обе части уравнения на коэффициент при переменной, если он не равен нулю. Если же он равен 0, то уравнение или не имеет корней, или его корнем является любое число.

Пример 5. Решить уравнение $|5x - 3(x + 2) + 3| = 3$.

● $|5x - 3x - 6 + 3| = 3$; $|2x - 3| = 3$.

Если модуль числа равен 3, то этим числом является 3 или –3. Поэтому возможны два случая:

1) $2x - 3 = 3$; $2x = 6$; $x = 3$; 2) $2x - 3 = -3$; $2x = 0$; $x = 0$.

Ответ. 3; 0. ●

Пример 6. Решить уравнение $2|z| - 3 = 5$.

● $2|z| - 3 = 5$; $2|z| = 8$; $|z| = 4$; $z = 4$ или $z = -4$.

Ответ. –4; 4. ●

Устно

40. Какие из данных уравнений являются линейными уравнениями?

а) $\frac{2}{9} \cdot x = 8$; **б)** $4 : x = 2$; **в)** $-2{,}7y = 0$; **г)** $\frac{4}{z} = \frac{2}{5}$.

Пример 2. Решить уравнение $3x - 4 = 3(x - 2)$.

● $3x - 4 = 3x - 6$; $3x - 3x = -6 + 4$; $0x = -2$ (или $0 = -2$).

Ответ. Уравнение корней не имеет. ●

Пример 3. Решить уравнение $3x - 2(x - 1) = x + 2$.

● $3x - 2x + 2 = x + 2$; $3x - 2x - x = 2 - 2$; $0x = 0$ (или $0 = 0$).

Ответ. Корнем уравнения является любое число. ●

Пример 4. Решить уравнение $\frac{2x-1}{18} = \frac{x}{12} + \frac{1}{9}$.

● Умножив обе части уравнения на 36 (36 — наименьшее общее кратное знаменателей дробей), получим:

$36 \cdot \frac{2x-1}{18} = 36 \cdot \left(\frac{x}{12} + \frac{1}{9}\right)$; $2(2x - 1) = 3x + 4$; $4x - 2 = 3x + 4$;

$4x - 3x = 4 + 2$; $x = 6$.

Ответ. 6. ●

Итог. При решении уравнения нужно придерживаться следующей схемы:

1. Если в уравнении есть выражения с дробными коэффициентами, то умножить обе его части на наименьший общий знаменатель дробей.

2. Раскрыть скобки.

3. Перенести все слагаемые, содержащие переменную, в одну часть уравнения (как правило, в левую), а слагаемые, не содержащие переменной, — в другую часть (в правую).

4. Привести подобные слагаемые.

5. Разделить обе части уравнения на коэффициент при переменной, если он не равен нулю. Если же он равен 0, то уравнение или не имеет корней, или его корнем является любое число.

Пример 5. Решить уравнение $|5x - 3(x + 2) + 3| = 3$.

● $|5x - 3x - 6 + 3| = 3$; $|2x - 3| = 3$.

Если модуль числа равен 3, то этим числом является 3 или –3. Поэтому возможны два случая:

1) $2x - 3 = 3$; $2x = 6$; $x = 3$; 2) $2x - 3 = -3$; $2x = 0$; $x = 0$.

Ответ. 3; 0. ●

Пример 6. Решить уравнение $2|z| - 3 = 5$.

● $2|z| - 3 = 5$; $2|z| = 8$; $|z| = 4$; $z = 4$ или $z = -4$.

Ответ. –4; 4. ●

Устно

40. Какие из данных уравнений являются линейными уравнениями?

а) $\frac{2}{9} \cdot x = 8$; **б)** $4 : x = 2$; **в)** $-2{,}7y = 0$; **г)** $\frac{4}{z} = \frac{2}{5}$.

41. Сколько корней имеет уравнение:

а) $56x = 64$; б) $0x = -2$; в) $8x = 0$; г) $0y = 0$?

42. Решите линейное уравнение:

а) $6x = 42$; б) $4x = -12$; в) $-3y = 6$; г) $-5z = -45$;
д) $3x = -2$; е) $0y = -4$; ж) $0x = 0$; з) $-2x = 0$.

Уровень А

Решите уравнение:

43. а) $36x = -54$; б) $0{,}04z = 1{,}4$; в) $2y = -\frac{2}{3}$;
г) $-1{,}2x = -0{,}09$; д) $-3{,}86t = 7{,}913$; е) $\frac{4}{15}x = -\frac{2}{5}$;
ж) $2\frac{1}{4}s = 1\frac{7}{8}$; з) $-2{,}5x = -\frac{1}{6}$; и) $3\frac{5}{9}y = 0{,}6$.

44. а) $5x - 3 = 17$; б) $7x + 32 = 12x + 25$; в) $4 - 3y = 6y + 22$;
г) $4{,}5z + 1 = 7z + 2{,}5$; д) $-1{,}2m - 2 = m - 0{,}9$; е) $-1{,}74x + 7{,}92 = -1{,}08x$;
ж) $4y + 1 = -1 + 4y$; з) $0{,}77x = 1{,}65 + 1{,}1x$; и) $-16{,}8x - 3 = 6x + 2{,}7$.

45. а) $56x = -196$; б) $8x = -8 + 12x$; в) $1{,}15 - 3z = 2{,}5$;
г) $2y - 18 = -3y + 67$; д) $6x + 2 = 20x - 5$; е) $4{,}5x + 1 = 2 + 4{,}5x$;
ж) $8 - 1{,}2z = -6z + 152$; з) $4{,}02t - 1 = 1{,}52t$; и) $1{,}7x + 2{,}04 = -6{,}8x$.

46. а) $6(x - 2) = 2x$; б) $3(2x + 1) = 7x$; в) $1 - (3x + 1) = 2x$;
г) $-2(2x - 4) = -3$; д) $2(x + 5) = 2(x - 4)$; е) $-3(10 - 2x) = 6x - 30$.

47. а) $8x - 7 = 3(x - 4)$; б) $-(3x + 1) = 3(3 - x)$; в) $6x - 2 = -2(1 - 3x)$.

Уровень Б

Решите уравнение:

48. а) $2(x - 11) - 5(5 - 2x) = -23$; б) $8(-3x + 4) + 14(3 + 2x) = 4 + 2x$;
в) $-5(4x + 3) + 3x = -12(x - 3)$; г) $0{,}5x = 0{,}1(2x - 5) + 1{,}7$.

49. а) $3{,}5(x - 3) - 0{,}7(7 - x) = -7$; б) $0{,}4(2x - 7) + 1{,}2(3x + 0{,}7) = 1{,}6x$;
в) $5(4(x + 1) - 9x) = 25(x + 1)$; г) $0{,}8(2{,}2(x - 1) - 1) - 1{,}4x = -0{,}4$.

50. а) $5(3x - 6) + 4(3 - 2x) = 5x - 8$; б) $9(x - 3) - 4(7 - 3x) - 5 = -3x$;
в) $-0{,}3(8 - 4x) = 0{,}6(x - 3) + 0{,}9$; г) $2(-0{,}9x + 1{,}4) + 1{,}4(1{,}5 + x) = x$;
д) $40(5x - 8(x - 1)) = 160(x + 9)$; е) $12 + 3(2(x - 1) - 4) = 6(x + 1)$.

51. Найдите значения x, при которых значения выражений $2x - 3$ и $-3 + 7x$ равны.

52. Найдите значения x, при которых значение выражения $25x - 30$ на 5 меньше значения выражения $15x + 15$.

53. Найдите значения x, при которых значение выражения $4x + 6$ в 6 раз больше значения выражения $6x - 15$.

Решите уравнение:

54. а) $\frac{5}{12} + \frac{x}{6} = \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$; б) $\frac{x-1}{5} + \frac{x-2}{3} = 2 - \frac{x-2}{15}$;

в) $-\frac{2x+1}{6} + \frac{2-11x}{9} = \frac{2}{3} - \frac{x-3}{2}$; г) $\frac{2x-1}{8} + \frac{3x-2}{4} - \frac{2x-3}{2} = \frac{7}{8}$.

55. а) $2\frac{5}{6} - \frac{3}{8}x = \frac{1}{4}x + 3\frac{1}{3}$; б) $2\left(3\frac{3}{4} - 2x\right) + 2,5 = 1\frac{2}{9} - \left(-x + \frac{2}{3}\right)$;

в) $5y - 4\frac{2}{7}\left(2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{6}\right) = 3\frac{1}{3}$; г) $2\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3} - 3x\right) + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{3} - 3x\right) = 1$.

56. а) $\frac{x+1}{6} + \frac{2-x}{8} = \frac{1}{4} + \frac{x-3}{12}$; б) $\frac{x}{2} - \frac{x+3}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x}{6}$;

в) $\frac{2}{5}\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{5}x + 4\frac{1}{3}$; г) $2\frac{2}{5}\left(\frac{5}{6} - 2x\right) - \left(5\frac{1}{6} - \frac{4}{5}x\right) = 1\frac{5}{6}$.

57. а) $|x| = 5$; б) $|x| = -6$; в) $|x| = 0$;
г) $|2x - 7| = 11$; д) $|15 - 4x| = 5$; е) $|7x - 2| = 0$.

58. а) $|x| + 3 = 7$; б) $3|x| = 6$; в) $|x| + 8 = 3$.

59. а) $|3x| = 12$; б) $|x - 3| = 8$; в) $|x + 2| = -2$;
г) $|x - 7| = 0$; д) $2|x| - 1 = 5$; е) $5 - |x| = -11$.

Уровень В

Решите уравнение:

60. а) $200(2(2(x - 1) - 1) - 1) = -600$; б) $\frac{4}{5}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - x\right) - x\right) - x\right) - x = 1$.

61. а) $|2(x - 3) - (x + 4)| = 2$; б) $|5x - 4(2x + 3)| = 6$;
в) $2(|x| - 3) - 4(2|x| + 9) = -48$; г) $|2x - 1| - 4(1 - |2x - 1|) = 6$.

62. а) $3x + |x| = 20$; б) $5|x| + x = 12$; в) $|x| + x = 8$;
г) $x - |x| = 12$; д) $x + |x| = 0$; е) $x - |x| = 0$.

63. а) $|x| + x^2 = 0$; б) $x^2 + |x| = -7$; в) $|x| + |2x| + 4 = 0$.

64. В уравнении $ax = 4389$ коэффициент a является трехзначным числом вида $**1$. Решите это уравнение, если известно, что его корнем является натуральное число.

Упражнения для повторения

65. Вычислите:

а) $\left(3\frac{3}{8}-2\frac{5}{12}\right)\cdot 1\frac{2}{5}$; б) $1,2\cdot(-0,94)+1,2\cdot(-1,56)+2:\frac{5}{6}$.

66. Из городов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 1,5 год. Скорость одного автомобиля a км/ч, а другого — b км/ч. Запишите в виде выражения расстояние между городами.

67. Легковой автомобиль догоняет грузовой. Скорость легкового автомобиля a км/ч, а грузового — b км/ч. Запишите в виде выражения расстояние между автомобилями за 0,2 ч до встречи.

68. Скорость катера в стоячей воде (собственная скорость катера) a км/ч, а скорость течения реки b км/ч. Запишите в виде выражения расстояние, которое пройдет катер, плывя 2 ч по течению реки и 3 ч против течения.

69. Из корзины взяли 3 яблока, потом — треть остальных яблок и еще 3 яблока. После этого в корзине осталась половина первоначального количества яблок. Сколько яблок было в корзине сначала?

4. Решение задач с помощью уравнений

При решении задач с помощью уравнений в большинстве случаев придерживаются следующей схемы:

1) выбирают неизвестное и обозначают его буквой x (или какой-нибудь другой буквой);

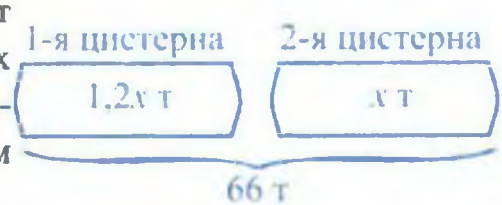
2) используя условие задачи, составляют уравнение;

3) решают уравнение и отвечают на вопросы, поставленные в задаче.

Рассмотрим примеры.

Задача 1. В двух цистернах находится 66 т бензина, причем в первой бензина в 1,2 раза больше, чем во второй. Сколько бензина в каждой цистерне?

• Пусть во второй цистерне x т бензина, тогда в первой — $1,2x$ т. В двух цистернах вместе находится $(1,2x+x)$ т бензина, что по условию равно 66 т. Получаем уравнение:



$$1,2x+x=66.$$

Решим это уравнение: $2,2x=66$; $x=66:2,2$; $x=30$.

Таким образом, во второй цистерне 30 т бензина, а в первой — $1,2\cdot 30=36$ (т).

Ответ. 36 т, 30 т. •

Примечание. Чтобы решить задачу 1, можно рассуждать и так. Пусть во второй цистерне x т бензина, тогда в первой — $(66 - x)$ т. В первой цистерне бензина в 1,2 раза больше, чем во второй, поэтому $66 - x = 1{,}2x$. Остается решить это уравнение и записать ответ задачи.

Задача 2. Из города A в город B выехал грузовой автомобиль. Через 30 мин навстречу ему из города B выехал легковой автомобиль, скорость которого на 25 км/ч больше скорости грузового. Автомобили встретились через 1,3 ч после выезда грузового автомобиля из города A. Найти расстояние между городами, если за все время движения грузовой автомобиль проехал на 10 км больше, чем легковой.

● Пусть скорость грузового автомобиля x км/ч, тогда скорость легкового — $(x + 25)$ км/ч.

До момента встречи грузовой автомобиль был в пути 1,3 ч, а легковой на 30 мин = 0,5 ч меньше: 1,3 ч – 0,5 ч = 0,8 ч. За 1,3 ч грузовой автомобиль проехал $1{,}3x$ км, а легковой за 0,8 ч — $0{,}8(x + 25)$ км. Поскольку грузовой автомобиль проехал на 10 км больше, чем легковой, то разность расстояний $1{,}3x$ км и $0{,}8(x + 25)$ км равна 10 км.

	Скорость, км/ч	Время, ч	Путь, км
Грузовой автомобиль	x	1,3	$1{,}3x$
Легковой автомобиль	$x + 25$	0,8	$0{,}8(x + 25)$

Получили уравнение: $1{,}3x - 0{,}8(x + 25) = 10$.

Решим это уравнение:

$$1{,}3x - 0{,}8x - 20 = 10; \quad 0{,}5x = 30; \quad x = 60.$$

Итак, скорость грузового автомобиля равна 60 км/ч.

Расстояние между городами равно сумме расстояний, которые проехали оба автомобиля, то есть $(1{,}3x + 0{,}8(x + 25))$ км. Поскольку $x = 60$, то получим:

$1{,}3x + 0{,}8(x + 25) = 1{,}3 \cdot 60 + 0{,}8 \cdot (60 + 25) = 78 + 68 = 146$ (км).

Ответ. 146 км. ●

Примечание. Опираясь на решение задач 1 и 2, проанализируем первые два шага приведенной выше схемы решения задач с помощью уравнений.

1) *Выбор неизвестного*, которое мы обозначали буквой, в решениях этих задач был разным. В задаче 1 мы обозначили через x т одну из искомых величин (массу бензина во второй цистерне). В задаче 2 искомой величиной является расстояние между городами. Если эту величину обозначить через x км, то при составлении уравнения рассуждения будут довольно сложными. Мы же через x км/ч обозначили неизвестную скорость грузового автомобиля, выразили через x расстояния, пройденные автомобилями, и составили уравнение, зная, что разность расстояний равна 10 км.

Таким образом, обозначать через x (или какую-нибудь другую букву) желательно ту неизвестную величину, через которую легче выражаются величины, значения которых можно приравнять.

2) Чтобы *составить уравнение*, сначала выражаем через x те величины, значения которых будем приравнивать. После этого записываем уравнение.

Математическая модель. Вам, наверное, уже приходилось видеть модели корабля, самолета, автомобиля, изготавливать модели куба, прямоугольного параллелепипеда. Каждая модель, в зависимости от ее предназначения, отображает некоторые свойства оригинала.

Математическая модель — это описание некоторого реального объекта или процесса на языке математики.

Опишем на языке математики задачу 2. Определяя скорость грузового автомобиля в этой задаче, мы обозначили ее через x км/ч. Скорость легкового автомобиля на 25 км/ч больше, чем скорость грузового, что на языке математики записывают так: скорость легкового автомобиля равна $(x + 25)$ км/ч.

На языке математики расстояние, пройденное грузовым автомобилем, записывают: $1{,}3x$ км, а расстояние, пройденное легковым автомобилем, — $0{,}8(x + 25)$ км.

По условию задачи грузовой автомобиль проехал на 10 км больше, чем легковой, что на языке математики можно выразить так: разность расстояний, пройденных грузовым и легковым автомобилями, равна 10 км, и записать: $1{,}3x - 0{,}8(x + 25) = 10$.

Полученное уравнение и является математической моделью задачи на движение автомобилей. Построив математическую модель, мы свели задачу на движение к математической задаче — решить уравнение.

Кроме уравнений, есть и другие виды математических моделей, с которыми ми познакомимся в процессе изучения алгебры.

Интересно знать. История науки знает немало примеров, когда в рамках удачно построенной математической модели с помощью вычислений, как говорят, «на кончике пера», удавалось предвидеть существование новых физических объектов и явлений. Так, опираясь на математические модели, астрономы Дж. Адамс (Англия) в 1845 году и У. Леверье (Франция) в 1846 году независимо друг от друга пришли к выводу о существовании неизвестной тогда еще планеты и указали ее расположение на небе. По расчетам Леверье астроном Г. Галле (Германия) нашел эту планету. Ее назвали Нептуном.

Уровень А

70. В двух мешках 68 кг картофеля, причем в первом мешке на 12 кг картофеля больше, чем во втором. Сколько картофеля в каждом мешке?

71. В двух компьютерных классах вместе 33 компьютера, причем в одном классе их в 1,2 раза больше, чем в другом. Сколько компьютеров в каждом классе?

72. Агрофирма отвела под сахарную свеклу земли в 3,5 раза больше, или на 560 га больше, чем под картофель. Сколько земли отвела агрофирма под сахарную свеклу и сколько — под картофель?

73. Отец в три раза старше сына. Известно также, что он на 24 года старше сына. Сколько лет отцу и сколько сыну?

74. Двое рабочих изготовили 36 деталей, причем количество деталей, изготовленных первым рабочим, составляет 0,8 количества деталей, изготовленных вторым. Сколько деталей изготовил каждый рабочий?

75. Оператор набрал на компьютере половину рукописи за 15 ч. Вторую половину рукописи он набрал на 2,5 ч быстрее, поскольку набирал за час на 2 страницы больше. Сколько страниц в рукописи?

76. Первый автомобиль проехал путь между двумя городами за 1,5 ч, а второй — за 1,2 ч. Скорость второго автомобиля больше, чем скорость первого, на 15 км/ч. Найдите расстояние между городами.

77. Периметр треугольника равен 25 см. Найдите длину каждой стороны треугольника, если:

а) первая сторона в 1,5 раза длиннее второй, а вторая — на 4 см короче третьей;

б) длина первой стороны на 5 см больше длины второй, а длина третьей — на 7 см короче суммы длин первых двух.

78. Олег, Сергей и Виталий купили мяч, цена которого 12 грн., причем Олег истратил денег на 2 грн. меньше, а Сергей — в 1,5 раза больше, чем Виталий. Сколько денег истратил на покупку мяча каждый мальчик?

79. Магазин продал за 3 дня 460 кг овощей. За второй день было продано овощей на 20 кг больше, чем за первый, а за третий — в 1,2 раза больше, чем за второй. Сколько овощей продал магазин за каждый день в отдельности?

80. В трех мешках 135 кг сахара, причем в первом на 15 кг больше, чем в третьем, а в третьем в 1,2 раза меньше, чем во втором. Сколько сахара в каждом мешке?

Уровень Б

81. В первой корзине было на 12 яблок больше, чем во второй. После того как мама взяла из первой корзины 18 яблок, а из второй — 14, в первой корзине яблок стало в 1,2 раза больше, чем во второй. Сколько яблок было в каждой корзине сначала?

82. Первый велосипедист проехал путь между двумя селами за 36 мин, а второй — за 45 мин. Скорость первого велосипедиста была больше скорости второго на 4 км/ч. Найдите скорость каждого велосипедиста и расстояние между селами.

83. Два автомобиля одновременно выехали из Черновцов и одновременно прибыли в Житомир. Первый автомобиль ехал с постоянной скоростью. Второй же автомобиль первые 2 ч ехал со скоростью, на 12 км/ч меньшей, а остальные 3 ч — со скоростью, в 1,1 раза большей скорости первого автомобиля. Найдите расстояние между городами.

84. Из города A в город B одновременно выехали автомобиль и мотоциклист. Когда через 2,5 ч автомобиль прибыл в город B, мотоциклисту до этого города оставалось ехать еще 75 км. Найдите расстояние между городами, если скорость автомобиля в 1,6 раза больше скорости мотоциклиста.

85. Лодка прошла путь между двумя пристанями по течению реки за 1,2 ч, а на обратный путь затратила 1,5 ч. Найдите расстояние между пристанями, если скорость лодки в стоячей воде 22,5 км/ч.

86. От пристани A к пристани B по течению реки катер шел 3 ч, а от B к A — 4 ч. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки 3 км/ч.

87. Автомобиль должен пройти путь длиной 140 км за 2 ч. Некоторую часть пути он прошел со скоростью 60 км/ч, а оставшуюся часть — со скоростью 75 км/ч. Сколько километров прошел автомобиль со скоростью 60 км/ч, если известно, что к месту назначения он прибыл вовремя?

88. Из Львова в Киев, расстояние между которыми 520 км, вышел поезд, а через час навстречу ему из Киева вышел второй поезд, который проходит за час на 4 км больше, чем первый. Поезда встретились через 4 ч после отправления второго поезда из Киева. Найдите скорость каждого поезда.

Указание. При решении задачи используйте схему:

89. Дедушка старше своего внука в 4 раза. Если бы дедушка был на 1 год младше, то был бы старше своей внучки в 5 раз. Сколько лет дедушке, внуку и внучке, если внучка на 3 года младше внука?

90. На двух полках стояло 95 книг. После того как четвертую часть книг, стоящих на первой полке, переставили на вторую, на второй полке книг стало на 5 больше, чем на первой. Сколько книг стояло на каждой полке сначала?

91. В школе три седьмых класса. Количество учеников 7-А класса составляет 35% количества всех семиклассников, а в 7-Б классе на 2 ученика меньше, чем в 7-А. Сколько семиклассников в школе, если в 7-В классе — 26 учеников?

92. За смену 3 рабочих изготовили партию деталей. Первый рабочий изготовил 30% всех деталей, второй — на 5 деталей меньше, чем третий, и на 2 детали больше, чем первый. Сколько всего деталей изготовили рабочие?

93. Утром вкладчик снял со счета в банке $\frac{2}{7}$ всех денег, а после обеда — 30% остатка. После этого на его счету осталось 175 грн. Каков был первоначальный вклад?

Уровень В

94. Возле дома стоят две бочки объемом по 100 л. В одной бочке 20 л дождевой воды, а в другой — 15 л. Пошел дождь, и каждую минуту в первую бочку вливается 2 л воды, а во вторую — 2,5 л. Через сколько минут воды в бочках станет поровну? Найдите два варианта ответа.

95. Пифагор на вопрос о количестве учеников, посещающих его школу, ответил согласно легенде так: «Половина учеников изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть молчит, и, кроме того, есть еще три женщины». Сколько учеников было у Пифагора?

96. Зеленая масса для силоса должна иметь определенную влажность. Чтобы получить такую массу, смешивают в определенной пропорции растения с разным содержанием воды. Сколько нужно взять зеленой массы влажностью 85% и массы влажностью 35%, чтобы получить 1 т массы влажностью 75%?

97. В двух бидонах находится 70 л молока. Если 12,5% молока, находящегося в первом бидоне, перелить во второй, то в обоих бидонах молока станет поровну. Сколько литров молока было в каждом бидоне сначала?

98. Сплав меди, цинка и олова содержит 32% олова, а меди — на 40 г меньше, чем олова. Известно также, что цинка в сплаве на 100 г больше, чем меди. Найдите массу сплава.

99. В процессе очистки руды количество примесей в ней уменьшается от 20% в добытой руде до 5% в очищенной. Сколько нужно взять добытой руды, чтобы получить 32 т очищенной?

Упражнения для повторения

100. Запишите:

а) сумму числа m и числа, противоположного числу n;

б) разность числа s и числа, противоположного числу $-t$;

в) произведение наибольшего отрицательного целого числа и суммы чисел a и b.

101. К частному чисел $-1{,}8$ и $-1{,}3$ прибавьте произведение чисел 4,8 и $-1{,}05$.

102. Найдите значение выражения $2x^2 - 4y^2$, если x равно наименьшему целому числу, удовлетворяющему неравенству $-5{,}4 < x < -2{,}7$, а y — наибольшему целому числу, удовлетворяющему неравенству $-15{,}4 \le y \le -2$.

103. Поставьте вместо звездочек такие цифры, чтобы число:

а) 1*48 делилось на 9; **б)** 3*4* делилось на 3 и на 5.

104. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

а) $x - (x - 1) + (x + 1)$; **б)** $2(1{,}5a - 2(a - 1{,}5))$;

в) $2(a + 2b + 3c) - (a + 3b + 5c) - (a + b + c)$.

105. У Лены есть фломастеры шести цветов. Сколькими способами она может написать число 2002 так, чтобы разные цифры были разного цвета, а одинаковые цифры — одинакового цвета?

Интересно знать

На протяжении многих столетий алгебра была наукой об уравнениях и способах их решения. Линейные уравнения умели решать еще древние египтяне и вавилоняне (I тысячелетие до н. э.).

О состоянии математики в Древнем Египте свидетельствуют математические тексты, написанные на особой бумаге — папирусе, изготовленном из стеблей растения, которое имеет такое же название. Написание некоторых

папирусов относят к XVIII в. до н. э., хотя описанные в них математические факты были известны древним египтянам задолго до их изложения.

Один из таких папирусов был найден в 1872 году в одной из египетских пирамид. Его приобрел английский коллекционер древностей Райнд, и сейчас этот папирус — папирус Райнда — хранится в Лондоне.

В папирусе Райнда особое место занимают задачи на «аха» («хау»). Это задачи, которые решаются с помощью линейных уравнений с одним неизвестным. «Аха» («хау») означает «совокупность», «куча» (неизвестная величина). Пример такой задачи: «Куча. Ее $\frac{2}{3}$, ее $\frac{1}{2}$, ее $\frac{1}{7}$ и ее целое. Это 33». Если обозначить «кучу» — неизвестную величину — через x, то получим уравнение: $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x+x=33$.

Более заметные успехи в создании начал алгебры были достигнуты в Древнем Вавилоне. До нашего времени сохранились вавилонские глиняные плитки с комбинациями клиновидных черточек — клинописью. Такие плитки имели в Вавилоне то же значение, что и папирусы в Египте. На плитках встречаются и клинописные математические тексты, которые свидетельствуют, что уже более 4000 лет тому назад в Вавилоне могли решать уравнения, содержащие квадрат неизвестного.

Диофант (III в.), древненгреческий математик из Александрии

Начиная с VII в. до н. э., древние греки после знакомства с достижениями египтян и вавилонян в сфере математики продолжили их науку. При этом достаточно мало греческих ученых при решении задач использовали уравнения. Одним из тех, кто использовал уравнения, был древнегреческий математик **Диофант**.

О Диофанте известно мало, даже точно не установлены годы его жизни. Кое-что о жизни Диофанта и о том, сколько он прожил лет, можно узнать из надписи на его могильной плите.

При дворе аль-Мамуна жил и работал ученый **Мухаммед бен Муса аль-Хорезми** (около 780 — около 850). Он собрал и систематизировал способы решения уравнений и описал их в работе «Китаб аль-джебр аль-мукабала», что дословно означает «Книга о восстановлении и противопоставлении». В то время отрицательные числа считались «ненастоящими», и, когда в процессе решения уравнения в какой-то его части появлялось отрицательное число, его нужно было перенести в другую часть. Эту операцию называли восстановлением (аль-джебр), то есть переведением «ненастоящих» (отрицательных) чисел в «настоящие» (положительные). С помощью противопоставления (аль-мукабала) отбрасывали одинаковые слагаемые в обеих частях уравнения.

Мухаммед бен Муса аль-Хорезмі (IX в.), арабский математик, астроном и географ. Впервые рассматривал алгебру как самостоятельный раздел математики

В XII в. сочинение аль-Хорезми перевели на латинский язык, сохранив в его названии только слово «аль-джебр», которое вскоре стали произносить как *алгебра*.

Постепенно сформировалась современная алгебра, которая охватывает не только теорию решения уравнений, а и способы проведения операций (действий) с разнообразными объектами (в частности, с числами).

Вопросы и упражнения для повторения § 1

1. Приведите примеры уравнений.
2. Что называют корнем уравнения? Является ли число 4 корнем уравнения $3x - 2 = x + 6$?
3. Что значит решить уравнение?
4. Сформулируйте свойства уравнений.
5. Дайте определение линейного уравнения. Приведите пример линейного уравнения.
6. Сколько корней может иметь линейное уравнение?

106. Докажите, что число 2,5 является корнем уравнения:

а) $3x - 5 = x$; б) $x(x - 0{,}5) = 4x - 5$.

107. Какое из чисел –2; –1,2; 1,8 является корнем уравнения $5x - 3 = 10x + 3$?

Надпись на плите	Языком алгебры
Путник! Здесь погребен Диофант. И числа поведать могут, о чудо, сколь долог был век его жизни.	x
Часть шестую его представляло прекрасное детство.	$\frac{x}{6}$
Двенадцатая часть протекла его жизни — покрылся пухом тогда подбородок.	$\frac{x}{12}$
Седьмую в бездетном браке провел Диофант.	$\frac{x}{7}$
Прошло пятилетие; он был осчастливлен рождением прекрасного первенца-сына,	5
коему рок дал половину лишь жизни прекрасной и светлой на земле по сравнению с отцом.	$\frac{x}{2}$
И в печали глубокой старец земного удела конец воспринял, переживши года четыре с тех пор, как сына лишился.	4
Скажи, сколько лет жизни достигнув, смерть воспринял Диофант?	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4.$

Греческую науку в Средневековье заимствовали ученые Востока — индийцы и арабы. Именно на Востоке в IX в. алгебра становится самостоятельной математической наукой.

Происхождение слова «алгебра» также связано с Востоком.

Город Багдад в VII–IX в. был столицей могущественного Арабского халифата. Багдадские халифы оказывали содействие развитию природоведения и математических наук. За годы правления халифа Гаруна аль-Рашида в Багдаде была оборудована большая библиотека, а халиф аль-Мамун организовал своеобразную академию — «Дом мудрости» и построил хорошо оборудованную обсерваторию.

108. Сколько корней имеет уравнение:

а) $\frac{3}{7}x = 12$; б) $\left(\frac{3}{5} - 0,6\right)x = 1$; в) $0(x + 3) = 0$?

Решите уравнение:

109. а) $2x - 3 = 5(x - 3)$; б) $12(x - 1) = 24(x + 1)$;

в) $0,6(2x - 3) - 1,5(x + 4) = -4,2x$; г) $2(3 - 2(x + 1)) = 6(2 - x)$;

д) $-6(2x + 5) + 2(x + 3) = 2$; е) $24(x - 3) + 18(x - 2) = 30(3x - 10)$.

110. а) $\frac{5}{36} + \frac{1}{18}x = \frac{7}{36}x - \frac{5}{9}$; б) $\frac{3-x}{12} - \frac{5+x}{6} = \frac{x}{3}$.

111*. а) $2|x| + 0,2 = \frac{1}{7}$; б) $3 - 2(1 - 2|x|) = 11 - |x|$.

112*. а) $|x - 2| = 2$; б) $3|2x + 1| - 7 = 2$.

113*. а) $5x - 2|x| = 21$; б) $2(|x| - 5) = 3x - 7$.

114*. Найдите такое число a, чтобы корнем уравнения $2x + 3(a - 1) = 5$ было число 4.

115*. Существует ли число k, для которого уравнение $(k - 2)x + 2 = k$ не имеет корней?

116. Периметр прямоугольника 48 см, его длина в три раза больше, чем ширина. Найдите площадь прямоугольника.

117. Периметр треугольника 30 см. Найдите длину каждой стороны треугольника, если первая его сторона на 4 см короче второй, а вторая — в 1,2 раза длиннее третьей.

118. Трактор вспахал поле за 3 дня. За первый день было вспахано 35% площади поля, за второй — на 4 га меньше, чем за первый, а за третий день — 25 га. Найдите площадь поля.

119. Теплоход прошел путь длиной 90 км. Некоторую часть этого пути теплоход шел со скоростью 30 км/ч, а оставшуюся часть — со скоростью 25 км/ч. Какой путь прошел теплоход со скоростью 30 км/ч, если на весь путь он затратил 3,5 ч?

120*. Туристу от села до станции нужно пройти путь длиной 10 км. Когда он вышел из села, до отправления поезда, на который он спешил, оставалось 3 ч. Проходя 3 км в час, турист понял, что опаздывает на поезд, и пошел со скоростью 4 км/ч. На станцию он пришел за 12 мин до отхода поезда. Сколько времени турист шел со скоростью 3 км/ч?

121*. Первый сплав меди и олова содержит 40% меди, а второй — 60%. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 10 кг нового сплава, который содержал бы 54% меди?

122*. За первую поездку автомобиль израсходовал 25% бензина, который был в баке, за вторую — на 40% меньше, чем за первую. После этого в баке осталось бензина на 8 л больше, чем было израсходовано за обе поездки. Сколько литров бензина было в баке сначала?

Задания для самопроверки № 1

Уровень 1

1. Какое из чисел является корнем уравнения $4x + 2 = 10$?

а) 1; **б)** –2; **в)** 2; **г)** 3.

2. Сколько корней имеет уравнение $(x - 2)(x + 2) = 0$?

а) Один; **б)** два;
в) бесконечно много; **г)** корней нет.

3. Какие из данных уравнений являются линейными уравнениями?

а) $\frac{1}{3}x = 2$; **б)** $y^2 = 4$; **в)** $2 : x = 3$; **г)** $-2y = 0$.

4. Решите уравнение $7y - 3 = 3y + 5$ и укажите правильный ответ:

а) –2; **б)** 2; **в)** 0,8; **г)** 0,5.

5. Книга и альбом стоят 6 грн., причем книга в 4 раза дороже альбома. Какое уравнение нужно составить, чтобы найти цену альбома (x — цена альбома в грн.)?

а) $x + 6x = 4$; **б)** $6x - x = 4$; **в)** $x + 4x = 6$; **г)** $4x - x = 6$.

Уровень 2

6. Составьте линейное уравнение, корнем которого является число 3.

7. Установите соответствие между уравнением и количеством корней уравнения:

а) $7x = 1$; **1)** один корень;
б) $0 \cdot x = -2$; **2)** бесконечно много корней;
в) $2x = 0$; **3)** корней нет.
г) $0 \cdot x = 0$;

8. Решите уравнение:

а) $2(x-3)=5x-9$; б) $4-5(1-2x)=1-6x$.

9. Скорость велосипедиста на 10 км/ч больше скорости пешехода. Известно, что за 2 ч велосипедист преодолевает такое же расстояние, какое пешеход за 6 ч. Найдите скорость пешехода.

Уровень 3

10. Имеют ли уравнения $(x-1)(x+2)=0$ и $x+2=0$ одни и те же корни?

11. Решите уравнение:

а) $160x+560=-160(3x-1)$; б) $\frac{2x-1}{15}=\frac{x+6}{40}-\frac{1-x}{10}$.

12. В двух рулонах 81 м ткани, причем в первом — на 70% больше, чем во втором. Сколько метров ткани в каждом рулоне?

13. В первом резервуаре 420 м^3 воды, а во втором — 750 м^3. Из обоих резервуаров начали одновременно выпускать воду. Из первого резервуара каждый час вытекает 28 м^3 воды, а из второго — 38 м^3. Через какое время в первом резервуаре станет в два раза меньше воды, чем во втором?

Уровень 4

14. Докажите, что уравнения $(x-4)(x+2)=0$ и $|x-1|=3$ имеют одни и те же корни.

15. Решите уравнение:

а) $3\frac{1}{3}-2\left(\frac{1}{9}-\left(\frac{1}{3}-x\right)\right)=\frac{5}{6}x$; б) $2(|x|-3)=4|x|-10$.

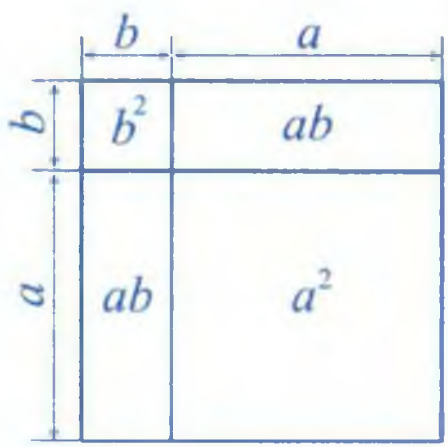
16. Экскаватор должен вырыть траншею определенной длины. За первый день он вырыл 30% длины всей траншеи, за второй — на 10% больше, чем за первый, а за третий — оставшиеся 111 м. Найдите длину траншеи.

17. Сплав меди и олова имеет массу 12 кг и содержит 45% меди. Сколько килограммов олова нужно добавить к этому сплаву, чтобы получить новый сплав, который содержал бы 40% меди?

Раздел II. ЦЕЛЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Решение многих задач по математике, физике, химии связано с необходимостью проводить определенные преобразования выражений.

В данном разделе мы выясним, что такое выражение, целое выражение, что такое тождественное преобразование выражения, изучим основные формулы, на основании которых можно выполнять преобразования выражений.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

§ 2. ЦЕЛЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

5. Выражения с переменными. Целые выражения

1. Выражения с переменными. Рассмотрим несколько задач.

Задача 1. Длина прямоугольного участка 42 м, а ширина на b м меньше. Записать площадь участка в виде выражения.

• Ширина участка $(42 - b)$ м, а площадь — $42(42 - b)$ м^2.

Ответ. $42(42 - b)$ м^2. •

Выражение $42(42 - b)$ содержит букву b. Такое выражение мы называли *буквенным выражением*.

Буква b может принимать разные значения: b может равняться, например, 0,8; 5; 7,2; 10 и т. п., то есть значение b можно *изменять*. Поэтому b называют *переменной*, а выражение $42(42 - b)$ — *выражением с переменной*.

Задача 2. Длина прямоугольного участка a м, а ширина на b м меньше. Записать площадь участка в виде выражения.

• Ширина участка $(a - b)$ м, а площадь — $a(a - b)$ м^2.

Ответ. $a(a - b)$ м^2. •

Буквы a и b также могут принимать разные значения, поэтому a и b — переменные, а выражение $a(a - b)$ — выражение с двумя переменными.

Выражение с переменными составляют из переменных, чисел, знаков действий и скобок. Выражением с переменной считают и отдельную переменную.

Если в выражении $42(42 - b)$ вместо переменной подставить определенное число, например, число 12, то получим числовое выражение $42 \cdot (42 - 12)$, значение которого равно: $42 \cdot (42 - 12) = 42 \cdot 30 = 1260$. Полученное число 1260 называют *значением выражения* $42(42 - b)$ для значения переменной $b = 12$.

Значение выражения $a(a - b)$ для $a = 30$, $b = 7$ равно:

$$30 \cdot (30 - 7) = 30 \cdot 23 = 690.$$

Рассмотрим выражение с переменной: $\frac{5}{a+4}$. Значение этого выражения можно найти для любого значения a, кроме $a = -4$. Если $a = -4$, то делитель (знаменатель) $a + 4$ равен нулю, а на ноль делить нельзя. Говорят, что при $a \neq -4$ выражение $\frac{5}{a+4}$ имеет смысл, а при $a = -4$ оно не имеет смысла.

2. Целые выражения. Сравним выражения

$$a + b, \quad 7a, \quad \frac{1}{3}b, \quad a - \frac{c}{2}, \quad \frac{a-b}{5}$$

с выражениями

$$\frac{7}{a}, \quad a : b, \quad b - \frac{a}{d+1}, \quad \frac{a+b}{c}.$$

Выражения первой группы не содержат действия деления на выражение с переменными. Такие выражения называют *целыми*.

Выражения второй группы содержат действие деления на выражение с переменными. Такие выражения называют *дробными*. Мы будем изучать их в восьмом классе, а в седьмом будем рассматривать только целые выражения.

3. Формулы. Выражения с переменными используют для записи формул. Например:

$S = ab$ — формула для нахождения площади прямоугольника;

$V = abc$ — формула для нахождения объема прямоугольного параллелепипеда.

Формулой $n = 2k$ (где k — целое число) задаются четные числа, а формулой $n = 2k + 1$ — нечетные числа.

Для тех, кто хочет знать больше

Формулами можно задавать все целые числа, которые при делении на заданное натуральное число дают один и тот же остаток.

Рассмотрим сначала пример деления двух натуральных чисел. Разделим 48 на 5 с остатком:

$$\begin{array}{r|l} -48 & 5 \\ \underline{45} & 9 \\ 3 & \end{array}$$

Получили: 9 — неполное частное, 3 — остаток.

Натуральные числа, не кратные числу 5, при делении на 5 могут давать в остатке 1, 2, 3 или 4. Числа, кратные числу 5, делятся (нацело) на 5. Еще говорят, что такие числа при делении на 5 дают в остатке 0.

Разделив 48 на 5, мы нашли два числа 9 и 3 (неполное частное и остаток), используя которые число 48 можно записать в виде

$$48 = 5 \cdot 9 + 3.$$

Деление любого целого числа на натуральное с остатком сводится к отысканию подобного равенства.

Разделить целое число m на натуральное число n *с остатком* значит найти такие целые числа k и r, чтобы выполнялось равенство

$$m = nk + r, \quad \text{где} \quad 0 \le r \le n - 1.$$

При этих условиях число k называют *неполным частным*, а r — *остатком* от деления m на n.

Остатков от деления целых чисел на натуральное число n может быть n:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\ n-1.$$

Найдем для примера остаток от деления числа –17 на число 3. Для этого запишем число –17 в виде $-17 = 3k + r$, где k и r — целые числа, причем $0 \le r \le 2$. Чтобы число r было в пределах от 0 до 2, нужно взять $k = -6$. Тогда легко найти, что $r = 1$. Получили верное равенство $-17 = 3 \cdot (-6) + 1$. Таким образом, число –17 при делении на 3 дает в остатке 1.

Целые числа при делении на 3 могут давать в остатке 0, 1 или 2. В соответствии с этим их можно разделить на 3 группы.

Целые числа	Остаток от деления на 3	Вид чисел
... –9; –6; –3; 0; 3; 6; 9; ...	0	$3k$
... –8; –5; –2; 1; 4; 7; 10; ...	1	$3k + 1$
... –7; –4; –1; 2; 5; 8; 11; ...	2	$3k + 2$

Следовательно, формулами $m = 3k$, $m = 3k + 1$ и $m = 3k + 2$, где k — произвольное целое число, задаются все целые числа, которые при делении на 3 дают в остатке соответственно 0, 1, 2. О числах вида $m = 3k$ еще говорят, что они делятся (нацело) на 3. Так, –9 делится на 3.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Записать в виде выражения:

а) произведение числа a и суммы чисел b и c;

б) частное разности чисел m и n и числа 7;

в) разность числа a и произведения чисел m и n.

• **а)** $a(b + c)$; **б)** $(m - n) : 7$; **в)** $a - mn$. •

Примечание. Читая словами числовые выражения или выражения с переменными, первым называют последнее по порядку выполнения действие, далее — предпоследнее и т. д.

Пример 2. Найти значение выражения $a^2(b + c)$ при $a = 4$, $b = -7$, $c = 2$.

• При $a = 4$, $b = -7$, $c = 2$ получим:

$$a^2(b + c) = 4^2 \cdot (-7 + 2) = 16 \cdot (-5) = -80.$$

Ответ. –80. •

Пример 3. Найти значение выражения $(m + n)^2 - 3n$ при $m = \frac{1}{6}$, $n = \frac{1}{3}$.

• Если $m = \frac{1}{6}$, $n = \frac{1}{3}$, то

$$(m + n)^2 - 3n = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1+2}{6}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

Ответ. $-\frac{3}{4}$. •

Пример 4. Записать в виде выражения число, в котором 9 сотен, c десятков, d единиц.

• $9 \cdot 100 + c \cdot 10 + d = 900 + 10c + d$. •

Устно

123. Среди записей укажите числовые выражения, выражения с переменными и записи, не являющиеся выражениями:

а) 7,2 : 3; **б)** 5; **в)** $2x = 3$; **г)** (18 – 3) : 5 = 3;

д) $a - c$; е) $15 - 8a$; ж) $\frac{19-8}{5}$; з) abx^2.

124. Прочитайте словами выражения с переменными:

а) $5 + x$; б) $y : 7$; в) $2ab$; г) $(abc - 2) : 4$;

д) $(a - 3) : a$; е) $\frac{1}{4}z - 3{,}5$; ж) $\frac{b-c}{4}$; з) $\frac{37}{x}$.

Какие из данных выражений являются целыми выражениями?

125. Составьте три выражения из числа 7 и переменных a и b.

126. Составьте два выражения из чисел 5 и 11 и переменной x.

Уровень А

Запишите в виде выражения:

127. а) Сумму чисел 12 и a; б) частное чисел $-c$ и 7;
в) куб числа a; г) полуразность чисел a и b.

128. а) Произведение числа 3 и суммы чисел a и c;
б) утроенное произведение чисел b и c;
в) разность числа a и квадрата числа c.

129. а) Разность чисел b и 9; б) произведение чисел 3 и $-a$;
в) квадрат числа x; г) полусумму чисел m и n;
д) произведение разности чисел 3 и c и числа 5;
е) удвоенное частное чисел a и c.

Найдите значение выражения:

130. а) $7b - 3$ при $b = -9$; б) $0{,}11 - 4c^2$ при $c = 0{,}2$;
в) $3a + b$ при $a = -3$; $b = 8$; г) $ab - 4c$ при $a = -0{,}4$; $b = 7$; $c = 0{,}12$.

131. а) $2{,}5 + \frac{a-2}{5}$ при $a = 4$; б) $\frac{2x-1}{0{,}1}$ при $x = -3$.

132. а) $-2a + 5{,}2$ при $a = -3$; б) $(1 - 4s)^2$ при $s = 2$;
в) $12(3y - 5)$ при $y = 1{,}5$; г) $x - 2y$ при $x = 11$; $y = -5{,}5$;
д) $3(a + b) - 2c$ при $a = 3{,}2$; $b = -7{,}7$; $c = 2{,}5$.

Заполните таблицу:

133.

a	-4	-1	0	0,5	2	3
$4 - 3a$						

134.

x	-5	-3	0	1	1,5	2,5
$2x - 3$						

135.

x	5	7	1	–2	–4	10
y	2	–1	0	3	–0,5	–1
$x-2y$						

136.

b	–2	0	0,5	1	3	3,5
$\frac{2b-5}{4}$						

137. Скорость автомобиля 75 км/ч. Запишите в виде выражения путь, пройденный автомобилем за t ч.

138. На склад привезли n мешков муки по 50 кг в каждом. Запишите в виде выражения массу всей привезенной муки. Найдите значение этого выражения при $n = 48$.

139. Рабочий за день изготавливает 32 детали. Запишите в виде выражения количество деталей, которые рабочий изготовит за k дней. Найдите значение этого выражения при $k = 5$.

140. На участке площадью a га хозяйство собрало по 38 ц пшеницы с гектара, а на участка площадью b га — по 42 ц. Запишите в виде выражения массу пшеницы, собранной хозяйством с обоих участков.

141. Мастерская закупила 50 м ткани по a грн. за метр и 30 м ткани по b грн. за метр. Запишите в виде выражения стоимость всей ткани.

Уровень Б

Найдите значение выражения:

142. а) $8,5\cdot(a-13,97)+4\frac{3}{8}b$ при $a = 16,17$; $b = \frac{6}{7}$;

б) $\left(3\frac{2}{9}-m-n\right)\cdot 36$ при $m = -12\frac{2}{3}$; $n = 1\frac{1}{6}$.

143. а) $\left(x-9\frac{7}{9}\right)\cdot y+0,5$ при $x = 16\frac{1}{2}$; $y = \frac{18}{33}$;

б) $0,5a+3\frac{1}{2}\left(b-1\frac{1}{7}\right)$ при $a = 3\frac{1}{5}$; $b = 2$.

144. По формуле $S = vt$ найдите путь (в километрах), если:

а) $v = 75$ км/ч; $t = 0,6$ ч;

б) $v = 75$ км/ч; $t = 20$ мин;

в) $v = 20$ м/с; $t = 2$ ч;

г) $v = 900$ м/мин; $t = 25$ с.

145. По формуле $S = vt$ найдите путь (в метрах), если:

а) $v = 8$ м/с; $t = 5$ мин; б) $v = 15$ км/ч; $t = 6$ мин.

146. Для каких значений x значение выражения $2x + 5$ равно 10?

147. Для каких значений x значение выражения $4 - 2x$ равно 18?

148. Для каких значений x значения выражений $3x - 12$ и $-4 - x$ равны?

149. Известно, что при некоторых значениях x и y значение выражения xy равно 0,4. Какое значение при этих же значениях x и y принимает выражение:

а) $10xy$; б) $0{,}1xy$; в) $\frac{xy}{2}$; г) $-1\frac{1}{3}xy$?

150. Запишите формулу целых чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

151. Запишите формулу целых чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 2.

Запишите в виде выражения число, которое содержит:

152. а) a десятков и b единиц; б) a сотен и c единиц;

в) a сотен, 7 десятков и b единиц; г) a тысяч, b сотен и a единиц.

153. а) a сотен и b десятков; б) 5 сотен, a десятков и b единиц.

154. Запишите в виде выражения площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с измерениями a см, b см, c см.

155. Запишите в виде выражения площадь поверхности куба с ребром a см.

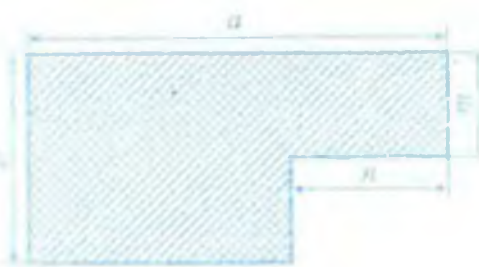


Рис. 2

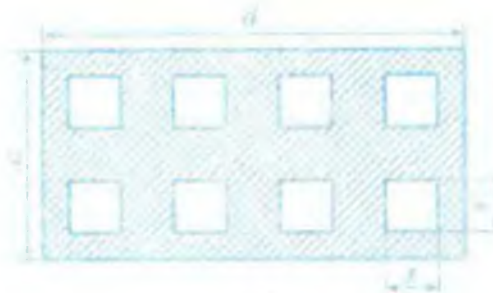


Рис. 3

156. Запишите в виде выражения площадь фигуры, изображенной на рисунке 2.

157. Запишите в виде выражения площадь фигуры, изображенной на рисунке 3.

158. На участке росло n кустов смородины. С этого участка k кустов пересадили на другой участок, а на нем посадили 30 новых кустов. Сколько кустов смородины стало на участке? Запишите результат в виде выражения и найдите его значение при $n = 83$, $k = 45$.

159. Оксана купила n карандашей по 25 к. и 4 тетради по a к., заплатив за тетради больше, чем за карандаши. На сколько больше заплатила Оксана за тетради, чем за карандаши? Запишите результат в виде выражения и найдите его значение при $n = 3$, $a = 65$.

160. Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 2 ч. Один ехал со скоростью 80 км/ч, а другой — со скоростью v км/ч. Запишите в виде выражения расстояние между городами.

Уровень В

161. Число d является произведением первых n натуральных чисел: $d = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Найдите d при $n = 5$; $n = 7$. Сколькими нулями оканчивается запись числа d при $n = 10$; $n = 100$?

162. Найдите наименьшее значение выражения: $x^2 + 5$; $|x| - 3$.

163. Найдите наибольшее значение выражения: $1 - x^2$; $3 - |x|$.

164. Запишите формулу целых чисел, которые при делении на 9 дают в остатке 2. Найдите количество таких чисел в пределах от 100 до 300.

165. Запишите формулу целых чисел, которые при делении на 2 дают в остатке 1, а при делении на 3 дают в остатке 2.

Упражнения для повторения

166. Кофейные зерна при обжаривании теряют 12% своей массы.

а) Сколько килограммов жареных зерен получится из 20 кг свежих?

б) Сколько килограммов свежих зерен следует взять, чтобы получить 22 кг жаренных?

Вычислите рациональным способом:

167. **а)** $0{,}25 \cdot (-11) \cdot 4$; **б)** $9 \cdot 1{,}25 \cdot (-8)$; **в)** $-12{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot (-8) \cdot 4$;

г) $-\frac{2}{7} \cdot (-25) \cdot 3\frac{1}{2}$; **д)** $24 \cdot 8 - 28 \cdot 24$; **е)** $7 \cdot 35 - 26 \cdot 7 + 11 \cdot 7$;

ж) $5\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{7} - 2\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{7}$; **з)** $12 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$; **и)** $\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \cdot (-30)$.

168. **а)** $34 \cdot 23 + 3 \cdot 23 - 37 \cdot 33$; **б)** $5{,}4 \cdot 16 - 22 \cdot 5{,}4 + 6 \cdot 6{,}4$.

169. Приведите подобные слагаемые:

а) $2x + 6x - 4x + x$; **б)** $4a + 9b + 2b - 5a$; **в)** $3a - 7 + 5a - 10a$.

170. Раскройте скобки:

а) $4(a + 2b)$; **б)** $(a + b - c) \cdot 3$; **в)** $5(a - 1) - (b - c)$.

171. Возьмите в скобки два последних слагаемых, поставив перед скобками знак «+»; знак «–»:

а) $2x + y - 3$; **б)** $a - 3b + 4$; **в)** $m + n - 7 - mn$.

6. Тождественно равные выражения. Тождества

1. Тождественно равные выражения. Найдем значения выражений $5a - 5b$ и $5(a - b)$ при $a = 4$, $b = 2$:

$$5a - 5b = 5 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 20 - 10 = 10; \quad 5(a - b) = 5 \cdot (4 - 2) = 5 \cdot 2 = 10.$$

Значения этих выражений при данных значениях переменных равны (говорят, что при $a = 4$, $b = 2$ соответствующие значения выражений равны). Из распределительного свойства умножения относительно вычитания следует, что и при любых других значениях переменных соответствующие значения выражений $5a - 5b$ и $5(a - b)$ также равны. Такие выражения называют *тождественно равными*.

Определение **Два выражения называют тождественно равными, если при любых значениях переменных соответствующие значения этих выражений равны.**

Рассмотрим теперь выражения $5a + b$ и $a + 5b$. При $a = 1$ и $b = 1$ соответствующие значения этих выражений равны:

$$5a + b = 5 \cdot 1 + 1 = 6; \qquad a + 5b = 1 + 5 \cdot 1 = 6.$$

При $a = 2$, $b = 1$ соответствующие значения этих выражений разные:

$$5a + b = 5 \cdot 2 + 1 = 11; \qquad a + 5b = 2 + 5 \cdot 1 = 7.$$

Итак, значения выражений $5a + b$ и $a + 5b$ при одних значениях переменных равны, а при других — нет. Такие выражения не являются тождественно равными.

2. Тождества. Если два тождественно равные выражения $5a - 5b$ и $5(a - b)$ соединить знаком «=», то получим равенство $5a - 5b = 5(a - b)$, являющееся верным при любых значениях переменных. Такое равенство называют *тождеством*.

Определение **Равенство, верное при всех значений переменных, называют тождеством.**

Примерами тождеств являются равенства, выражающие основные свойства сложения и умножения чисел:

переместительное свойство: $a + b = b + a$; $ab = ba$;

сочетательное свойство: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab)c = a(bc)$;

распределительное свойство: $a(b + c) = ab + ac$.

Тождествами являются также равенства, выражающие правила раскрытия скобок:

$$a + (b + c) = a + b + c, \qquad a - (b + c) = a - b - c, \qquad a - (b - c) = a - b + c.$$

Тождествами являются и такие равенства:

$$a - b = a + (-b), \qquad a \cdot (-b) = -ab, \qquad (-a) \cdot (-b) = ab;$$

$$a + 0 = a, \qquad a + (-a) = 0, \qquad a \cdot 0 = 0, \qquad a \cdot 1 = a.$$

3. Тождественные преобразования выражений. В выражении $4a + 3a - 1$ приведем подобные слагаемые $4a$ и $3a$:

$$4a + 3a - 1 = (4 + 3)a - 1 = 7a - 1.$$

Выражение $4a + 3a - 1$ заменили тождественно равным ему выражением $7a - 1$.

Замену одного выражения тождественно равным ему выражением называют ***тождественным преобразованием выражения***.

В математике часто приходится упрощать выражение, то есть заменять его тождественно равным выражением, имеющим более короткую запись или, как говорят, являющимся «более компактным». Рассмотрим примеры.

Пример 1. Упростить выражение $7a + 23 + 2(-4a + 1)$.

• $7a + 23 + 2(-4a + 1) = \underline{7a} + 23 - \underline{8a} + 2 = -a + 25$. •

Пример 2. Упростить выражение $a + (2a - 3b) - (2 - 4b)$.

• $a + (2a - 3b) - (2 - 4b) = \underline{a} + \underline{2a} - \underline{\underline{3b}} - 2 + \underline{\underline{4b}} = 3a + b - 2$. •

Тождественные преобразования используют и при доказательстве тождеств.

Чтобы доказать тождество, можно использовать один из способов:

1) левую часть тождества путем тождественных преобразований привести к правой части;
2) правую часть привести к левой части;
3) обе части привести к одному и тому же выражению;
4) образовать разность левой и правой частей и доказать, что она равна нулю.

Рассмотрим примеры.

Пример 3. Доказать тождество $a - 3 - (4a + 7) = -3a - 10$.

• Преобразуем левую часть равенства:

$$a - 3 - (4a + 7) = \underline{a} - 3 - \underline{4a} - 7 = -3a - 10.$$

Путем тождественных преобразований левую часть равенства привели к правой части. Поэтому это равенство является тождеством. •

Пример 4. Доказать тождество $15 = (27 - 5a) - (12 - 3a - 2a)$.

• Преобразуем правую часть равенства:

$$(27 - 5a) - (12 - 3a - 2a) = 27 - \underline{5a} - 12 + \underline{3a} + \underline{2a} = 15.$$

Путем тождественных преобразований правую часть равенства привели к левой части. Поэтому это равенство является тождеством. •

Пример 5. Доказать тождество $2c + 3 - 2(3 - 2c) = 3(2c - 3) + 6$.

• Преобразуем левую и правую части равенства:

$$2c + 3 - 2(3 - 2c) = \underline{2c} + 3 - 6 + \underline{4c} = 6c - 3;$$

$$3(2c - 3) + 6 = 6c - 9 + 6 = 6c - 3.$$

Путем тождественных преобразований левую и правую части равенства привели к одному и тому же выражению $6c - 3$. Поэтому это равенство является тождеством. •

Пример 6. Доказать тождество $3x - 2(2x - 3y) = 2x + 3(2y - x)$.

● Образуем разность левой и правой частей и упростим ее:

$$3x - 2(2x - 3y) - (2x + 3(2y - x)) = 3x - 2(2x - 3y) - 2x - 3(2y - x) =$$

$$= \underline{3x} - \underline{4x} + \underline{\underline{6y}} - \underline{2x} - \underline{\underline{6y}} + \underline{3x} = 0.$$

Разность левой и правой частей равенства равна нулю, поэтому данное равенство является тождеством. ●

Устно

172. Являются ли тождественно равными выражения:

а) $5 + 6x$ и $6x + 5$; **б)** $a \cdot 5b$ и $5ab$; **в)** $a - b$ и $b - a$?

Ответ обоснуйте.

173. Является ли тождеством равенство:

а) $ab + 2 = 2 + ab$; **б)** $a - 1 = -1 + a$; **в)** $2(a - 3) = 2a - 3$?

Ответ обоснуйте.

174. Назовите несколько выражений, тождественно равных выражению $x + 4x$.

175. Объясните, на основании каких правил и каких свойств действий выполнены такие тождественные преобразования:

$$-2b - (a - 3b) + 5a = -2b - a + 3b + 5a = -2b + 3b - a + 5a =$$
$$= (-2 + 3) \cdot b + (-1 + 5) \cdot a = b + 4a.$$

176. Упростите выражение:

а) $-7 + 4a - 3a$; **б)** $4a \cdot 5b$; **в)** $5x + (2 - x)$.

Уровень А

Приведите подобные слагаемые:

177. **а)** $7a - 3a + 6$; **б)** $-4 + 3z - 8z$;
в) $4b - 7 + 9$; **г)** $6{,}5b - 7a + 5a$;
д) $-7{,}2x + 8y - 5x - 5y$; **е)** $m - 3n + 1{,}6n + 2n$.

178. **а)** $5a - 6 + 3a$; **б)** $-3b + 4b - 2b$;
в) $2c - 1 + 6c - 6$; **г)** $1{,}5a - 2{,}5b + 3{,}5a$;
д) $-2x + 3y - 6x - 5y$; **е)** $3b - a + 0{,}6a + 1{,}2a$.

Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

179. **а)** $5(8a + 9) + (4a - 5)$; **б)** $2(5b - 3a) - (1{,}5b - 2a)$;
в) $-4(1{,}2x + 1{,}5y) + 4(1{,}2x + 1)$; **г)** $2(2x - 4y) - 3(2x + 5y + 2)$.

180. **а)** $3(4x - 2z) - (5z + 10x)$; **б)** $-3(3a + 1) - 5(a - 3b)$.

Упростите выражение и найдите его значение:

181. **а)** $0{,}7(a - 10) + a - 5$ при $a = 3$;
б) $-2{,}5b - (11 - 1{,}5b) + b$ при $b = 0{,}2$;
в) $2x - 3(1 - y) + 4y$ при $x = -2$; $y = 5$.

182. а) $6 + 3(2a - 4) - 8a$ при $a = -1$;

б) $3(a + 6) - (a - 3b) - 4b$ при $a = 3$, $b = -3$.

Докажите тождество:

183. а) $(a + b) - (a - b) = 2b$; б) $2b \cdot (-4) + 8b - 4 = -4$;

в) $2x - 1 - 5(1 - 2x) = 12x - 6$; г) $2(3a - 4) + 14 - 6a = 6$;

д) $a - (4a - 3b) = 3(b - a)$; е) $2c = 12c - 5(2c + 3) + 15$.

184. а) $2b + 2(1 - b) = 2$; б) $2a - (1 + 2a) + 1 = 0$;

в) $3a - 6(3 - 2a) = 3(5a - 6)$; г) $2x - 6 = -x - (7 - 3x) + 1$.

185. Ширина прямоугольника a см, а длина на 3 см больше. Запишите в виде выражения периметр прямоугольника.

186. Стороны треугольника равны b см, b см и 5 см. Запишите в виде выражения периметр треугольника.

187. На одной полке стоит n книг, а на другой — в 1,5 раза больше. Сколько книг на обеих полках?

188. На одной полке стоит k книг, а на другой — на 12 книг меньше. Сколько книг на обеих полках?

189. Один рабочий изготавливает за час c деталей, а другой — на 2 детали меньше. Запишите в виде выражения количество деталей, которые изготовят за 8 ч оба рабочих.

Уровень Б

Запишите в виде тождества утверждение:

190. а) Сумма числа и противоположного ему числа равна нулю;

б) сумма числа a и числа, противоположного числу b, равна разности чисел a и b;

в) квадрат числа равен квадрату модуля этого числа.

191. а) Произведение произвольного числа и нуля равно нулю;

б) произведение двух чисел равно произведению противоположных им чисел;

в) квадрат числа равен квадрату противоположного ему числа.

Упростите выражение:

192. а) $2(3c + 5) + 4(3 + 5c) + 4 + 2c$; б) $0{,}2(x - 1) - 0{,}4(5 - 2x) - 2{,}3$;

в) $-(4x + y + 3z) + 3y - 2(x - 3z)$; г) $1\frac{1}{3}(2a - 7b) - \frac{2}{3}(3b + a) + 2a$;

д) $4(2(x + 2) - 4x) + 2(x + 1)$; е) $5(m + 3(n - 1) - 1) - 5m$.

193. а) $-(3a - 6) + 3(2 - 2a) + 15a$; б) $0{,}9(a - 3b) - 0{,}2(5b - 3a) - 1{,}7b$;

в) $4(5n - 2(n - 1)) + 10$; г) $\frac{2}{9} + \frac{2}{9}(2(x - y) - 4x) + \frac{2}{3}x$.

Докажите тождество:

194. а) $2(a + b + c) - (a + b - c) - (a - b + c) = 2(b + c)$;

б) $28 + 2(2(2(b - 2) - 2) - 2) = 8b$.

195. а) $2(a-b-1)-(a+b-1)-(a-b+1)=-2(b+1)$;
б) $1-x-(1-(1-(1-x)))=0$.

Решите уравнение:

196. а) $2(3x-1)-3(2-x)=1$; б) $0{,}2(y-2(y-1)+5)-2y+3=0$.

197. а) $-3(1-y)+3(1-2y)=9$; б) $2((x-2)-2(x-1))+4x=1$.

198. Первый лыжник прошел a м, второй — на b м меньше, а третий — 1200 м. На сколько метров меньше прошел второй лыжник, чем первый и третий вместе? Запишите результат в виде выражения.

199. На первой полке x книг, а на второй — в два раза больше. С первой полки забрали 10 книг, а на вторую поставили 3 книги. Сколько книг стало на обеих полках вместе? Запишите результат в виде выражения.

Уровень В

200. Пусть m и n — некоторые натуральные числа. Докажите, что:
а) разность чисел $11m+3n$ и $7m+7n$ делится на 4;
б) сумма чисел $10m+3n+2$ и $2m-7n+6$ делится на 4.

201. Докажите, что сумма трех последовательных целых чисел делится на 3.

202. Докажите, что сумма четырех последовательных целых чисел не делится на 4.

203. Докажите, что если два целых числа при делении на 4 дают в остатке 2, то сумма и разность этих чисел делятся на 4.

204. Двузначное число, содержащее a десятков и b единиц, обозначают через $\overline{ab}$. Итак, $\overline{ab}=10a+b$. Докажите, что сумма $\overline{ab}+\overline{ba}$ делится на 11.

205. Докажите, что разность числа $\overline{abc}$ и суммы его цифр делится на 9.

206. Докажите, что если два целых числа при делении на 3 дают равные остатки, то разность этих чисел делится на 3.

Упражнения для повторения

207. Вычислите:

а) 15^2-6^3; б) $(1{,}2^2-1{,}84)^3$; в) $\left(2-\frac{3}{7}\right)^2-\left(\frac{6}{7}\right)^2$.

Решите уравнение:

208. а) $(x-7)(x+9)=0$; б) $(2x+7)(3x-2)=0$; в) $(7-3x)(0{,}5x-1)=0$.

209. а) $|x|=5$; б) $|x+5|=2$; в) $|3x+9|=0$.

210. Сумма трех чисел равна 10, причем первое число на 20 меньше, а третье — на 15 больше второго. Найдите эти числа.

211*. Турист приехал поездом на станцию в 7 ч 20 мин и пешком отправился в село, находящееся в нескольких километрах от станции. Двигаясь с постоянной скоростью, он рассчитал, что придет в село в 8 ч 44 мин.

Однако в 7 ч 44 мин он сел на попутный автомобиль и прибыл в село на 55 мин раньше. Найдите скорость автомобиля, если она на 55 км/ч больше скорости туриста.

212. Из урны, в которой находится четыре шара, пронумерованные числами 1, 2, 3 и 4, наугад берут два шара. Найдите вероятность того, что среди выбранных шаров есть шар с номером 1.

213. Используя три раза цифру 3, знаки действий и при необходимости скобки, составьте числовое выражение, значение которого равно: **а)** 18; **б)** 9; **в)** 4; **г)** 81; **д)** 0.

Интересно знать

Записывая выражения, уравнения, неравенства, мы используем математические символы «+», «–», «=», «<», «a^2» и многие другие. Такая система условных знаков, которой мы пользуемся сейчас, сложилась в алгебре постепенно.

Еще в III в. древнегреческий математик Диофант вместо слова «равный» использовал отдельный знак — букву *i*, первую букву слова *isos*, то есть *равный*. Аналогичные сокращения использовали и другие математики, но предложенные ими символы не стали общепризнанными.

Современная символика была создана в XIV–XVIII в. Большую роль в этом процессе сыграл французский математик **Франсуа Виет**, который впервые с помощью символов начал записывать уравнения.

Юрист по образованию, Виет был советником французских королей Генриха III и Генриха IV, прославился как талантливый дешифровщик. Во время войны с Испанией Виет нашел ключ к очень важному шифру. Расшифровка французами секретных сообщений испанцев привела к тому, что Испания начала терпеть поражения одно за другим. За это испанская инквизиция приговорила Виета к сожжению на костре, но, к счастью, приговор не был приведен в исполнение.

Несмотря на занятость на службе, Виет написал много математических трудов, главным из которых является «Введение в аналитическое искусство» (1591).

Франсуа Виет (1540–1603), французский математик. Первым ввел единую, последовательно проведенную систему алгебраических символов

Важнейшим результатом научной деятельности Ф. Виета было то, что благодаря его трудам алгебра стала наукой об алгебраических уравнениях, базирующейся на использовании символов (букв).

Вопросы и упражнения для повторения § 2

1. Из чего состоит выражение с переменными?

2. Что называют значением выражения с переменными?

3. Какие выражения называют целыми?

4. Какие два выражения называют тождественно равными?

5. Что такое тождественное преобразование выражения?

6. Что называют тождеством?

7. Как доказывают тождество?

214. Запишите в виде выражения:

а) разность чисел 2,5 и a; **б)** куб числа c;

в) удвоенную сумму чисел a и b; **г)** сумму квадратов чисел m и n;

д) разность числа a и произведения чисел b и c.

215. Автомобиль прошел S км со скоростью 75 км/ч. Сколько времени автомобиль был в пути? Запишите результат в виде выражения.

216. Карандаш стоит a к., а ручка — b к. Запишите в виде выражения стоимость 2 карандашей и 3 ручек.

217. Имеется два участка прямоугольной формы. Длина и ширина первого участка соответственно равны m м и n м. Длина второго участка на 5 м больше длины первого, а ширина на 2 м меньше ширины первого. Запишите в виде выражения площадь второго участка. Найдите значение этого выражения при $m = 50$, $n = 14$.

218. Упростите выражение:

а) $6a + 5(7 - 12a)$; **б)** $-3x - 5(3 - 2x) + 5 - 2x$;

в) $-4 + (5x - y) - 4x - (3y + 5)$; **г)** $3b + 7 - 2(3 - 2(b + 1))$;

д) $0{,}3(x - 4) - 0{,}4(x - y) + 1{,}6y$; **е)** $2{,}5(a - 2(b - 1) + 4) + 5b$.

219. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $24(a - 2) - 4a$ при $a = 0{,}05$;

б) $0{,}3(2b - 3) + 3 - 4{,}6b$ при $b = 0{,}5$.

220. Найдите значение выражения $2(x + 8) - 3(5 + x - y) + 7y$ при $x = -6$; $y = 0{,}6$.

221. При каких значениях x значение выражения $5x - 8$ равно 1?

222. Докажите, что значения выражения $2(1 - 3x) - 3(1 - 2x)$ не зависят от значений x.

Докажите тождество:

223. а) $7(4-a)-3(-3a+1)-25=2a$;

б) $9{,}8b-5=9b-1{,}2b-2(2{,}5-b)$;

в) $4(n-2)-5(n-1)=3(n-3)-4(n-1{,}5)$.

224. а) $5\frac{1}{3}\left(\frac{3}{8}a+1{,}25b\right)-\left(-\frac{1}{12}b-0{,}125a\right)-6{,}75b=2{,}125a$;

б) $\left(\frac{8}{11}x-\frac{7}{33}y\right)\cdot 22+0{,}75(x+1)+4\frac{2}{3}y+3{,}25x=20\left(x+\frac{3}{80}\right)$;

в) $-\frac{2}{3}(2{,}25m-4{,}5n)+1{,}125\left(-2\frac{2}{3}m-\frac{8}{9}n\right)=2n-4{,}5m$.

225. Докажите, что выражение $4(a+b+2c)-3(a-b+c)-2(-a+2b+c)$ тождественно равно выражению $3(a+b+c)$.

226. За первый день магазин продал b кг сахара, за второй — на 58 кг больше, чем за первый, а за третий — на 12 кг меньше, чем за второй. Запишите в виде выражения массу сахара, проданного магазином за 3 дня.

227. В 7-А классе n учеников, что на 5 учеников больше, чем в 7-Б, и на 3 ученика меньше, чем в 7-В. Запишите в виде выражения количество учеников в этих трех классах вместе.

228. Из города A в город B выехал мотоциклист и двигался со скоростью 54 км/ч. Через 0,5 ч навстречу ему из города B выехал автомобиль и, проехав t ч, встретил мотоциклиста. Запишите в виде выражения расстояние между городами, если скорость автомобиля 72 км/ч.

229. Три экскаватора вырыли траншею. Первый экскаватор вырыл x м траншеи, или $\frac{2}{9}$ длины всей траншеи, второй — на 20 м больше, чем первый. Сколько метров траншеи вырыл третий экскаватор? Запишите результат в виде выражения.

230. Запишите формулу целых чисел, которые при делении на 4 дают в остатке: 1; 3.

231*. Некоторые три целых числа при делении на 3 дают разные остатки. Докажите, что сумма этих чисел делится на 3.

232. Найдите все цифры a и b, при которых число $\overline{7ab}$ делится на 25.

Задания для самопроверки № 2

Уровень 1

1. Какая из записей является выражением с переменными?

а) $2{,}5:5$; б) $3x=9$; в) $y>3$; г) $2a+3ab$.

2. Книга стоит a грн., а тетрадь — b грн. Запишите в виде выражения стоимость книги и тетради вместе.

а) ab грн.; **б)** $(a + b)$ грн.; **в)** $(a - b)$ грн.; **г)** $(b - a)$ грн.

3. Чему равно значение выражения $2x - 4$ при $x = -3$?

а) 10; **б)** –10; **в)** 2; **г)** –2.

4. Укажите выражение, тождественно равное выражению $3y + 5 - 7y$:

а) y; **б)** $5 + 4y$; **в)** $5 - 4y$; **г)** $3y - 2y$.

5. Упростите выражение $4(5a - 3b) - (-b + 2a)$ и укажите правильный ответ:

а) $18a + 11b$; **б)** $22a + 11b$; **в)** $18a - 11b$; **г)** $22a - 13b$.

Уровень 2

6. Килограмм конфет стоит a грн., а килограмм печенья — на b грн. меньше. Запишите в виде выражения стоимость 1 кг печенья и 1 кг конфет вместе.

7. Упростите выражение $15a - 0{,}4(5a - 3) + 7$.

8. Упростите выражение $5(-4x + 0{,}6) + 17{,}5x - \frac{1}{4}$ и найдите его значение при $x = 0{,}8$.

9. Докажите тождество $3c - (5 - 11c) - 6c + 5 = 8c$.

Уровень 3

10. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые: $1{,}5(2a - 4b) - (2 - 3(2b + a))$.

11. Найдите значение выражения $25x - 4(5x - 3y) - 2(5 + 3x - y)$ при $x = -7{,}6$; $y = 0{,}76$.

12. В первой книге a страниц, во второй — на b страниц меньше, чем в первой, а в третьей — в два раза больше страниц, чем во второй. Запишите в виде выражения количество страниц в трех книгах вместе.

13. Докажите, что выражения $0{,}3(a - 3) - 0{,}5(a - 1)$ и $0{,}2(a - 6) - 0{,}4(a - 2)$ тождественно равны.

Уровень 4

14. Найдите значение выражения $\dfrac{a + \frac{a}{7} + \frac{a}{49} + \frac{a}{343}}{6 + \frac{6}{7} + \frac{6}{49} + \frac{6}{343}} : \left(-3\frac{8}{9}\right)$ при $a = 5$.

15. На первой полке стоит a книг, на второй — в три раза больше, чем на первой, а на третьей — на 17 книг меньше, чем на первой и второй полках вместе. Запишите в виде выражения количество книг на трех полках вместе.

16. Натуральное число a при делении на 5 дает в остатке 4, а натуральное число b при делении на 4 дает в остатке 2. Докажите, что число $4a + 5b$ не кратно 10.

17. Докажите, что сумма трехзначного числа и удвоенной суммы его цифр делится на 3.

§ 3. ОДНОЧЛЕНЫ

7. Степень с натуральным показателем

Напомним, что произведение двух или трех одинаковых множителей, каждый из которых равен a, — это соответственно квадрат или куб числа a. Например:

$5 \cdot 5 = 5^2$; 5^2 — квадрат числа 5;

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$; 5^3 — куб числа 5.

Квадрат числа 5 называют еще второй степенью этого числа, а куб — третьей степенью.

Соответственно произведение $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ обозначают 5^4 и называют четвертой степенью числа 5. В выражении 5^4 число 5 называют *основанием степени*, число 4 — *показателем степени*, а все выражение 5^4 называют *степенью*.

Определение **Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a. Степенью числа a с показателем 1 называют само число a.**

Степень с основанием a и показателем n записывают так: a^n, читают: «a в степени n», или «n-ая степень числа a».

Итак, по определению

$$a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}} \text{ при } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

Выясним знак степени с натуральным показателем.

1) $a = 0$, тогда $0^1 = 0$, $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$, ... — любая натуральная степень числа 0 равна 0.

2) $a > 0$, тогда $a^1 = a > 0$, $a^2 = aa > 0$, ... — любая натуральная степень положительного числа есть положительное число.

3) $a < 0$, тогда $a^1 = a < 0$, $a^2 = aa > 0$, $a^3 = aaa < 0$, $a^4 = aaaa > 0$, ... Степень отрицательного числа с четным показателем является положительным числом, поскольку произведение четного количества отрицательных чисел положительно. Степень отрицательного числа с нечетным показателем является отрицательным числом, поскольку произведение нечетного количества отрицательных чисел отрицательно.

Возводить числа в степень с натуральным показателем можно с помощью микрокалькулятора. Вычислить, например, значение $3{,}5^6$ можно по схеме:

3,5	×	3,5	×	3,5	×	3,5	×	3,5	×	3,5	=

или по более удобной схеме:

3,5	×	=	=	=	=	=

Получим значение степени: 1838,265625.

Возведение в степень — действие третьей ступени. Напомним, что если выражение без скобок содержит действия разных ступеней, то сначала выполняют действия высшей ступени, а потом — низшей. Так, чтобы найти значение выражения $2 \cdot 3^2 - 64$, действия нужно выполнять в такой последовательности: 1) возведение в степень; 2) умножение; 3) вычитание.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Вычислить $4 \cdot (-5)^3 + 8 \cdot 0{,}5$.

● Выполняя вычисления, можно:

а) *записывать каждое действие в отдельности*:

1) $(-5)^3 = -125$; 2) $4 \cdot (-125) = -500$;

3) $8 \cdot 0{,}5 = 4$; 4) $-500 + 4 = -496$;

б) *записывать вычисления в строчку*:

$$4 \cdot (-5)^3 + 8 \cdot 0{,}5 = 4 \cdot (-125) + 4 = -500 + 4 = -496.$$

Ответ. –496. ●

Устно

233. Прочитайте выражения, назовите основания и показатели степеней:

a^{12}; $(-3)^4$; $(-0{,}05)^{20}$; m^9; 3^m; $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; $\left(-\frac{2}{5}\right)^7$.

234. Вычислите: 1^7; 2^4; $(-2)^4$; 3^3; $(-3)^3$; $(-5)^2$; 4^3; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $0{,}1^2$.

235. Значения каких степеней положительны; отрицательны:

$(-7)^4$; $(-11)^3$; 15^6; $(-21)^2$; 3^3; 17^{31}; $(-1{,}5)^{20}$; $(-0{,}05)^{11}$?

Уровень А

Запишите произведение в виде степени:

236. **а)** $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$; **б)** $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{10\ \text{раз}}$;

в) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$; **г)** $\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\ \text{раз}}$;

д) $(-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b)$; **е)** $(x - y) \cdot (x - y) \cdot (x - y)$.

237. **а)** $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$; **б)** $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$;

в) $\underbrace{(-1{,}5) \cdot (-1{,}5) \cdot \ldots \cdot (-1{,}5)}_{12\ \text{раз}}$; **г)** $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$.

238. Запишите степени в виде произведения:

а) 6^4; $(-7)^6$; $1{,}2^5$; б) a^5; $(2x)^3$; $(bc)^4$.

Найдите значение степени:

239. а) 12^2; б) 4^4; в) $(-0{,}7)^3$; г) $(-1{,}5)^4$;

д) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$; е) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; ж) $\left(2\frac{1}{3}\right)^4$; з) $(-0{,}02)^3$.

240. а) 2^5; б) $(-3)^4$; в) $(-1)^5$; г) $0{,}4^3$;

д) $1{,}1^3$; е) $0{,}04^3$; ж) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$; з) $\left(1\frac{2}{3}\right)^4$.

Вычислите:

241. а) $6 \cdot (-2)^4$; б) $6 \cdot (-2^4)$; в) $5 \cdot (-3)^3$; г) $5 \cdot (-3^3)$;

д) $5^3 - 5^2$; е) $(-6 \cdot 0{,}5)^5$; ж) $0{,}1^3 - 0{,}1^2$; з) $(15 - 16)^{10}$.

242. а) $(3 - 7)^4$; б) $2 \cdot (-7^3)$; в) $2^6 + (-3)^3$; г) $(-4 + 3)^9$.

243. Найдите значения выражений:

а) a^2; $(-a)^2$; $-a^2$ при $a = 3$; б) a^3; $(-a)^3$; $-a^3$ при $a = 10$.

244. Найдите значение выражения:

а) $2a^3 + 1$ при $a = -2$; $a = 0$; $a = 2$; б) $(x + 1)^4$ при $x = -2$; $x = 2$.

Уровень Б

Заполните таблицу:

245.

n	1	2	3	4	5
n^4					
4^n					

246.

n	1	2	3	4	5
n^3					
3^n					

Сравните значения выражений:

247. а) $(5 \cdot 2)^2$ и $5^2 \cdot 2^2$; б) $(2 + 3)^3$ и $2^3 + 3^3$;

в) $7^4 - 6^4$ и 5^4; г) $5^3 + 21^3$ и 26^3.

248. а) $(7 - 5)^2$ и $7^2 - 5^2$; б) $(10 : 2)^3$ и $10^3 : 2^3$;

в) $14^2 + 19^2$ и 33^2; г) $12^4 - 3^5$ и $12^3 + 3^6$.

Найдите значение выражения:

249. $b^4 + b^3 + b^2 + b + 1$ при $b = -2$; $b = -1$; $b = 0$; $b = 1$; $b = 2$.

250. $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x$ при $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$.

Представьте в виде квадрата или куба числа:

251. 27; 144; –125; 216; 0,125; 0,001; $\frac{25}{81}$; $6\frac{1}{4}$; $-3\frac{3}{8}$.

252. 64; 1000; –8; 6,25; 0,008; $-\frac{27}{125}$; $1\frac{11}{25}$.

253. Докажите, что выражение принимает только положительные значения:

а) $a^2 + 1$; б) $a^{10} + 5$; в) $(a - 2)^2 + 2$; г) $(a + 4)^4 + 0{,}5$.

Уровень В

254. Найдите значение выражения при $a = 0$; $a = 1$; $a = -1$:

а) $a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{99} + a^{100}$ (эта сумма состоит из 100 слагаемых, каждое из которых является степенью числа a; показатели степеней — все натуральные числа от 1 до 100 включительно);

б) $a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{98} + a^{99}$; в) $aa^2a^3 \ldots a^{99}a^{100}$; г) $aa^2a^3 \ldots a^{98}a^{99}$.

255. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $a^2 + 1$; б) $a^4 - 2$; в) $(a - 1)^2 + 12$; г) $(2a + 2)^4 - 5$.

При каком значении a значение выражения будет наименьшим?

•**256.** а) Докажите, что выражения $x^2 + (x + 1)^2$ и $x^4 + |x + 1|$ принимают только положительные значения.

б) Решите уравнение: $x^2 + (x + 1)^2 = 0$; $x^4 + |x + 1| = -1$.

257. Найдите последнюю цифру числа 987^{987}.

Упражнения для повторения

258. Решите уравнение:

а) $5x - 3 = 3x + 17$; б) $7x + 32 = 12x + 25$;

в) $2(x - 11) - 5(5 - 2x) = -23$; г) $8(-3x + 4) + 14(3 + 2x) = 4 + 2x$.

259. Футбольная команда в 15 матчах набрала 23 очка, проиграв 6 матчей. Сколько матчей команда выиграла и сколько сыграла вничью? (За победу команде начисляется 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.)

260. Среднее арифметическое трех чисел равно –8. Первое число на 5 больше второго, а второе на 1 меньше третьего. Найдите эти числа.

8. Свойства степени с натуральным показателем

1. Умножение степеней с одинаковыми основаниями.

Рассмотрим произведения двух степеней с основанием a. Учитывая, что $a^1 = a$, получим:

$$a^1a^1 = aa = a^2 = a^{1+1}; \qquad a^2a^1 = (aa)a = aaa = a^3 = a^{2+1}.$$

Следовательно, $a^1a^1 = a^{1+1}$, $a^2a^1 = a^{2+1}$. В этих примерах произведение степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, который равен сумме показателей степеней. Таким свойством обладает произведение любых степеней с одинаковыми основаниями.

Свойство 1 **Для любого числа a и произвольных натуральных чисел m и n справедливо равенство**

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

• *Доказательство.* Учитывая определение степени, получаем:

$$a^m a^n = \underbrace{(aa...a)}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{(aa...a)}_{n \text{ раз}} = \underbrace{aa...a}_{m+n \text{ раз}} = a^{m+n}. \bullet$$

Из свойства 1, которое еще называют *основным свойством степени*, следует *правило умножения степеней*:

Чтобы умножить степени с одинаковыми основаниями, нужно основание оставить прежним, а показатели степеней сложить.

Например:

$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$; $2^4 \cdot 2 = 2^4 \cdot 2^1 = 2^{4+1} = 2^5$; $b^7 \cdot b^8 = b^{7+8} = b^{15}$.

Правило умножения степеней распространяется на произведение трех и более степеней. Например:

$5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 = 5^{2+4+6} = 5^{12}$; $b^5 \cdot b^3 \cdot b^7 \cdot b = b^{5+3+7+1} = b^{16}$.

2. Деление степеней с одинаковыми основаниями.

Рассмотрим равенство $a^2 a^3 = a^5$, где $a \neq 0$. Из этого равенства по определению частного имеем: $a^5 : a^3 = a^2$. Равенство $a^5 : a^3 = a^2$ можно переписать так:

$$a^5 : a^3 = a^{5-3}.$$

В этом примере частное степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, который равен разности показателя степени делимого и показателя степени делителя. Сформулируем и докажем соответствующее свойство в общем случае.

Свойство 2 **Для любого числа $a \neq 0$ и произвольных натуральных чисел m и n, где $m > n$, справедливо равенство**

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

• *Доказательство.* Поскольку $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, то есть $a^{m-n} \cdot a^n = a^m$, то по определению частного имеем: $a^m : a^n = a^{m-n}$. •

Из доказанного свойства следует *правило деления степеней*:

Чтобы разделить степени с одинаковыми основаниями, нужно основание оставить прежним, а из показателя степени делимого вычесть показатель степени делителя.

Например: $3^7 : 3^2 = 3^{7-2} = 3^5$; $x^4 : x = x^4 : x^1 = x^{4-1} = x^3$.

3. Возведение степени в степень.

Возведем степень a^2 в куб:

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2\cdot 3}.$$

Итак, $(a^2)^3 = a^{2\cdot 3}$. Из примера видно: чтобы возвести квадрат числа в куб, нужно оставить то же основание и взять показатель, равный произведению показателей. Сформулируем и докажем соответствующее свойство в общем случае.

Свойство 3 **Для любого числа *a* и произвольных натуральных чисел *m* и *n* справедливо равенство**

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

● *Доказательство.*

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{n \text{ раз}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ раз}}} = a^{mn}. \bullet$$

Из свойства 3 следует *правило возведения степени в степень*:

Чтобы возвести степень в степень, нужно основание оставить прежним, а показатели степеней перемножить.

Например: $(4^3)^5 = 4^{3\cdot 5} = 4^{15}$; $(b^6)^4 = b^{6\cdot 4} = b^{24}$.

4. Возведение произведения в степень.

Возведем произведение ab в куб:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (aaa) \cdot (bbb) = a^3b^3.$$

Итак, $(ab)^3 = a^3b^3$. Из примера видно: чтобы возвести в куб произведение, нужно возвести в куб каждый множитель и результаты перемножить. Сформулируем и докажем соответствующее свойство в общем случае.

Свойство 4 **Для любых чисел *a* и *b* и произвольного натурального числа *n* справедливо равенство**

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

● *Доказательство.*

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n \text{ раз}} = \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}} \cdot \underbrace{bb \ldots b}_{n \text{ раз}} = a^n b^n. \bullet$$

Имеем такое правило:

Чтобы возвести в степень произведение, нужно возвести в эту степень каждый множитель и результаты перемножить.

Это правило распространяется на произведение трех и более множителей. Например:

$$(5ab)^3 = 5^3a^3b^3 = 125a^3b^3; \quad (abxy)^n = a^nb^nx^ny^n.$$

Примечание. Доказанные тождества $a^ma^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^nb^n$, выражающие свойства степени, позволяют не только заменять выражения, которые стоят в их левых частях, выражениями, которые стоят в правых частях, но и наоборот:

$$a^{m+n} = a^ma^n; \quad a^{m-n} = a^m : a^n; \quad a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m; \quad a^nb^n = (ab)^n.$$

Примеры решения упражнений

Пример 1. Упростить выражение $(a^2a)^3 \cdot (a^3a^2)^2$.

• $(a^2a)^3 \cdot (a^3a^2)^2 = (a^3)^3 \cdot (a^5)^2 = a^9a^{10} = a^{19}$. •

Пример 2. Вычислить:

а) $0{,}3^6 : 0{,}3^4 + 0{,}1^4 : 0{,}1$; б) $2{,}5^5 \cdot 2^6 \cdot 0{,}4^5$.

• а) $0{,}3^6 : 0{,}3^4 + 0{,}1^4 : 0{,}1 = 0{,}3^2 + 0{,}1^3 = 0{,}09 + 0{,}001 = 0{,}091$;

б) $2{,}5^5 \cdot 2^6 \cdot 0{,}4^5 = (2{,}5^5 \cdot 0{,}4^5) \cdot 2^6 = (2{,}5 \cdot 0{,}4)^5 \cdot 2^6 = 1^5 \cdot 2^6 = 64$. •

Пример 3. Представить 4^{18} в виде степени с основанием 4^2; 4^3; 4^6; 4^9.

• $4^{18} = 4^{2 \cdot 9} = (4^2)^9$; $4^{18} = (4^3)^6$; $4^{18} = (4^6)^3$; $4^{18} = (4^9)^2$. •

Пример 4. Представить в виде степени произведение a^6b^6.

• $a^6b^6 = (ab)^6$. •

Устно

261. Представьте в виде степени произведение:

а) b^4b^3; c^3c; $7^2 \cdot 7^5$; $3^{10} \cdot 3$; б) $a^2a^3a^4$; $2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$.

262. Представьте в виде степени частное:

а) $a^6 : a^2$; $b^8 : b^3$; б) $7^{20} : 7^{17}$; $11^8 : 11$.

263. Возведите в степень:

а) $(m^3)^4$; $(n^{10})^2$; $(b^{15})^4$; б) $(pq)^2$; $(2b)^3$; $(abc)^4$.

Уровень А

Представьте в виде степени произведение:

264. а) a^5a^2; б) b^4b^6; в) yy^7; г) $x^{25}x^{73}$;
д) $2^8 \cdot 2^{12}$; е) $0{,}3^{15} \cdot 0{,}3$; ж) $5^3 \cdot 5 \cdot 5^4$; з) $3^4 \cdot 3 \cdot 3^6 \cdot 3$.

280. а) Представьте z^{20} в виде степени с основанием z^2; z^4; z^5; z^{10}.

б) Представьте 2^{20} в виде степени с основанием 4; 16; 32.

281. а) Представьте c^{12} в виде степени с основанием c^2; c^3; c^4; c^6.

б) Представьте 3^{12} в виде степени с основанием 9; 27; 81.

282. Представьте в виде степени с основанием a:

а) $a^m a^2$; б) aa^k; в) $(a^m)^2$; г) $(a^3)^k$.

Упростите выражение:

283. а) $(a^3a^4)^5$; б) $(a^7 : a)^3$; в) $(a^2)^3 \cdot (a^4)^4$; г) $(a^5)^5 : (aa^4)^2$.

284. а) $(a^5a^6)^2$; б) $(a^8 : a^5)^5$; в) $(a^4)^2 \cdot (a^2)^4$; г) $(a^6)^3 : (a^3)^2$.

Уровень В

285. Представьте в виде степени с основанием a:

а) $(a^m \cdot a^3)^n$; б) $(a^k \cdot a^k)^n$; в) $(a^{n+2} : a)^k$; г) $(a^2)^m \cdot (a^3)^k$.

286. Докажите, что куб натурального числа, кратного 3, делится на 27.

287. Что больше: 2^{300} или 3^{200}?

288. Вычислите: $\left(1\frac{1}{3}\right)^8 : \left(1\frac{7}{9}\right)^3 - \left(1\frac{1}{3}\right)^9 \cdot \left(-\frac{27}{64}\right)^3$.

289. Докажите, что значение выражения $43^{43} \cdot 42^{43} - 33^{33} \cdot 37^{33}$ делится на 5.

Упражнения для повторения

290. Упростите выражение:

а) $2x - 3 - (3x + 1)$; б) $6a + 3 - 2(a - 2)$;

в) $-2(b - 1) + 3(5 - 2b) - 17$; г) $5(-3c + 5) + 4(3 - c) - 4 + 19c$.

291. Сколько получим числовых выражений, если в выражении $2x - 5y$ для переменной x будем выбирать значения 1, 3, 5, 7 или 9, а для переменной y — значения 2, 4, 6 или 8?

292. Автомобиль прошел некоторый путь за 1,5 ч, двигаясь с постоянной скоростью. Если бы он ехал на 12 км/ч быстрее, то прошел бы этот путь за 1,3 ч. Какой путь прошел автомобиль?

293. Из бассейна через две трубы выпустили 450 м^3 воды за 50 мин. Каждую минуту через первую трубу вытекало воды в 1,25 раза больше, чем через вторую. Сколько воды вытекло через первую трубу?

265. а) m^3m^6; б) y^7y^5; в) c^5c; г) $b^{15}b^{25}$;
д) $10^5 \cdot 10^{10}$; е) $2{,}5 \cdot 2{,}5^3$; ж) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^7$; з) $a^7a^4aa^2$.

Представьте в виде степени частное:

266. а) $x^{10} : x^3$; б) $a^{15} : a^5$; в) $5^{28} : 5^{21}$; г) $0{,}1^8 : 0{,}1^2$.

267. а) $c^{12} : c^9$; б) $b^{26} : b^8$; в) $4^{17} : 4^{15}$; г) $0{,}7^{10} : 0{,}7^4$.

268. Представьте степень b^{15} в виде произведения двух степеней с основанием b четырьмя способами.

269. Представьте степень x^{12} в виде произведения двух степеней, одной из которых является: x; x^3; x^4; x^7; x^9.

270. а) Представьте в виде степени с основанием b: $(b^3)^3$; $(b^4)^5$; $(b^5)^7$; $(b^{25})^4$.
б) Представьте в виде степени с основанием ab: a^3b^3; a^5b^5.

271. а) Представьте в виде степени с основанием m: $(m^5)^3$; $(m^2)^7$; $(m^3)^4$.
б) Представьте в виде степени с основанием mn: m^2n^2; m^7n^7.

Возведите в степень:

272. а) $(ab)^5$; б) $(4c)^2$; в) $(-2x)^3$; г) $(-0{,}1a)^2$;
д) $(3xy)^3$; е) $(-2mn)^5$; ж) $(mnk)^8$; з) $(4abcd)^4$.

273. а) $(st)^7$; б) $(-3b)^3$; в) $(-2mn)^4$; г) $(5klm)^3$.

Найдите значение выражения:

274. а) $5^8 : 5^5$; б) $0{,}2^9 : 0{,}2^7$; в) $(-2)^7 : (-2)^4$; г) $(3^2)^3 : 3^4$;
д) $8^7 : 8^5 - 3^2 \cdot 3$; е) $1{,}5^9 : 1{,}5^8 - 0{,}5^2$.

275. а) $4^{18} : 4^{15}$; б) $0{,}5^8 : 0{,}5^6$; в) $3^5 : 3^2 + 4^6 : 4^4$; г) $(10^2)^2 - 5^6 : 5^3$.

Уровень Б

Представьте в виде степени:

276. а) $2^4 \cdot 16$; б) $3^7 : 27$; в) $0{,}5^4 \cdot 0{,}25$; г) $0{,}001 \cdot 0{,}1^5$.

277. а) $9^3 \cdot 81$; б) $64 \cdot 2^3$; в) $3^{10} : 81$; г) $1{,}21 \cdot 1{,}1^4$.

Найдите значение выражения:

278. а) $2^4 \cdot 5^4$; б) $4^3 \cdot 25^3$; в) $0{,}5^6 \cdot 2^6$; г) $1{,}25^5 \cdot 2^5 \cdot 4^5$;
д) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{10} : \left(1\frac{2}{3}\right)^7$; е) $16^3 : (4^{12} : 8^4)$;
ж) $(0{,}5^{18} : 0{,}5^6) \cdot (2^{16} : 2^4)$; з) $\left(2\frac{3}{7}\right)^5 : \left(2\frac{3}{7}\right)^2 - \left(\frac{3}{7}\right)^2$.

279. а) $5^3 \cdot 2^3$; б) $8^2 \cdot 125^2$; в) $0{,}25^9 \cdot 2^9 \cdot 2^9$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{11} : \left(\frac{3}{4}\right)^8$;
д) $(27^8 : 9^5) : (9^4 \cdot 3^2)$; е) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2 - \left(3\frac{1}{3}\right)^8 : \left(3\frac{1}{3}\right)^6$.

9. Одночлен и его стандартный вид

1. Одночлены. Рассмотрим две группы выражений:

$$a,\ \ b^3,\ \ 5,\ \ 3^2,\ \ 9ab^2,\ \ -2x^4y^3,\ \ \frac{3}{7}m^2n;$$

$$3+2a,\ \ a-b,\ \ 5+x^2.$$

Какова особенность выражений первой группы? Чем они отличаются от выражений второй группы?

Выражения первой группы — это переменные, числа, их степени и произведения. Такие выражения называют *одночленами*. В общем виде *одночлен — это произведение чисел, переменных и их степеней.*

Выражения второй группы не являются одночленами, поскольку содержат действия сложения или вычитания.

Рассмотрим одночлен $-4a^2b^3$. Он содержит только один числовой множитель, который стоит на первом месте, и степени разных переменных. Такой одночлен называют *одночленом стандартного вида.*

Одночленом стандартного вида называют такой одночлен, который содержит только один числовой множитель, находящийся на первом месте, и степени разных переменных.

Числовой множитель одночлена стандартного вида называют *коэффициентом* одночлена. Коэффициент одночлена $-4a^2b^3$ равен -4. Считают, что коэффициенты одночленов a^3 и $-bc$ соответственно равны 1 и -1, поскольку $a^3 = 1 \cdot a^3$ и $-bc = -1 \cdot bc$.

Одночлен $5a^3b^2a^4$ не является одночленом стандартного вида, поскольку содержит две степени с основанием a. Умножив a^3 на a^4, этот одночлен можно записать в виде одночлена стандартного вида: $5a^3b^2a^4 = 5(a^3a^4)b^2 = 5a^7b^2$.

2. Умножение одночленов. Перемножим одночлены $-3a^2b$ и $4ab^3$. Используя свойства умножения и свойства степени, получим:

$$-3a^2b \cdot 4ab^3 = (-3 \cdot 4) \cdot (a^2a) \cdot (bb^3) = -12a^3b^4.$$

Итак, произведением одночленов $-3a^2b$ и $4ab^3$ является одночлен $-12a^3b^4$. Вообще, произведением любых одночленов является одночлен.

3. Возведение одночлена в степень. Возведем одночлен $-5a^2b$ в куб. Используя свойства степени, получим:

$$(-5a^2b)^3 = (-5)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = -125a^6b^3.$$

Итак, кубом одночлена $-5a^2b$ является одночлен $-125a^6b^3$. Вообще, натуральной степенью любого одночлена является одночлен.

4. Степень одночлена. В одночлене $3a^2bx^3$ сумма показателей степеней всех переменных равна $2 + 1 + 3 = 6$. Эту сумму называют *степенью одночлена*, говорят, что $3a^2bx^3$ — одночлен шестой степени.

Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех переменных, которые в него входят. Если одночленом является число, отличное от нуля, то считают, что степень такого одночлена равна нулю.

Например: $-a^2b^7$ — одночлен девятой степени; $2a^2$ — одночлен второй степени; $3x$ — одночлен первой степени; -2 — одночлен нулевой степени.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Записать выражение в виде одночлена стандартного вида:

а) $6ab^2 \cdot (-4ab)$; **б)** $-3a^3b \cdot 4a^2c \cdot 3c^3$; **в)** $(-x^2y \cdot 4xy^2)^3$.

● **а)** $6ab^2 \cdot (-4ab) = (6 \cdot (-4)) \cdot (aa) \cdot (b^2b) = -24a^2b^3$.

Сокращенная запись: $6ab^2 \cdot (-4ab) = -24a^2b^3$.

б) $-3a^3b \cdot 4a^2c \cdot 3c^3 = (-3 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (a^3a^2) \cdot b \cdot (cc^3) = -36a^5bc^4$.

Сокращенная запись: $-3a^3b \cdot 4a^2c \cdot 3c^3 = -36a^5bc^4$.

в) $(-x^2y \cdot 4xy^2)^3 = (-4x^3y^3)^3 = -64x^9y^9$. ●

Пример 2. Представить одночлен $4a^4b^6$ в виде:

а) произведения двух одночленов стандартного вида;

б) произведения двух одночленов, одним из которых является $2a^2b^2$;

в) квадрата одночлена стандартного вида.

● **а)** $4a^4b^6 = 4a^2b^4 \cdot a^2b^2$ (или $4a^4b^6 = 4a^4 \cdot b^6$, $4a^4b^6 = -2ab \cdot (-2a^3b^5)$ и т. п.);

б) $4a^4b^6 = 2 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^4 = 2a^2b^2 \cdot 2a^2b^4$;

в) $4a^4b^6 = (2a^2b^3)^2$. ●

Устно

294. Какие из выражений являются одночленами:

а) $\frac{a}{b}$; **б)** $-3abc$; **в)** $\frac{1}{2}a$; **г)** $a + b$;

д) $-m$; **е)** $0{,}3$; **ж)** $3a^3bc^3ab$; **з)** b?

295. Назовите одночлены стандартного вида и их коэффициенты:

$2a^2ba$; $52ab$; $0{,}03ac^4$; x; $-y$; $1{,}4a$; $4{,}8$; $5ab \cdot 3cd$.

296. Найдите степень одночленов:

$4a^2b^2$; x^3y^5; $0{,}1a^2b^3c^4$; $7xy^2$; $6a^2$; $-y^3$; $4a$; cd; 15.

297. Перемножьте одночлены:

а) $2a$ и $3b$; **б)** $4c^2$ и $2c$; **в)** $5a^2b$ и ab; **г)** $-xy^2$ и $2x$.

Уровень А

Представьте одночлен в стандартном виде и укажите его степень и коэффициент:

298. а) $4x^2yx$; б) $5abc\cdot(-2)$; в) $0{,}4a^2\cdot 4a^3b$; г) $-ab\cdot bc$;

д) $\frac{1}{3}x^3y^2\cdot 3x$; е) $-5c^3d\cdot 0{,}8c^2d$; ж) $0{,}7c\cdot 4c\cdot c^2$; з) $-6abc\cdot\frac{1}{3}b^3$.

299. а) $14y^5y$; б) $-0{,}3cc^3c$; в) $-\frac{2}{3}ab\cdot 3a^2$; г) $0{,}5aa^3\cdot 2aa^2$.

Выполните умножение одночленов:

300. а) $5a\cdot 4b$; б) $-3a^2\cdot 5a^3$; в) $0{,}3a^2b\cdot 2b$;

г) $-4ax^2\cdot 3bx^3$; д) $\frac{2}{3}m^3n\cdot(-6mn^2)$; е) $8a^2bc^2\cdot\left(-\frac{1}{2}bc\right)$;

ж) $-4{,}3ax\cdot(-2a^2)\cdot 5x$; з) $xy\cdot(-5xy^2)\cdot(-4)$; и) $-3cd\cdot(-2dc^2)\cdot cd$.

301. а) $2m\cdot 12mn^5$; б) $-cd\cdot 8c^4d$; в) $7a^3b^2c\cdot 0{,}8abc^3$;

г) $-6n^3k\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)k$; д) $-ab\cdot(-5ab^2)\cdot 2b$; е) $1{,}5xy\cdot(-2x^2y^3)\cdot x^2y$.

Возведите одночлен в степень:

302. а) $(3a^3b)^3$; б) $(-2mn^2)^4$; в) $\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^3$; г) $(-0{,}5mn^3k^4)^2$.

303. а) $(-5mn^2)^2$; б) $(3a^3b^6)^3$; в) $(-xy^2z^3)^5$; г) $(2ab^4c^3)^4$.

304. Представьте одночлен $8x^2y^3$ в виде:

а) произведения двух одночленов стандартного вида;

б) произведения двух одночленов, одним из которых является: $4x^2y^2$; $8xy$; $-2xy^3$.

305. Представьте одночлен $6b^3c^3$ в виде:

а) произведения двух одночленов стандартного вида;

б) произведения двух одночленов, одним из которых является: $2b^2c^2$; $6bc$; $-3bc^3$.

Уровень Б

Упростите выражение:

306. а) $1{,}5a^3b^3\cdot\left(-\frac{5}{6}a^4b^2\right)$; б) $(3a^2b)^3\cdot 0{,}01b^2$;

в) $0{,}8xy^3\cdot 2\frac{1}{2}x^3y^5\cdot(-0{,}5x)$; г) $(-4a^2b^3)^2\cdot(-ab^3)^2$;

д) $\left(\frac{1}{3}mn^2\right)^4\cdot(3m^3)^2\cdot(-4{,}5)$; е) $4{,}4(a^2bc)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}b^2c\right)^2\cdot ac^2$.

307. а) $15m^3n\cdot\left(-1\frac{2}{3}mn^2\right)$; б) $-\frac{1}{7}p^3q\cdot 2{,}1pq^2\cdot\frac{1}{3}p$;

в) $(-a^2b)^3\cdot(-3a^3b)^2$; г) $\left(\frac{2}{3}xy^2z\right)^2\cdot\left(-1\frac{1}{2}x^2z\right)^3\cdot xyz$.

308. Как изменится площадь квадрата, если его сторону увеличить в три раза?

309. Как изменится объем куба, если его ребро увеличить в два раза?

310. Представьте одночлен $64a^6b^{18}$ в виде:

а) произведения двух одночленов стандартного вида;

б) произведения трех одночленов стандартного вида;

в) произведения двух одночленов, одним из которых является $-4a^4b^6$;

г) квадрата одночлена стандартного вида;

д) куба одночлена стандартного вида.

311. Представьте одночлен $16x^{12}y^8$ в виде:

а) произведения трех одночленов стандартного вида;

б) произведения двух одночленов, одним из которых является $-2x^3y^7$;

в) квадрата одночлена стандартного вида;

г) четвертой степени одночлена стандартного вида.

312. Для некоторых значений переменных значение выражения m^2n^3 равно 2. Найдите для тех же значений переменных значение выражения:

а) $6m^2n^3$; б) m^4n^6; в) $4m^8n^{12}$; г) $-3m^6n^9$.

Найдите значение выражения:

313. а) $(2a^2b)^2\cdot ab^3$ при $a=2$; $b=5$;

б) $(xy^2z)^3\cdot xzy^8$ при $x=\frac{1}{7}$; $y=-1$; $z=7$;

в) $(a^2bc^2)^2\cdot abc\cdot b^2$ при $a=1\frac{1}{3}$; $b=-0{,}5$; $c=3$.

314. а) $(-mn^2)^3\cdot 10m^4n$ при $m=4$; $n=0{,}25$;

б) $(2abc^4)^2\cdot 0{,}25(ab)^6$ при $a=1\frac{3}{7}$; $b=14$; $c=-0{,}1$.

Уровень В

315. Представьте одночлен в стандартном виде:

а) $4((x^2)^3)^4\cdot(-2(x^4)^3)^2$; б) $((x^4)^n)^3\cdot 2((x^2)^n)^5$;

в) $(a^{n+1}\cdot b^{2n})^2\cdot 2a^{2n}\cdot(2b)^2$; г) $((-x)^n)^3\cdot((-x)^{n+1})^5$.

316. Найдите значение выражения:

а) $\left(-4xy^2\right)^{2n} \cdot \left(4x^3y^2\right)^{2n}$ при $x = -\frac{1}{4}$; $y = 2$; $n = 80$;

б) $\left(5^k a^{k+1} b^{k+2}\right)^2 \cdot (5ab)^k$ при $a = 0{,}1$; $b = 2$; $k = 51$.

317. Мыло имеет форму прямоугольного параллелепипеда. За неделю пользования все его размеры уменьшились в два раза. Во сколько раз уменьшился объем мыла?

Упражнения для повторения

318. Решите уравнение:

а) $2(x - 1) + 3(2 - x) = 2$; б) $\frac{x+3}{12} - \frac{x-3}{8} = \frac{2}{3}$.

319. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

а) $7c - 5 + (3c + 1 - 8c)$; б) $2a + 8 - (3a + 12 - 6a)$;

в) $(-2b + 4) - (4b - 1) + 6b$; г) $(-3x + 5) - (3 - x) - (2 + 2x)$.

320. Для покупки телевизора семья откладывала ежемесячно одну и ту же сумму денег. После того как через 10 месяцев необходимая сумма была собрана, подсчитали, что если бы ежемесячно откладывали на 25 грн. больше, то собрать необходимую сумму денег можно было бы на 2 месяца раньше. Сколько стоит телевизор?

321. Из города A в город B вышел поезд и шел со скоростью 60 км/ч, а через 3 ч навстречу ему из города B вышел второй поезд и шел со скоростью 75 км/ч. При встрече выяснилось, что первый поезд прошел на 105 км больше, чем второй. Найдите расстояние между городами A и B.

322*. Числа a и b удовлетворяют условиям: $a > 0$; $a + b < 0$.

а) Найдите знак числа b. б) Что больше: $|a|$ или $|b|$?

Интересно знать

Понятие степени с натуральным показателем возникло в античные времена в связи с вычислением площадей и объемов. Толкование степеней a^2 и a^3 было геометрическим: a^2 — это площадь квадрата со стороной a, a^3 — объем куба с ребром a. Отсюда и названия «квадрат» и «куб» для степеней a^2 и a^3, которые используют и сейчас. К сожалению, такая геометрическая привязка в те времена стала тормозом для развития алгебры. Степени a^4 («квадрато-квадрат»), a^5 («кубо-квадрат») и т. д. остались как бы «вне закона», поскольку не имели соответствующей геометрической основы.

Только в XVII в. французский математик **Рене Декарт** (1596–1650) дал геометрическое толкование произведения любого числа множителей,

после чего и произведение $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^n$ приняло «официальный статус». Декарт же ввел и современное обозначение степени с натуральным показателем в виде a^n.

Вопросы и упражнения для повторения § 3

1. Что называют степенью числа с натуральным показателем?
2. Приведите пример степени с натуральным показателем и назовите ее основание и показатель.
3. Какой знак имеет степень с натуральным показателем в зависимости от знака основания?
4. Сформулируйте и докажите основное свойство степени.
5. Сформулируйте и докажите правила умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями, возведения произведения в степень и возведения степени в степень.
6. Приведите примеры одночленов. Из чего состоит одночлен?
7. Какой одночлен называют одночленом стандартного вида? Приведите пример такого одночлена.
8. Как найти степень одночлена?

323. Найдите значение степени:

а) 10^4; б) $(-3)^6$; в) $(-0{,}5)^3$; г) $(-2{,}4)^3$;

д) $1{,}02^4$; е) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; ж) $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$; з) $\left(3\frac{1}{3}\right)^3$.

324. Вычислите:

а) $(-4) \cdot 2^4$; б) $(-4) \cdot (-2^4)$; в) $5^2 \cdot (-2)^3$; г) $5^3 \cdot (-6^3)$;

д) $(7^2 - 3^2)^2$; е) $(-4 \cdot 1{,}5 + 8)^5$; ж) $2^8 + (-2)^5$; з) $(-0{,}125 \cdot 2^3)^{15}$.

325. Найдите значение выражения:

а) $a^4 - 81$ при $a = -3$; $a = 0$; $a = 3$;

б) $(2x - 3)^3$ при $x = -1$; $x = 3$.

326. а) Представьте в виде квадрата число: 64; 169; 1,44; 0,0001; $\frac{49}{121}$; $7\frac{1}{9}$.

б) Представьте в виде куба число: 64; 1000; –27; 0,008; $-\frac{125}{216}$; $3\frac{3}{8}$.

Представьте выражение в виде степени:

327. а) a^3a^5; б) $b^9 : b^8$; в) yy^8; г) a^5aa^4;

д) $6^4 \cdot 6^{21}$; е) $(p^2)^5$; ж) $(7^5)^4$; з) $(5^3 : 5)^7$.

328. Представьте степень 3^{24} в виде произведения двух степеней, одной из которых является: 3^2; 3^4; 3^9; 3^{15}.

329. а) Представьте степень a^{36} в виде степени с основанием a^2; a^3; a^9; a^{12}.
б) Представьте степень 4^{18} в виде степени с основанием 2; 16; 8.

330. Возведите одночлен в степень:
а) $(xy)^4$; б) $(6a)^3$; в) $(-3x^2)^4$; г) $(-0{,}5a^4c^2)^2$.

331. Представьте одночлен в стандартном виде и укажите его степень:
а) $-2a^4ba$; б) $0{,}5b^2 \cdot 2a^3b$; в) $-3x^3 \cdot \frac{1}{3}xy^2$;
г) $-4a^2 \cdot 7a^5b \cdot 4b^3$; д) $2{,}5xz \cdot (-4x^3z^3) \cdot x^2z$; е) $(3a^3b^4c^5d)^4$;
ж) $1{,}2a^2b^3 \cdot \left(-\frac{1}{6}a^3b^2\right)$; з) $7\frac{1}{2}x^2y^4 \cdot \left(-1\frac{1}{3}xy\right)$; и) $(-4m^2n^5)^3 \cdot (-2mn^3)^2$.

332. Представьте одночлен $49a^4b^{12}$ в виде:
а) произведения двух одночленов стандартного вида;
б) произведения двух одночленов, одним из которых является $-7a^3b^7$;
в) квадрата одночлена стандартного вида.

333. Найдите значение выражения:
а) $(3x^2y)^3 \cdot y^3$ при $x = 2$; $y = 0{,}5$;
б) $(a^2bc)^2 \cdot 5abc^3$ при $a = 1\frac{1}{6}$; $b = -4$; $c = \frac{6}{7}$.

334*. Упростите выражение:
а) $(a^4)^{2n} \cdot (a^4a^{n+2})^2$; б) $(-2y^k)^8 \cdot (-y^3)^5$;
в) $2^{2n} \cdot 3^n \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^n$; г) $(2 \cdot (-1)^n)^3 \cdot (2 \cdot (-1)^{n+2})^5$.

335*. Какой цифрой заканчивается число 3^{81}?

336*. Что больше: 80^{20} или 9^{40}?

337*. Решите уравнение:
а) $(2x)^2 + (256x)^8 = 0$; б) $(x-2)^2 + (x+2)^2 = 0$; в) $x^6 + |3x| = 0$.

Задания для самопроверки № 3

Уровень 1

1. Какое из равенств является верным:
а) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5 \cdot 3$; б) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5^3$; в) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$?

2. Укажите верное равенство:
а) $2^5 = 10$; б) $2^5 = 32$; в) $2^5 = 25$; г) $2^5 = 16$.

3. Укажите верное равенство:
а) $2^4 \cdot 2^3 = 2^{12}$; б) $2^4 \cdot 2^3 = 4^{12}$; в) $(3^2)^3 = 6^3$; г) $(3^2)^3 = 3^6$.

4. Представьте одночлен $-3x^2yx^5$ в стандартном виде:
а) $-3yx^2x^5$; б) $-3x^{10}y$; в) $-3x^7y$; г) $-3(xy)^7$.

5. Выполните умножение $2a^2b^3 \cdot 3a^4$ и укажите верный ответ:

а) $6a^2b^7$; **б)** $6a^8b^3$; **в)** $5a^6b^3$; **г)** $6a^6b^3$.

Уровень 2

6. Установите соответствие между выражением и записью выражения в виде степени с основанием x:

а) $x^5 \cdot x^3$; **1)** x^2;
б) $x^5 : x^3$; **2)** x^8;
в) $(x^5)^3$; **3)** x^{15}.

7. Вычислите:

а) $4 \cdot 3^3 - 4^3$; **б)** $(2^5 - 4^2) \cdot 5$; **в)** $(3^2 + 1)^3$.

8. Представьте одночлен в стандартном виде:

а) $2a^4 \cdot 3a$; **б)** $-0{,}3ab^3 \cdot 5a^4b^2$; **в)** $(2ac^3)^4$.

9. Найдите значение выражения:

а) $(2xy)^3$ при $x = 2$; $y = 0{,}25$; **б)** $(a^2b)^2 \cdot ab^2$ при $a = 2$; $b = 5$.

Уровень 3

10. Запишите выражение в виде степени:

а) $(6^3 \cdot 6^4)^5 \cdot 6$; **б)** $(3^5 \cdot 3)^3 \cdot (3^4)^7$; **в)** $2^8 \cdot 4^4 \cdot 16^2$.

11. Упростите выражение:

а) $3{,}6x^2y^2 \cdot (-5x^4y^5) \cdot (-2x^2y)$; **б)** $2\frac{1}{3}a^2c^3 \cdot (3a^2b^4c^3)^3$;

в) $(-m^7n^8)^5 \cdot (-0{,}2m^3n^5)^4$; **г)** $\left(-\frac{2}{3}a^3x^4\right) \cdot \left(-1\frac{2}{3}ax^2\right)^2 \cdot \left(-1\frac{1}{2}a^2x\right)^3$.

12. Представьте одночлен $64a^{12}b^{18}$ в виде:

а) произведения трех одночленов стандартного вида;

б) произведения двух одночленов, одним из которых является $-4a^5b^8$;

в) куба одночлена стандартного вида.

13. Найдите значение выражения:

а) $(a^4c^2)^2 \cdot c^4$ при $a = 4$; $c = -0{,}5$;

б) $2(x^2yz^3)^2 \cdot x^2y^2$ при $x = 2\frac{2}{3}$; $y = -2$; $z = \frac{3}{8}$.

Уровень 4

14. Запишите выражение в виде степени с основанием 2:

а) $2^{2n} \cdot 4^{n+1} \cdot (-16)^2$; **б)** $\left(8 \cdot 2^{n+3}\right)^3 \cdot \left(4^n \cdot 2^{n+2}\right)^2$.

15. Найдите значение выражения:

а) $(8m^3n^2)^2 \cdot n^2$ при $m = 20$; $n = -0{,}025$;

б) $\left(3^{k+1}a^k\right)^2 \cdot (3ab)^4 \cdot \left(b^k\right)^2$ при $a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{1}{2}$; $k = 18$.

16. Какой цифрой заканчивается число 4^{45}?

17. Решите уравнение:

а) $(4x)^4 + (-8x)^8 = 0$; **б)** $x^2 + |2x - 1| = 0$.

§ 4. МНОГОЧЛЕНЫ

10. Многочлен и его стандарный вид

1. Многочлены. Выражение $2a^2 - 3ab - 2b + 5$ является суммой одночленов $2a^2$, $-3ab$, $-2b$ и 5. Такое выражение называют *многочленом*.

Определение **Многочленом называют сумму нескольких одночленов.**

Одночлены, составляющие многочлен, называют *членами* этого *многочлена*.

Например, членами многочлена $2a^2 - 3ab - 2b + 5$ являются одночлены $2a^2$, $-3ab$, $-2b$ и 5.

Многочлен, состоящий из двух членов, называют двучленом, многочлен, состоящий из трех членов, — трехчленом и т. д. Так,

$a^2 + b$, $2x - 3$ — двучлены;

$a^2 - ab + b^2$, $x + 2y - 1$ — трехчлены.

Считают, что каждый одночлен является многочленом, который состоит из одного члена.

2. Многочлен стандартного вида. Рассмотрим многочлен $4xy - 6 + y - 2xy + 3$. Два его члена $4xy$ и $-2xy$ являются подобными слагаемыми, поскольку отличаются только числовыми множителями. Члены -6 и 3 не содержат переменных. Они также являются подобными слагаемыми. Подобные слагаемые многочлена называют *подобными членами многочлена*.

Приведем в многочлене $4xy - 6 + y - 2xy + 3$ его подобные члены:

$$4xy - 6 + y - 2xy + 3 = (4xy - 2xy) + y + (-6 + 3) = 2xy + y - 3.$$

Многочлен $2xy + y - 3$ уже не имеет подобных членов, и каждый его член является одночленом стандартного вида. Такой многочлен называют *многочленом стандартного вида*.

Определение **Многочлен, являющийся суммой одночленов стандартного вида, среди которых нет подобных членов, называют многочленом стандартного вида.**

Среди многочленов

$a^2 + 4ab - 3b^2$, $x^2yx - 2$, $4ab + 2b^2 - ab$

только первый является многочленом стандартного вида, а два другие — нет, поскольку во втором многочлене первый член не является одночленом стандартного вида, а третий многочлен имеет подобные члены.

3. Степень многочлена. Многочлен $2x^2y^2 + y^3 - 2x$ имеет стандартный вид, и его членами являются одночлены соответственно четвертой, третьей и первой степени. Наибольшую из этих степеней называют степенью данного многочлена. Итак, $2x^2y^2 + y^3 - 2x$ — многочлен четвертой степени.

Определение **Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую степень одночленов, образующих данный многочлен.**

По этому определению $2a + 1$ и $3x - 4y + 3$ — многочлены первой степени; $ab - 3a^2 + b$ — многочлен второй степени; $-x^2y^4 + x^3 + 2y$ — многочлен шестой степени.

Члены многочлена можно записывать в произвольном порядке. Для многочленов стандартного вида, содержащих одну переменную, члены, как правило, записывают в порядке убывания или возрастания показателей степеней. Например:

$5x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x + 2$; $\qquad 2 + 3x - 4x^2 + x^3 + 5x^4$.

Каждый многочлен является целым выражением. Однако не каждое целое выражение является многочленом. Например, целые выражения $2(a + 5)$, $(a - b)^2$ — не многочлены, поскольку они не являются суммами одночленов.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Записать в стандартному виде многочлен:

а) $2x^2 + 3xy - 4x^2 + 1 - xy$; $\qquad$ б) $a^2b - 2aba + 12 + 4a^2 \cdot 2b - 15$.

• а) $\underline{2x^2} + \underline{\underline{3xy}} - \underline{4x^2} + 1 - \underline{\underline{xy}} = -2x^2 + 2xy + 1$;

б) $a^2b - 2aba + 12 + 4a^2 \cdot 2b - 15 = \underline{a^2b} - \underline{2a^2b} + \underline{\underline{12}} + \underline{8a^2b} - \underline{\underline{15}} = 7a^2b - 3$. •

Устно

338. Какие из указанных выражений являются многочленами:

а) $3a^3 + bc^2 - ab$; $\qquad$ б) $3x + 5$; $\qquad$ в) a;

г) $a^2 + \frac{1}{2}a$; $\qquad$ д) $m(2n - k)$; $\qquad$ е) $(x - 3y)^3$;

ж) $\frac{2a - 3b}{2c}$; $\qquad$ з) $-2k$; $\qquad$ и) 4,5?

339. Назовите подобные члены многочлена:

а) $4a - 3 - a + 1{,}5$; $\qquad$ б) $4xy + 4x + 4y$;

в) $3n^2 + 4n - 2n^2 + n - 1$; $\qquad$ г) $a^2 + ab + b^2 + ba$.

340. Назовите многочлены стандартного вида и найдите их степени:

а) $c^2 + 4c - 2$; $\qquad$ б) $x + y + 1$; $\qquad$ в) x;

г) $6a - a^2 + 5a + 2$; $\qquad$ д) $4y - y \cdot 2y$; $\qquad$ е) $bc + 3$.

341. Представьте многочлен в стандартном виде:

а) $4a + 3 + a - 2$; $\qquad$ б) $2aba + 3$; $\qquad$ в) $x + y + 2x - y$.

Уровень А

Запишите многочлен в стандартном виде и найдите его степень:

342. а) $3x - 2 + 2x - 5$; б) $1{,}2a + a + 3{,}5 - 2a - 4$;
в) $4m + 3 + n - 3 - n + 2m$; г) $x^2 + x + 2x^2 - 3x + 3$;
д) $-3a^3 + 5a^2 - 5a^3 - 3a^2 + 7a$; е) $-b^2 \cdot 5b - 3b^3 + 2b \cdot 3b - 2b^2$.

343. а) $5a + 6 - 3a - 4$; б) $10k + 5{,}5 - 2{,}5k - 4{,}5k$;
в) $2x^2 + 3x + x^2 - 3x - 3 + 2x$; г) $-2b^3 + 3b + 2b^2 - 3b^3 + b$.

344. Расположите члены многочлена по убыванию показателей степеней:
а) $5x - 4x^3 + 5 + x^2 - 3x^4$; б) $3a^6 + 5a - 7a^2 - 2a^4 - 2a^7 - 4$.

345. Расположите члены многочлена по возрастанию показателей степеней:
а) $6b^3 + 2b - 1 + 3b^4 + b^2$; б) $x^5 + 2x^6 - 3x - 3x^4 + 2 + 8x^8$.

Найдите значение многочлена:

346. а) $2a^2 + 3a - 2$ при $a = 2$;
б) $3x - x^2 + 1 + 2x^2 - 3x$ при $x = -1{,}1$;
в) $5ab - a^2 + 4ab + a^2$ при $a = -0{,}5$; $b = 4$.

347. а) $4x^2 + 9x - 4x + 2$ при $x = 2$;
б) $2bc + 2{,}5bc - 3 - 5bc$ при $b = 1{,}5$; $c = -4$.

Уровень Б

Запишите многочлен в стандартном виде и найдите его степень:

348. а) $4x^2y - 6x^2y - 3 + 0{,}3x^2y$;
б) $1{,}2abc + \frac{5}{6}a^2b - 0{,}8abc - 1\frac{1}{3}a^2b$;
в) $3x^2 \cdot 0{,}4x - 0{,}9x^3 + x \cdot 4y - 2xy$;
г) $7a^5b - 4b^5a + 8a^5b - 3a^5 - 5ab^5$.

349. а) $-3{,}5ab - a^2b + 3 + ab + 3a^2b$; б) $-5c^3d - 2c^2dc + 4\frac{3}{7}c^3d - 1$.

Найдите значение многочлена:

350. а) $6x^4 - 4x^2 - 8x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 1$ при $x = -1{,}2$;
б) $-4a^2b^3 + 7ab^3 - ab^3a + b^2ab - 8ab^3$ при $a = -0{,}5$; $b = 2$.

351. а) $3a^7 - 3a^4 + 6 - 4a^7 + 5a^4 + a^7$ при $a = -3$;
б) $2m^4n^2 + 4m^2n^2m^2 - 8nm^4n + 4m^2n$ при $m = -0{,}5$; $n = 4$.

Запишите у виде многочлена число, которое содержит:

352. а) a сотен, b десятков и c единиц; б) m тысяч, n сотен и k единиц.

353. а) a десятков и b единиц; б) a тысяч, b десятков и c единиц.

Уровень В

354. Запишите в виде многочлена n-значное число, записанное с помощью одной цифры a.

355. Существуют ли такие целые значения x, при которых значение многочлена $4x^2 + 2x + 11$ является четным числом?

356. Докажите, что при целых значениях x значение многочлена $x^5 - 6x^2 + 1$ не равно нулю.

357. Семизначное число делится на 7. Крайние цифры этого числа поменяли местами. Делится ли полученное число на 7?

Упражнения для повторения

358. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

а) $4a - 3 + (3a + 5 - 2a)$; б) $2x + 12 - (4x + 12 - 3x)$;

в) $(-3a + 4b) - (2a - 1) + 6b$; г) $(-4x + 4) - (3x - y) - (2 + 2y)$.

359. Решите уравнение:

а) $4 - 3y = 2(3y + 11)$; б) $0{,}5(9z + 2) = 7z + 2{,}5$;

в) $-1{,}2(m - 1) + 0{,}7 = m + 0{,}8$; г) $2(-4x + 4) - 3(3x - 2) - 3x = -1$.

360. Лодка проплыла 84 км за 4,5 ч, причем на протяжении 2,5 ч она плыла по течению реки и на протяжении 2 ч — против течения. Какова скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 2,4 км/ч?

11. Сложение и вычитание многочленов

1. Сложение многочленов. Сложим многочлены $4a^2 - 6a + 5$ и $-2a^2 + 3a + 2$:

$$(4a^2 - 6a + 5) + (-2a^2 + 3a + 2) = \underline{4a^2} - \underline{6a} + 5 - \underline{2a^2} + \underline{3a} + 2 = 2a^2 - 3a + 7.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, мы записали сумму данных многочленов в виде многочлена. Итак, суммой многочленов $4a^2 - 6a + 5$ и $-2a^2 + 3a + 2$ является многочлен $2a^2 - 3a + 7$.

Таким же образом находят сумму трех и более многочленов. Сумму любых многочленов всегда можно записать в виде многочлена.

2. Вычитание многочленов. Вычтем из многочлена $4x^2 - 4x + 7$ многочлен $2x^2 - 3x + 5$:

$$(4x^2 - 4x + 7) - (2x^2 - 3x + 5) = \underline{4x^2} - \underline{4x} + 7 - \underline{2x^2} + \underline{3x} - 5 = 2x^2 - x + 2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, мы записали разность данных многочленов в виде многочлена. Итак, разностью многочленов $4x^2 - 4x + 7$ и $2x^2 - 3x + 5$ является многочлен $2x^2 - x + 2$.

Разность любых многочленов всегда можно записать в виде многочлена.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Найти сумму многочленов:

а) $-5x^2 + 2xy - 4$ и $4x^2 - 6xy$; б) $2a^2b - 2$; $5a^2b + 2a$ и $-3a^2b + 6a$.

• а) $(-5x^2 + 2xy - 4) + (4x^2 - 6xy) = \underline{-5x^2} + \underline{\underline{2xy}} - 4 + \underline{4x^2} - \underline{\underline{6xy}} =$

$= -x^2 - 4xy - 4$.

б) $(2a^2b - 2) + (5a^2b + 2a) + (-3a^2b + 6a) =$

$= \underline{2a^2b} - 2 + \underline{5a^2b} + \underline{\underline{2a}} - \underline{3a^2b} + \underline{\underline{6a}} = 4a^2b + 8a - 2$. •

Пример 2. Найти разность многочленов $5a^2 - 1 + 4ab$ и $8a^2 - 3ab$.

• $(5a^2 - 1 + 4ab) - (8a^2 - 3ab) = \underline{5a^2} - 1 + \underline{\underline{4ab}} - \underline{8a^2} + \underline{\underline{3ab}} = -3a^2 + 7ab - 1$. •

Пример 3. Решить уравнение $4x^3 - 2x - (4x + 9 + 4x^3) = 0$.

• $4x^3 - 2x - 4x - 9 - 4x^3 = 0$; $-6x - 9 = 0$; $-6x = 9$; $x = -1{,}5$.

Ответ. $-1{,}5$. •

Пример 4. Доказать, что сумма трех последовательных нечетных чисел делится на 3.

• Пусть из трех последовательных нечетных чисел наименьшим является $2n + 1$, где n — некоторое целое число. Тогда следующие нечетные числа — $2n + 3$ и $2n + 5$. Сумма этих трех чисел

$$2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 6n + 9 = 3(2n + 3)$$

делится на 3, поскольку имеет делитель 3. •

Устно

361. Найдите сумму многочленов:

а) $2a^2 - a$ и $a^2 - 3a$; б) $4x + 1$ и $x^2 + 2x + 4$.

362. Найдите разность многочленов:

а) $5a^2 + 4a$ и $4a^2 + 2a$; б) $5y^2 + 4y + 4$ и $4y^2 + 4y$.

Уровень А

363. Даны два многочлена: $3x^2 + 2x - 5$ и $2x^2 - 2x + 3$. Запишите и представьте в виде многочлена стандартного вида:

а) сумму этих многочленов;

б) разность первого и второго многочленов;

в) разность второго и первого многочленов.

364. Запишите сумму и разность многочленов $6y^2 - 4y + 3$ и $5y^2 + 6y - 3$. Представьте сумму и разность в виде многочленов стандартного вида.

Найдите сумму многочленов:

365. а) $2a^3 - 4a^2 + a$ и $a^3 + 3a^2 - 2a + 2$; б) $5x + 2$; $-x^2 + 4x - 3$ и $3x^2 - 4$;
в) $a^2 - 2ab + b^2$ и $a^2 + 2ab + b^2$; г) $4xy - 6x$; $2x - 6xy$ и $-xy - x$.

366. а) $-3x^4 + 5x^2 - 5$ и $x^4 - 3x^2 + 4$; б) $-2b^2 - 3$; $3b^2 + 2$ и $-2b^2 + 1$.

Найдите разность многочленов:

367. а) $3c^3 + 3c^2 - 4c + 1$ и $2c^3 - 3c^2 + c - 5$;
б) $5x^3 - 4x^2 + 3x - 4$ и $7x^3 - 4x^2 + 3x + 11$;
в) $2a^2 - 8a + 5$ и $2a^2 - 2a - 5$;
г) $-a^4 + 3a^2 + 3$ и $2a^4 - 5 + 3a^3$.

368. а) $4x^3 + 3x^2 + x - 4$ и $2x^3 - x^2 + 2x + 7$;
б) $-4m^3 + 4m^2 + m - 1$ и $-4m^3 + 4m^2 + m + 1$;
в) $5a^2 + 3a + 6$ и $8a^3 + 2a^2 + 6$.

369. Найдите сумму и разность многочленов:
а) $a + b$ и $a - b$; б) $a - b$ и $b - a$.

Упростите выражение:

370. а) $4a - (5a^2 + 3a - 2)$; б) $4{,}5ab + 3a + (-2{,}6ab - 2{,}9)$;
в) $(4m^2 - 3m + n) - (-5m + m^2 - 3n)$; г) $x^2 + y - (2x^2 - y) - (-3x^2 + y)$.

371. а) $(-a + a^2) - (3a^2 - 2 + 2a)$; б) $(7x^3 - 4x) - (8x - 3x^3) - (x^3 + x)$.

Решите уравнение:

372. а) $2x^2 - 3x - (2x - 4 + 2x^2) = 0$; б) $-x^3 - 4 - (4x - x^3 + 4) = 0$.

373. а) $-5x + x^2 + 3 - (x + x^2) = 0$; б) $3x^2 + 4x + 6 - (-6x + 3x^2 - 2) = 0$.

Уровень Б

Упростите выражение:

374. а) $(-2a^2b^3 + ab^3) - (a^2b^3 - 3ab^3) - (4ab^3 - 4a^2b^3)$;
б) $3x^5 + x^4 - (2x - 3x^4 + 12) - (3x^5 + 2x^4 - 3) - (3x^4 + 2)$;
в) $5xy - (x^2 + 4xy - (-x^2 + xy))$;
г) $-4a^2 + b + (-7b - 2 + a^2 - (2a^2 - (b - 1)))$.

375. а) $7x^4 - (4x^2 - x^4 + 3x) - (-3x^2 + 8x^4 + 2x)$;
б) $6ab + 3b^2 - (1 + 2b^2) - (-2ab - 3b^2) + 1$;
в) $2n^2 + 3n - (-3n - 1 + 2n^2 - (n - 1 - n^2))$.

376. Найдите такой многочлен P, при котором равенство является тождеством:
а) $P + (2x^2 + x - 2) = -x^2 + 1$;
б) $P - (x^2 - 3x + 3) = 3x - 1$;
в) $(4x^2 - 2x + 1) - P = x^2 - 2x + 1$.

377. Найдите многочлен, который в сумме с многочленом $2x^2 + x - 4$ дае многочлен $3x + 2$.

Решите уравнение:

378. а) $4x^2 - (5x - 10 + x^2) = 3x^2$; б) $-(x^4 - 1) - (3 - 5x^4 + 4x) = 4x^4 + 5$.

379. а) $-(1 + 2x - x^2) - (3x + 5) = x^2$; б) $2 - (-6 + x - 4x^3) = 4x^3 + x + 4$.

Уровень В

380. Докажите, что сумма трех последовательных четных чисел делится на 6.

381. Докажите, что сумма четырех последовательных нечетных чисел делится на 8.

382. Учитель задал на уроке интересную задачу. Количество мальчиков, решивших задачу, оказалось таким же, как и количество девочек, не решивших ее. Кого в классе больше: тех, кто решил задачу, или девочек?

383. Найдите такие числа a и b, чтобы суммой многочленов $x^2 - abx + 3$ и $ax^2 + 2x - 4$ был многочлен $3x - 1$.

Упражнения для повторения

384. Вычислите, используя распределительное свойство умножения:

а) $18 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$; б) $24 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$; в) $\left(0,5 - \frac{1}{3}\right) \cdot 30$.

385. Упростите выражение:

а) $a^2b^3 \cdot 2ab^2$; б) $(4a^2b)^2 \cdot 2ab^2$; в) $(-3xy^2)^3 \cdot 2(xy)^2$.

386. Запишите в виде выражения:

а) удвоенное произведение выражений $3ab$ и $4ab^3$ и представьте его в виде одночлена стандартного вида;

б) сумму квадратов выражений $5a^3b$ и $-2a^2b$ и представьте ее в виде многочлена стандартного вида;

в) разность квадратов выражений $-4x^2y^3$ и x^3y и представьте ее в виде многочлена стандартного вида.

387. Масса большой детали на 120 г больше, чем малой. Какова масса обеих деталей вместе, если масса малой детали составляет 0,35 массы обеих деталей?

12. Умножение одночлена на многочлен

Умножим одночлен $2a$ на многочлен $a^2 - 3a + 4$. Используя распределительное свойство умножения, получим:

$$2a(a^2 - 3a + 4) = 2a \cdot a^2 - 2a \cdot 3a + 2a \cdot 4 = 2a^3 - 6a^2 + 8a.$$

Итак, произведением одночлена $2a$ и многочлена $a^2 - 3a + 4$ является многочлен $2a^3 - 6a^2 + 8a$. Чтобы найти произведение, мы умножили одночлен на каждый член многочлена и полученные результаты сложили.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно одночлен умножить на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

По этому правилу можно умножать и многочлен на одночлен. Например:

$$(3x^2 - x + 2)\cdot 3x = 3x^2\cdot 3x - x\cdot 3x + 2\cdot 3x = 9x^3 - 3x^2 + 6x.$$

Произведение любого одночлена и любого многочлена всегда можно записать в виде многочлена.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Выполнить умножение:

а) $2a^2b\cdot(-5b^2 + 2ab)$; **б)** $(2a + b - 3c)\cdot(-4a)$.

● **а)** $2a^2b\cdot(-5b^2 + 2ab) = 2a^2b\cdot(-5b^2) + 2a^2b\cdot 2ab = -10a^2b^3 + 4a^3b^2$.

Сокращенная запись: $2a^2b\cdot(-5b^2 + 2ab) = -10a^2b^3 + 4a^3b^2$.

б) $(2a + b - 3c)\cdot(-4a) = 2a\cdot(-4a) + b\cdot(-4a) - 3c\cdot(-4a) =$
$= -8a^2 - 4ab + 12ac$.

Сокращенная запись: $(2a + b - 3c)\cdot(-4a) = -8a^2 - 4ab + 12ac$. ●

Пример 2. Упростить выражение $5x(x^2 + 4x - 2) - 2x^2(3x - 1)$.

● $5x(x^2 + 4x - 2) - 2x^2(3x - 1) = \underline{5x^3} + \underline{\underline{20x^2}} - 10x - \underline{6x^3} + \underline{\underline{2x^2}} =$
$= -x^3 + 22x^2 - 10x$. ●

Пример 3. Решить уравнение $2x(2x + 3) - 7 = 4x^2 - 4$.

● $4x^2 + 6x - 7 = 4x^2 - 4$; $4x^2 + 6x - 4x^2 = 7 - 4$; $6x = 3$; $x = 0{,}5$.

Ответ. 0,5. ●

Устно

388. Выполните умножение:

а) $a(a + 1)$; **б)** $a(a^2 - 2a)$; **в)** $x(x^2 + x - 4)$;
г) $(a + 4)\cdot a$; **д)** $(b + 2a)\cdot b$; **е)** $(y^2 + 4y + 4)\cdot y$.

Уровень А

Перемножьте выражения:

389. **а)** $x(2x - 5)$; **б)** $2a^2(5a + 3)$; **в)** $b(4b^2 + 3b)$;
г) $-a^2(a^2 - 2a + 1)$; **д)** $4c^2(2c^3 - c^2 + 5)$; **е)** $-ab(2a - 3b - 2)$;
ж) $(x^2 - 5x)\cdot x^2$; **з)** $(-y^3 + 5y^3)\cdot(-4y)$; **и)** $(y^2 - x - 3)\cdot 2xy$.

390. **а)** $a(2a + 3)$; **б)** $3x(x^2 - 4x + 3)$; **в)** $-2b(b^2 + 2b - 3)$;
г) $3c^2(-2c^4 + c^2 + 3)$; **д)** $(-3n^2 + 2n)\cdot 2n$; **е)** $(2a^2 - 2a - 5)\cdot(-3a)$.

Запишите в виде многочлена стандартного вида:

391. **а)** $-x(4x - 3) + 3$; **б)** $(5a + 2)\cdot(-4a) + 10a^2$;
в) $a^2(2a^3 + a) - 2a^3$; **г)** $4x(2x - 3x^2) - 8x^2 - 2x$.

392. а) $-3a^2(a-1)-3a^2$; б) $2b(3b^2-2)-2b^3+1$.

Упростите выражение:

393. а) $a(2a+b)-ab$; б) $4y(2x-y)-8xy+2y^2$;
в) $2(4m^2-3)+m(-8m-3)$; г) $-x(2x-y)-(-2x^2+xy)$.

394. а) $c(c^2+3c)-3c^2$; б) $-5x(x^2+3x-4)-20x$;
в) $2a(3a-4b)+8ab-2a^2$; г) $-4ab+2a(2b+3)-6a$.

Решите уравнение

395. а) $2(2x-1)+3=x-2$; б) $9-4(1-2x)=10x$;
в) $-1{,}5(6x+1)+3x=3$; г) $4x(1-2x)+8x^2=24$.

396. а) $2+3(5x-3)=8x$; б) $24-2(2x+6)=x$.

Уровень Б

Упростите выражение:

397. а) $2a(-a+2a^2)-4(a^3+2a-2)$; б) $5x^3(3x^3-2x+1)-x^2(8x^2+5x)$;

в) $-8m^3n(mn^2-mn-n^2)-(2mn)^3$; г) $2xy^2-\frac{1}{3}x(6x+6y^2-1)+\frac{2}{3}x$;

д) $2ab(5c+2a)-a(4ab-bc)$; е) $-5x^3y(2x^2y+4y^3x)-4x^4(2xy^2-5y^4)$.

398. а) $a^2(1+2a+b^2)-(a^2b^2+a^2)$; б) $4xy(2x-y)-2x(4xy-1)$;

в) $-2m^2n^3(4mn^2-8m^2n)-(4m^2n^2)^2$; г) $\frac{2}{3}ab(6a^2-ab)-4a^3(a+b)$.

399. Докажите, что при всех значениях x выражение $x^2(x-2)-x(x^2+2)+2x(1+x)+3$ принимает одно и то же значение.

400. Докажите, что значения выражения $x(x^2+2y)-y(y+x)+y(y-x)$ не зависят от значений y.

401. Докажите, что при каждом отрицательном значении a значение выражения $a^2(a^3-a^2+a-1)-a(a^4-a^3+a^2-a+1)$ является положительным.

402. Докажите, что при любых значениях x, y и z значение выражения $x(x-y+z)+y(y-z+x)+z(z-x+y)$ является неотрицательным.

Докажите тождество:

403. а) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$;
б) $a(b^2-bc+c^2)+ab(c-b)+ac(b-c)=abc$;
в) $x^4(x^3-x^2)-x^3(x^4-x^3)+x^2(x^5-x^4)-x(x^6-x^5)=0$;
г) $ab(c-ab)+bc(a-bc)+ca(b-ca)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=3abc$.

404. а) $x(x-yz)+y(y-zx)+z(z-xy)+3xyz=x^2+y^2+z^2$;
б) $a(a^4-2a^3+3a^2)-a^2(a^3-a^2+2a)+a^3(a-1)=0$.

Решите уравнение:

405. а) $5(3x-6)+4(3-2x)=5x-8$; б) $0{,}4(2x-7)+1{,}2(3x+0{,}7)=1{,}6x$;
в) $x(3+2x+4x^2)-2x^2(2x+1)=9$; г) $2{,}5x-2x(1{,}5x+1)=1-3x^2$.

406. а) $-5(4x+3)+3x=-12(x-5)$; б) $9(x-3)-4(7-3x)-3=-8x$;
в) $3x^2(x+1)-(3x^3+3x^2+x-1)=0$; г) $1{,}2x(x+2)-3(0{,}4x^2+1)=0{,}6$.

407. а) $\frac{1-x}{6}-\frac{2x+4}{9}=\frac{1}{9}$; б) $\frac{4x+1}{36}=\frac{x-3}{12}+\frac{x+3}{18}$.

408. а) $\frac{2+3x}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7-2x}{6}$; б) $-\frac{x}{4}=\frac{2x-5}{6}-\frac{3x+2}{12}$.

409. Сумма двух чисел равна 10, а сумма их произведения и квадрата меньшего числа равна 15. Найдите эти числа.

410. Найдите площадь прямоугольника по таким данным: его длина в 2,4 раза больше, чем ширина; если ширину прямоугольника увеличить на 2 см, то площадь увеличится на 24 см^2.

411. Даны три участка прямоугольной формы. Длина первого участка в два раза больше его ширины. Второй участок имеет такую же ширину, как первый, а длину на 4 м больше, чем первый. Третий участок имеет такую же длину, как первый, а ширину на 4 м больше, чем первый. Найдите площадь первого участка, если площадь второго участка меньше площади третьего на 40 м^2.

Уровень В

412. Упростите выражение (n — натуральное число):
а) $x^{n+2}(x^{n+3}-1)-x^n(x^{n+5}-x^2)$;
б) $a^{n+1}(a^{n+1}-4)-a^n(a^{n+2}-4a+1)$;
в) $x^n(x^{n+1}(x^{n+2}+x^{n+1}(x^2-x+1)))$.

413. Докажите тождество:
$$a(1+a+a^2+\ldots+a^9+a^{10})-(1+a+a^2+\ldots+a^9+a^{10})=a^{11}-1.$$

414. Докажите, что значения выражения
$$3x^{n+2}y^{n+1}(2x^2y^3-4xy+6)-2x^{n+1}y^n(3x^3y^4-6x^2y^2+9xy),$$
где n — натуральное число, не зависят от значений x и y.

415. Ученики 7 класса пришли в театр. В антракте все они побежали в буфет. Каждый мальчик купил пирожок, а каждая девочка — булочку. Если бы каждая девочка купила пирожок, а каждый мальчик — булочку, то они вместе истратили бы на 50 к. меньше. Пирожок дороже булочки на 10 к. Кого было больше — мальчиков или девочек — и на сколько больше?

416. В банке было 3 л спирта. Из нее отлили x л спирта и долили такое же количество воды. Потом, когда спирт и вода смешались, из банки отлили x л смеси. Сколько литров спирта осталось в банке?

Упражнения для повторения

417. Первый автомобиль проходит путь между двумя городами за 1,5 ч, а второй — за 1,2 ч. Скорость второго автомобиля больше скорости первого на 15 км/ч. Найдите расстояние между городами.

418. Из города A в город B одновременно выехали легковой автомобиль и автофургон. Когда через 2,5 ч легковой автомобиль прибыл в город B, автофургону оставалось ехать до города B еще 30 км. Найдите расстояние между городами, если скорость легкового автомобиля в 1,2 раза больше скорости автофургона.

419*. Пираты захватили сундук с золотыми монетами и решили поделить добычу поровну. Если бы пиратов было на 10 меньше, то каждому досталось бы монет в 1,2 раза больше. Сколько было пиратов?

420. Выполните умножение одночленов:

а) $5a^2 \cdot 3a^3$; б) $0{,}2a^3b \cdot 10a$; в) $2ax \cdot (-0{,}3ax^2)$;

г) $4m \cdot 3m^2n$; д) $-2cd \cdot (-3c^4d)$; е) $4a^3b \cdot (-0{,}5a^2b^3)$.

421. Запишите в виде выражения:

а) произведение двучленов $a - b$ и $2a + b$;

б) произведение суммы выражений $2a$ и $3b$ и их разности.

13. Умножение многочлена на многочлен

Умножим многочлен $a + b$ на многочлен $c + d$. Сведем умножение этих многочленов к умножению многочлена на одночлен. Для этого обозначим многочлен $c + d$ через x. Тогда:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)x = ax + bx.$$

Возвращаясь к замене $x = c + d$, получаем:

$$ax + bx = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Итак, произведением многочлена $a + b$ и многочлена $c + d$ является многочлен $ac + ad + bc + bd$:

$$\boldsymbol{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.}$$

Выражение $ac + ad + bc + bd$ мы получили бы сразу, если бы умножили a на c и d, потом b на c и d и полученные произведения сложили. Можно сказать и так: произведение $ac + ad + bc + bd$ можно получить, если умножить каждый член многочлена $a + b$ на каждый член многочлена $c + d$ и полученные произведения сложить.

Приходим к такому правилу:

> ***Чтобы умножить многочлен на многочлен, достаточно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.***

Умножим по этому правилу многочлен $2a^2 + b^2$ на многочлен $2a - b$:

$$(2a^2 + b^2)(2a - b) = 2a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot (-b) + b^2 \cdot 2a + b^2 \cdot (-b) =$$
$$= 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3.$$

Выполняя умножение многочленов, промежуточные результаты можно не записывать:

$$(2a^2 + b^2)(2a - b) = 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3.$$

В каждом из рассмотренных примеров произведение двух многочленов мы записывали в виде многочлена. Вообще, произведение любых многочленов всегда можно записать в виде многочлена.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Выполнить умножение:

а) $(2x^2 - xy + 4y^2)(2x - 3y)$; **б)** $(a + b)(a + 1)(b - 1)$.

● **а)** $(2x^2 - xy + 4y^2)(2x - 3y) = 4x^3 - \underline{6x^2y} - \underline{2x^2y} + \underline{\underline{3xy^2}} + \underline{\underline{8xy^2}} - 12y^3 =$
$= 4x^3 - 8x^2y + 11xy^2 - 12y^3.$

б) Найдем произведение первых двух многочленов, а потом полученное произведение умножим на третий многочлен:

$(a + b)(a + 1)(b - 1) = (a^2 + a + ba + b)(b - 1) =$
$= a^2b - a^2 + \underline{ab} - a + b^2a - \underline{ba} + b^2 - b = a^2b - a^2 - a + ab^2 + b^2 - b.$ ●

Пример 2. Решить уравнение $(x - 2)(2x + 3) - x(2x + 4) = 3$.

● $2x^2 + 3x - 4x - 6 - 2x^2 - 4x = 3$; $-5x - 6 = 3$; $-5x = 9$; $x = -1{,}8$.

Ответ. $-1{,}8$. ●

Устно

422. Выполните умножение:

а) $(a + 2)(b + 1)$; **б)** $(a + b)(c - d)$; **в)** $(x + y)(a + b - c)$.

Уровень А

Выполните умножение:

423. а) $(x+2)(y+z)$; б) $(b+a)(c-3)$; в) $(m-4)(n+k)$;
г) $(a-b)(x-y)$; д) $(2a-3b)(2c+5)$; е) $(4a+6b)(3d-2c)$;
ж) $(x+y)(a-5b+2)$; з) $(2-c)(a-b-2)$; и) $(m-n+1)(k+l)$.

424. а) $(a+b)(c+3)$; б) $(2x+y)(3-3z)$; в) $(a-2b)(3x-4y)$;
г) $(m+n)(a-b+1)$; д) $(a+b-2)(c+5)$; е) $(2x-y-1)(a-3b)$.

Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

425. а) $(a+3)(4a-3)$; б) $(5b-4)(3b-2)$;
в) $(a^2+3a-4)(3a-2)$; г) $(n-m)(n+4m)$;
д) $(a-6b)(2a-b)$; е) $(4c-3d)(3c+d)$.

426. а) $(a-2)(a+3)$; б) $(3x+2)(2x-1)$;
в) $(a+5b)(a-b)$; г) $(4x-3y)(x-2y)$.

Упростите выражение:

427. а) $(3a-4)(2a+1)+5a$; б) $(y+3)(y-4)-y(y-1)$;
в) $(2x-5)(2x+3)-4(x^2-x)$; г) $(a^2+a-2)(a+3)+6-4a^2$;
д) $(a+b)(a-3b)+2ab$; е) $(-x+4y)(2x-y)+2x^2-9xy$.

428. а) $(x+2)(2x+3)-2x^2$; б) $(a-4)(3a-4)+16a-16$;
в) $(a+2b)(3a-4b)+3ab-3a^2$; г) $-7mn+(m+5n)(2m-3n)$.

Решите уравнение:

429. а) $(x-1)(x+2)-x^2=3$; б) $(2y-1)(2-y)+2y^2=1$.

430. а) $(x+3)(x-1)-x^2=5$; б) $5x^2+(1-x)(5x+2)=5$.

Уровень Б

Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

431. а) $(-3a+2)(2a^2+2a-3)$; б) $(3x^2-2x+1)(2x^2+5x)$;
в) $(n^2-n+3)(n^2+2n+2)$; г) $(2b^2-3b-2)(4b^2+b-4)$;
д) $(c+2)(c+3)(c-5)$; е) $(2x+1)(2x-5)(x^2+3x+2)$;
ж) $\left(\frac{2}{9}x-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}\right)$; з) $\left(2\frac{2}{9}a+3\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{19}a-\frac{9}{19}\right)$.

432. а) $(4a+3)(a^2-4a+2)$; б) $(b^2-2b+3)(3b^2-2b+1)$;
в) $(x-2)(x+5)(x-4)$; г) $(2y-3)(y+2)(4y^2+3y-3)$;
д) $\left(\frac{4}{9}b-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}b+1\right)$; е) $\left(1\frac{2}{7}x+2\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}x\right)$.

433. а) $(a+b)(a^2+5ab-b^2)$; б) $(4x^2-3xy+y^2)(2x-7y)$;
в) $(3n^2-2nm-m^2)(3n-2m)$; г) $(3a-2b)(a-2b)(a^2+2ab)$.

434. а) $(2x+y)(x^2+2xy-2y^2)$; б) $(a-b)(a+2b)(3a-2b)$.

Упростите выражение:

435. а) $(3a-1)(2a+5)+(2a-5)(3a+1)$;
б) $(x+7)(8x-1)-(2x+3)(4x-1)$;
в) $(a-2)(1-2a+2a^2)-2(a^3-3a^2-1)$;
г) $(a^2-2ab+4b^2)(a+2b)-a^3-b^3$;
д) $(3xy^2-7x^2y)(3xy^2-2x^2y)+(3xy)^3-(3xy^2)^2$.

436. а) $(4x-3)(3x+4)+(2x-3)(3x+1)$;
б) $(2b-7)(4b-1)-(8b-3)(b+1)$;
в) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)-18y^3$;
г) $(a+b)(a+b-1)-a(a-1)-b(b-1)$.

Решите уравнение:

437. а) $(x-1)(x-3)=(x-2)(x+3)$;
б) $(2y-1)(1-y)+(y+1)(2y-3)=0$;
в) $(0{,}5x-3{,}5)(6x+2)+30x=3x(x-3)-26$;
г) $\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}\right)(x-1)=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)$.

438. а) $(x+6)(x-4)=(x-5)(x+4)$;
б) $(0{,}5x+7)(4x-1)-(x+14)(2x-1)=9$;
в) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)(2x+3)=(3x-1)\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)$.

Докажите, что значения выражения не зависят от значений x:

439. а) $(x+1)(x+4)-(x+2)(x+3)$;
б) $(1-x)(2-x)(3-x)+(x-4)(x^2-2x+3)$.

440. $(x-3)(x^2+7x-3)-(x+2)(x^2+2x-28)$.

Докажите, что при каждом целом значении k значение выражения:

441. $(2k+1)(3k+2)-(2k-1)(3k-2)$ делится на 14.

442. $(3k+2)(4k-3)-(2k+3)(k-2)$ делится на 10.

443. Докажите, что выражение $(a^2+3)(a^2-1)-(a^2+4)(a^2-2)$ принимает только положительные значения.

Докажите тождество:

444. а) $(x+3)(x^2-1)=(x^2+2x-3)(x+1)$;
б) $(a-b)(b-c)(c-a)=ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)$.

445. а) $(a+2)(a^2-2a-3)=(a-3)(a^2+3a+2)$;
б) $(a+b)(b-c)-(a-b)(b+c)=2(b^2-ac)$.

446. Найдите три последовательных целых числа, квадрат наименьшего из которых на 11 меньше произведения двух других чисел.

447. Длина прямоугольника в 1,8 раза больше ширины. Если длину прямоугольника увеличить на 3 см, а ширину уменьшить на 2 см, то площадь уменьшится на 9 см^2. Найдите длину и ширину прямоугольника.

448. Длина прямоугольника на 4 см больше ширины. Если длину прямоугольника уменьшить на 1 см, а ширину увеличить на 2 см, то площадь увеличится на 10 см^2. Найдите длину и ширину прямоугольника.

Уровень В

449. Упростите выражение $(x-a)(x-b)(x-c)...(x-z)$, которое является произведением 26 множителей, в которых из переменной x вычитают переменные, обозначенные всеми 26 буквами латинского алфавита.

450. Упростите выражение (n — натуральное число):

а) $(a^n+b^n)(a^n-b^n+1)-a^{2n}+b^{2n}$; **б)** $(1+2^{n+1})(5-2^{n+1})+4^{n+1}$.

451. Докажите тождество:

а) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$;

б) $a^3+b^3+c^3=3abc$, если $a+b+c=0$.

452. **а)** Одно из целых чисел при делении на 6 дает в остатке 2, а другое — в остатке 3. Докажите, что произведение этих чисел делится на 6 без остатка.

б) Числа a, b и c при делении на 4 дают в остатке соответственно 1, 2 и 3. Докажите, что число $abc+2$ делится на 4 без остатка.

453. Даны четыре последовательных целых числа. Что больше — произведение наименьшего и наибольшего из этих чисел или произведение других двух чисел — и на сколько больше?

454. Два участка прямоугольной формы имеют равные площади. Длина второго участка на 2 м меньше длины первого, а ширина второго участка на 1 м больше ширины первого. Докажите, что длина первого участка в два раза больше ширины второго.

455. Даны два многочлена:

$$x^4+987x^3-876x^2+765x-654 \quad \text{и} \quad 9876x^4-9800x^2-75.$$

Чему равна сумма коэффициентов многочлена стандартного вида, который является произведением данных многочленов?

Упражнения для повторения

456. За 2 ручки и 8 тетрадей Олег заплатил 4 грн. 20 к. Сколько стоит ручка, если она на 10 к. дороже тетради?

457. Моторная лодка прошла 72 км, двигаясь 3 ч против течения реки и 2 ч — по течению. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде 15 км/ч.

458. От пристани A к пристани B катер шел на 20 мин дольше, чем от B к A. Найдите расстояние между пристанями, если скорость катера в стоячей воде 19,2 км/ч, а скорость течения реки 2,4 км/ч.

459. Решите уравнение:

а) $|3x - 6| = 9$; б) $2|x| - 3 = |x|$;

в) $|x - 4| = 3(4 - |x - 4|)$; г) $|x|(|x| - 1) = 2 + |x|^2$.

460. Вычислите:

а) $37 \cdot 48 + 37 \cdot 52$; б) $9{,}3 \cdot 5{,}6 - 9{,}3 \cdot 5{,}5$; в) $1{,}6 \cdot 8{,}8 - 3{,}8 \cdot 1{,}6$.

461. Запишите одночлен $24a^3b^4$ в виде произведения двух одночленов, одним из которых является:

а) $3a^2b^2$; б) $8b^3$; в) $-4ab^4$; г) $-12a^3$.

14. Разложение многочленов на множители способом вынесения общего множителя за скобки

1. В шестом классе мы изучали разложение чисел на множители. Например, число 60 можно записать в виде произведения двух чисел 12 и 5:

$$60 = 12 \cdot 5.$$

Говорят, что число 60 разложили на два множителя 12 и 5.

На множители можно разложить и многочлены. Например,

$$ab + ac = a(b + c).$$

Записав многочлен $ab + ac$ в виде произведения $a(b + c)$, говорят, что многочлен $ab + ac$ *разложили на два множителя* a и $b + c$. Каждый из этих множителей — многочлен (первый многочлен состоит только из одного члена).

Разложить многочлен на множители значит представить его в виде произведения нескольких многочленов.

Сравните

$a(b + c) = ab + ac$	умножили одночлен на многочлен; результат — многочлен
$ab + ac = a(b + c)$	разложили многочлен на множители; результат — произведение одночлена и многочлена

2. Рассмотрим один из способов разложения многочленов на множители.

Выполним умножение одночлена на многочлен:

$$x(x + y) = x \cdot x + x \cdot y = x^2 + xy.$$

Перепишем эти равенства в обратном порядке:

$$x^2 + xy = x \cdot x + x \cdot y = x(x + y).$$

Многочлен $x^2 + xy$ разложили на два множителя x и $x + y$. Чтобы разложить многочлен $x^2 + xy$ на множители, достаточно в его членах x^2 и xy выделить общий множитель x: $x^2 + xy = x \cdot x + x \cdot y$, а потом на основании распределительного свойства умножения записать полученное выражение в виде произведения многочленов x и $x + y$.

Такой способ разложения многочленов на множители называют *способом вынесения общего множителя за скобки*.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Разложить на множители многочлен $12x^3y - 18x^2y^2$.

● Сначала найдем общий числовой множитель для коэффициентов 12 и –18. Если коэффициентами являются целые числа, то в качестве общего числового множителя берут, как правило, наибольший общий делитель модулей этих коэффициентов. В нашем случае это число 6. Степени с основанием x входят в оба члена многочлена. Поскольку первый член содержит $x^3 = x^2 \cdot x$, а второй — x^2, то общим множителем для степеней с основанием x является x^2 (за скобки выносят переменную с меньшим показателем). В члены многочлена входят соответственно множители y и y^2, за скобки можно вынести y. Таким образом, за скобки можно вынести одночлен $6x^2y$:

$$12x^3y - 18x^2y^2 = 6x^2y \cdot 2x - 6x^2y \cdot 3y = 6x^2y(2x - 3y). \bullet$$

Пример 2. Разложить на множители многочлен $-2a^2b - 8a^2b^2 + 10ab^2$.

● $-2a^2b - 8a^2b^2 + 10ab^2 = -2ab(a + 4ab - 5b)$. ●

Пример 3. Разложить на множители: $5b(a - c) + 3(a - c)$.

● Данное выражение является суммой двух слагаемых, для которых общим множителем является выражение $a - c$. Вынесем этот множитель за скобки:

$$5b(a - c) + 3(a - c) = (a - c)(5b + 3). \bullet$$

Пример 4. Разложить на множители: $2x(m - n) + y(n - m)$.

● Слагаемые имеют множители $m - n$ и $n - m$, которые отличаются только знаками. В выражении $n - m$ вынесем за скобки –1, тогда второе слагаемое будет иметь вид $-y(m - n)$ и оба слагаемых будут иметь общий множитель $m - n$.

Следовательно,

$$2x(m - n) + y(n - m) = 2x(m - n) - y(m - n) = (m - n)(2x - y). \bullet$$

Пример 5. Найти значение выражения $8{,}5a^2 + a^3$ при $a = 1{,}5$.

● Разложим сначала многочлен $8{,}5a^2 + a^3$ на множители:

$$8{,}5a^2 + a^3 = a^2(8{,}5 + a).$$

При $a = 1{,}5$ получим:

$$a^2(8{,}5 + a) = 1{,}5^2 \cdot (8{,}5 + 1{,}5) = 2{,}25 \cdot 10 = 22{,}5. \bullet$$

Пример 6. Решить уравнение $4x^2 + 5x = 0$.

● Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x(4x + 5) = 0.$$

Произведение $x(4x + 5)$ равно нулю только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$x = 0 \text{ или } 4x + 5 = 0, \text{ откуда } x = 0 \text{ или } x = -1{,}25.$$

Ответ. 0; –1,25. ●

Устно

462. Найдите общий множитель членов многочлена:

а) $8 + 4b$; **б)** $15x - 10$; **в)** $3a + 3ab$;
г) $a^2 - 2a$; **д)** $mn - n^2 + n$; **е)** $18a^4b^3 - 6a^2b^2$.

463. Верно ли разложен на множители многочлен:

а) $6a + 6 = 6(a + 0)$; **б)** $6a + 6 = 6(a + 6)$; **в)** $6a + 6 = 6(a + 1)$;
г) $4xy - 2y = y(4x - 2)$; **д)** $4xy - 2y = -y(-4x + 2)$; **е)** $4xy - 2y = 2y(2x - 1)$?

Уровень А

Вынесите за скобки общий множитель:

464. **а)** $3a + 3b$; **б)** $3a + 6$; **в)** $9a - 18b$;
г) $-6a + 6b$; **д)** $3y^2 + 3y - 6$; **е)** $-15c - 10$.

465. **а)** $5a + 5$; **б)** $5a + 15b$; **в)** $15x - 25y$;
г) $2x - 4y + 8z$; **д)** $-7k + 7m$; **е)** $-4m - 2n$.

Разложите на множители и сделайте проверку:

466. **а)** $4a + 12$; **б)** $5ab + 10a$; **в)** $4ab - 2b$.

467. **а)** $2b - 8a$; **б)** $6xy + 24x$; **в)** $9mn - 6m$.

Разложите на множители:

468. **а)** $ax + bx$; **б)** $ym - yn$; **в)** $-ca + cb$; **г)** $-xz - yz$.

469. **а)** $km + kn$; **б)** $-xa + ya$; **в)** $-bx - ax$; **г)** $ta - tb$.

470. **а)** $9ax - 9bx$; **б)** $3ay - 6y$; **в)** $-7ab + 14b$;
г) $10x^2 - 15x^3$; **д)** $32b^2 - 24b^4$; **е)** $-8c^3 - 10c^5$.

471. **а)** $5xy - 5y$; **б)** $8ac - 6ab$; **в)** $c^2 + c^5$;
г) $3x^2 + 9x$; **д)** $15y^2 - 12y^4$; **е)** $-24n - 18n^3$.

472. **а)** $a^3 + 3a^2 - 10a$; **б)** $4x^5 - 8x^3 + 4x^2$; **в)** $-9a^5 - 27a^3 + 18a^4$.

473. **а)** $2x^4 - x^3 - x^2$; **б)** $2c - 4c^2 + 8c^3$; **в)** $-5b^4 + 10b^2 + 5b^5$.

Найдите значение многочлена:

474. **а)** $x^3 - 1{,}5x^2$ при $x = 2{,}5$; **б)** $xy + y^2$ при $x = -0{,}3$; $y = 10{,}3$.

475. **а)** $2{,}4a^2 - a^3$ при $a = 1{,}4$; **б)** $m^2 + mn$ при $m = 2{,}8$; $n = 7{,}2$.

Решите уравнение:

476. **а)** $x^2 - 5x = 0$; **б)** $5x^2 + 15x = 0$.

477. **а)** $x^2 + 2x = 0$; **б)** $4x - 2x^2 = 0$.

Уровень Б

Разложите на множители:

478. а) $a^2b^3 + ab^4 - a^2b^4$; б) $36x^4y^3 - 48x^6y^4$;
в) $24a^2b^3 - 16a^3b^3 - 40a^3b^2$; г) $-3m^4n^6 + 1{,}2m^5n^5 - 4{,}2m^5n^6$;
д) $\frac{2}{15}x^3y^4z^2 - \frac{4}{15}x^2y^3z^3 + \frac{14}{15}x^3y^3z^4$; е) $\frac{4}{9}abc^2 + \frac{8}{9}ab^2c - 1\frac{7}{9}a^2bc$.

479. а) $2x^4z^3 + 4x^4z^4 - 4x^4z^5$; б) $45a^4b^2 - 60a^3b^3 + 75a^2b^4$;
в) $-3{,}6m^2n^5 + 5{,}4m^3n^4 - 9m^2n^4$; г) $\frac{6}{7}x^5y^3z^4 - \frac{3}{7}x^3y^5z^4 + 1\frac{5}{7}x^3y^3z^5$.

480. а) $a(m + k) - b(m + k)$; б) $2a(x - y) + 3(x - y)$;
в) $x(a - 2b + 1) + y(a - 2b + 1)$; г) $m(a - b) + 3(b - a)$;
д) $a^2(n - 3) - 5(3 - n)$; е) $(x - 2)^2 + 4(x - 2)$;
ж) $2x(a - b) - (a - b)^2$; з) $4x(a + b) + 2x(a + b)^2$.

481. а) $m(x - k) - n(x - k)$; б) $c(a + b + 2) + 3(a + b + 2)$;
в) $a(s - t) + b(t - s)$; г) $2(a - b) - x(b - a)$;
д) $(m - 4)^2 - 5(m - 4)$; е) $x(m - n) + 2(m - n)^2$.

Найдите значение многочлена:

482. а) $\frac{4}{5}xy^2 - \frac{2}{5}y^2$ при $x = 3$; $y = 0{,}5$;
б) $\frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}ab - 1\frac{1}{3}a$ при $a = 2\frac{3}{7}$; $b = 1\frac{2}{7}$.

483. а) $\frac{2}{9}m^2n + \frac{4}{9}m^2$ при $m = -0{,}5$; $n = 88$;
б) $\frac{1}{11}xy - \frac{2}{11}y^2 + 1\frac{1}{11}y$ при $x = \frac{2}{3}$; $y = 6\frac{1}{3}$.

Решите уравнение:

484. а) $4y + 0{,}2y^2 = 0$; б) $0{,}6x^2 - 0{,}24x = 0$; в) $\frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = 0$.

485. а) $0{,}4x - 2x^2 = 0$; б) $1{,}5x^2 + 0{,}3x = 0$; в) $\frac{3}{4}x - \frac{3}{7}x^2 = 0$.

Докажите, что значение выражения:

486. а) $19^8 - 19^7$ делится на 18; б) $49^9 + 49^{10}$ делится на 50;
в) $3 \cdot 7^6 - 7^5$ делится на 20; г) $3^{10} + 2 \cdot 3^{12} + 3^{11}$ делится на 22.

487. а) $11^9 + 11^8$ делится на 12; б) $5^{12} - 2 \cdot 5^{10}$ делится на 23.

Уровень В

488. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $a^n + a^{n+2}$; б) $2^{n+m} + 2^n$; в) $4a^{2n} - 4a^n$;

г) $a^{2n}b^n + a^nb^{2n}$; д) $x^n + 2x^{n+2} + 3x^{n+3}$; е) $x^{2m} + 2x^m + x^{m+2}$.

489. Докажите, что значение выражения:

а) $15 \cdot 16^7 - 4^{14}$ делится на 14; б) $3 \cdot 2^{15} + 2^{12} - 2^{14}$ делится на 21.

490. Докажите, что если:

а) $a + b = 4$, то $a^3b^2 + a^2b^3 - 4a^2b^2 = 0$;

б) $a^2 + b^2 = 3ab$, то $a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 = 4a^3b^3$;

в) $x + y + 2 = xy$, то $x^4y^4 - x^3y^4 - x^4y^3 = 2x^3y^3$.

491. Номер автобусного билета состоит из шести цифр. Билет считают «счастливым», если в его номере сумма первых трех цифр равна сумме трех последних. Докажите, что:

а) если билет с номером $\overline{abcdef}$ является «счастливым», то и билет с номером $\overline{defabc}$ — «счастливый»;

б) сумма номеров «счастливых» билетов $\overline{abcdef}$ и $\overline{defabc}$ делится на 1001;

в) сумма номеров всевозможных «счастливых» билетов делится на 1001.

Упражнения для повторения

492. Периметр треугольника 27 см. Найдите длины сторон треугольника, если первая его сторона в 1,2 раза длиннее второй, а вторая — на 5 см длиннее третьей.

493. Автомобиль должен проехать некоторый путь, двигаясь со скоростью 70 км/ч. Если бы он ехал со скоростью на 5 км/ч больше, то проехал бы этот путь на 20 мин быстрее. Какой путь должен был проехать автомобиль?

494. Перемножьте многочлены:

а) $(5a - 7b)(4 - b)$; б) $(x^2 - y)(7x - y^3)$;

в) $(y + 3)(y^2 - y + 4)$; г) $(a^2 - 5a + 3)(a - 7)$.

495. Возьмите в скобки два последних слагаемых, поставив перед скобками знак «+»; знак «–»:

а) $2 + c + d$; б) $a + b - 4$ в) $x - y - 3$; г) $2m - 3n + k$.

496. Вычислите:

а) $2{,}3 \cdot 2{,}8 + 0{,}33 \cdot 10{,}78 + 2{,}3 \cdot 7{,}2 - 0{,}33 \cdot 0{,}78$;

б) $7{,}7 \cdot 1{,}6 - 0{,}03 \cdot 500 + 1{,}8 \cdot 1{,}6 + 1{,}6 \cdot 0{,}5$;

в) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} - 10\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} + 2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} + 1\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9}$.

15. Разложение многочленов на множители способом группировки

Изучение этого способа разложения многочленов на множители начнем с рассмотрения примера умножения многочленов. Выполним умножение двучлена $a - b$ на двучлен $x + y$ следующим образом:

$$(a - b)(x + y) = a(x + y) - b(x + y) = ax + ay - bx - by.$$

Выполняя преобразования в обратном порядке, многочлен $ax + ay - bx - by$ можно разложить на два множителя $a - b$ и $x + y$:

$$ax + ay - bx - by = (ax + ay) + (-bx - by) = a(x + y) - b(x + y) = (x + y)(a - b).$$

Проанализируем последние преобразования. Имеем многочлен, члены которого можно группировать так, чтобы каждая группа имела общий множитель: для группы $ax + ay$ — общий множитель a, для группы $-bx - by$ — общий множитель $-b$. В каждой группе выносим общий множитель за скобки. В образованной разности $a(x + y) - b(x + y)$ имеем общий множитель $x + y$. Выносим его за скобки и получаем $(x + y)(a - b)$.

Рассмотренный способ разложения многочленов на множители называют *способом группировки*. При применении этого способа нужно образовывать такие группы членов, чтобы они имели общий множитель. После вынесения в каждой группе общего множителя за скобки должен образоваться общий множитель для всех групп, который также нужно вынести за скобки.

Многочлен $ax + ay - bx - by$ можно разложить на множители, группируя его члены иначе:

$$ax + ay - bx - by = (ax - bx) + (ay - by) = x(a - b) + y(a - b) = (a - b)(x + y).$$

Сравните

$(a - b)(x + y) = ax + ay - bx - by$	умножили многочлен на многочлен; результат — многочлен
$ax + ay - bx - by = (a - b)(x + y)$	разложили многочлен на множители; результат — произведение многочленов

Примеры решения упражнений

Пример 1. Разложить на множители многочлен $3ax - 12bx + 9a - 4bx^2$.

● $3ax - 12bx + 9a - 4bx^2 = (3ax + 9a) - (4bx^2 + 12bx) =$

$= 3a(x + 3) - 4bx(x + 3) = (x + 3)(3a - 4bx).$ ●

Пример 2. Разложить на множители трехчлен $x^2 - 5x + 6$.

● Представим второй член $-5x$ в виде $-3x - 2x$. Тогда:

$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2).$ ●

Устно

497. Укажите в каждом многочлене группы членов, имеющие общий множитель, и назовите этот множитель:

а) $ax + ay + 5x + 5y$; б) $2a - 2b + an - bn$.

Уровень А

Разложите на множители:

498. а) $ax + ay + 4x + 4y$; б) $7x + by + 7y + bx$;
в) $6m - 6n + am - an$; г) $6m - 6n - am + an$;
д) $ma - na + mb - nb$; е) $5a - bx - 5b + ax$;
ж) $a + 2nb - b - 2na$; з) $4ay + 3 - 3y - 4a$.

499. а) $2a + 2b + xa + xb$; б) $ma - mb + 3a - 3b$;
в) $ka - kb - 5a + 5b$; г) $6c - ac - ab + 6b$;
д) $x + y - bx - by$; е) $7am - 7m + 5ax - 5x$.

500. а) $a^3 + a^2 + a + 1$; б) $x^3 - 4x^2 + 2x - 8$;
в) $b^2 - ab - 2b + 2a$; г) $10x + xy + 10y + x^2$;
д) $3a - ax + 3x - x^2$; е) $xya - xy + 5a - 5$.

501. а) $x^3 + 2x^2 + x + 2$; б) $a^6 + 5a^4 + 5a^2 + 25$;
в) $a^2 + 2ab + 3a + 6b$; г) $x^2 + 3xa - 2x - 6a$.

Уровень Б

Разложите на множители:

502. а) $a^2 + b^2 - a^3y - ab^2y$; б) $b^2n + y^2 - bny - by$;
в) $3a^2c + 6a^2 - 10bc - 5bc^2$; г) $12x^2 + 18y + 10x^3 + 15xy$;
д) $0{,}9ay + 1{,}2y^2 - 1{,}2ax - 1{,}6xy$; е) $\frac{3}{17}x^2yz - \frac{1}{17}x + \frac{12}{17}xy^2z^2 - \frac{4}{17}yz$.

503. а) $x^2y^2 + 2y^3 - ax^2 - 2ay$; б) $2a^2b + 2c - 4abc - a$;
в) $6x^3y + 12y^2z^2 + 9y^3 + 8x^3z^2$; г) $0{,}2mn^3 - 1{,}5m^2 + 0{,}6m^3n - 0{,}5n^2$.

504. а) $xa - xb + xc + 3a - 3b + 3c$; б) $ax^2 - ay^2 + 4az - 4bx^2 + 4by^2 - 16bz$;
в) $-5a - 5b + 3na + 3nb - ma - mb$; г) $bn^2 + cn^2 - bp + bp^2 - cp + cp^2$.

505. а) $a^2b + a + ab^2 + b + 2ab + 2$; б) $ca - cb + c + ad - bd + d$;
в) $2a^3 + 2a^2b + 2ab + 2b^2 - a - b$.

Найдите значение выражения:

506. а) $p^3 + pq^2 - p^2q - q^3$ при $p = 1{,}5$; $q = 0{,}5$;
б) $2a^3 - 6ab + a^2b - 3b^2$ при $a = 8$; $b = 21$;
в) $4x^3 + 4x^2y - 4x^2 + 3y^3 + 3xy^2 - 3y^2$ при $x = \frac{2}{7}$; $y = \frac{5}{7}$.

Вопросы и упражнения для повторения § 4

1. Дайте определение многочлена. Приведите примеры многочленов.
2. Какой многочлен называют многочленом стандартного вида?
3. Что называют степенью многочлена? Приведите пример многочлена второй степени.
4. Найдите сумму и разность многочленов $2x + 4$ и $x + 2$.
5. Как умножить одночлен на многочлен?
6. Как умножить многочлен на многочлен?
7. Что значит разложить многочлен на множители?
8. Как разложить многочлен на множители способом вынесения общего множителя за скобки? Объясните это на примере многочлена $2a^2 + 4ab$.
9. На примере многочлена $2a - 2b + na - nb$ объясните, как разложить многочлен на множители способом группировки.

520. Запишите многочлен в стандартном виде и найдите его степень:

а) $4a^2 - 3a + 1 + a^2 - 5a + 7$; б) $2x^3 + 2 - 2x^3 + 5x - 3 + 3x^2$;

в) $3aba - 2a^2b + b^2a^2 + ab \cdot 4a$; г) $x^2y - xy^2 + 2x - 6xy \cdot (-x) - 3x$.

521. Найдите сумму многочленов:

а) $2a + 3$ и $5a - 2$; б) $5x^3 - 3x^2 + 2x$ и $x^3 + 3x^2 - 2$;

в) $2x^2 - 3xy + y^2$ и $x^2 + 2xy - y^2$; г) $-x^2 - 2x + 3$; $2x^2 - 5$ и $-2x + 2$.

522. Найдите разность многочленов:

а) $3c^2 - 4c + 1$ и $3c^2 + c - 5$;

б) $3x^3 - 4x^2 + 3x - 4$ и $-3x^3 - 4x^2 + 11$;

в) $2a^5 - 8a^4 + a^2 + 5$ и $-8a^4 + a^3 - 2a - 5$;

г) $-ab + 3a^2b + 3$ и $2ab - 5 + 3a^2b$.

Выполните умножение и результат запишите в виде многочлена стандартного вида:

523. а) $a(4a - 3)$; б) $2b(b^2 + 5b - 2)$;

в) $(x^2 + 3x + 2) \cdot 2x$; г) $(3c^2 + 3c - 2) \cdot (-2c^2)$;

д) $(a - 2)(3a - 4)$; е) $(n - 2m)(n + 2m)$;

ж) $(a - 6)(2a^2 - a + 3)$; з) $(2c - d + 3)(3c + 2d)$.

524. а) $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x - 4)$; б) $(x + 2)(3x - 1)(2x + 7)$;

в) $(m - 4n)(4m^2 + mn - n^2)$; г) $(-ab^2 + 4a^3)(4a^2b + b^3)$.

525. Упростите выражение:

а) $(4 - 3b)(b - 3) + (5b - 4)(3b - 3)$;

б) $(8 - 2x)(2 + x) + (x - 2)(4 + 2x)$;

в) $ab(2a - b - 1) - (2a - 1)(ab - 1)$;

г) $(n + 2)(n^2 - 2n - 3) - (n - 3)(n^2 + 3n + 2)$;

д) $(a + b - c)(a - b + c) - (a - b - c)(a + b + c)$;

507. а) $2a^2 + ac - 2ac^2 - c^3$ при $a = 17$; $c = 4$;

б) $m^3 + m^2n - 10m + n^3 + n^2m - 10n$ при $m = \frac{1}{3}$; $n = \frac{2}{3}$.

Уровень В

508. Разложите на множители: $a^3 - a^2 + b^3 - b^2 + a^2b + b^2a$.

509. Дан многочлен $x^3 - x^2 + 3x - 3$. Докажите, что при $x > 1$ он принимает только положительные значения.

510. Для каких значений x значения многочлена $3x^3 - 9x^2 + 4x - 12$ положительны; отрицательны?

511. Решите уравнение: $(x^2 - x)(6 + 5x + x^2) = x^3(x + 4) - 5$.

512. Разложите на множители трехчлен:

а) $a^2 - 7a + 10$; б) $x^2 + 5x + 4$;

в) $x^2 + 3xy + 2y^2$; г) $a^2 - 7ab + 12b^2$.

Решите уравнение:

513. а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 + 8x + 15 = 0$.

514. а) $(x - 2)^2 + 6(x - 2) + 8 = 0$; б) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$.

Упражнения для повторения

515. Вычислите:

а) $3^3 \cdot 9^3 - 27^3$; б) $4^5 \cdot 0{,}25^5 + 2^3 \cdot 4^3 \cdot 0{,}25^3$;

в) $2^5(2^6 - 1) - 2^3(2^8 - 2^2)$; г) $3^3(3^3 - 4) - 3^2(3^4 + 4)$.

516. За 3 общих и 5 тонких тетрадей Олег заплатил 5 грн. 60 к. Общая тетрадь дороже тонкой на 80 к. Сколько стоит общая тетрадь?

517. На двух полках было 95 книг. Когда четвертую часть книг, стоящих на первой полке, переставили на вторую, то на второй полке книг стало на 5 больше, чем на первой. Сколько книг было на каждой полке сначала?

518. Площадь первого участка 63 га, а второго — 53 га. С первого участка хозяйство собрало картофеля в $1\frac{1}{8}$ раза больше, чем со второго. Какова урожайность картофеля на каждом участке, если урожайность на первом участке на 1,5 т меньше, чем на втором?

519. Прочитайте выражение словами:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) $a^2 - b^2$; г) $(a - b)(a + b)$.

е) $x^6(x^7 - (x^8 + x^7(x^2 - x + 1))) + x^{15}$.

526. Докажите тождество:

а) $(a + 1)(a^2 - 4) = (a^2 - a - 2)(a + 2)$;

б) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$;

в) $b^8 + b^4 + 1 = (b^4 - b^2 + 1)(b^4 + b^2 + 1)$;

г) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

527. Решите уравнение:

а) $4x(2x + 1) - 8x^2 = -4$;

б) $(x + 3)(x - 1) + 6 = x^2$;

в) $\frac{2x+1}{6} - \frac{x-2}{4} = 2$;

г) $\frac{1-3x}{8} + \frac{5+4x}{12} = 1\frac{5}{6}$.

528. Докажите, что значение выражения $(3n + 1)(2n - 1) + n + 7$ при каждом целом значении n делится на 6.

529. Докажите, что значения выражения $(5x + 1)(5x + 3) - 5x(5x + 4)$ не зависят от значений x.

530. Периметр прямоугольника 24 см. Если его длину увеличить на 3 см, а ширину уменьшить на 2 см, то площадь уменьшится на 5 см^2. Найдите длину и ширину прямоугольника.

531*. Решите уравнение:

а) $-(x - 1)(x - 3) + x(x + 1)(x^4 + 1) = x^6 + x^5$;

б) $(2|x| - 3)(3|x| + 2) = (2|x| + 1)(3|x| - 2)$;

в) $(x^n + x)(x^n + 1) - x^n(x^n + x + 1) = 2x + 1$, где n — натуральное число.

Разложите на множители:

532. а) $2ax - 2ay$;

б) $8c^4 + 12c^2$;

в) $x^4 + 2x^3 - 3x^2$;

г) $-8a^3 - 12a^2 + 8a$;

д) $-0{,}6a^3b^4 + 0{,}4a^2b^3$;

е) $\frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}xz + 2x^2$.

533. а) $2a + 2b + xa + xb$;

б) $3x - 3y - ax + ay$;

в) $x^3 + 2x^2 + x + 2$;

г) $0{,}1x - 0{,}2xy + 0{,}2y - 0{,}4y^2$;

д) $5a^2b + 10a^2 - 20bc - 10b^2c$;

е) $4x^2z + 25y^3 - 5x^2y - 20y^2z$.

534*. а) $x^2 - 9x + 14$;

б) $x^2 + 8x + 12$.

Решите уравнение:

535. а) $y^2 - 3y = 0$;

б) $x^2 + 2x = 0$.

в) $0{,}8x^2 + 2x = 0$;

г) $1\frac{3}{8}x^2 = 3\frac{2}{3}x$.

536*. а) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

б) $y^2 + 4y + 3 = 0$.

537. Найдите значение выражения:

а) $bc + c^2 - 5b - 5c$ при $b = 3{,}6$; $c = 1{,}4$;

б) $m^2 - mn - 4m + 4n$ при $m = 12{,}5$; $n = 2{,}5$;

в) $4ay - 4ax - 2x + 2y$ при $a = -2$; $x = 0{,}01$; $y = -6{,}99$.

538. Докажите, что значение выражения:

а) $3^{14} - 3^{12}$ делится на 8; б) $49^8 + 3 \cdot 7^{15}$ делится на 10.

539*. Докажите, что значение выражения $2^{42} + 4^{20} + 8^{15} - 16^{12}$ делится на 219.

540*. Сумма чисел x и y равна 1. Докажите, что для этих чисел справедливо равенство $x^2 + xy - 2x - y + 1 = 0$.

541*. Решите уравнение $2x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$.

Задания для самопроверки № 4

Уровень 1

1. Приведите подобные члены многочлена $x^2 + 3x - x + 1 + 2x^2 - 2$ и укажите верный ответ:

а) $3x^2 + 2$; б) $3x^2 - 2x + 1$; в) $3x^2 + 2x - 1$; г) $3x^2 - 2x - 1$.

2. Упростите выражение $2x^2 - 2x + 5 - (x^2 + 3x - 1)$ и укажите верный ответ:

а) $x^2 + x + 4$; б) $3x^2 + x + 4$; в) $x^2 - 5x + 6$; г) $x^2 - 5x + 4$.

3. Выполните умножение $c(3c - 4)$ и укажите верный ответ:

а) $3c - 4c$; б) $3c^2 - 4c$; в) $3c^2 - 4$; г) $4c - 4$.

4. Выполните умножение $(a - 1)(2a + 3)$ и укажите верный ответ:

а) $2a^2 + a + 3$; б) $2a^2 - a - 3$; в) $2a^2 + 5a - 3$; г) $2a^2 + a - 3$.

5. Решите уравнение $2(x - 2) = x$ и укажите верный ответ:

а) 2; б) –4; в) 4; г) $1\frac{1}{3}$.

6. В выражении $3x - 3y$ вынесите общий множитель за скобки и укажите верный ответ:

а) $3(x - 3y)$; б) $3(x - y)$; в) $3(x + y)$; г) $3(3x - y)$.

Уровень 2

7. Запишите в виде многочлена стандартного вида:

а) $3(4a - 1) - (12a + 3) + 2a$; б) $x^2 - 2x - 8 - (2x^2 + x - 7)$.

8. Выполните умножение:

а) $2x^2(3x^2 - x + 1)$; б) $(3a - 2b)(2a - 5b)$.

9. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $4x - 12x^2$; б) $-20 - 10a$; в) $2a^2b + 4a^3b - 2a^4b$.

10. Найдите значение выражения $2{,}5a + a^2$ при $a = 7{,}5$.

11. Решите уравнение:

а) $x - 2x^2 = 0$; б) $2x^2 + 8x = 0$.

Уровень 3

12. Найдите разность многочленов $5x^4 - 4x^3 + 3x - 4$ и $-4x^3 + 4x^2 - 4$.

13. Выполните умножение:

а) $2x^3y^2(-1{,}6x^4y^3 + 3{,}4x^2y)$; **б)** $(a - 4b)(2a^2 + ab - 2b^2)$.

14. Решите уравнение:

а) $\frac{3x-5}{8} - \frac{3+5x}{12} = -1$; **б)** $(2x - 3)(3x + 2) = (2x + 3)(x - 2)$.

15. Разложите на множители:

а) $(m - n)(m - 2n) + 3m - 3n$; **б)** $a^2m + x^2 - amx - ax$.

16. Докажите, что при каждом целом значении k значение выражения $(k + 5)(k^2 - k + 1) - 4k(k + 1) - k^3 + 3$ делится на 8.

Уровень 4

17. Запишите в виде многочлена стандартного вида:

а) $\left(2\frac{1}{3}a^2 - 2\frac{4}{5}ab\right)\left(\frac{3}{7}ab - \frac{5}{7}b^2\right)$; **б)** $(x + y)(x + 2y)(x + 3y)$.

18. Вычислите: $(2^{15} + 3)(2^{14} + 4^7 - 3) - 2^{30}$.

19. Решите уравнение:

а) $x^3 + 6x^2 + 2x + 12 = 0$; **б)** $(|x| - 1)(2|x| - 3) = 2x^2$.

20. Разложите на множители:

а) $\frac{2}{9}a - \frac{2}{9}b + (a - b)^2$; **б)** $x^2 + (a + 2)x + 2a$.

21. Периметры каждого из двух прямоугольников равны 18 см. Ширина и площадь первого прямоугольника больше ширины и площади второго прямоугольника соответственно на 2 см и 6 см^2. Найдите площадь каждого прямоугольника.

§ 5. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

16. Умножение разности двух выражений на их сумму

Умножим разность $a - b$ на сумму $a + b$:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Итак,

$$\mathbf{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.}$$

Полученное тождество позволяет умножать разность двух выражений на их сумму не по правилу умножения двух многочленов, а сокращенно: сразу записывать произведение в виде $a^2 - b^2$. Поэтому доказанное тождество называют *формулой сокращенного умножения*. Формулируют ее так:

> ***Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.***

Умножим по этому правилу разность $2x - 3y$ на сумму $2x + 3y$:

$$(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2.$$

Из переместительного свойства умножения следует, что произведение суммы двух выражений и их разности равно разности квадратов этих выражений:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Примеры решения упражнений

Пример 1. Выполнить умножение:

а) $(3a^2 + 5b^3)(3a^2 - 5b^3)$; **б)** $(-a - 2b)(a - 2b)$; **в)** $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$.

● **а)** $(3a^2 + 5b^3)(3a^2 - 5b^3) = (3a^2)^2 - (5b^3)^2 = 9a^4 - 25b^6$;

б) $(-a - 2b)(a - 2b) = -(a + 2b)(a - 2b) = -(a^2 - 4b^2) = 4b^2 - a^2$;

в) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x^2)^2 - 9^2 = x^4 - 81$. ●

Пример 2. Вычислить $3{,}2 \cdot 2{,}8$.

● $3{,}2 \cdot 2{,}8 = (3 + 0{,}2)(3 - 0{,}2) = 3^2 - 0{,}2^2 = 9 - 0{,}04 = 8{,}96$. ●

Устно

542. Укажите верное равенство:

а) $(a - 2b)(a + 2b) = a^2 - 2b^2$; **б)** $(a - 2b)(a + 2b) = a^2 + 4b^2$;

в) $(a - 2b)(a + 2b) = (a - 2b)^2$; **г)** $(a - 2b)(a + 2b) = a^2 - 4b^2$.

Уровень А

Перемножьте многочлены:

543. **а)** $(k - n)(k + n)$; **б)** $(m - 4)(m + 4)$;

в) $(1 - b)(1 + b)$; **г)** $(4a + 5b)(4a - 5b)$.

544. а) $(b + c)(b - c)$; б) $(4 + n)(4 - n)$; в) $(3y - 2z)(3y + 2z)$.

545. а) $(b + a)(-a + b)$; б) $(x + 2)(-x + 2)$; в) $(-1 + b)(1 + b)$.

Запишите в виде многочлена:

546. а) $(y^2 - 1)(y^2 + 1)$; б) $(2 + b^3)(2 - b^3)$; в) $(m - 3m^2)(m + 3m^2)$;
г) $(2ab + 5)(2ab - 5)$; д) $(4n^2 + k)(-4n^2 + k)$; е) $(-a^2 + 3b)(a^2 + 3b)$.

547. а) $(a^2 + 3)(a^2 - 3)$; б) $(2x^3 - 7)(2x^3 + 7)$; в) $(6 - 5zt)(6 + 5zt)$;
г) $(-2 + c)(2 + c)$; д) $(4x + 3y)(-4x + 3y)$; е) $(-2a + 5b)(2a + 5b)$.

548. Найдите значение выражения $(x - y)(x + y)$, если:
а) $x = 100$ и $y = 2$; б) $x = 10$ и $y = 0{,}2$; в) $x = 1$ и $y = 0{,}02$.

Вычислите:

549. а) $99 \cdot 101$; б) $198 \cdot 202$; в) $53 \cdot 47$; г) $85 \cdot 95$;
д) $10{,}2 \cdot 9{,}8$; е) $7{,}7 \cdot 8{,}3$; ж) $1{,}02 \cdot 0{,}98$; з) $4{,}95 \cdot 5{,}05$.

550. а) $49 \cdot 51$; б) $73 \cdot 67$; в) $20{,}5 \cdot 19{,}5$;
г) $9{,}6 \cdot 10{,}4$; д) $5{,}03 \cdot 4{,}97$; е) $1{,}96 \cdot 2{,}04$.

Уровень Б

Упростите выражение:

551. а) $(a + 1)(a - 1) + (2 - a)(2 + a)$; б) $(b + 3)(b - 3) - (b - 2)(b + 2)$;
в) $(5x - 2x^2)(5x + 2x^2) - 25x^2$; г) $c^4 - (c^2 + 8c^4)(c^2 - 8c^4)$;
д) $(3ab - 4c^2)(3ab + 4c^2) + (2c)^4$;
е) $(-a + 2b)(a + 2b) - (2b + 3a)(2b - 3a)$;
ж) $(4 - 3b^2)(4 + 3b^2) - (2 - 3b)(8 + 3b^3)$.

552. а) $(x + 3)(x - 3) - (x - 4)(x + 4)$; б) $(5 - 2c)(5 + 2c) - 2c(1 - 2c)$;
в) $a^2(a^2 + 7)(a^2 - 7) + 49a^2$; г) $(-xy - 2z^2)(-xy + 2z^2) - (xy)^2$;
д) $(a + b)(a - b) + (b + c)(b - c) + (c + a)(c - a)$.

553. а) $\left(z - \frac{2}{3}\right)\left(z + \frac{2}{3}\right) + 1\frac{4}{9}$; б) $\left(\frac{3}{7}a + \frac{2}{5}b\right)\left(\frac{3}{7}a - \frac{2}{5}b\right) + b^2$;
в) $\left(1\frac{1}{3} - x\right)\left(1\frac{1}{3} + x\right) - 2\frac{4}{9}$; г) $\left(\frac{1}{3}a^2 - 1\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}a^2 + 1\frac{1}{9}\right) + a^4 + 1\frac{19}{81}$.

554. а) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{7}\right) + \frac{9}{49}$; б) $\left(2\frac{1}{3}b + 1\frac{2}{3}\right)\left(2\frac{1}{3}b - 1\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{9}b^2$.

555. а) $(b + 1)(b - 1)(b^2 + 1)$; б) $(2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1)$;
в) $(2 - y)(2 + y)(4 + y^2)$; г) $(4 + 3n)(-4 + 3n)(16 + 9n^2)$;
д) $(y - 2z)(y + 2z)(y^2 + 4z^2)$; е) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$.

556. а) $(3 - c)(3 + c)(9 + c^2)$; б) $(z + 5)(z - 5)(z^2 + 25)$;
в) $(4x - y)(4x + y)(16x^2 + y^2)$; г) $(2 + 3k^2)(-2 + 3k^2)(9k^4 + 4)$.

557. Докажите, что значение выражения $(8n + 5)(8n - 5) - (7n - 5)(7n + 5)$ при каждом целом значении n делится на 15.

558. Докажите, что значения выражения $(4x + 3)(4x - 3) - (4x - 5)(4x + 5)$ не зависят от значений x.

Решите уравнение:

559. а) $(y - 3)(y + 3) + y(2 - y) = 1$; б) $(2x - 0{,}5)(2x + 0{,}5) = x(4x - 0{,}5)$;
в) $x^2 + (-4 - x)(-4 + x) = 8(x + 1)$; г) $(-z^2 + 1)(z^2 + 1) = 1 - z(1 + z^3)$.

560. а) $2x(1 - 8x) + (4x - 1)(4x + 1) = 0$; б) $(2 - 3y)(2 + 3y) = (9y - 2)(2 - y)$.

Уровень В

561. Упростите выражение:
а) $(a + b - c)(a - b) + (b + c - a)(b - c) + (c + a - b)(c - a)$;
б) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})$.

562. Докажите, что если $a - b = 1$, то:

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8) = a^{16} - b^{16}.$$

563. Докажите, что $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1$.

564. Решите уравнение $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 + x$.

565. Даны квадрат и прямоугольник. Длина прямоугольника на 2 см больше, а ширина — на 2 см меньше, чем сторона квадрата. Что больше — площадь квадрата или площадь прямоугольника?

Упражнения для повторения

566. Скорость велосипедиста в 2,5 раза больше скорости пешехода. За 2 ч пешеход проходит на 2,5 км меньше, чем проезжает велосипедист за 1 ч. Найдите скорость пешехода.

567. Вкладчик внес в банк 4000 грн. За первый год ему начислили 8% годовых, а потом банковскую ставку увеличили. В конце второго года на счету вкладчика было 4752 грн. Сколько процентов годовых начал начислять банк после увеличения ставки?

568*. Сплав меди и цинка общей массой 3,6 кг содержит 45% меди. Сколько килограммов меди нужно добавить к этому сплаву, чтобы получить новый сплав, который содержал бы 60% меди?

569. Замените степень произведением и запишите полученное произведение в виде многочлена:
а) $(a + 1)^2$; б) $(2b - 1)^2$; в) $(5 - 2x)^2$.

570. Запишите в виде выражения:
а) сумму квадратов чисел x и y; б) квадрат суммы чисел x и y;
в) разность квадратов чисел a и c; г) квадрат разности чисел a и c.

17. Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений

1. Квадрат суммы двух выражений. Возведем в квадрат сумму $a + b$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Итак,

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.}$$

Полученное тождество называют *формулой квадрата суммы*. Оно является формулой сокращенного умножения, поскольку позволяет возводить в квадрат сумму любых двух выражений не по правилу умножения двух многочленов, а сокращенно: сразу записывать квадрат в виде трехчлена $a^2 + 2ab + b^2$. Формулируют формулу квадрата суммы так:

> ***Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение этих выражений плюс квадрат второго выражения.***

Возведем в квадрат сумму $2x + 3y$:

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

При возведении суммы $2x + 3y$ в квадрат промежуточные преобразования можно выполнять устно:

$$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

2. Квадрат разности двух выражений. Возведем в квадрат разность $a - b$:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Итак, получили такую *формулу квадрата разности*:

$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$$

> ***Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение этих выражений плюс квадрат второго выражения.***

Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений еще называют *квадратом двучлена*.

Квадраты противоположных чисел равны: $(-a)^2 = a^2$. Поэтому при возведении в квадрат выражений $-a - b$ и $-a + b$ можно пользоваться формулами:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(-a + b)^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Для тех, кто хочет знать больше

Чтобы возвести сумму или разность двух выражений в куб, можно использовать *формулы куба суммы* или *куба разности*:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Докажем эти формулы.

1. $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) =$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

2. $(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

Формулируют формулу куба суммы так:

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго плюс куб второго выражения.

Формулу куба разности формулируют аналогично.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Возвести в квадрат выражение:

а) $xy - 2z^2$; **б)** $-3m - n$; **в)** $-x + 5y$; **г)** $a + b - c$.

● **а)** $(xy - 2z^2)^2 = (xy)^2 - 2\cdot xy\cdot 2z^2 + (2z^2)^2 = x^2y^2 - 4xyz^2 + 4z^4$;

б) $(-3m - n)^2 = (3m + n)^2 = 9m^2 + 6mn + n^2$;

в) $(-x + 5y)^2 = (x - 5y)^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$;

г) $(a + b - c)^2 = ((a + b) - c)^2 = (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$. ●

Устно

571. Возведите в квадрат двучлен:

а) $x + y$; **б)** $x - y$; **в)** $a + 1$; **г)** $a - 1$.

Уровень А

Возведите в квадрат:

572. **а)** $(k + n)^2$; **б)** $(b + 2)^2$; **в)** $(c - 4)^2$;
г) $(3 + a)^2$; **д)** $(5 - b)^2$; **е)** $(a + 15)^2$;
ж) $(x - 0,5)^2$; **з)** $(1,2 - c)^2$; **и)** $(n + 2,5)^2$.

573. **а)** $(b - c)^2$; **б)** $(x + 4)^2$; **в)** $(a - 2)^2$;
г) $(3 - n)^2$; **д)** $(0,3 + z)^2$; **е)** $(1,5 - b)^2$.

574. **а)** $(2a + 1)^2$; **б)** $(2c - 5)^2$; **в)** $(3 - 4a)^2$;
г) $(4c - 0,5)^2$; **д)** $(2b - 0,5c)^2$; **е)** $(5x - 0,2)^2$.

575. **а)** $(3b - 1)^2$; **б)** $(5z + 2)^2$; **в)** $(6a + b)^2$;
г) $(4x - 5y)^2$; **д)** $(0,3a + 10b)^2$; **е)** $(8b - 0,5)^2$.

Упростите выражение:

576. **а)** $(a + 1)^2 + (a - 1)^2$; **б)** $(b + 2)^2 - 4(b + 1)$;
в) $(5 - 2x)^2 - 25 - 4x^2$; **г)** $x^2 - 1 - (x - 1)^2$.

577. а) $(4-b)^2+8b-b^2$; б) $(x+2)^2+(x-2)^2$.

Решите уравнение:

578. а) $(x+2)^2-x^2=8$; б) $(x-3)^2-x^2=21$.

579. а) $(x-1)^2-x^2=11$; б) $(x+4)^2-x^2=24$.

Уровень Б

Возведите в квадрат:

580. а) $(-b+c)^2$; б) $(-x-y)^2$; в) $(-2a+3)^2$;
г) $(-4x+5y)^2$; д) $(-2m-10n)^2$; е) $(-2{,}5a+4)^2$.

581. а) $(-m-n)^2$; б) $(-b+5)^2$; в) $(-3x+y)^2$;
г) $(-4c-3d)^2$; д) $(-k-1{,}5)^2$; е) $(-0{,}5z+2)^2$.

Представьте в виде многочлена стандартного вида:

582. а) $(y^2+1)^2$; б) $(2-x^3)^2$; в) $(2m-m^2)^2$;
г) $(-4a^2+a)^2$; д) $(4a^2-ac)^2$; е) $(-4a^2-3b)^2$.
ж) $(-m^2-0{,}5nk)^2$; з) $\left(3x^2-\frac{2}{3}x\right)^2$; и) $\left(1\frac{1}{4}ab+\frac{2}{5}ac\right)^2$.

583. а) $(a^2+2)^2$; б) $(2b^3-4)^2$; в) $(-2x-x^2)^2$;
г) $(-2a^2+5ab)^2$; д) $\left(\frac{3}{4}xy-\frac{1}{3}\right)^2$; е) $\left(\frac{2}{7}x-2\frac{1}{3}x^2\right)^2$.

Возведите в квадрат:

584. а) $(a-b+1)^2$; б) $(3c-2a+3)^2$; в) $(3-x-2x^2)^2$.

585. а) $(2-x+y)^2$; б) $(-2m+1-3n)^2$; в) $(a^2+5a+4)^2$.

Докажите тождество:

586. а) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$;
б) $(2xy)^2+(x^2-y^2)^2=(x^2+y^2)^2$;
в) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

587. а) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$;
б) $(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.

Упростите выражение:

588. а) $(2a-1)^2-(2a+1)^2$; б) $(x^2+1)^2-x^2(x^2+2)$;
в) $(2n-1)^2+(2n)^2+(2n+1)^2$; г) $(a+b-4)^2+8(a+b-2)$.

589. а) $(-a+2b)^2+(a+2b)^2$; б) $(x^2-3)^2+(3x-1)(2x+9)$;
в) $(a-b+1)^2-2(1-b)(1+a)$.

Решите уравнение:

590. а) $(5x+4)^2=(1-5x)^2$; б) $(3x-5)(3x+5)=7+(3x-4)^2$;
в) $(2y+3)^2-(4y-2)(y-6)=16$; г) $(3x-1)^2+(4x-1)^2=(5x-1)^2$.

591. а) $(2x-3)^2-3=(2x+1)^2-11$; б) $16y^2-(4y-3)^2=15y-90$;
в) $3(x-1)^2-(2-x)(2+x)=(2x-1)^2$.

Уровень В

592. Возведите в куб:

а) $(a+1)^3$; б) $(2x-y)^3$; в) $(3m+4n)^3$.

593. Упростите выражение: $(a^{10}-b^{10})^2(a^{10}+b^{10})^2-(a^{20}+b^{20})^2$.

594. Докажите, что при каждом натуральном значении n значение выражения $(5^n+2)^2-2(5^n+2)(5^n-2)+(5^n-2)^2$ делится на 16.

595. Докажите, что выражение $(x^2+xy+y^2)^2-(x+y)^4+2xy(x+y)^2$ принимает только неотрицательные значения.

596. Целое число при делении на 7 дает в остатке 3. Какой остаток при делении на 7 дает квадрат этого числа?

597. Целое число m не делится на 5. Докажите, что число m^4-1 делится на 5.

598. Число a является квадратом некоторого натурального числа. Может ли запись числа a заканчиваться двумя шестерками?

Упражнения для повторения

599. Одно число составляет 0,8 другого числа и меньше его на 12. Найдите эти числа.

600. Одно из чисел на 80% больше другого. Если из большего числа вычесть 3,4, а к меньшему прибавить 2,2, то получим одинаковые результаты. Найдите эти числа.

601. Рабочий и его ученик изготовили 81 деталь, причем рабочий изготовил на 70% деталей больше, чем ученик. Сколько деталей изготовил рабочий и сколько ученик?

602. Представьте в виде квадратов числа: 81; 441; 625; 3,24; 0,09; 0,36; $\frac{16}{49}$; $11\frac{1}{9}$.

603. Представьте выражение в виде квадрата одночлена стандартного вида:

а) $16x^2$; б) $196c^4$; в) $0{,}25b^2c^2$; г) $\frac{9}{64}x^4y^6z^2$.

604. Разложите на множители:

а) $(2x-3y)(2x+3y)+9y^2+4x$; б) $a^6+2a^4+2a^2+4$.

18. Разложение на множители разности квадратов двух выражений

В тождестве $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ поменяем местами левую и правую части:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Полученное тождество называют *формулой разности квадратов* двух выражений. Формулируют ее так:

> ***Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.***

Формула разности квадратов позволяет разложить на множители двучлена $a^2 - b^2$. Ее можно использовать при разложении на множители разности квадратов любых двух выражений. Например:

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3).$$

Сравните

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$	умножили разность двух выражений на их сумму; результат — многочлен (разность квадратов двух выражений)
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	разложили на множители разность квадратов двух выражений; результат — произведение разности выражений и их суммы

Примеры решения упражнений

Пример 1. Разложить на множители:

а) $16x^4 - 2{,}25y^2z^2$; **б)** $(4a - b)^2 - a^2$.

• **а)** $16x^4 - 2{,}25y^2z^2 = (4x^2)^2 - (1{,}5yz)^2 = (4x^2 - 1{,}5yz)(4x^2 + 1{,}5yz)$;

б) $(4a - b)^2 - a^2 = (4a - b - a)(4a - b + a) = (3a - b)(5a - b)$. •

Пример 2. Вычислить $75^2 - 65^2$.

• $75^2 - 65^2 = (75 - 65)(75 + 65) = 10 \cdot 140 = 1400$. •

Пример 3. Решить уравнение $(x - 3)^2 - 36 = 0$.

• $(x - 3)^2 - 36 = 0$; $(x - 3)^2 - 6^2 = 0$; $(x - 3 - 6)(x - 3 + 6) = 0$;

$(x - 9)(x + 3) = 0$; $x - 9 = 0$ или $x + 3 = 0$; $x = 9$ или $x = -3$.

Ответ. 9; –3. •

Устно

605. Разложить на множители:

а) $x^2 - y^2$; **б)** $p^2 - 4$; **в)** $16 - c^2$.

Уровень А

Разложите на множители:

606. **а)** $a^2 - 9$; **б)** $b^2 - 1$; **в)** $1 - x^2$; **г)** $16 - y^2$;

д) $4z^2 - 36$; **е)** $49a^2 - 9b^2$; **ж)** $100x^2 - 121y^2$; **з)** $9 - a^2b^2$.

607. а) $b^2 - 25$; б) $9c^2 - 1$; в) $25 - 64y^2$;
г) $36m^2 - 49n^2$; д) $400 - z^2$; е) $81p^2 - 121q^2$.

Вычислите:

608. а) $45^2 - 44^2$; б) $81^2 - 71^2$; в) $138^2 - 38^2$; г) $6{,}7^2 - 3{,}3^2$.

609. а) $29^2 - 28^2$; б) $205^2 - 105^2$; в) $78^2 - 22^2$; г) $9{,}5^2 - 8{,}5^2$.

Найдите значение выражения:

610. $x^2 - y^2$ при $x = 42$ і $y = 32$; $x = 2{,}8$ и $y = 7{,}2$; $x = 54$ и $y = -46$.

611. $m^2 - n^2$ при $m = 116$ и $n = 16$; $m = 5{,}7$ и $n = -4{,}7$.

Решите уравнение:

612. а) $x^2 - 4 = 0$; б) $25x^2 - 16 = 0$.

613. а) $y^2 - 36 = 0$; б) $100x^2 - 49 = 0$.

Уровень Б

Разложите на множители:

614. а) $a^4 - b^2$; б) $25m^2 - 64n^8$; в) $36 - 4a^6c^2$;
г) $0{,}01 - 6{,}25x^8y^{10}$; д) $\frac{9}{49}a^2 - 16x^4y^8$; е) $2\frac{7}{9} - 0{,}81a^4b^8c^{12}$.

615. а) $4a^8 - 25b^2c^2$; б) $1{,}96m^{20} - 0{,}09n^2$; в) $\frac{4}{9}a^8b^4c^2 - 2\frac{1}{4}x^6$.

616. а) $(a + 2)^2 - 1$; б) $(3b - 1)^2 - 4$; в) $16 - (3b + 2)^2$;
г) $(2a - 5)^2 - 25b^2$; д) $(4x + 3)^2 - (3x + 2)^2$; е) $(a - 3b)^2 - (3a + 5b)^2$.

617. а) $(2x - 1)^2 - 9$; б) $4a^2 - (4a + 3)^2$; в) $(4x - y)^2 - (5x - 2y)^2$.

Найдите значение выражения:

618. $a^2 - 4b^2$ при $a = 3{,}28$ и $b = 3{,}36$; $a = 1\frac{4}{7}$ и $b = \frac{2}{7}$.

619. $9p^2 - q^2$ при $p = 2{,}3$ и $q = -1{,}9$; $p = \frac{3}{14}$ и $q = \frac{5}{14}$.

Решите уравнение:

620. а) $(x + 3)^2 - 1 = 0$; б) $(5y - 2)^2 - 9 = 0$;
в) $(3z + 5)^2 - 4z^2 = 0$; г) $(2x - 3)^2 - (3x + 3)^2 = 0$.

621. а) $(2x - 5)^2 - 1 = 0$; б) $(4y - 7)^2 - (y + 2)^2 = 0$.

622. Докажите, что значение выражения делится на данное число:
а) $4575^2 - 1425^2$ на 1000; б) $843^2 - 257^2$ на 200.

Уровень В

623. Пусть два числа a и b равны: $a = b$. Обе части равенства умножим на a и потом вычтем из обеих частей b^2. Получаем:

$$a^2 = ab; \quad a^2 - b^2 = ab - b^2; \quad (a + b)(a - b) = b(a - b).$$

Отсюда $a + b = b$. Из полученного равенства, учитывая, что $a = b$, получим:

$$b + b = b; \quad 2b = b; \quad b = \frac{b}{2}.$$

Итак, получили, что любое число равно своей половине.

Найдите ошибку в обосновании этого умозаключения.

624. Докажите, что значение выражения $(4k + 2)^2 - (4k - 2)^2$ при любом целом значении k делится на 32.

625. Разложите на множители:

а) $a^8 - b^8$; б) $1 - x^{16}$.

626. Решите уравнение:

а) $x^4 - 16 = 0$; б) $x^8 - 1 = 0$; в) $(x^2 + 4x - 7)^2 - (x^2 + 4x + 7)^2 = 0$.

627. Докажите, что разность квадратов двух целых чисел, одно из которых при делении на 5 дает в остатке 3, а другое — 2, кратна 5.

Упражнения для повторения

628. Вычислите:

а) $1{,}8 \cdot \left(0{,}5 - \frac{1}{3} + 1\frac{1}{6}\right)$; б) $4\frac{7}{20} : 1\frac{9}{20} - 20 \cdot \left(3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{4}\right)$.

629. Отцу 36 лет, а сыну — 12.

а) Через сколько лет отец будет в два раза старше сына?

б) Сколько лет тому назад отец был в 5 раз старше сына?

630. Из города A в город B, расстояние между которыми 250 км, выехал автобус. Через 40 мин из города B навстречу ему выехал автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости автобуса. Через 1,5 ч после выезда автомобиля он встретил автобус. Какова скорость автомобиля?

631. Возведите в квадрат:

а) $(m - 5)^2$; б) $(3a + 1)^2$; в) $(4b - 3)^2$; г) $(-2a - 5b)^2$.

19. Разложение многочленов на множители с использованием формул квадрата суммы и квадрата разности

Запишем формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений (квадрата двучлена), поменяв в них левые и правые части:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b);$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b).$$

Первая из этих формул дает разложение на множители трехчлена $a^2 + 2ab + b^2$, а вторая — трехчлена $a^2 - 2ab + b^2$.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Разложить на множители трехчлен $9a^2 - 24ab + 16b^2$.

● $9a^2 - 24ab + 16b^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 4b + (4b)^2 = (3a - 4b)^2$. ●

Пример 2. Найти значение выражения $x^2 + 8x + 16$ при $x = 16$; $x = -11$.

● Запишем сначала трехчлен $x^2 + 8x + 16$ в виде квадрата двучлена:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2.$$

При $x = 16$ получим: $(x + 4)^2 = (16 + 4)^2 = 20^2 = 400$.

При $x = -11$ получим: $(x + 4)^2 = (-11 + 4)^2 = (-7)^2 = 49$. ●

Устно

632. Разложите на множители:

а) $x^2 + 2xy + y^2$; **б)** $x^2 - 2xb + b^2$; **в)** $x^2 + 2x + 1$.

Уровень А

Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

633. **а)** $p^2 + 2pq + q^2$; **б)** $c^2 - 2c + 1$; **в)** $b^2 + 4b + 4$;
г) $x^2 - 6x + 9$; **д)** $36 + 12b + b^2$; **е)** $25 + z^2 - 10z$.

634. **а)** $4a^2 - 4a + 1$; **б)** $16x^2 + 8x + 1$; **в)** $1 - 14b + 49b^2$;
г) $4x^2 + 12x + 9$; **д)** $25b^2 - 20b + 4$; **е)** $-40b + 16 + 25b^2$.

635. **а)** $4x^2 + 4xz + z^2$; **б)** $m^2 - 6mn + 9n^2$; **в)** $16a^2 - 8ab + b^2$;
г) $4c^2 + 12ca + 9a^2$; **д)** $49x^2 - 28xy + 4y^2$; **е)** $25p^2 + 9q^2 - 30pq$.

636. **а)** $x^2 + 4x + 4$; **б)** $a^2 - 10a + 25$; **в)** $16 - 8b + b^2$;
г) $9k^2 - 6k + 1$; **д)** $4b^2 + 16b + 16$; **е)** $64 - 80s + 25s^2$;
ж) $16a^2 + 8ab + b^2$; **з)** $25m^2 - 20mn + 4n^2$; **и)** $9b^2 + 16c^2 - 24bc$.

Найдите значение выражения:

637. **а)** $x^2 - 4x + 4$ при $x = 12$; $x = 2{,}1$; $x = -18$;
б) $9a^2 - 6a + 1$ при $a = 7$; $a = -33$.

638. $4a^2 + 4a + 1$ при $a = 4{,}5$; $a = -5{,}5$.

Уровень Б

Разложите на множители:

639. а) $0{,}25m^2 + 2mn + 4n^2$; б) $0{,}36c^2 - 0{,}6cx + 0{,}25x^2$;

в) $6{,}25x^2 + 1{,}5xyz + 0{,}09y^2z^2$; г) $196a^4x^4 - 2{,}8a^2b^2x^2y^4 + 0{,}01b^4y^8$;

д) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; е) $a^2 - 2\frac{2}{3}a + 1\frac{7}{9}$.

640. а) $0{,}01a^2 + 4ab + 400b^2$; б) $0{,}64x^2 - 0{,}32xy + 0{,}04y^2$;

в) $1{,}44m^4n^2 - 1{,}2m^2nk^3 + 0{,}25k^6$; г) $p^2 - \frac{1}{3}p + \frac{1}{36}$.

Найдите значение выражения:

641. а) $4x^2 + 4xy + y^2$ при $x = \frac{1}{7}$; $y = \frac{5}{7}$;

б) $a^2 - 3a + 2{,}25$ при $a = 11{,}5$; $a = -7{,}5$.

642. $m^2 - 6mn + 9n^2$ при $m = \frac{2}{3}$; $n = \frac{1}{3}$.

Решите уравнение:

643. а) $x^2 - 8x + 16 = 0$; б) $y^2 + 12y + 36 = 0$.

644. а) $z^2 - 6z + 9 = 0$; б) $x^2 + 10x + 25 = 0$.

Уровень В

645. Найдите такое число b, при котором данное выражение является квадратом двучлена:

а) $64x^2 + 80x + b$; б) $b + \frac{2}{45}y^2 + 0{,}04y^4$.

646. Представьте многочлен в виде суммы квадратов двух выражений:

а) $2y^2 + 2y + 1$; б) $a^4 + 3a^2 + 1$;

в) $a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2$; г) $m^2 + 2mn + 2n^2 + 2n + 1$.

647. Представьте многочлен $9x^2 + 6xy + 2y^2 + 4y + 4$ в виде суммы квадратов двух выражений. При каких значениях x и y значение этого многочлена равно нулю?

648. Решите уравнение: $(x^2 + 4x + 4)^2 - (x + 2)^4 = 0$.

Упражнения для повторения

649. Найдите значение выражения:

а) $(a^2bc^2)^2 \cdot b^2$ при $a = 4$; $b = -0{,}3$; $c = 0{,}25$;

б) $(5a^3b)^2 \cdot ab^5$ при $a = 0{,}2$; $b = 5$.

650. При каких значениях x значение выражения $(2x + 1)^2 - 4(x^2 + 3x)$ равно: 1; –1?

651*. В первой чашке находится кофе, во второй — столько же молока. Из первой чашки во вторую перелили ложечку кофе, потом такую же ложечку смеси перелили из второй чашки в первую. Чего больше: молока в первой чашке или кофе во второй?

652. Запишите в виде выражения:

а) куб суммы чисел m и n; б) сумму кубов чисел m и n;

в) куб разности чисел a и c; г) разность кубов чисел a и c.

653. Запишите в виде куба выражение:

а) $8x^3$; б) $-8x^3$; в) $64a^9$; г) $-0{,}027a^6b^{12}$.

654. Запишите в виде многочлена стандартного вида:

а) $(x+4)(x^2+2x-3)$; б) $(a-2b)(a^2-2ab+2b^2)$.

20. Разность и сумма кубов двух выражений

Разность квадратов двух выражений можно разложить на множители по формуле разности квадратов. При разложении на множители разности кубов двух выражений используют *формулу разности кубов*:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Докажем это тождество, перемножив выражения $a-b$ и a^2+ab+b^2:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{ab^2} - \underline{a^2b} - \underline{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3.$$

В формуле разности кубов трехчлен a^2+ab+b^2 называют *неполным квадратом суммы* выражений a и b (он напоминает трехчлен $a^2+2ab+b^2$, который является «полным» квадратом суммы выражений a и b). Поэтому формулу разности кубов можно сформулировать так:

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

При разложении на множители суммы кубов двух выражений используют *формулу суммы кубов*:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Докажем это тождество:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - \underline{a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{a^2b} - \underline{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3.$$

Трехчлен a^2-ab+b^2 называют *неполным квадратом разности* выражений a и b. Следовательно,

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Разложить на множители:

а) $a^3 - 64$; б) $27a^3 + 125b^3$; в) $-x^3 - y^6$.

• а) $a^3 - 64 = a^3 - 4^3 = (a - 4)(a^2 + 4a + 16)$;

б) $27a^3 + 125b^3 = (3a)^3 + (5b)^3 = (3a + 5b)(9a^2 - 15ab + 25b^2)$;

в) $-x^3 - y^6 = -(x^3 + (y^2)^3) = -(x + y^2)(x^2 - xy^2 + y^4)$. •

Устно

655. Назовите неполный квадрат разности выражений:

а) x и y; б) c и d; в) p и 1; г) 2 и c.

656. Назовите неполный квадрат суммы выражений:

а) m и n; б) p и q; в) a и 1; г) 3 и x.

657. Разложите на множители: а) $x^3 - y^3$; б) $m^3 + n^3$.

Уровень А

Разложите на множители:

658. а) $p^3 - q^3$; б) $b^3 - 1$; в) $x^3 - 27$; г) $64 - y^3$;
д) $b^3 + c^3$; е) $a^3 + 8$; ж) $1 + y^3$; з) $125 + b^3$.

659. а) $m^3 - n^3$; б) $b^3 - 8$; в) $27 - a^3$; г) $1 - z^3$;
д) $x^3 + y^3$; е) $k^3 + 64$; ж) $p^3 + 1$; з) $27 + c^3$.

660. а) $27x^3 - 1$; б) $1 + 64b^3$; в) $8a^3 - 27$; г) $125 - 27y^3$;
д) $64m^3 - 27$; е) $b^3 + \frac{1}{8}$; ж) $\frac{1}{27}y^3 - 1$; з) $\frac{1}{8}x^3 + 1$.

661. а) $m^6 - n^3$; б) $a^9 + b^6$; в) $a^6 + c^6$; г) $x^{12} - y^9$.

662. а) $8z^3 + 1$; б) $1 - 125p^3$; в) $27x^3 + 64$; г) $125c^3 - 8$;
д) $\frac{1}{8}a^3 - 1$; е) $27m^3 + \frac{1}{27}$; ж) $y^3 - x^9$; з) $p^6 + q^{12}$.

Уровень Б

663. Запишите в виде произведения:

а) $-a^3 + 8$; б) $-b^3 - c^3$; в) $-27 + y^3$; г) $-64 - z^3$.

Разложите на множители:

664. а) $64a^3 - 27b^3$; б) $\frac{1}{64}p^3 - 8q^3$; в) $27a^6 - 125$;
г) $0{,}001a^6 - b^3c^3$; д) $8x^9 + 125y^6$; е) $1000 - a^3b^9c^{12}$.

665. а) $216b^3 - 27c^3$; б) $125m^3 + \frac{64}{125}n^6$; в) $0{,}064x^9y^6z^3 - 27$.

Докажите, что значение выражения делится на данное число:

666. а) $921^3 - 821^3$ на 100; б) $57^3 + 28^3$ на 85.

667. а) $27^3 + 37^3$ на 64; б) $75^3 - 46^3$ на 29.

Упростите выражение:

668. а) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + b^3$;

б) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) + 1$;

в) $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - a^6 - b^6$;

г) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$.

669. а) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 27$; б) $(b - 1)(b^2 + b + 1) + (b + 1)(b^2 - b + 1)$.

Решите уравнение:

670. а) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 4x$; б) $(y^2 - 3y + 9)(y + 3) = 6y + y^3$.

671. а) $(1 - x)(1 + x + x^2) = x - x^3$; б) $-8z + z^3 = (z - 4)(z^2 + 4z + 16)$.

Уровень В

672. Докажите тождество:

а) $(a + b)(a^2 - ab + b^2 + 3a - 3b + 3) = (a + 1)^3 + (b - 1)^3$;

б) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;

в) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;

г) $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

Докажите, что значение выражения делится на данное число:

673. а) $124^5 - 74^5$ на 50; б) $87^5 + 88^5$ на 175.

Указание. Используйте тождества в) и г) задачи 672.

674. а) $6^{10} + 8^{10}$ на 100; б) $3^{15} - 2^{20}$ на 11.

675. Сумма и произведение двух чисел равны соответственно 3,5 и 3. Найдите сумму кубов этих чисел.

Упражнения для повторения

676. Упростите выражение:

а) $(2x - y)(x - 2y) + 5xy$; б) $(3a - b)(-a + 3b) + 3(a^2 + b^2)$;

в) $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1) - (a^2 + 1)^2$.

677. Вычислите:

а) $4^{10} - (4^5 + 3)(4^5 - 3)$; б) $2^{12} \cdot 3^{12} - 4 - (6^6 + 4)(6^6 - 4)$.

678. Поезд задержали на станции A на 10 мин, однако он наверстал потерянное время на перегоне между станциями A и B, пройдя его со скоростью 105 км/ч вместо запланированной скорости 90 км/ч. Найдите расстояние между станциями A и B.

679*. Решите уравнение:

а) $|2x + 5| = |3x - 2|$; б) $|x(x + 1)| = |2x|$.

21. Применение нескольких способов для разложения многочленов на множители

Часто при разложении многочлена на множители нужно использовать несколько способов. Если это возможно, то разложение уместно начинать с вынесения общего множителя за скобки.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Разложим на множители многочлен $7a^2b^2 - 7b^4$.

$$7a^2b^2 - 7b^4 = 7b^2(a^2 - b^2) = 7b^2(a - b)(a + b).$$

Сначала вынесли общий множитель $7b^2$ за скобки, а потом применили формулу разности квадратов.

2. Разложим на множители многочлен $6ac - 9c - 24abc + 36bc$.

Все члены многочлена имеют общий множитель $3c$. Вынесем его за скобки:

$$6ac - 9c - 24abc + 36bc = 3c(2a - 3 - 8ab + 12b).$$

Многочлен $2a - 3 - 8ab + 12b$ разложим на множители способом группировки:

$$2a - 3 - 8ab + 12b = (2a - 3) - 4b(2a - 3) = (2a - 3)(1 - 4b).$$

Таким образом,

$$6ac - 9c - 24abc + 36bc = 3c(2a - 3)(1 - 4b).$$

Примеры решения упражнений

Пример 1. Разложить на множители трехчлен:

а) $x^2 - 6x - 16$; **б)** $a^2 + 2ab - 8b^2$.

● **а)** Если к выражению $x^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x$ прибавить 3^2, то есть 9, то получим выражение $x^2 - 6x + 9$, которое является квадратом двучлена $x - 3$. Поэтому, выделив квадрат этого двучлена, получим:

$$x^2 - 6x - 16 = x^2 - 6x + 9 - 9 - 16 = (x - 3)^2 - 25 = (x - 3)^2 - 5^2 =$$
$$= (x - 3 - 5)(x - 3 + 5) = (x - 8)(x + 2);$$

б) $a^2 + 2ab - 8b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 - 8b^2 = (a + b)^2 - 9b^2 =$
$$= (a + b - 3b)(a + b + 3b) = (a - 2b)(a + 4b).$$ ●

Пример 2. Разложить на множители многочлен $m^2 - 4n^2 - mk - 2nk$.

● $m^2 - 4n^2 - mk - 2nk = m^2 - (2n)^2 - (mk + 2nk) =$
$$= (m - 2n)(m + 2n) - k(m + 2n) = (m + 2n)(m - 2n - k).$$ ●

Пример 3. Решить уравнение $18x^3 - 2x = 0$.

● Разложим левую часть уравнения на множители:

$$18x^3 - 2x = 2x(9x^2 - 1) = 2x(3x - 1)(3x + 1).$$

Получим уравнение

$$2x(3x - 1)(3x + 1) = 0,$$

откуда: $x = 0$, или $3x - 1 = 0$, или $3x + 1 = 0$; $x = 0$, или $x = \frac{1}{3}$, или $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ. 0; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$. ●

Уровень А

Разложите на множители:

680. а) $7a^2 - 7b^2$; б) $km^2 - kn^2$; в) $9x^2 - 36$; г) $4a^3 - 4a$; д) $x^4 - x^2$; е) $ca^2 - 9cb^2$; ж) $2a^3 - 2b^3$; з) $27c + b^3c$.

681. а) $5p^2 - 5q^2$; б) $3b^2 - 27$; в) $24 - 6a^2$; г) $3y^4 - 3y^2$; д) $18xy^2 - 2x$; е) $4k^3 + 32$; ж) $6a - 6ab^3$; з) $a^3 - a^5$.

682. а) $3p^2 + 6pq + 3q^2$; б) $-b^2 + 2bc - c^2$; в) $81 - 54b + 9b^2$; г) $2xb^2 + 8xb + 8x$; д) $9a^3 + 6a^2 + a$; е) $m - 10m^2 + 25m^3$.

683. а) $4x^2 + 8x + 4$; б) $n - 14nc + 49nc^2$; в) $-6a^2 + 24ab - 24b^2$; г) $x^3 - 12x^2 + 36x$.

Найдите значение выражения:

684. а) $4x^2 - 4y^2$ при $x = 51$; $y = 49$;
б) $5a^2 - 10ab + 5b^2$ при $a = 7{,}3$; $b = 2{,}3$.

685. а) $3m^2 + 6mn + 3n^2$ при $m = 4{,}8$; $n = 5{,}2$;
б) $10a^2 - 10b^2$ при $a = 63$; $b = 37$.

Решите уравнение:

686. а) $8x^2 - 72 = 0$; б) $12x^2 - 3 = 0$.

687. а) $5x^2 - 125 = 0$; б) $50x^2 - 2 = 0$.

Уровень Б

Разложите на множители:

688. а) $a^4 - n^4$; б) $k^4 - 16$.

689. а) $x^4 - 1$; б) $81 - b^4$.

690. а) $3mn + 24n - 9m - 72$; б) $bx^4 - x^4 + bx^3 - x^3$; в) $-4abc - 32bc - 12ac - 96c$; г) $2y^4 - 2y^3a + 2y^2ab - 2y^3b$; д) $1{,}5a^2 - 0{,}5a^2x + 1{,}5ax - 0{,}5ax^2$; е) $x^2y^2a - x^2y^2 + 5axy - 5xy$.

691. а) $4ac + 2bc + 4xac + 2xbc$; б) $m^2a - m^2b + 3am - 3bm$; в) $-a^3b - a^2b^2 - a^2b - ab^2$; г) $0{,}2x^4 + 0{,}6x^3y - 0{,}4x^3 - 1{,}2x^2y$.

692. а) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$; б) $\frac{4}{9}x^2 - a^2 - 2ab - b^2$; в) $c^2 + 9 - 6c - k^2$; г) $4x^2 - 4y - y^2 - 4$.

693. а) $m^2 + 2mn + n^2 - k^2$; б) $\frac{9}{16}a^2 - 4x^2 - 4xy - y^2$;

в) $a^2 - 8a - b^2 + 16$; г) $p^2 - 25 + 10q - q^2$.

694. Разложите многочлен $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2c - 1$ на множители. Докажите, что если $a + b + c = 1$, то значение этого многочлена равно нулю.

695. Разложите на множители многочлен $a^2 + 2a + 1 - b^2 - c^2 + 2bc$ и найдите его значение при $a = -1$ и $b = c$.

Разложите на множители:

696. а) $a^2 - b^2 + a + b$; б) $x^2 - a^2 + x - a$;

в) $4x^2 + y - 2x - y^2$; г) $3{,}5x^2 - 3{,}5y^2 - x + y$.

697. а) $c^2 - b^2 + c - b$; б) $x + y + x^2 - y^2$;

в) $a^2 + 4{,}8ab - x^2 - 4{,}8xb$.

Разложите на множители и найдите значение выражения:

698. а) $x^2 - y^2 + (x + y)^2$ при $x = 3\frac{2}{3}$; $y = 5\frac{1}{3}$;

б) $a^2 + (a + 4)^2 - 16$ при $a = 96$.

•**699.** а) $a^2 - b^2 + (a - b)^2$ при $a = 5\frac{1}{6}$; $b = 2\frac{1}{6}$;

б) $(m - 2)^2 + m^2 - 4$ при $m = 102$.

Решите уравнение:

700. а) $x^3 - x = 0$; б) $1{,}6y^3 - 0{,}4y = 0$;

в) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$; г) $2z^3 - z^2 = 8z - 4$;

д) $x^4 - x^3 - x^2 + x = 0$; е) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

701. а) $x^3 - 4x = 0$; б) $1{,}2z^3 - 0{,}3z = 0$;

в) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$; г) $4y^3 - y^2 = 4y - 1$.

Уровень В

Разложите на множители:

702. а) $x^2 + 2x - 8$; б) $a^2 - 8a + 12$; в) $4c^2 - 4c - 3$;

г) $x^2 - 6xy + 5y^2$; д) $a^2 + 12ab + 11b^2$; е) $9a^2 - 6ab - 8b^2$.

703. а) $2a^2 + a - 4ab - b + 2b^2$; б) $a^3 - b^3 - (a - b)^3$.

704. Решите уравнение:

а) $x^2 - 8x + 7 = 0$; б) $y^2 + 12y + 20 = 0$;

в) $(x - 1)^2 - 6(x - 1) + 8 = 0$; г) $(x - 1)(x - 3)(x^2 - 3) = (x - 1)(x - 3)$.

705. Докажите тождество:

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2).$$

706. Докажите, что значение выражения $3^{34} + 9^{92} - 3^{30} - 9^{90}$ делится на 80.

707. Докажите, что значение выражения $11^{10} + 4 \cdot 7^{49} + 11^{11} - 4 \cdot 7^{48}$ делится на 12.

708. Докажите, что равенство $a^3 + b^2 = ab(a + 1)$ является верным только тогда, когда $b = a$ или $b = a^2$.

Упражнения для повторения

709. Представьте в виде многочлена:

а) $(3a + 2b)(4a - b) + 2b^2$; б) $2x(y + 15x) + (x - 6y)(5y + 2x)$.

710. Решите уравнение:

а) $\frac{5x}{6} + \frac{2x}{9} = 38$; б) $\frac{1-3x}{5} = \frac{19+x}{8}$.

711. Запишите в виде выражения:

а) удвоенное произведение переменной a и суммы переменных m и n;

б) разность квадратов выражений $a - 1$ и bc.

712. Сплав серебра и меди общей массой 2 кг содержит 80% меди. Найдите массу серебра в сплаве.

713. Сплав меди и цинка имеет массу 4,2 кг. Найдите массу меди, если ее в сплаве на 10% больше, чем цинка.

714. К сплаву меди и олова общей массой 2 кг добавили 200 г меди и получили новый сплав, в котором меди стало в 1,2 раза больше, чем олова. Сколько процентов меди содержал первоначальный сплав?

Для тех, кто хочет знать больше

22. Применение преобразований выражений

Нам уже встречались задачи, при решении которых нужно было преобразовывать то или иное выражение. Чаще всего мы использовали преобразования выражений при решении уравнений, доказательстве тождеств, нахождении значений выражений. Рассмотрим еще некоторые задачи, решение которых связано с преобразованием выражений.

1. Сравнение значений многочлена с нулем.

Пример 1. Доказать, что многочлен $x^2 - 8x + 18$ принимает только положительные значения.

• Выделив из трехчлена $x^2 - 8x + 18$ квадрат двучлена, получим:

$$x^2 - 8x + 18 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 18 = (x - 4)^2 + 2.$$

Мы представили многочлен в виде суммы двух слагаемых $(x - 4)^2$ и 2. Слагаемое $(x - 4)^2$ при любых x принимает только неотрицательные значения, слагаемое 2 — положительно. Поэтому выражение $(x - 4)^2 + 2$ принимает только положительные значения. Поскольку $x^2 - 8x + 18 = (x - 4)^2 + 2$, то и выражение $x^2 - 8x + 18$ принимает только положительные значения. •

2. Нахождение наибольшего и наименьшего значений выражений.

Исходя из равенства $x^2 - 8x + 18 = (x - 4)^2 + 2$, полученного в примере 1, можно указать наименьшее значение многочлена $x^2 - 8x + 18$. Оно равно 2, причем это наименьшее значение многочлен принимает при $x = 4$.

Пример 2. Найти наибольшее значение многочлена $-x^2 + 4x + 1$.

● Преобразуем данный многочлен так:

$$-x^2 + 4x + 1 = -(x^2 - 4x - 1) = -(x^2 - 4x + 4 - 4 - 1) =$$
$$= -((x-2)^2) - 5) = -(x-2)^2 + 5.$$

Наибольшее значение многочлена равно 5. ●

3. Решение задач на делимость.

Пример 3. Доказать, что значение выражения $(2n+3)^2 - (2n-3)(2n+5)$ делится на 8 при любом целом значении n.

● Упростим данное выражение:

$$(2n+3)^2 - (2n-3)(2n+5) = 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 10n - 6n - 15) =$$
$$= 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n + 15 = 8n + 24 = 8(n+3).$$

При любом целом значении n произведение $8(n+3)$ делится на 8, поэтому и значение выражения $(2n+3)^2 - (2n-3)(2n+5)$ делится на 8. ●

4. Нахождение значений многочлена с помощью микрокалькулятора.

Пример 4. С помощью микрокалькулятора найти значение многочлена $12x^3 - 24x^2 + 15x - 8$ при $x = 2{,}8$.

● Значение данного многочлена искать удобнее, если его предварительно преобразовать так:

$$12x^3 - 24x^2 + 15x - 8 = (12x^2 - 24x + 15)x - 8 = ((12x - 24)x + 15)x - 8.$$

При $x = 2{,}8$ схема вычислений имеет вид:

12	×	2,8	–	24	×	2,8	+	15	×	2,8	–	8	=

Выполнив вычисления, найдем значение многочлена. Оно равно 109,264. ●

Устно

715. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $x^2 + 7$; б) $(a-6)^2$; в) $(b-1)^2 + 3$.

716. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $7 - x^2$; б) $1 - (x-2)^2$; в) $5 - (x+5)^2$.

При каком значении x выражение принимает наибольшее значение?

Уровень А

Докажите, что выражение принимает только неотрицательные значения:

717. а) $x^2 + 2x + 1$; б) $4m^2 + 4mn + n^2 + 3$.

718. а) $a^2 - 4a + 4$; б) $x^2 - 2xy + y^2 + 4$.

Докажите, что значение выражения делится на данное число:

719. а) $245^2 - 236^2$ на 9; б) $438^2 - 62^2$ на 500;

в) $52^3 - 36^3$ на 16; г) $75^3 + 25^3$ на 100.

720. а) $811^2 - 712^2$ на 99; б) $48^3 - 19^3$ на 29.

С помощью микрокалькулятора найдите значение многочлена:

721. а) $4x^3 - 6x^2 + 5x - 3$ при $x = 5$; $x = 3{,}2$; $x = -2{,}6$;

б) $1{,}2x^3 + 2{,}4x^2 + 0{,}5x - 1$ при $x = 1{,}7$;

в) $4{,}5x^4 + 4x^3 - 3{,}5x^2 + 2x - 1{,}8$ при $x = 4$.

722. а) $15x^3 - 8x^2 + 12x - 30$ при $x = 2$; $x = 1{,}2$; $x = -4$;

б) $2{,}4x^4 - 7{,}2x^3 - 3{,}3x^2 + 4{,}5x$ при $x = 3$.

Уровень Б

Докажите, что выражение принимает только отрицательные значения:

723. а) $-(a^2 - 2a + 4)$; б) $-x^2 + 4x - 5$.

724. а) $-(x^2 - 2x + 2)$; б) $-y^2 + 2y - 4$.

Найдите наименьшее значение выражения и значение переменной, при котором выражение принимает наименьшее значение:

725. а) $x^2 - 4x + 4$; б) $x^2 - 4x + 7$.

726. а) $a^2 + 6a + 9$; б) $x^2 - 6x + 10$.

Докажите, что при любом целом значении n значение выражения делится на данное число:

727. а) $(n - 2)^2 + 3n^2$ на 4; б) $(n - 2)(2n - 7) - 2n^2 - 3$ на 11.

728. $(n + 2)^2 - n(n - 2) + 2$ на 6.

Докажите, что при любом целом значении n значение выражения не делится на данное число:

729. а) $(n - 5)^2 + (2n - 3)(2n + 8)$ на 5; б) $(n - 3)(n^2 - 3) - (n^3 - 1)$ на 3.

730. $(n + 3)^2 - (n - 3)^2 + 3$ на 12.

731. Докажите, что значение выражения $5^{33} - 5^{30}$ делится на 124.

Уровень В

732. Найдите наибольшее значение выражения и значение переменной, при котором выражение принимает наибольшее значение:

а) $-x^2 + 2x - 8$; б) $-a^2 - 4a + 3$.

733. Может ли значение выражения $a^2 - 4a + 7$ быть равным 1?

Решите уравнение:

734. а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; б) $x^2 - x - 12 = 0$.

735. а) $(x - 1)^2 + (x - 3)^2 = 0$; б) $(x^2 - 1)^2 + (x - 1)^4 = 0$.

736. Докажите, что значение выражения делится на данное число:

а) $3^{10} + 9^6$ на 10; б) $2^{20} + 2^{25} - 2^{22}$ на 29.

737. Докажите, что не существует чисел x и y, для которых выполнялось бы равенство:

а) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$; б) $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 3 = 0$.

738. Запишите число 4 в виде суммы таких двух слагаемых, чтобы их произведение было наибольшим.

739. Разность двух нечетных натуральных чисел делится на 5. Делится ли разность кубов этих чисел на 10?

Упражнения для повторения

740. Длина прямоугольника n м, а ширина — на k м меньше. Запишите в виде выражения периметр и площадь прямоугольника.

741. Турист некоторое расстояние проплыл на моторной лодке против течения реки за 1,2 ч, а назад вернулся на плоту за 7,2 ч. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде равна 21 км/ч.

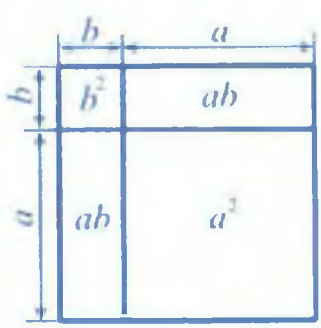
742. Поле площадью 568 га разделено на 3 участка так, что площадь третьего участка на 52 га меньше суммы площадей первых двух участков, а площадь первого участка относится к площади второго как 2 : 3. Найдите площадь каждого участка.

743. При каких значениях коэффициента a уравнение $ax = 3$ имеет единственный корень? Существует ли такое значение a, при котором это уравнение не имеет корней?

Интересно знать

Античные математики использовали формулы сокращенного умножения задолго до нашей эры. В те времена формулы представлялись не в привычном нам символическом виде, а формулировались словами.

Ученые Древней Греции алгебраические утверждения, формулы, выражающие определенные зависимости между величинами, трактовали геометрически. Так, произведение ab они рассматривали как площадь прямоугольника со сторонами a и b.



Приведем пример алгебраического утверждения, которое было известно древнегреческим ученым и в геометрической терминологии формулировалось так: *площадь квадрата, построенного на сумме двух отрезков, равна сумме площадей квадратов, построенных на каждом из этих отрезков, плюс удвоенная площадь прямоугольника, построенного на этих отрезках.*

Нетрудно догадаться, что речь идет о формуле квадрата суммы, которую мы символически записываем так:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Вопросы и упражнения для повторения § 5

1. Чему равно произведение разности двух выражений и их суммы?
2. Запишите и сформулируйте формулу квадрата суммы двух выражений; квадрата разности двух выражений.
3. Чему равна разность квадратов двух выражений?
4. Приведите пример трехчлена, который можно записать в виде квадрата суммы; квадрата разности.
5. Чему равна сумма кубов двух выражений?
6. Чему равна разность кубов двух выражений?
7. Какие способы разложения многочленов на множители вам известны?

744. Выполните умножение:

а) $(5 - a)(5 + a)$; б) $(3b + 2a)(3b - 2a)$; в) $(x + y^2)(x - y^2)$;
г) $(-c + 0{,}4)(0{,}4 + c)$; д) $(-m - 5n)(m - 5n)$; е) $(ab + 2a^2)(ab - 2a^2)$.

745. Возведите в квадрат:

а) $(a - 2b)^2$; б) $(3x + 2x^2)^2$; в) $(-0{,}5ab - 2c)^2$.

746. Упростите выражение:

а) $(a - 6)(a + 6) + (3 - a)(3 + a)$;
б) $(3x^2 - 1)(3x^2 + 1) - (1 - 3x^2)^2$;
в) $(5a - 2b)^2 + (2a + 5b)^2 - 29b^2$;
г) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)$;
д) $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) + a^8 + b^8$.

747. Докажите тождество:

а) $(a + b)(a - b) - (a - c)(a + c) = (c - b)(c + b)$;
б) $(n + 1)^2 + (n + 5)^2 - 3 = (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + 3$;
в) $(m - 2)(m + 2)(m^2 + 4)(m^4 + 16) = m^8 - 256$.

748. Вычислите:

а) $96 \cdot 104$; б) $52 \cdot 48$; в) $19{,}8 \cdot 20{,}2$; г) $7{,}5 \cdot 8{,}5$.

749. Решите уравнение:

а) $(x - 3)(x + 3) - x(x + 2) = 1$; б) $(2x + 5)^2 = (2x - 3)^2$;
в) $\left(\frac{1}{5} + 10x\right)^2 - 4\left(\frac{1}{5} + 25x^2\right) = 0$; г) $(5x + 3)(5x - 3) + 9\frac{1}{9} = (5x - 1)^2$.

750. Докажите, что при каждом целом значении n значение выражения:

а) $(2n + 1)(2n - 1) - (n + 1)^2 - n - 1$ делится на 3;
б) $(2n + 7)(8n - 8) - (4n + 5)^2$ не делится на 6.

751. Докажите, что значения выражения $(k - 2)^2 + (k + 2)^2 - 2(k - 4)(k + 4)$ не зависят от значения k.

Разложите на множители:

752. а) $3a^2 - 3$; б) $x^3 - 4x$; в) $x^4y^2 - x^2y^4$;
г) $1{,}44a^2 - b^4$; д) $(c^2 + 1)^2 - 4c^2$; е) $a^2 - 2ab + b^2 - 1$;
ж) $25m^2 - (4m - 4)^2$; з) $x^2 - y^2 - x - y$; и) $2a^2 - 2b^2 - (a - b)^2$.

753. а) $a^3 - 64$; б) $x^3 + 8z^3$; в) $(x + 2)^3 - y^3$.

754. а) $a^5 - a^3 + a^2 - 1$; б) $z^4 + z^3 - 8z - 8$; в) $2x^4 - 2x^3 - 2x + 2$.

755*. а) $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2$; б) $x^4 + 4$.

Решите уравнение:

756. а) $x^3 - 9x = 0$; б) $y(y^2 + 3) = 4y$;
в) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$; г) $2z^3 + 3z^2 = 2z + 3$.

757*. а) $x^2 - 4x + 4 + 2(x - 1)^2 = 0$; б) $(x^2 + 1)^2 + (x^2 - x)^2 = 1$;
в) $|x(x - 1)| + x^2 - 2x + 1 = 0$.

Докажите, что значение выражения делится на данное число:

758. а) $401^2 - 199^2$ на 600; б) $85^3 - 48^3$ на 37;
в) $58^3 + 42^3$ на 100; г) $7^{33} + 7^{31}$ на 50.

759. а) $8^{25} - 64^{12}$ на 7; б) $16^9 - 32^8 + 8^{12}$ на 7.

760. Докажите, что выражение $x^2 - 14x + 50$ принимает только положительные значения.

761. Докажите, что выражение $4x - x^2 - 5$ принимает только отрицательные значения.

762. Найдите наименьшее значение выражения:
а) $x^2 + 8x + 17$; б) $a^2 - 8ac + 16c^2 + 16$.

763. Докажите, что разность квадратов двух последовательных целых чисел является нечетным числом.

764. Докажите, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

765*. Докажите, что значение выражения $15^{10} - 15^3 + 225^6 - 211^3$ делится на 226.

766*. Докажите, что разность квадратов двух целых чисел, которые не делятся на 3, кратна 3.

767*. Докажите, что не существует чисел x и y, для которых выполнялось бы равенство:
а) $x^2 + y^4 - 4x - 2y^2 + 7 = 0$; б) $2x^2 + 4y^2 - 4xy - 2x + 3 = 0$.

Задания для самопроверки № 5

Уровень 1

1. Выполните умножение $(a - x)(a + x)$ и укажите верный ответ:
а) $a^2 - 2ax + x^2$; б) $a^2 + 2ax + x^2$; в) $a^2 + x^2$; г) $a^2 - x^2$.

2. Возведите в квадрат $(b - 4)^2$ и укажите верный ответ:
а) $b^2 - 4b + 16$; б) $b^2 - 16$; в) $b^2 - 8b + 16$; г) $b^2 + 8b + 16$.

3. Разложите на множители многочлен $y^2 - 9$ и укажите верный ответ:
а) $(y - 9)(y + 9)$; б) $(y - 3)(y - 3)$; в) $(y - 3)(y + 3)$; г) $(y + 3)(y + 3)$.

4. Вычислите $85^2 - 15^2$ и укажите верный ответ:
а) 140; б) 4900; в) 7000; г) 6125.

5. Представьте трехчлен $x^2 + 4x + 4$ в виде квадрата двучлена и укажите верный ответ:
а) $(x - 2)^2$; б) $(x + 4)^2$; в) $(x - 4)^2$; г) $(x + 2)^2$.

6. Представьте трехчлен $a^2 - 10a + 25$ в виде квадрата двучлена и укажите верный ответ:
а) $(a - 10)^2$; б) $(a - 5)^2$; в) $(a - 3)^2$; г) $(a + 5)^2$.

Уровень 2

7. Упростите выражение $(3 - a)(3 + a) + (1 - a)^2$ и найдите его значение при $a = 0{,}5$.

8. Возведите в квадрат:
а) $(4 + 3b)^2$; б) $(2a - 5)^2$.

9. Решите уравнение:
а) $(x - 2)^2 - x^2 = 12$; б) $(x + 3)(x - 3) - x^2 = 3x$.

10. Разложите на множители:
а) $9y^2 - 16$; б) $3x^2 - 3y^2$; в) $27a^3 - b^3$.

11. Представьте в виде квадрата двучлена:
а) $9a^2 + 12a + 4$; б) $100a^2 - 20ab + b^2$.

Уровень 3

12. Упростите выражение:
а) $(2x - 7y)^2 + (2x + 7y)^2 - 8x^2$; б) $(2 - 3b^2)(3b^2 + 2) + (3b^2 - 1)^2$.

13. Докажите тождество: $(a + 1)(a - 1)(a^2 + 1) - (a^2 - 1)^2 - 2a^2 = -2$.

14. Разложите на множители:
а) $b^6 - 4b^4$; б) $0{,}001a^3 - 27b^3$; в) $0{,}8a^3 + 0{,}4a^2 + 0{,}4a^4$.

15. Докажите, что выражение $-x^2 + 10x - 27$ принимает только отрицательные значения.

16. Решите уравнение:
а) $-(2x + 3)^2 + (x + 5)(2x + 5) = 16$; б) $x^2 - 2x - 35 = 0$.

Уровень 4

17. Упростите выражение:
а) $((x + 2y^2)(x - 2y^2))^2 - 16y^8$; б) $(a + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$.

18. Разложите на множители:
а) $m^3 - n^3 + 3m^2 + 3mn + 3n^2$; б) $a^2 + b^2 + c^2 - x^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

19. Решите уравнение:
а) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 + 4x$; б) $x^3 - 9 = x - 9x^2$.

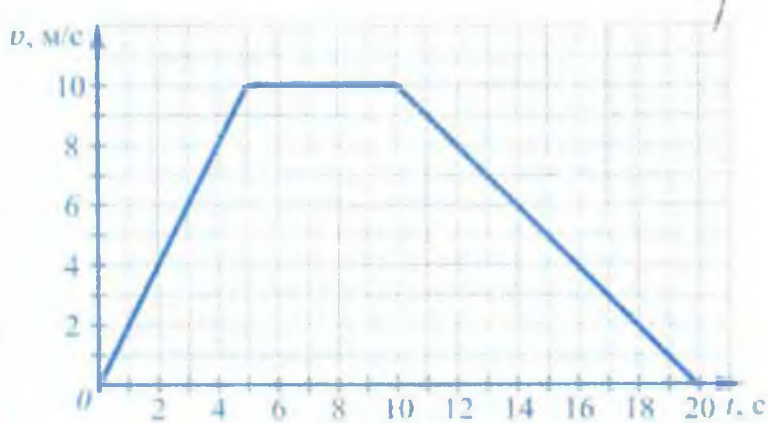
20. При делении на 5 число n дает в остатке 3, а число m — 4. Докажите, что число $n^2 + m^2$ делится на 5.

21. Докажите, что многочлен $4x^2 + a^2 - 4x + 1$ принимает только неотрицательные значения.

Раздел III. ФУНКЦИИ

Все в природе меняется и развивается. Изучая явления, связанные с этим неотъемлемым свойством природы, ученые пришли к понятиям переменной величины и функции.

В данном разделе мы выясним, что такое функция, график функции, что такое линейная функция и каковы ее свойства.



§ 6. ФУНКЦИИ

23. Функция. Способы задания функции

1. Функции и способы их задания. Пусть сторона квадрата равна a см, а его периметр — P см. Зная сторону a, по формуле $P = 4a$ можно найти соответствующее ей значение периметра P. Например,

если $a = 6$, то $P = 4 \cdot 6 = 24$;

если $a = 0{,}1$, то $P = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$;

если $a = 2{,}5$, то $P = 4 \cdot 2{,}5 = 10$.

Видим, что значения периметра *зависят* от того, какие значения мы выбирали для длины стороны квадрата. Заметим также, что каждому значению длины стороны соответствует одно определенное значение периметра. Так, значению $a = 6$ *соответствует* значение $P = 24$, значению $a = 0{,}1$ — значение $P = 0{,}4$.

В данном примере имеем две зависимые переменные a и P — длину стороны квадрата и его периметр. Значения переменной a можно выбирать произвольно, а значения переменной P зависят от выбранных значений a. Поэтому a называют *независимой переменной*, а P — *зависимой переменной*.

Рассмотрим еще один пример зависимости между переменными.

Водитель решил проследить по спидометру, какое расстояние он проедет за 1 ч, 2 ч, 3 ч, 4 ч, 4,5 ч, 5 ч. Результаты наблюдений он записал в таблицу:

t, ч	1	2	3	4	4,5	5
S, км	82	170	225	300	335	380

В данном примере имеем две зависимые переменные: время t и расстояние S, пройденное за это время. Значения расстояния зависят от значений времени. Так, времени $t = 2$ соответствует значение расстояния $S = 170$, времени $t = 4{,}5$ — значение расстояния $S = 335$. Каждому значению времени соответствует одно определенное значение расстояния. Поэтому в данном случае t является независимой переменной, а S — зависимой переменной.

В математике, как правило, независимую переменную обозначают буквой x, а зависимую переменную — буквой y. В рассмотренных примерах *каждому значению* независимой переменной соответствует *единственное значение* зависимой переменной. При таких условиях для зависимой переменной используют термин «функция».

Определение **Переменную y называют функцией переменной x, если *каждому* значению переменной x соответствует *единственное* значение переменной y.**

Для независимой переменной также существует специальный термин: ее называют *аргументом*. Говорят: *y является функцией аргумента x*.

Итак, в рассмотренных примерах:

периметр P квадрата является функцией длины его стороны a; тут P — функция, a — аргумент;

расстояние S является функцией времени t; тут S — функция; t — аргумент.

Первая функция задана *формулой* $P = 4a$. Вторая функция задана *таблицей*.

2. Область определения и область значений функции. Все значения, принимаемые независимой переменной (аргументом), образуют *область определения* функции; все значения, принимаемые зависимой переменной (функцией), образуют *область значений* функции.

Так, область определения функции, заданной формулой $P = 4a$, образуют все значения, которые может принимать переменная a. Поскольку эта переменная определяет длину стороны квадрата, то a может принимать только положительные значения. Таким образом, область определения этой функции образуют все положительные числа.

Область значений функции, заданной формулой $P = 4a$, образуют все значения, которые может принимать зависимая переменная P. Периметр P не может равняться отрицательному числу или нулю, однако может равняться любому положительному числу. Например, P может равняться 2, так как 2 — это периметр квадрата со стороной 0,5. Таким образом, область значений этой функции образуют все положительные числа.

Область определения функции, заданной таблицей, образуют числа 1; 2; 3; 4; 4,5; 5 (числа первой строки таблицы); область значений этой функции образуют числа 82; 170; 225; 300; 335; 380 (числа второй строки таблицы).

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = x^2 + 1$, где $0 \le x \le 10$. Такая запись означает, что область определения функции образуют все значения x, которые удовлетворяют неравенству $0 \le x \le 10$.

Если функция задана формулой $y = x^2 + 1$ и не указано, какие значения может принимать аргумент, то считают, что область определения функции образуют все числа.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Автомобиль, двигаясь со скоростью 80 км/ч, проходит за t ч расстояние S км. Задать формулой S как функцию аргумента t. Найти значения функции, соответствующие значениям аргумента: 2; 2,5; 4.

• Функция задается формулой $S = 80t$. Если $t = 2$, то $S = 80 \cdot 2 = 160$; если $t = 2{,}5$, то $S = 80 \cdot 2{,}5 = 200$; если $t = 4$, то $S = 80 \cdot 4 = 320$. •

Пример 2. Начиная с трех часов, через каждый час измеряли атмосферное давление и данные записывали в таблицу:

t, ч	3	4	5	6	7	8	9
p, мм рт. ст.	746	748	751	752	752	755	756

Зависимость между какими переменными задает таблица? Задает ли таблица функцию? Какое давление в мм ртутного столбика было в 4 ч; в 8 ч? Какова область определения функции; область значений?

● Таблица задает зависимость между временем суток t и атмосферным давлением p. Переменная p является функцией переменной t, поскольку каждому значению t соответствует единственное значение p. Если $t = 4$, то по таблице находим: $p = 748$. Итак, в 4 часа атмосферное давление было 748 мм рт. ст. Аналогично в 8 часов — 755 мм рт. ст. Область определения функции образуют числа 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, а область значений — числа 746, 748, 751, 752, 755 и 756. ●

Пример 3. Функция задана формулой $y = x^2 - 3$. Составить таблицу значений аргумента и соответствующих значений функции, выбирая для аргумента такие значения: –6; –3; –2; 0; 2; 3; 6.

●

x	–6	–3	–2	0	2	3	6
y	33	6	1	–3	1	6	33

●

Пример 4. При каких значениях аргумента значение функции равно –3, если функция задана формулой:

а) $y = 2x - 5$; **б)** $y = x^2 + x - 3$; **в)** $y = x^2 + 1$?

● **а)** Чтобы найти значения x, при которых $y = -3$, решим уравнение $2x - 5 = -3$: $2x = 2$; $x = 1$. Итак, значение $y = -3$ функция принимает при $x = 1$.

б) $x^2 + x - 3 = -3$; $x^2 + x = 0$; $x(x + 1) = 0$;

$x = 0$ или $x + 1 = 0$; $x = 0$ или $x = -1$.

Значение –3 функция принимает при $x = 0$ или $x = -1$.

в) $x^2 + 1 = -3$; $x^2 = -4$ — уравнения корней не имеет. Значение –3 функция не принимает. ●

Устно

768. Пусть x — длина стороны квадрата, а S — его площадь. Почему S является функцией x? Какая переменная является независимой, а какая зависимой; какая является аргументом, а какая — функцией? Задайте функцию формулой.

769. Функция задана формулой $y = 5x$.

а) Какая переменная является независимой, а какая — зависимой; какая является аргументом, а какая — функцией?

б) Какое значение функции соответствует значению аргумента $x = 2$; $x = -1$?

в) Какому значению аргумента соответствует значение функции $y = 5$; $y = 0$?

770. Зависимости переменной y от переменной x заданы таблицами:

а)

x	1	2	3
y	1	1	1

б)

x	1	3	9
y	1	1; 3	1; 3; 9

(В таблице б) числам 1, 3, 9 соответствуют их делители.) Какая из таблиц задает функцию? Для функции укажите область определения и область значений.

771. Функция задана таблицей:

x	–2	0	1	3	4
y	3	–1	5	7	7

а) Чему равно значение функции при $x = -2$; $x = 1$; $x = 4$?

б) При каких значениях аргумента значение функции равно –1; 7; 3?

в) Какова область определения функции?

г) Какова область значений функции?

Уровень А

772. Одна сторона прямоугольника 6 см, а другая x см. По какой формуле можно вычислить площадь S прямоугольника? Задает ли эта формула функцию?

773. Плотность стали 7800 кг/м^3. Запишите формулу, по которой можно вычислить массу стального куба с ребром a м. Какова область определения функции, заданной этой формулой? Найдите значение функции при $a = 0{,}2$.

774. Автомобиль движется со скоростью 75 км/ч. За время t ч он проходит расстояние S км. Задайте формулой расстояние S как функцию времени t. Найдите значение функции при $t = 2{,}4$.

775. Длина прямоугольного параллелепипеда 7,5 см, ширина 4 см, а высота x см. Задайте формулой объем V параллелепипеда как функцию высоты x. Найдите значение функции при $x = 2{,}5$.

776. Найдите значение функции, заданной формулой $y = 2x^2 - x$ при $x = 2$; $x = 0$; $x = -1$.

777. Найдите значение функции, заданной формулой $y = 2x + 1$ при $x = 5$; $x = 0{,}5$; $x = -2$.

778. Функция задана формулой $y = 18 - 3x$. Составьте таблицу значений функции для значений аргумента: –3; –2; 0; 1; 6.

779. Функция задана формулой $y = 2x^2 + 1$. Составьте таблицу значений функции для значений аргумента: –4; –2; 0; 2; 4.

780. Функция задана формулой $y = 4x - 5$. При каких значениях аргумента значение функции равно 0; 3?

781. Функция задана формулой $y = -2x + 3$. При каких значениях аргумента значение функции равно 1; 5?

782. Функция задана таблицей:

x	–4	–2	0	2	4
y	–2	–1	0	1	2

а) Найдите значение функции при $x = -2$; $x = 2$.

б) При каких значениях x значение функции равно –1; 1?

в) Какова область определения функции?

г) Какова область значений функции?

Уровень Б

783. Функция задана формулой $y = 12x$. Заполните таблицу:

x	–4	–3					1,5	2		3,5
y			–12	–6	–3	2			27	

784. Функция задана формулой $y = x + 6$. Заполните таблицу:

x	–12	–6					24	–24
y			2	3	–4	–6		

785. Велосипедист должен преодолеть путь от села до автостанции длиной 7 км, двигаясь со скоростью 10 км/ч. Пусть S км — путь, который осталось проехать велосипедисту через t ч после начала движения. Задайте формулой путь S как функцию времени t. Найдите значение функции при $t = 0{,}5$. Какова область определения и область значений этой функции?

786. Натуральное число m при делении на 4 дает неполное частное n и остаток 1. Задайте формулой m как функцию n. Найдите значение функции при $n = 50$. Какова область определения и область значений этой функции?

787. Функция задана формулой $y = x^2 - 4x + 2$. При каких значениях аргумента значение функции равно: **а)** 2; **б)** –2?

788. Функция задана формулой $y = x^2 + 2x - 3$. При каких значениях аргумента значение функции равно: **а)** –3; **б)** –4?

789. Функция задана формулой $y = 3x - 1$, где переменная x может принимать значения –6; –3; 0; 3; 6; 9. Задайте эту функцию таблицей.

Уровень В

790. Докажите, что функция $y = x^2 + 6x + 10$ не может принимать отрицательные значения.

791. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x + 2$.

792. При каких значениях аргумента значения функции $y = x^2 - 4|x|$ равны нулю?

793. Функция задана формулой $y = x^2 + 2ax$, где a — некоторое положительное число. Принимает ли эта функция отрицательные значения?

Упражнения для повторения

794. Из города A в город B, расстояние между которыми 40 км, выехал велосипедист, а через 40 мин навстречу ему из города B — мотоциклист. Скорость велосипедиста 15 км/ч, а мотоциклиста — 45 км/ч. Через какое время после выезда велосипедиста они встретятся?

795*. Сколько трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 3, 6 и 9, если в записи чисел цифры могут повторяться?

796. На координатной плоскости отметьте точки $A(-4; 0)$, $B(0; 1)$, $C(4; -1)$ и точку D с абсциссой -3 и ординатой 2.

797. Через точку $A(3; 0)$ проведите прямую, параллельную оси y, а через точку $B(0; 2)$ — прямую, параллельную оси x. Найдите координаты точки пересечения проведенных прямых.

798. Найдите периметр и площадь прямоугольника $ABCD$, если $A(-1; -1)$, $B(3; -1)$, $C(3; 1)$.

24. График функции. Функция как метематическая модель реальных процессов

1. График функции. Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = 0{,}5x^2$, где $-3 \le x \le 2$. Найдем значение этой функции для целых значений аргумента и запишем результаты в таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	4,5	2	0,5	0	0,5	2

Значения x мы выбирали так, что каждое следующее на 1 больше предыдущего. Поэтому говорят, что таблица значений функции составлена с шагом 1.

Отметим на координатной плоскости точки, абсциссы которых равны выбранным значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции (рис. 4).

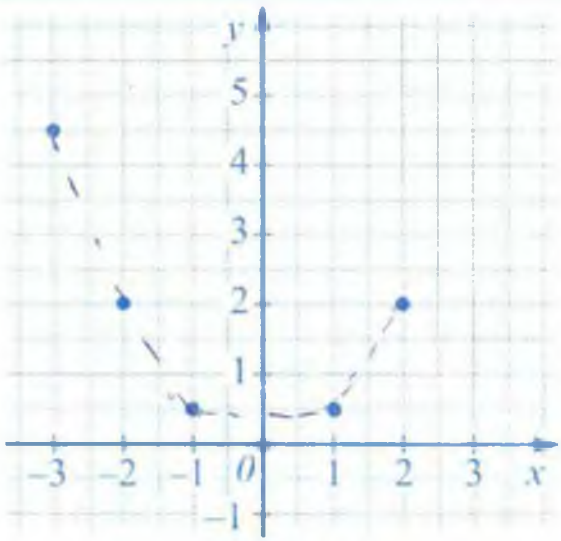


Рис. 4

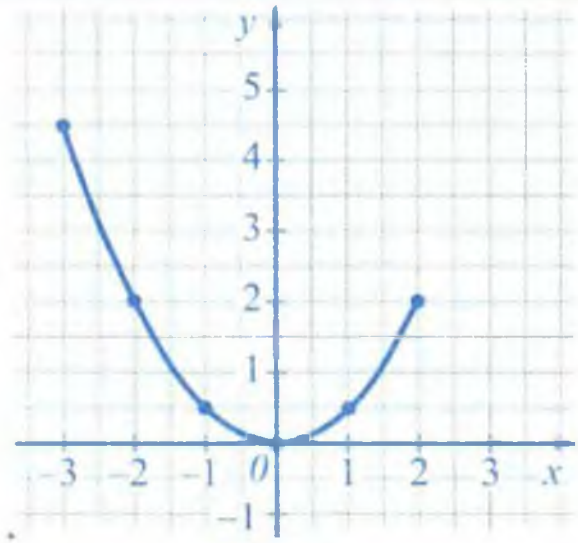


Рис. 5

Выбирая другие значения x, удовлетворяющие неравенству $-3 \le x \le 2$, и вычисляя соответствующие значения y, получим другие пары значений x и y. Каждой из этих пар также соответствует определенная точка на координатной плоскости. Все такие точки образуют фигуру, которую называют *графиком* функции, заданной формулой $y = 0{,}5x^2$, где $-3 \le x \le 2$ (рис. 5).

График функции образуют точки координатной плоскости, абсциссы которых равны всем значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

2. Графический способ задания функции. Имея график функции, можно находить ее значение при известном значении аргумента и наоборот: находить значения аргумента при известном значении функции.

Рассмотрим, например, функцию, график которой изображен на рисунке 6. (О такой функции говорят, что она задана *графически*.)

Рис. 6

Найдем с помощью графика значение функции при $x = 4$. Для этого через точку оси x с абсциссой 4 проведем прямую, параллельную оси y. Точка

ее пересечения с графиком функции имеет координаты (4; 8). Следовательно, при $x = 4$ значение функции равно 8. Найдем с помощью этого же графика значения аргумента, при которых значение функции равно 6. Для этого через точку оси y с ординатой 6 проведем прямую, параллельную оси x. Получим две точки ее пересечения с графиком функции: (2; 6) и (8; 6). Таким образом, функция принимает значение 6 при $x = 2$ и $x = 8$.

Некоторая линия на координатной плоскости задает функцию, если, пользуясь ею, для каждого значения переменной x можно найти только одно значение переменной y.

Рассматривая график, изображенный на рисунке 6, можно отметить некоторые свойства функции, заданной этим графиком.

1) Область определения функции образуют все значения x, удовлетворяющие неравенству $-5 \le x \le 10$.

2) Наибольшее значение функции равно 9 (это значение функция принимает при $x = 6$).

3) Наименьшее значение функции равно –2 (это значение функция принимает при $x = -5$).

4) Область значений функции образуют все значения y, удовлетворяющие неравенству $-2 \le y \le 9$.

5) Значение функции равно нулю при $x = -3$. Те значения аргумента, при которых значение функции равно нулю, называют *нулями* функции. Следовательно, значение $x = -3$ является нулем данной функции.

6) Функция принимает положительные значения, если $-3 < x \le 10$; отрицательные значения — если $-5 \le x < -3$.

3. Функция как математическая модель реальных процессов. Рассмотрим рисунок 7, на котором изображен график изменения температуры воды на протяжении 20 мин.

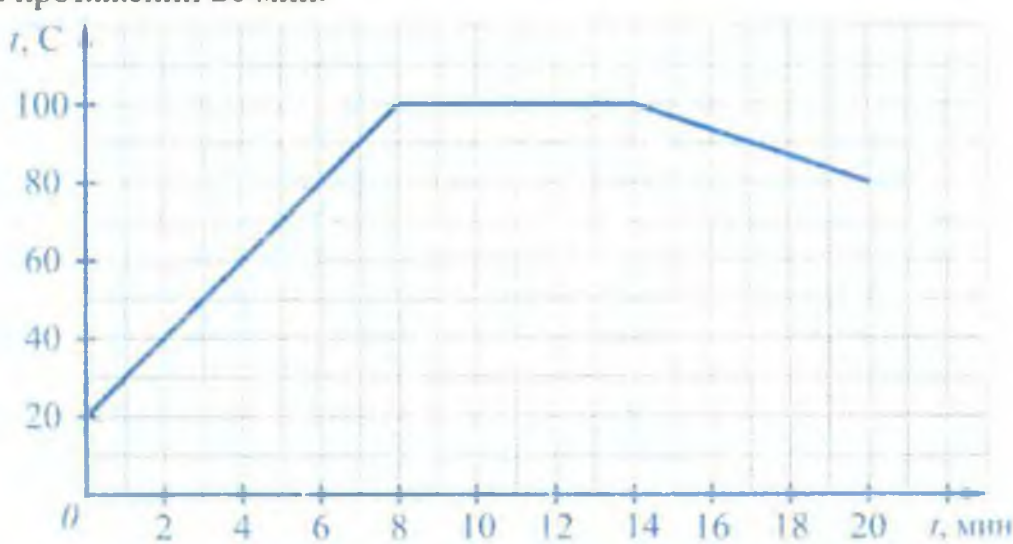


Рис. 7

Из графика видно, что начальная температура воды равнялась 20°С; на протяжении первых 8 мин температура воды увеличилась до 100°С, потом на протяжении 6 мин (от 8 мин до 14 мин) температура воды не изменялась, а на протяжении следующих 6 мин температура воды понизилась до 80°С.

Функция, график которой изображен на рисунке 7, описывает реальный процесс изменения температуры воды. Говорят, что эта функция моделирует данный процесс, или что она является *математической моделью* данного процесса.

Если тело движется равномерно со скоростью 15 м/с, то расстояние S м, пройденное ним за время t с, можно вычислить по формуле $S = 15t$. В этом случае функция, заданная формулой $S = 15t$, является математической моделью равномерного движения.

В седьмом и последующих классах мы познакомимся со многими функциями, которые можно использовать при моделировании реальных процессов и зависимостей между разными величинами.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Построить график функции, заданной формулой:

а) $y = 0{,}5x + 1$, где $-4 \le x \le 4$, составив таблицу значений функции с шагом 1;

б) $y = 1 - x^2$, где $-2 \le x \le 2$.

● **а)** Составим таблицу значений функции:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Отметим точки, координаты которых указаны в таблице, на координатной плоскости. Если к этим точкам приложить линейку, то увидим, что все они лежат на одной прямой. Соединим отрезком крайние отмеченные точки. Этот отрезок и является графиком функции $y = 0{,}5x + 1$, где $-4 \le x \le 4$ (рис. 8).

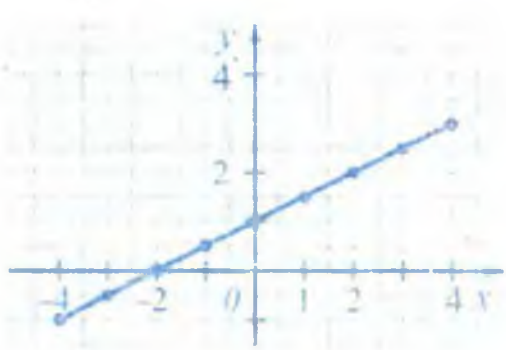


Рис. 8

Рис. 9

б) Составим таблицу значений функции:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-3	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	-3

Отметим точки, координаты которых указаны в таблице, на координатной плоскости. Соединим их плавной линией. Имеем график функции, заданной формулой $y = 1 - x^2$, где $-2 \le x \le 2$ (рис. 9). ●

Пример 2. Принадлежит ли графику функции $y = 2x^2$ точка $A(3; 9)$; $B(2; 8)$?

● Точка $A(3; 9)$ будет принадлежать графику данной функции, если значение функции при $x = 3$ равно 9.

Находим: если $x = 3$, то $y = 2 \cdot 3^2 = 18$. Значение функции не равно 9. Следовательно, точка $A(3; 9)$ графику функции не принадлежит.

Для точки $B(2; 8)$ имеем: если $x = 2$, то $y = 2 \cdot 2^2 = 8$. Точка $B(2; 8)$ принадлежит графику функции. ●

Пример 3. На рисунке 10 изображен график функции. Используя график, заполнить таблицу:

x	-6	-2	8			
y				-4	$-1{,}5$	1

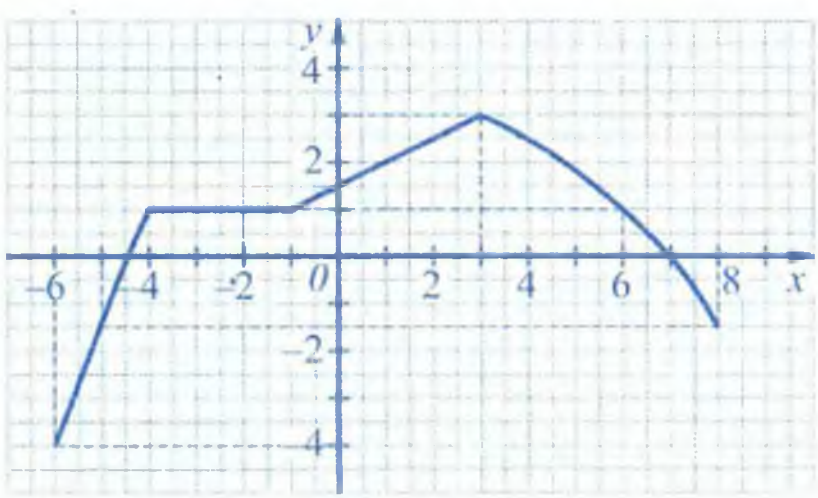


Рис. 10

● Заполним таблицу:

x	-6	-2	8	-6	$-5;\ 8$	$-4 \le x \le -1;\ 6$
y	-4	1	$-1{,}5$	-4	$-1{,}5$	1

●

Устно

799. Функция задана графиком (см. рис. 11). Найдите значение функции при $x = -2$. Какому значению аргумента соответствует значение функции $y = 2$? Какова область определения и область значений функции?

800. Является ли линия, изображенная на рисунке 12, графиком некоторой функции? Ответ обоснуйте.

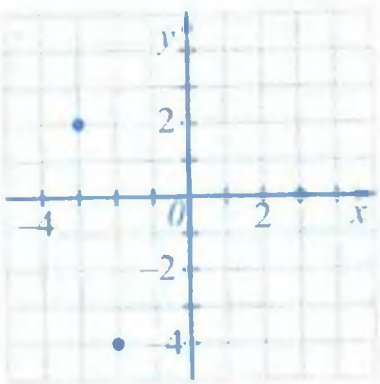


Рис. 11

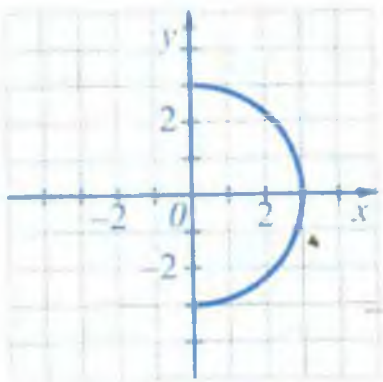


Рис. 12

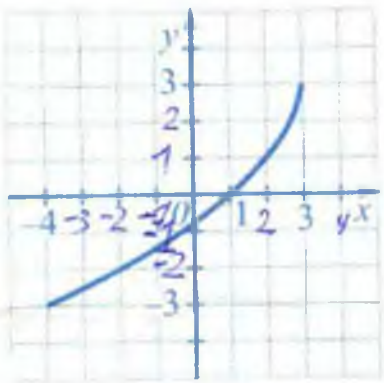


Рис. 13

801. Функция задана графиком (см. рис. 13).

а) Найдите значение функции при $x = -4$; $x = -2$; $x = 2$.

б) Найдите значение аргумента, которому соответствует значение функции $y = -2$; $y = 0$; $y = 3$.

в) Какова область определения и область значений функции?

г) Чему равны наибольшее и наименьшее значения функции?

д) Укажите нули функции.

е) При каких значениях x функция принимает положительные значения отрицательные значения?

802. На рисунке 14 показан график изменения объема воды в баке в зависимости от времени.

Рис. 14

а) Сколько воды было в баке в начальный момент времени?

б) Сколько воды поступило в бак на протяжении первых 5 мин; 8 мин; 10 мин?

в) Сколько времени объем воды в баке не менялся?

г) На протяжении скольких минут опустел бак?

Уровень А

803. На рисунке 15 изображен график функции. Используя этот график, заполните таблицу:

x	–3	–2	0	1	4,5				
y						–1,5	–1	0	4

Какова область определения и область значений функции? Чему равно наименьшее значение функции? При каких значениях x функция принимает положительные значения?

804. На рисунке 16 изображен график функции. Используя этот график, заполните таблицу:

x	–2,5	–1	3	4				
y					–1,5	0	1	4

Какова область определения и область значений функции? Чему равно наибольшее значение функции? Укажите нули функции. При каких значениях x функция принимает отрицательные значения?

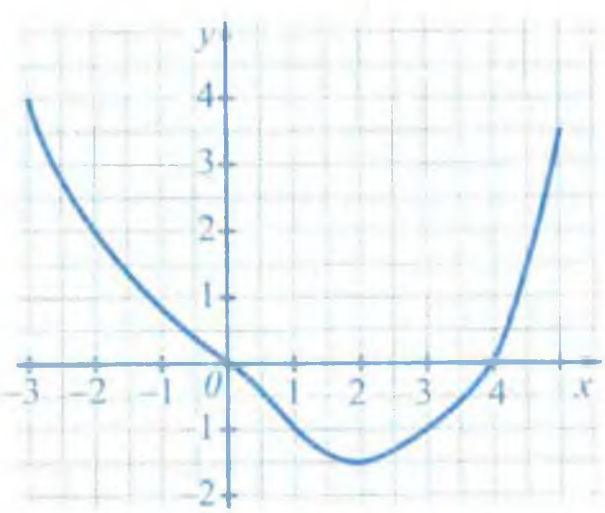


Рис. 15

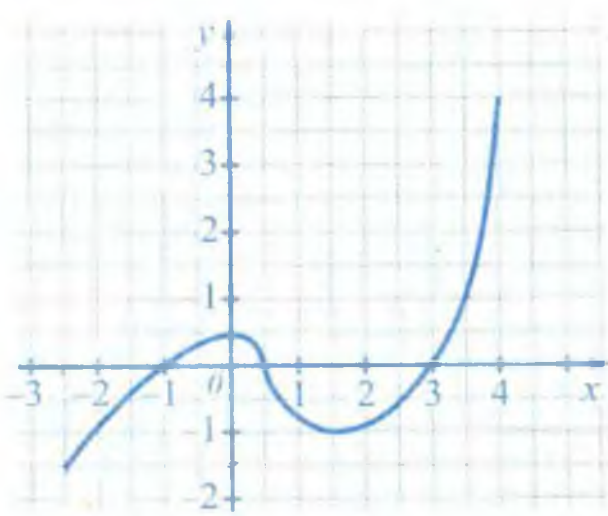


Рис. 16

805. Постройте график функции, заданной формулой $y = 2x + 1$, где $-3 \le x \le 3$, составив таблицу значений функции с шагом 1. Принадлежат ли графи-

ку функции точки $A(-2; -3)$, $B(0; -1)$? Используя график, найдите: значение функции при $x = -1{,}5$; $x = 0{,}5$; значение аргумента, которому соответствует значение функции $y = 0$; $y = 1$.

806. Постройте график функции, заданной формулой $y = -3x - 1$, где $-2 \le x \le 2$, составив таблицу значений функции с шагом 1. Принадлежат ли графику функции точки $M(0; -1)$, $N(2; 5)$?

Постройте график функции, заданной формулой:

807. **а)** $y = \frac{1}{4}x - 1$, где $-4 \le x \le 6$; **б)** $y = x^2 - 1$, где $-2 \le x \le 2$.

808. **а)** $y = \frac{1}{2}x + 2$, где $-6 \le x \le 4$; **б)** $y = x^2$, где $-1 \le x \le 3$.

809. На рисунке 17 изображен график зависимости высоты полета самолета от времени. **а)** На какой максимальной высоте летел самолет? **б)** Сколько времени самолет набирал высоту?

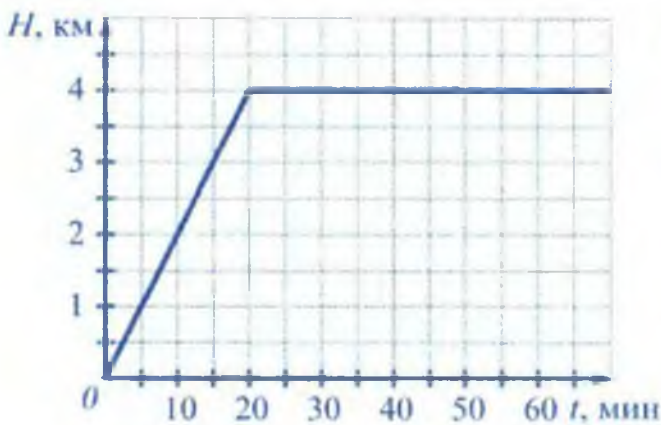


Рис. 17

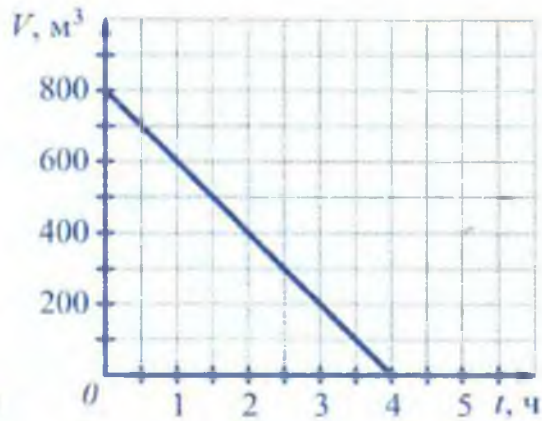


Рис. 18

810. На рисунке 18 изображен график изменения объема воды в бассейне. **а)** Какой процесс изображает этот график: вода поступает в бассейн или вытекает из бассейна? **б)** Сколько воды было в бассейне в начальный момент времени; через 4 ч?

Уровень Б

811. На рисунке 19 изображен график изменения температуры воздуха на протяжении суток.

а) Какова температура воздуха была в 2 ч; в 9 ч; в 18 ч; в 24 ч?

б) В котором часу температура воздуха была –2°; 0°; 6°?

в) В котором часу температура воздуха была минимальной; максимальной?

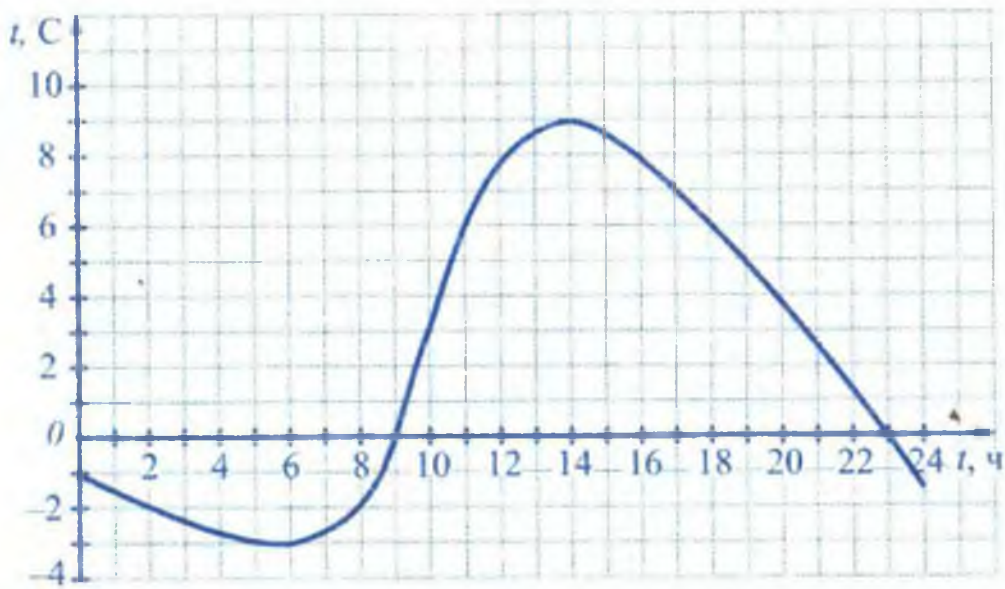


Рис. 19

812. На рисунке 20 изображен график зависимости скорости тела от времени.

а) Какую скорость имело тело через 2 с после начала движения; через 5 с; через 10 с; через 20 с?

б) В какой момент времени скорость тела была 4 м/с; 6 м/с; 8 м/с?

в) В какой момент времени скорость тела была наименьшей?

г) Укажите время, на протяжении которого тело двигалось с постоянной скоростью. Какой путь прошло тело за это время?

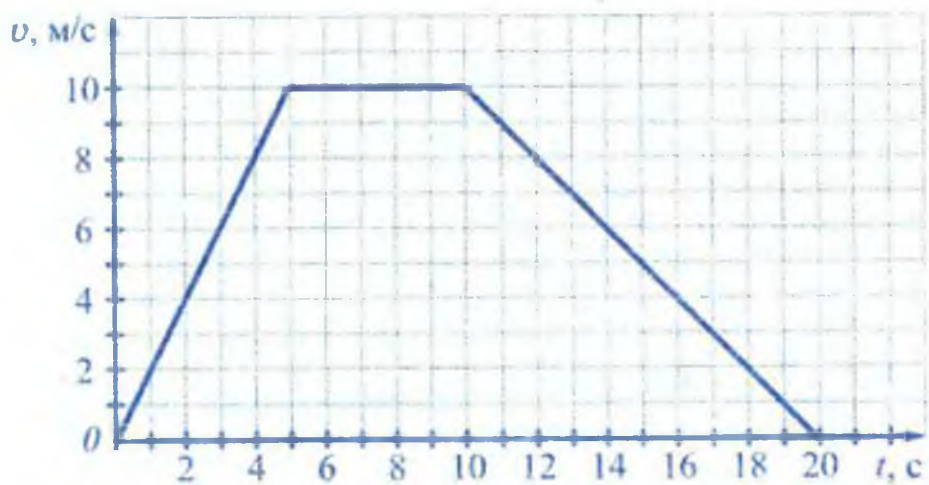


Рис. 20

813. На рисунке 21 изображен график движения группы туристов из лагеря до автостанции.

а) Сколько времени двигались туристы и какое расстояние они прошли?

б) Сколько времени затратили туристы на привал?

в) С какой скоростью двигались туристы на протяжении первых двух часов; после привала?

г) Какова средняя скорость движения туристов?

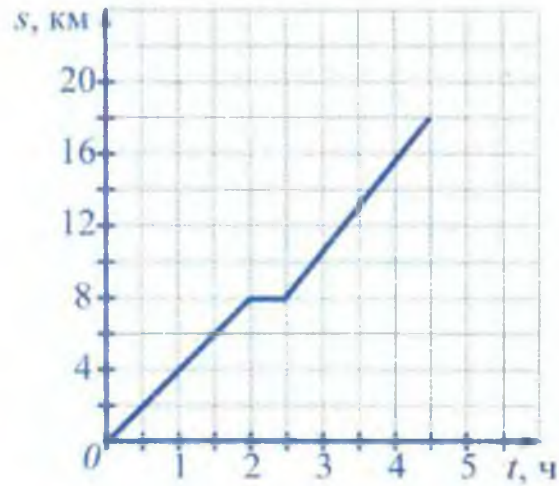


Рис. 21

814. Графиком функции является ломаная $ABCD$ (совокупность трех отрезков AB, BC и CD), где $A(-2; -3)$, $B(0; 3)$, $C(4; 3)$, $D(6; 1)$. Начертите график функции и заполните таблицу:

x	–1	1,33			4,5	
y			–2	3		1,5

Какова область определения и область значений функции? Укажите нули функции. При каких значениях x функция принимает положительные значения; отрицательные значения?

815. Графиком функции является ломаная $KLMN$, где $K(-4; 4)$, $L(-2; 2)$, $M(2; 2)$, $N(3; 3)$. Начертите график функции и заполните таблицу:

x	–3			1,25	2,5	
y		3,5	2			3

Какова область определения и область значений функции? Чему равны наибольшее и наименьшее значения функции? Имеет ли функция нули? При каких значениях x функция принимает положительные значения; отрицательные значения?

Постройте график функции, заданной формулой:

816. **а)** $y = x(4 - x)$, где $-1 \le x \le 5$; **б)** $y = x^2 + 4x + 3$, где $-3 \le x \le 1$.

817. **а)** $y = x^2 - 2x$, где $-2 \le x \le 3$; **б)** $y = (1 - x)(3 + x)$, где $-2 \le x \le 1$.

Уровень В

818. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = |x|$, где $-3 \le x \le 3$; **б)** $y = |x| - 2$, где $-3 \le x \le 3$.

Упражнения для повторения

819. При каких значениях x значение выражения $15x - 6$ равно 3?

820. Решите уравнение:

а) $(2x + 3)(4 - (2x + 3)) = 0$; б) $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-1}{2} = 1$.

821. В первом сплаве 40% меди, а во втором — 10%. Сколько килограммов второго сплава нужно прибавить к 10 кг первого, чтобы получить 30-процентный сплав меди?

822. Расстояние между городами A и B равно 190 км. Из города A в город B выезжает автомобиль и движется со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от города B он будет через t ч? Запишите решение в виде выражения с переменной. Найдите значение этого выражения при $t = 1{,}2$.

25. Линейная функция

1. Что такое линейная функция. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть тело движется равномерно и прямолинейно со скоростью 20 м/с и направление его движения совпадает с направлением оси x (рис. 22). Если в начальный момент движения тело находилось на расстоянии 35 м от начала отсчета, то через t с тело будет находится на расстоянии $S = 20t + 35$ метров от него.

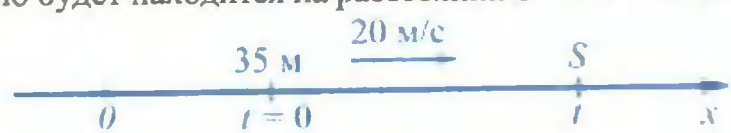


Рис. 22

Пусть в бассейн через трубу вливается каждую минуту 2,5 м^3 воды. Если в начальный момент времени в бассейне было 70 м^3 воды, то объем V воды (в м^3), которая будет в бассейне через t мин, можно вычислить по формуле $V = 2{,}5t + 70$.

Формулами $S = 20t + 35$, $V = 2{,}5t + 70$, где t — независимая переменная, задаются функции, которые называют *линейными*.

Определение **Линейной функцией называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа.**

В формуле $y = kx + b$ переменная x может принимать любые значения, поэтому область определения линейной функции образуют все числа.

2. График линейной функции. Построим график линейной функции $y = 0{,}5x - 1$. Для этого составим таблицу нескольких значений x и соответствующих значений y:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	–3,5	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5

Отметим точки, координаты которых указаны в таблице, на координатной плоскости (рис. 23). Приложив линейку, убеждаемся, что все отмеченные точки лежат на одной прямой. Если бы для других значений x вычислили соответствующие значения y и отметили точки с такими координатами на координатной плоскости, то и они лежали бы на этой прямой.

Через отмеченные точки проведем прямую. Она является графиком линейной функции $y = 0{,}5x - 1$.

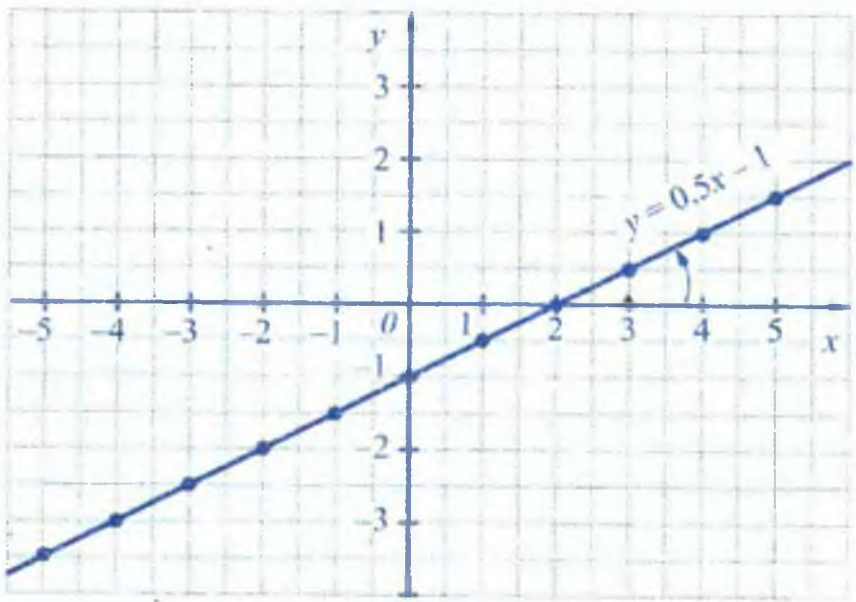


Рис. 23

Вообще, *графиком линейной функции является прямая.*

Чтобы построить график линейной функции, достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки на координатной плоскости и провести через них прямую. Так, чтобы построить график функции $y = 0{,}5x - 1$, достаточно было взять две точки, например, (0; –1) и (2; 0) и провести через них прямую.

3. Угловой коэффициент. В формуле линейной функции $y = 0{,}5x - 1$ коэффициент при переменной x положителен: $k = 0{,}5 > 0$. График этой функции образует острый угол с положительным направлением оси x (см. рис. 23). На рисунке 24 изображен график линейной функции $y = -2x + 1$. Для этой функции $k = -2 < 0$ и ее график образует тупой угол с положительным направлением оси x.

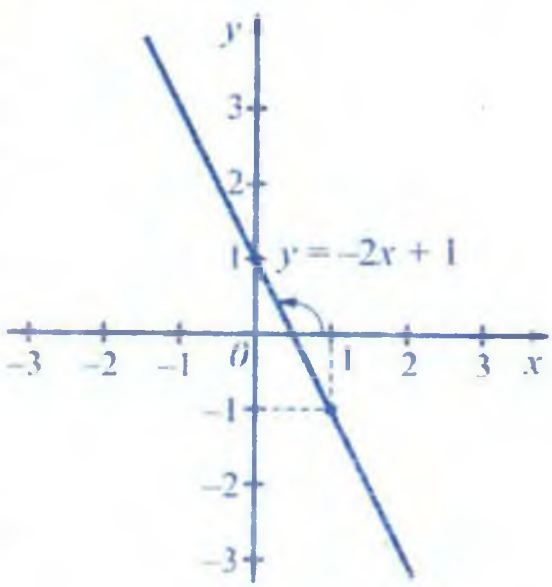


Рис. 24

Таким образом, от коэффициента k зависит угол, который образует график функции $y = kx + b$ с положительным направлением оси x. Поэтому число k называют *угловым коэффициентом прямой* $y = kx + b$.

Если $k > 0$, то прямая $y = kx + b$ образует с положительным направлением оси x острый угол, если $k < 0$, — тупой угол.

Если $k = 0$, то формула, которой задается линейная функция, имеет вид $y = 0x + b$, то есть $y = b$. Такая функция при всех значениях x принимает одно и то же значение b. Например, линейная функция $y = 2$ при всех значениях x принимает значение 2. Поэтому графиком функции является прямая, образованная точками $(x; 2)$, где x — любое число. Эта прямая параллельна оси x (рис. 25).

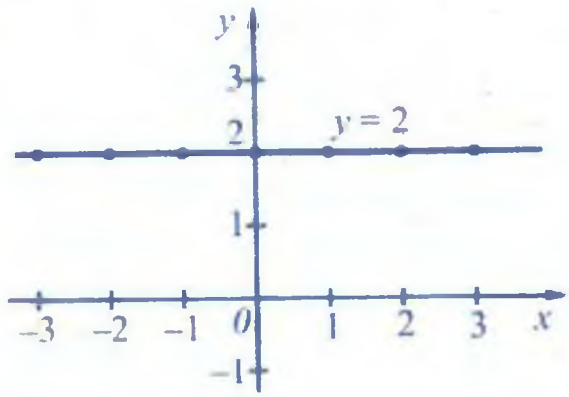


Рис. 25

Чтобы построить график функции $y = 2$, достаточно было отметить на оси y точку с ординатой 2 и провести через нее прямую, параллельную оси x.

4. Свойства линейной функции $y = kx + b$.

1) *Область определения функции образуют все числа.*

2) *Если $k \neq 0$, то область значений функции образуют все числа; если $k = 0$, то функция принимает только одно значение $y = b$.*

3) *Графиком функции является прямая.*

4) *График функции образует с положительным направлением оси x острый угол, если $k > 0$, тупой угол, если $k < 0$. Если $k = 0$, то график параллельный оси x, в частности, если $k = 0$ и $b = 0$, то он совпадает с осью x.*

5. Функция $y = kx$. В формуле $y = kx + b$, которой задается линейная функция, положим $b = 0$. Получим формулу $y = kx$, которой задается функция, являющаяся частным, но очень важным случаем линейной функции и служит моделью многих реальных процессов. Рассмотрим примеры.

1. Пусть тело движется со скоростью 20 м/с. Тогда путь S м, пройденный им за время t с, можно вычислить по формуле $S = 20t$. Эта формула задает путь S как функцию времени t.

2. Плотность железа 7,8 г/см^3. Массу m г железа объемом V см^3 можно вычислить по формуле $m = 7{,}8V$. Эта формула задает массу m как функцию объема V.

Перейдя в примерах к принятым обозначениям аргумента и функции, получим функции, которые задаются формулами $y = 20x$ и $y = 7{,}8x$, то есть формулами вида $y = kx$, где $k \neq 0$.

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx$, где x — независимая переменная, k — некоторое число, $k \neq 0$, называют еще *прямой пропорциональностью.*

Поскольку прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции, то графиком прямой пропорциональности является прямая. Эта прямая проходит через начало координат (потому что, если $x = 0$, то $y = k \cdot 0 = 0$).

Для построения графика прямой пропорциональности достаточно найти какую-нибудь точку графика, отличную от начала координат, и провести через эту точку и начало координат прямую.

Построим график функции $y = \frac{1}{3}x$. Найдем координаты какой-нибудь точки графика, отличной от начала координат: если $x = 3$, то $y = 1$. Отметим на координатной плоскости точку (3; 1) и проведем через нее и через начало координат прямую (рис. 26). Эта прямая является графиком функции $y = \frac{1}{3}x$.

На рисунке 27 изображены графики функций вида $y = kx$ при разных значениях k.

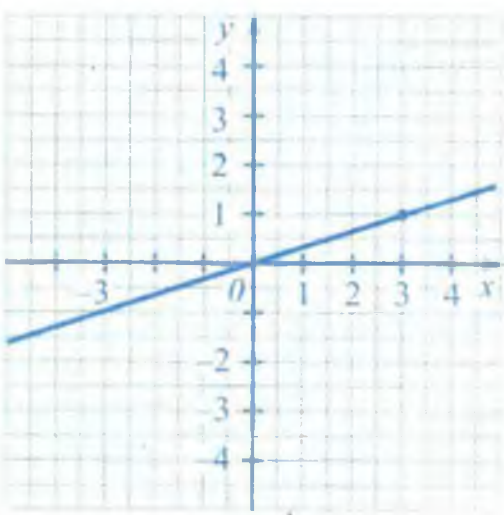


Рис. 26

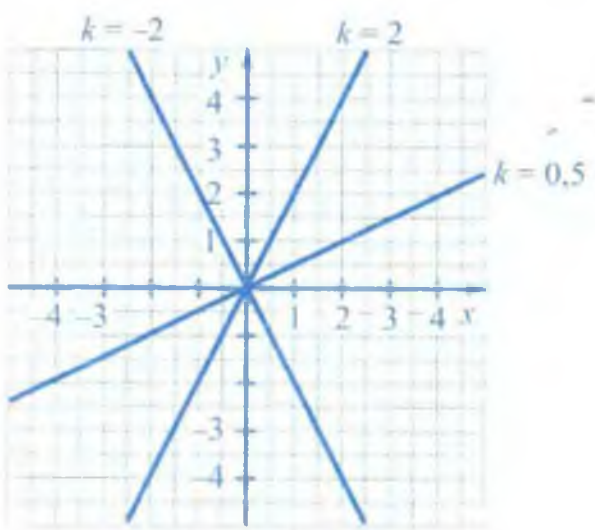


Рис. 27

Если $k > 0$, то график функции $y = kx$ расположен в первой и третьей координатных четвертях, а если $k < 0$, — во второй и четвертой четвертях.

Для тех, кто хочет знать больше

6. Точки пересечения графиков функций. На рисунке 28 изображены графики двух линейных функций $y = -0{,}25x + 4$ и $y = x - 1$. При $x = 4$ функции принимают одно и то же значение $y = 3$. Следовательно, графики функций имеют общую точку (4; 3). Еще говорят, что графики пересекаются в точке (4; 3).

Вообще, графики двух функций имеют общую точку, если существует значение x, при котором обе функции принимают одно и то же значение.

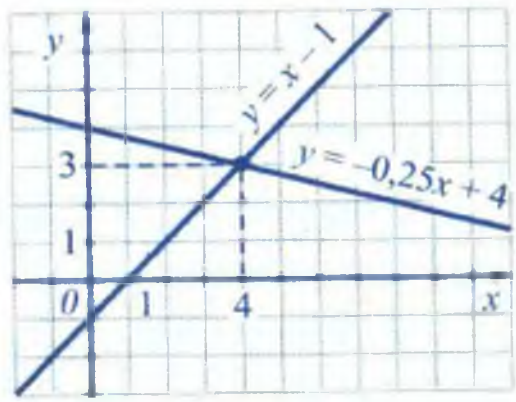


Рис. 28

7. Взаимное расположение графиков линейных функций. Рассмотрим две линейные функции $y = 0{,}5x - 2$ и $y = 0{,}6x + 1$, формулы которых имеют разные коэффициенты при x. Выясним, пересекаются ли графики этих функций (рис. 29). Для этого проверим, существует ли значение x, при котором обе функции принимают одно и то же значение; другими словами: существует ли значение x, при котором выполняется равенство $0{,}5x - 2 = 0{,}6x + 1$. Решим данное уравнение:

$$0{,}5x - 0{,}6x = 2 + 1; \quad -0{,}1x = 3; \quad x = -30.$$

При $x = -30$ обе функции принимают одно и то же значение:

$$y = 0{,}5 \cdot (-30) - 2 = -15 - 2 = -17 \text{ и } y = 0{,}6 \cdot (-30) + 1 = -18 + 1 = -17.$$

Следовательно, графики функций пересекаются в точке (–30; –17).

Рассмотрим две линейные функции $y = 0{,}5x - 2$ и $y = 0{,}5x + 1$, формулы которых имеют одинаковые коэффициенты при x. Уравнение $0{,}5x - 2 = 0{,}5x + 1$ не имеет корней. Поэтому прямые, которые являются графиками функций $y = 0{,}5x - 2$ и $y = 0{,}5x + 1$ (рис. 30), не имеют общих точек (эти прямые параллельны).

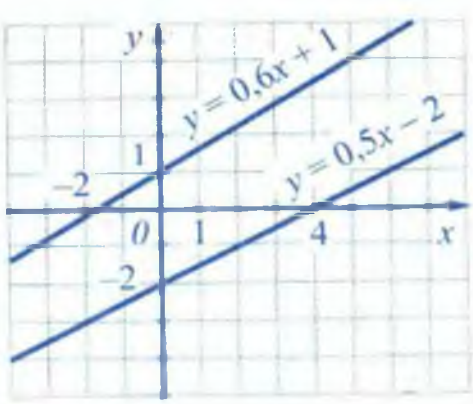


Рис. 29

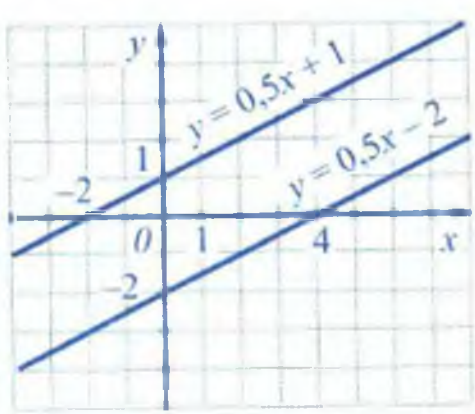


Рис. 30

Вообще, ***графики функций вида $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ пересекаются, если $k_1 \neq k_2$ (коэффициенты при x разные), и параллельны, если $k_1 = k_2$ (коэффициенты при x одинаковы) и $b_1 \neq b_2$.***

Примеры решения упражнений

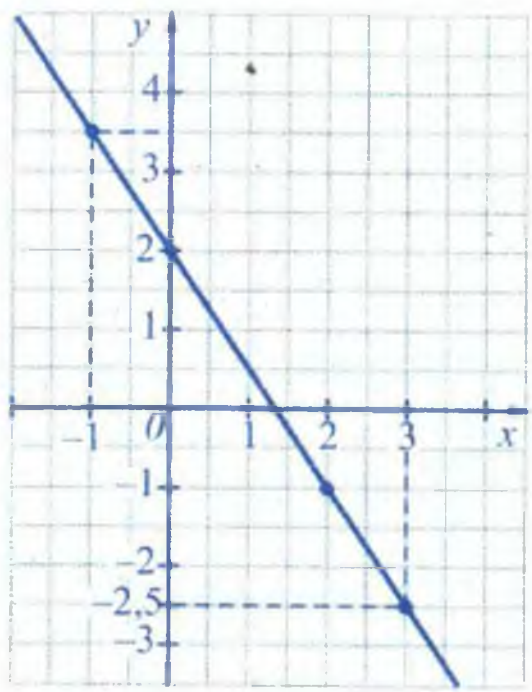
Пример 1. Построить график функции, заданной формулой $y = -1{,}5x + 2$. Используя график, найти:

а) значение y, которое соответствует $x = -1$;

б) значение x, которому соответствует $y = -2{,}5$.

● Построим график функции.

$y = -1{,}5x + 2$		
x	0	2
y	2	–1



а) Пусть $x = -1$. Через точку $(-1; 0)$ проводим прямую, параллельную оси y, и находим точку ее пересечения с графиком. Это точка $(-1; 3{,}5)$. Следовательно, значению $x = -1$ соответствует значение $y = 3{,}5$.

б) Пусть $y = -2{,}5$. Через точку $(0; -2{,}5)$ проводим прямую, параллельную оси x, и находим точку ее пересечения с графиком. Это точка $(3; -2{,}5)$. Следовательно, значение $y = -2{,}5$ соответствует значению $x = 3$. ●

Пример 2. Дана функция $y = 2{,}4x - 6$. Не выполняя построение графика функции, найти координаты точек его пересечения с осями координат и нули функции.

● Точки пересечения графика с осями координат — это точки графика, абсцисса или ордината которых равна нулю.

Если $x = 0$, то $y = 2{,}4 \cdot 0 - 6 = -6$.

$(0; -6)$ — точка пересечения графика с осью y.

Если $y = 0$, то $0 = 2{,}4x - 6$; $-2{,}4x = -6$; $x = 2{,}5$.

$(2{,}5; 0)$ — точка пересечения графика с осью x.

Значение функции равно нулю ($y = 0$), если $2{,}4x - 6 = 0$, откуда $x = 2{,}5$. Следовательно, нулем функции является $x = 2{,}5$. ●

Пример 3. Найти значения функции $y = -3x$ при $x = 2$ и $x = 5$. Сравнить данные значения аргумента и соответствующие значения функции.

● Если $x = 2$, то $y = -3 \cdot 2 = -6$; если $x = 5$, то $y = -3 \cdot 5 = -15$. Сравним значения аргумента: $2 < 5$; сравним соответствующие значения функции: $-6 > -15$. Меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции. ●

Устно

823. Какие из данных функций являются линейными:

а) $y = x + 5$; б) $y = -3x$; в) $y = \frac{2}{x}$; г) $y = 8$;

д) $y = \frac{1}{3}x - 1$; е) $y = 0$; ж) $y = 3 - 7x$; з) $y = x^2 + 4$?

824. Линейные функции заданы формулами:

а) $y = -5x + 1$; б) $y = 0{,}1x$; в) $y = -3$; г) $y = 0$.

Чему равен коэффициент k в каждой из этих формул?

825. Даны две линейные функции $y = -3x + 1$ и $y = 2x - 4$. График какой из этих функций образует с положительным направлением оси x острый угол; тупой угол?

826. Укажите область определения и область значений функции:

а) $y = 3x + 2$; б) $y = -3x + 2$; в) $y = 3x$; г) $y = 2$.

827. Какая из данных функций является прямой пропорциональностью:

а) $y = -3x$; б) $y = x^2$; в) $y = 8x + 1$; г) $y = \frac{4}{5}x$?

828. Укажите верные утверждения:

а) графиком прямой пропорциональности является прямая;

б) график прямой пропорциональности проходит через начало координат;

в) если $k < 0$, то график прямой пропорциональности расположен в I и III четвертях.

Уровень А

829. Линейная функция задана формулой $y = 2x - 6$. Найдите значение y, которое соответствует $x = -6$; $x = 0$; $x = 9$. При каких значениях x значение функции равно -3; 0; 7?

830. Линейная функция задана формулой $y = 5x - 1$. Найдите значение y, которое соответствует $x = -4$; $x = 0$; $x = 2$. При каких значениях x значение функции равно -6; 0; 4?

831. Проходит ли график функции $y = 1{,}8x + 9$ через точку: $A(10; 27)$; $B(50; 89)$, $C(-20; -27)$?

Постройте график функции, заданной формулой:

832. **а)** $y = 2x - 3$; **б)** $y = -0{,}5x + 1$; **в)** $y = 0{,}5x + 2$; **г)** $y = -3x$.

833. **а)** $y = x - 2$; **б)** $y = -2x + 0{,}5$; **в)** $y = -2{,}5$.

В одной системе координат постройте графики функций:

834. **а)** $y = -1{,}5x$; $y = -1{,}5x - 2$; $y = -1{,}5x + 2$;

б) $y = 4$; $y = 1{,}5$; $y = -2$.

835. $y = 2x$; $y = 2x - 2$; $y = 2x + 1$.

836. Постройте график функции, заданной формулой $y = -1{,}5x + 1{,}5$. Используя график, найдите:

а) значение y, которое соответствует $x = -4$; $x = 0$; $x = 2$;

б) значение x, которому соответствует $y = -3$; $y = 1{,}5$;

в) ноль функции;

г) значения x, при которых функция принимает положительные значения.

837. Постройте график функции, заданной формулой $y = 0{,}5x - 3$. Используя график, найдите:

а) значение y, которое соответствует $x = -2$; $x = 2$; $x = 4$;

б) значение x, которому соответствует $y = -2$; $y = 1$;

в) ноль функции;

г) значения x, при которых функция принимает отрицательные значения.

838. Прямая пропорциональность задана формулой $y = 4x$. Заполните таблицу:

x	-3		-1	2	3	
y		-8				20

839. Прямая пропорциональность задана формулой $y = -2x$. Заполните таблицу:

x	-5		-2			3
y		6		0	-4	

Постройте в одной системе координат графики функций:

840. **а)** $y = 4x$; **б)** $y = -4x$; **в)** $y = -\frac{2}{3}x$.

841. **а)** $y = -3x$; **б)** $y = 3x$; **в)** $y = \frac{1}{2}x$.

842. Постройте график функции $y = -\frac{1}{2}x$. Используя график, найдите значения аргумента, которым соответствуют такие значения функции: -1; 2; 3.

843. Постройте график функции $y = 2x$. Используя график, найдите значения функции, которые соответствуют таким значениям аргумента: –1,5; 2,5.

844. Принадлежит ли графику прямой пропорциональности $y = 14x$ точка: $A(-2; -28)$; $B(0,5; 7)$; $C\left(-\frac{2}{7}; 4\right)$?

845. Какие точки принадлежат графику прямой пропорциональности $y = -4x$: $K(4; -1)$; $M(0,3; -1,2)$; $N(0; -4)$?

Уровень Б

Постройте графики функций и найдите координаты точки их пересечения:

846. **а)** $y = 4x - 1$ и $y = 2x + 2$; **б)** $y = -3x + 2$ и $y = x - 2$;

в) $y = \frac{1}{3}x - 1$ и $y = 1$.

847. **а)** $y = 3x - 2$ и $y = 2x - 1$; **б)** $y = -x + 2$ и $y = 1,5x + 2$.

848. Пересекаются ли графики функций:

а) $y = -2,5x + 1$ и $y = 2,5x - 1$; **б)** $y = 2x + 2$ и $y = 2x + 3$?

Не выполняя построения графика функции, найдите координаты точек его пересечения с осями координат и нули функции:

849. **а)** $y = -1,6x + 4$; **б)** $y = 0,3x - 21$; **в)** $y = -8$.

850. **а)** $y = 8 - 2,5x$; **б)** $y = -1,6x + 4,8$; **в)** $y = 6$.

851. Запишите формулу прямой пропорциональности, если ее график проходит через точку: **а)** (1; 17); **б)** (–2; –4).

852. Функция $y = kx$ при $x = 2$ принимает значение 7. Найдите k.

853. Найдите значение функции $y = 2,5x$ при $x = -2$ та $x = 4$. Сравните данные значения аргументов и соответствующие значения функции.

854. На рисунке 31 изображен график прямой пропорциональности.

а) Запишите формулу, которой задается эта функция.

б) Укажите значения y, которые соответствуют значениям $x \geq 0$.

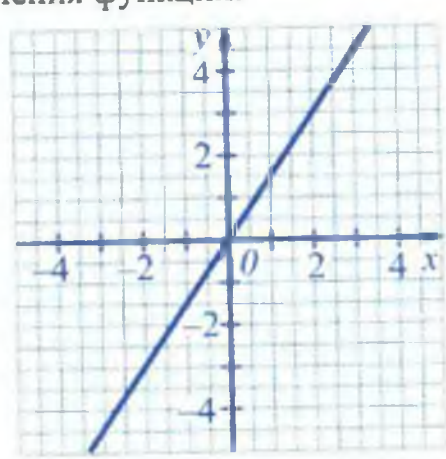


Рис. 31

855. В одной системе координат постройте графики функций $y = 3,5$ и $y = 2x$. При каких значениях x точки первого графика лежат выше точек второго графика?

856. При каких значениях x график функции $y = 0{,}5x$ лежит ниже графика функции $y = 2$?

857. Одна сторона прямоугольника 2 см, а вторая — x см, где $x \geq 1$. Запишите формулу, которая задает площадь y прямоугольника (в квадратных сантиметрах) как функцию переменной x. Постройте график этой функции.

858. В начальный момент времени велосипедист находился на расстоянии 60 м от финиша. На рисунке 32 изображен график изменения расстояния от велосипедиста до финиша соответственно изменению времени.

а) Через какое время велосипедист достиг финиша?

б) С какой скоростью двигался велосипедист?

в) Какое расстояние проехал велосипедист за две последние секунды?

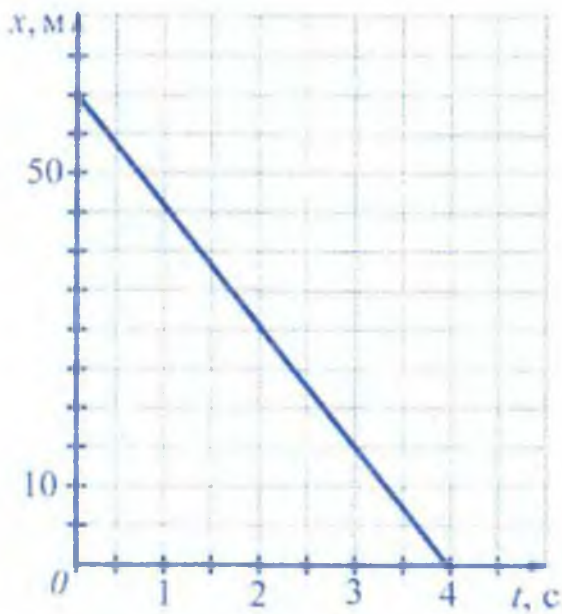


Рис. 32

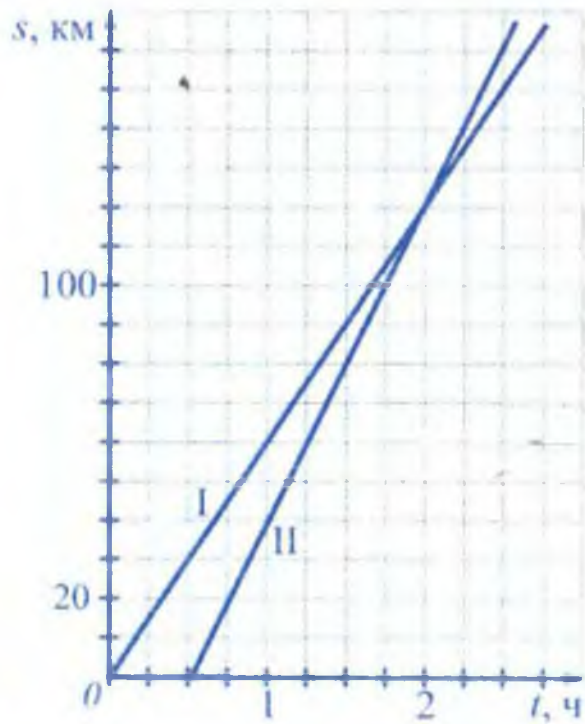


Рис. 33

859. На рисунке 33 изображен график движения двух автобусов, отправившихся с одной станции.

а) Через какое время после отправки первого автобуса отправился второй?

б) С какими скоростями двигались автобусы?

в) На каком расстоянии от станции второй автобус догнал первый?

г) Какой формулой задается расстояние, пройденное первым автобусом, в зависимости от времени?

860. Олег и Петр соревновались в плавании на дистанции 200 м в 50-метровом бассейне. На рисунке 34 изображены графики изменения расстояний от ребят до места старта.

а) Сколько времени затратил каждый из ребят на преодоление первых 50 м дистанции?

б) Кто выиграл соревнование?

в) На сколько секунд отстал проигравший от победителя?

г) Какова средняя скорость движения каждого из ребят на первой стометровке?

д) Что означают точки пересечения графиков?

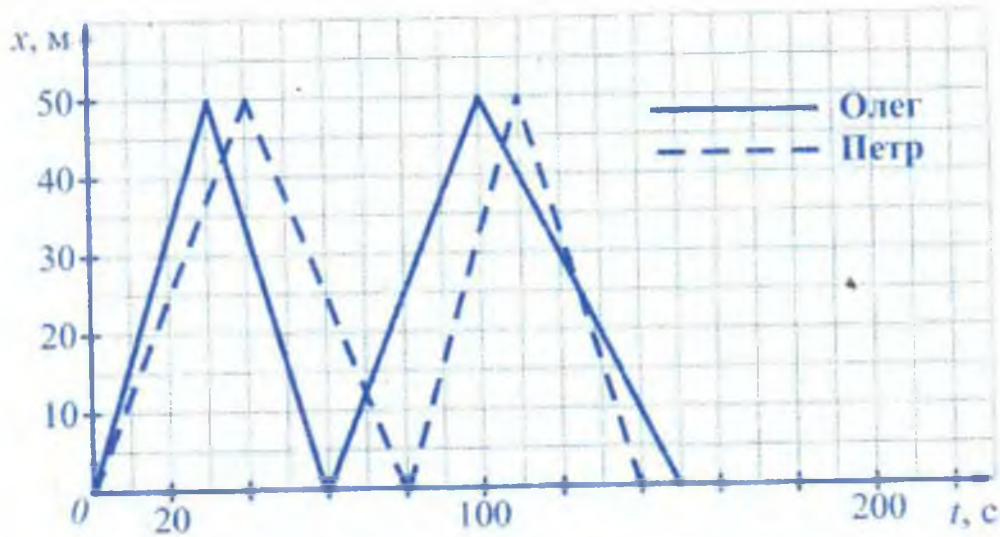


Рис. 34

861. Стоимость телеграммы определяется так: каждое слово стоит 5 к., прибавляют еще 5 к. и к полученной сумме прибавляют 20% налога на добавленную стоимость. Запишите формулу для нахождения стоимости телеграммы, состоящей из n слов. Найдите стоимость телеграммы, состоящей из 21 слова.

862. Абонентская плата за телефон составляет 7 грн. 34 к. Стоимость одной минуты местных разговоров 2 к., причем стоимость 100 мин разговоров входит в абонентскую плату. Запишите формулу для нахождения платы за телефон за месяц, если на протяжении месяца абонент осуществлял только местные разговоры общей продолжительностью n мин, где $n > 100$. Найдите плату за телефон, если $n = 320$.

Уровень В

863. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:

а) $y = 14x - 8$ и $y = 7x + 8$;

б) $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}$ и $y = \frac{1}{4}x$.

864. Проходит ли график функции $y = x + 4$ через точку пересечения графиков функций $y = 2x + 5$ и $y = -5x - 2$?

865. Найдите такое число a, чтобы точка пересечения прямых $y = ax$ и $y = 6x - 2$ имела абсциссу 2.

Постройте график функции, заданной формулой:

866. а) $y = |x| - 2$; б) $y = 5 - |x|$.

867. а) $y = x + 2|x|$; б) $y = 2x - |x|$.

Упражнения для повторения

868. Упростите выражение:

а) $(2a - c)^2 - (2a + c)^2 + 8ac$; б) $(2 - x^2)(x^2 + 2) + (x^2 - 2)^2$.

869. Найдите значение выражения $4a^2 - 4b^2$ при:

а) $a = 6{,}75$; $b = 3{,}25$; б) $a = 12\frac{4}{7}$; $b = 5\frac{4}{7}$.

870. Докажите, что значение выражения $(k + 3)(k^2 - k + 4) - (k - 4)(k + 3)^2 + 32k$ делится на 48 при каждом целом значении k.

871. К 30-процентному раствору соли массой 750 г долили 150 г воды. Сколько процентов соли содержит образовавшийся раствор?

872. В первом бидоне было молока в три раза больше, чем во втором. Когда из первого бидона перелили 12 л молока во второй, то во втором бидоне его стало в 1,4 раза больше, чем в первом. Сколько молока было в каждом бидоне сначала?

873. Скорость теплохода в стоячей воде 28 км/ч. Известно, что за 2 ч он проходит по течению реки на 41 км меньше, чем за 4 ч против течения. Какова скорость течения реки?

Интересно знать

«В одну реку нельзя войти дважды» — эти слова приписывают древнегреческому философу Гераклиту Эфесскому (из города Эфес). Они отображают важную особенность реального мира: все в нем пребывает в процессе изменения и развития. Именно выясняя закономерности в бескрайнем море видоизменений природы, ученые пришли к понятиям переменной величины и функции.

Понятие переменной величины впервые было введено в математику французским математиком Рене Декартом (1596–1650) в его знаменитой работе «Геометрия» в 1637 году. Именно после введения этого понятия начинает формироваться современное представление о функции как о зависимости одной переменной величины от другой. Следует отметить, что хотя некото-

рые зависимости между величинами, которые мы называем функциями, использовались еще в древние времена, математика до первой половины XVII в. оставалась наукой о постоянных величинах.

Термин «функция» (от латинского functio — выполнение, свершение) впервые использовал немецкий математик Готфрид Вильгельм Лейбниц в 1694 году.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), немецкий философ, математик, физик

Благодаря работам Лейбница и известного английского физика и математика Исаака Ньютона (1643–1727) сформировалась новая ветвь математики — математический анализ, в котором понятие функции является одним из главных. Лейбницем и Ньютоном были разработаны методы исследования функций, которые уже более 300 лет служат мощным средством изучения окружающего мира с помощью математики.

О весомой роли функций как математических моделей реальных процессов Ньютон писал так: «Я не смог бы получить многие свои фундаментальные результаты, если бы не отказался от непосредственного рассмотрения самих тел и не свел все просто к исследованию функций».

Вопросы и упражнения для повторения § 6

1. Приведите пример зависимости между переменными.
2. Объясните на примере, что такое аргумент и что такое функция.
3. Какие вы знаете способы задания функции? Приведите пример функции, заданной с помощью формулы.
4. Что называют областью определения и областью значений функции?
5. Какие точки координатной плоскости образуют график функции?
6. Как с помощью графика функции найти ее значение по известному значению аргумента?
7. Какую функцию называют линейной? Приведите примеры линейных функций.
8. Что является графиком линейной функции?
9. Какую функцию называют прямой пропорциональностью? Приведите примеры прямой пропорциональности.

874. Функция задана формулой $y = 5x - 3$.

а) Найдите значения функции, которые соответствуют таким значениям аргумента: –8; 0; 16.

б) Найдите значение аргумента, которому соответствует значение функции: –3; 1.

в) При каком значении x значение функции равно значению аргумента?

875. В некоторых странах (например, в США, Канаде) температуру воздуха измеряют в градусах Фаренгейта. Температура в градусах Фаренгейта (t_F) выражается через температуру в градусах Цельсия (t_C) по формуле $t_F = 1{,}8t_C + 32$.

а) Найдите t_F, если $t_C = 20°C$; $t_C = -15°C$.

б) Найдите t_C, если $t_F = 5°F$; $t_F = 50°F$.

в) Найдите в градусах Фаренгейта температуру плавления льда, температуру кипения воды.

876. Функция задана формулой $y = x^2 - 3$, где переменная x может принимать значения: –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3. Задайте эту функцию таблицей.

877. На рисунке 35 изображен график изменения температуры тела на протяжении 20 мин.

а) Какова была начальная температура тела?

б) На сколько градусов увеличилась температура тела на протяжении первых 4 мин?

в) На сколько градусов изменилась температура тела на протяжении последних 6 мин?

г) На протяжении скольких минут температура тела не изменялась?

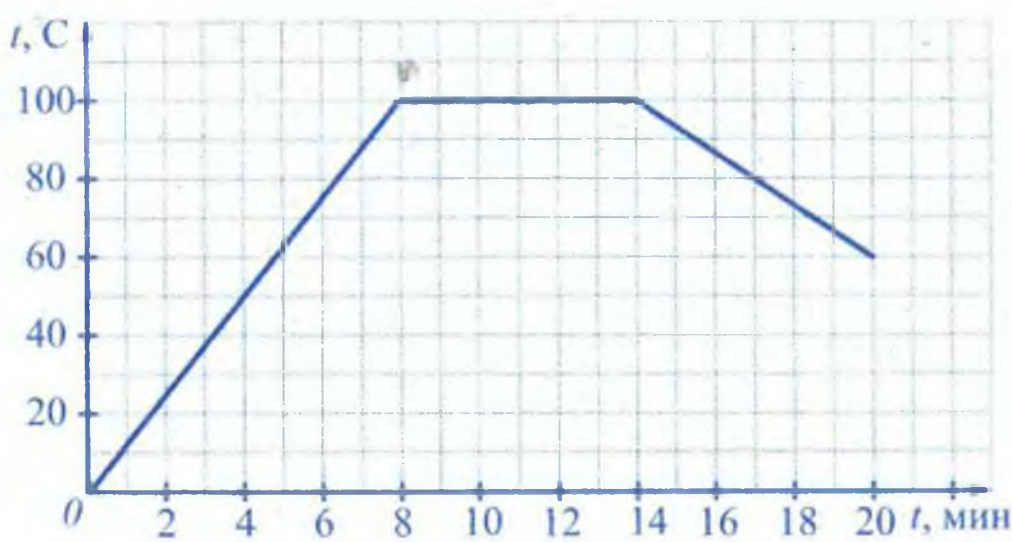


Рис. 35

878. Графиком функции является ломаная ABC, где $A(-2; 2)$, $B(1; -1)$, $C(5; 1)$. Начертите график функции. Какова область определения и область значений функции? Чему равны наибольшее и наименьшее значения функ-

ции? Укажите нули функции. При каких значениях x функция принимает положительные значения; отрицательные значения?

879. Постройте график функции $y = -3x - 1$. С помощью графика найдите:

а) значение функции при $x = -1{,}5$; $x = 1{,}5$;

б) значение x, при котором $y = 5$.

Постройте график функции:

880. **а)** $y = 2x + 1$, где $-3 \le x \le 1$; **б)** $y = 0{,}5x^2 - 0{,}5$, где $-2 \le x \le 2$.

881. **а)** $y = -3x$; **б)** $y = 1{,}5x - 1$.

882*. **а)** $y = 2|x|$; **б)** $y = x + |x|$.

883. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 1,5 см, 2 см и x см, где $x \ge 1$. Запишите формулу, которая задает объем параллелепипеда (в кубических сантиметрах) как функцию аргумента x. Постройте график этой функции.

884. Запишите формулу прямой пропорциональности, если ее график проходит через точку $A(-3; 1)$.

885. График функции $y = kx$ проходит через точку $A(-8; 4)$. Найдите k. Проходит ли график этой функции через точку: $B(2; -1)$; $C\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$?

886. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = -4x + 6$ с осями координат.

887. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 3x$ и $y = -3x + 6$; **б)** $y = x + 7$ и $y = 5 - 4x$.

888*. В одной системе координат постройте графики функций $y = |x|$ и $y = \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$. Найдите точки пересечения графиков. Используя графики функций, решите уравнение $|x| = \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

889*. Функция задана формулой $y = kx + 3$.

а) При каких значениях k график этой функции проходит через точку $(2; 4)$?

б) При каких значениях k график этой функции параллельный графику функции $y = 5x - 8$?

Задания для самопроверки № 6

Уровень 1

1. Чему равно значение функции $y = 2x - 0{,}5$ при $x = 1{,}5$?

а) 1,5; **б)** 1; **в)** –2,5; **г)** 2,5.

2. Найдите значение функции $y = -4x$ при $x = 0{,}5$.

а) –3,5; **б)** –4,5; **в)** –2; **г)** 2.

3. При каком значении аргумента значение функции $y = 4x$ равно 10?

а) 40; **б)** 2,5; **в)** 5; **г)** 2,4.

4. Какой из графиков является графиком функции $y = 3x$ (рис. 36)?

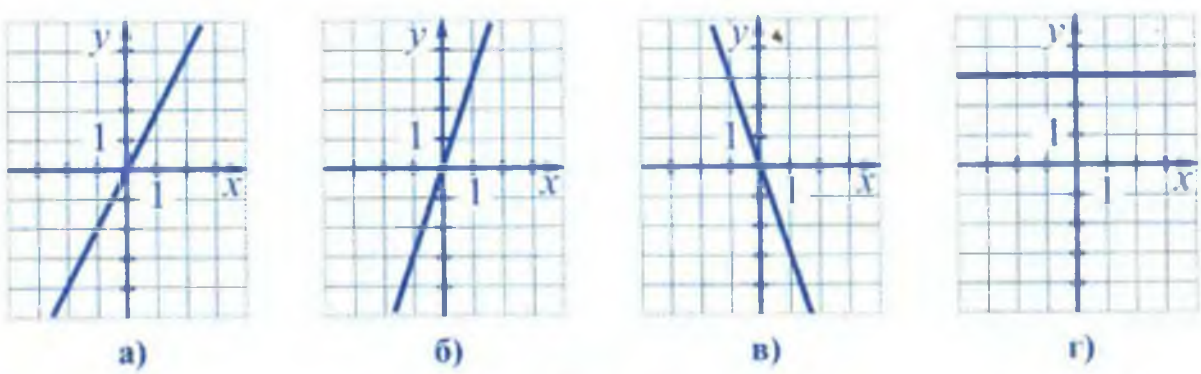


Рис. 36

5. Какая из точек принадлежит графику функции $y = 2x + 1$?

а) $A(-4; 9)$; **б)** $B(4; 9)$; **в)** $C(4; 7)$; **г)** $D(-4; -9)$.

6. Укажите верные утверждения:

а) графиком линейной функции является прямая;

б) формулой $y = 5x - 3$ задается прямая пропорциональность;

в) график функции $y = 2x + 3$ проходит через точку (5; 2);

г) функция, график которой изображен на рисунке 36. г), задается формулой $y = 3$.

Уровень 2

7. Функция задана формулой $y = 2x^2 - 4$. Для каждого значения аргумента укажите соответствующее значение функции:

а) $x = -2$; **1)** $y = -4$;

б) $x = 0{,}5$; **2)** $y = -3{,}5$;

в) $x = 3$; **3)** $y = 4$;

г) $x = 0$; **4)** $y = 14$.

8. Функция задана формулой $y = -4x - 1$. Найдите значение аргумента, которому соответствует значение функции –9; 9.

9. Используя график функции (рис. 37), найдите:

а) значение функции при $x = -3$;

б) значения аргумента, которым соответствует значение функции –2.

10. Постройте график функции $y = -2x$.

11. Проходит ли график функции, заданной формулой $y = 4 - x^2$, через точку (3; –5)?

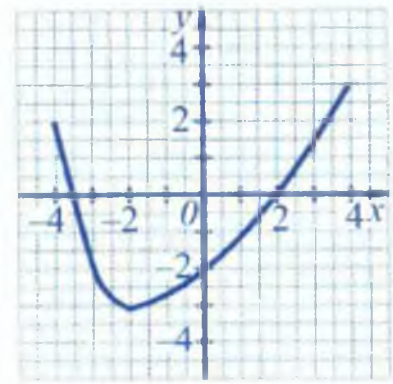


Рис. 37

Уровень 3

12. Найдите область определения и область значений функции, график которой изображен на рисунке 37. При каких значениях x функция принимает отрицательные значения?

13. Функция задана формулой $y = x^2 - 6x + 2$. Найдите значения аргумента, которым соответствует значение функции $y = 2$.

14. Постройте график функции $y = -2x - 2$. Укажите значение x, которое является нулем функции. При каких значениях x функция принимает отрицательные значения?

15. Найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = 3x - 5$ и $y = 9 - 2x$.

16. График функции $y = kx$ проходит через точку $A(2{,}5; 5)$. Проходит ли график этой функции через точку $B(-3; -6)$?

Уровень 4

17. Найдите наименьшее значение функции, заданной формулой $y = x^2 - 6x + 2$.

18. Функция задана формулой $y = (x - 2)(x + 4)$. Найдите значения аргумента, которым соответствует значение функции $y = -5$.

19. Проходит ли график функции $y = 0{,}4x + 1{,}4$ через точку пересечения графиков функций $y = 3x + 4$ и $y = -2x - 1$?

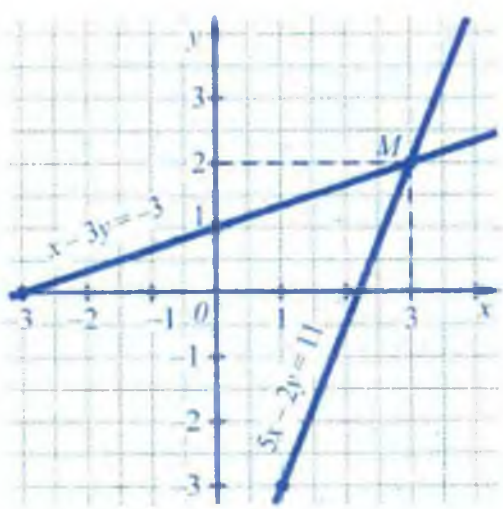
20. С помощью графиков функций найдите значения x, при которых значения функции $y = -x + 2$ больше соответствующих значений функции $y = 0{,}5x + 3{,}5$.

21. Постройте график функции, заданной формулой $y = 2|x| - 1$.

Раздел IV. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Существует немало задач, решая которые, получают уравнения, содержащие не одну, а несколько переменных.

В данном разделе мы выясним, что такое линейное уравнение с двумя переменными и его решение, что такое система двух линейных уравнений с двумя переменными и ее решение, каковы основные способы решения систем линейных уравнений с двумя переменными.



$\begin{cases} 5x - 2y = 11; \\ x - 3y = -3 \end{cases}$ — система двух линейных уравнений с двумя переменными;

$x = 3$, $y = 2$ — решение этой системы уравнений.

§ 7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

26. Уравнения с двумя переменными

1. Понятие уравнения с двумя переменными. Вы уже умеете решать линейные уравнения с одной переменной и уравнения, приводимые к линейным. Напомним, что линейное уравнение с одной переменной — это уравнение вида $ax = b$, где a и b — некоторые числа, а x — переменная.

Рассмотрим пример, который приводит к уравнению с двумя переменными.

Пусть известно, что сумма некоторых двух чисел равна 8. Если одно из чисел обозначить через x, а второе — через y, то получим уравнение

$$x + y = 8,$$

которое содержит две переменные: x и y. Такое уравнение называют *уравнением с двумя переменными*.

Уравнения

$3x - 2y = 1$, $0x + 4y = 5$, $x^2 + y^2 = 9$, $xy = 10$

также являются уравнениями с двумя переменными. Первые два из этих уравнений являются уравнениями вида $ax + by = c$, где a, b и c — числа. Такие уравнения называют *линейными уравнениями с двумя переменными*.

Определение **Линейным уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа (коэффициенты уравнения).**

2. Решения уравнения с двумя переменными. Рассмотрим уравнение $x + y = 8$. При $x = 2$, $y = 6$ это уравнение превращается в верное числовое равенство $2 + 6 = 8$. Говорят, что пара значений переменных $x = 2$, $y = 6$ является *решением* уравнения $x + y = 8$.

Определение **Решением уравнения с двумя переменными называют пару значений переменных, при которых уравнение превращается в верное числовое равенство.**

Решениями уравнения $x + y = 8$ являются и такие пары чисел:

$x = 4$, $y = 4$; $x = 4{,}5$, $y = 3{,}5$; $x = 10$, $y = -2$.

Сокращенно эти решения записывают так: (4; 4); (4,5; 3,5); (10; –2). В этих записях на первом месте пишут значение переменной x, а на втором — значение переменной y. Это связано с тем, что переменную x условно считают первой переменной, а переменную y — второй.

Чтобы найти решение уравнения с двумя переменными, можно подставить в уравнение любое значение одной переменной и, решив полученное

уравнение с одной переменной, найти соответствующее значение другой переменной. Для примера найдем несколько решений уравнения $x + y = 8$.

Пусть $x = 7$, тогда $7 + y = 8$, откуда $y = 8 - 7$; $y = 1$.

Пусть $x = -3$, тогда $-3 + y = 8$, откуда $y = 8 + 3$; $y = 11$.

Мы нашли два решения (7; 1) и (–3; 11). Выбирая другие значения переменной x, получим другие решения уравнения. Уравнение $x + y = 8$ имеет бесконечно много решений.

Искать решения уравнений с двумя переменными можно иным способом, который обусловливается свойствами уравнений.

3. Свойства уравнений с двумя переменными. Свойства уравнений с двумя переменными такие же, как и уравнений с одной переменной, а именно:

1. *В любой части уравнения можно выполнить тождественные преобразования выражений (раскрыть скобки, привести подобные слагаемые).*

2. *Любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный.*

3. *Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.*

Рассмотрим уравнение

$$3x + 2y = 9.$$

Используя свойства уравнений, выразим из этого уравнения одну переменную через другую, например, y через x. Для этого перенесем слагаемое $3x$ в правую часть, изменив его знак на противоположный:

$$2y = -3x + 9.$$

Разделим обе части полученного уравнения на 2:

$$y = -1{,}5x + 4{,}5.$$

Используя формулу $y = -1{,}5x + 4{,}5$, можно найти сколько угодно решений данного уравнения. Для этого достаточно взять любое значение x и вычислить соответствующее значение y. Пары некоторых соответствующих значений x и y представим в виде таблицы.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = -1{,}5x + 4{,}5$	10,5	9	7,5	6	4,5	3	1,5	0	–1,5

Пары чисел каждого столбика — решения уравнения $3x + 2y = 9$.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Найти все значения коэффициента a, при которых одним из решений уравнения $3x + ay = -1$ является пара чисел (–1; 2).

● Если пара чисел (–1; 2) является решением уравнения $3x + ay = -1$, то должно выполняться равенство $3 \cdot (-1) + a \cdot 2 = -1$. Решим полученное уравнение с переменной a:

$$-3 + 2a = -1; \quad 2a = -1 + 3; \quad 2a = 2; \quad a = 1.$$

Ответ. $a = 1$. ●

Устно

890. Среди данных уравнений назовите линейные уравнения с двумя переменными:

а) $xy = 3$; б) $x + 2y = 7$; в) $x + y^2 = 4$;

г) $x - y = 1$; д) $12x + 10y = 0$; е) $0x - 2y = 3$;

ж) $3x + 0y = 0$; з) $0x + 0y = 0$; и) $0x + 0y = 1$.

891. Является ли решением уравнения $2x - y = 3$ пара чисел:

а) $x = 2,\ y = 1$; б) $x = 1,\ y = 2$?

892. Являются ли решениями уравнения $x + 3y = 9$ пары чисел (1; 1); (6; 1)?

893. Укажите несколько решений уравнения $x + y = 7$.

Уровень А

894. Какие из пар чисел (2; 2), (1; 3), (1; 3,5), (4; –1), $\left(\frac{2}{3}; 4\right)$ являются решениями уравнения $3x + 2y = 10$?

895. Какие из пар чисел (2; 2), (–1; –2), (1; 1), $\left(1; \frac{2}{3}\right)$ являются решениями уравнения $4x - 3y = 2$?

Найдите какие-либо два решения уравнения:

896. а) $2x + 3y = 8$; б) $x - 3y = -1$.

897. а) $x + 2y = 7$; б) $3x - y = 2$.

Составьте какие-либо линейное уравнение, решением которого является пара чисел:

898. а) $x = 1,\ y = 3$; б) (–2, 1).

899. а) $x = 2,\ y = 1$; б) (2, –2).

Уровень Б

900. Из уравнения $2x + y = 5$ выразите:

а) переменную x через переменную y;

б) переменную y через переменную x.

Выразите из уравнения переменную y через переменную x и найдите какие-либо два решения уравнения:

901. а) $x - y = 7$; б) $3x + 2y = 15$.

902. а) $2x + y = 5$; б) $5x - 2y = 10$.

903. Среди решений уравнения $3x + 5y = 16$ найдите такую пару чисел, которая состоит из двух одинаковых чисел.

904. Найдите значение коэффициента a в уравнении $ax + 3y = 10$, если известно, что пара чисел (1; 2) является решением этого уравнения.

905. Пара чисел (3; 2) является решением уравнения $2x + by = 12$. Найдите b.

906. Решите уравнение:

а) $0x - 2y = 6$; б) $3x + 0y = 9$.

Уровень В

907. Решите уравнение в целых числах (то есть найдите все пары целых чисел, которые являются решениями уравнения):

а) $2x - 5y = 7$; б) $3x + 2y = 10$; в) $-4x + 9y = 6$.

Решение. **а)** Выбираем переменную, коэффициент при которой имеет меньший модуль, то есть переменную x. Выразим эту переменную через переменную y:

$$2x - 5y = 7; \quad 2x = 5y + 7; \quad x = \frac{5}{2}y + \frac{7}{2}.$$

Преобразуем правую часть полученной формулы так:

$$x = \frac{5}{2}y + \frac{7}{2} = 2y + \frac{1}{2}y + 3 + \frac{1}{2} = 2y + 3 + \frac{1}{2}(y + 1).$$

Получим формулу,

$$x = 2y + 3 + \frac{1}{2}(y + 1).$$

Пусть при некоторых целых значениях переменных последнее равенство является верным. Поскольку x и $2y + 3$ — целые числа, то число $\frac{1}{2}(y + 1)$ также должно быть целым. Итак, $y + 1$ должно делиться на 2, откуда: $y + 1 = 2k$; $y = 2k - 1$, где k — некоторое целое число. Подставив $y = 2k - 1$ в формулу для переменной x, получим:

$$x = 2(2k - 1) + 3 + \frac{1}{2}(2k - 1 + 1) = 4k - 2 + 3 + k = 5k + 1.$$

При $x = 5k + 1$, $y = 2k - 1$ уравнение $2x - 5y = 7$ превращается в верное числовое равенство. В самом деле,

$$2(5k + 1) - 5(2k - 1) = 10k + 2 - 10k + 5 = 7.$$

Таким образом, решениями уравнения $2x - 5y = 7$ являются пары целых чисел: $x = 5k + 1$; $y = 2k - 1$, где k — любое целое число.

(Выбирая разные целые значения k в формулах для x и y, получим разные целые решения уравнения $2x - 5y = 7$. Например, при $k = 0$ имеем решение $x = 1$, $y = -1$; при $k = 1$ — решение $x = 6$, $y = 1$.)

908. Найдите все натуральные решения уравнения $5x + 6y = 57$.

909. Найдите все значения a, при которых одним из решений уравнения $2(5a + 1)^2x - 5(2a - 1)^2y = 7$ является пара чисел (2; 5).

Упражнения для повторения

910. В январе предприятие выпустило 8000 единиц продукции, в феврале — на 3,75% меньше, чем в январе, а в марте — на 4% больше, чем в феврале. Сколько единиц продукции выпустило предприятие в марте?

911. Первое число составляет 40% второго. Сколько процентов составляет второе число от первого?

912. На координатной плоскости отметьте точки $A(-2; 2)$ и $B(4; -1)$. Проведите прямую AB и найдите координаты точек ее пересечения с осями координат.

913. Постройте график функции:

а) $y = 1{,}5x - 2$; б) $y = -x + 1$.

27. График линейного уравнения с двумя переменными

Рассмотрим уравнение

$$3x - 2y = 2.$$

Решениями этого уравнения являются, например, пары чисел (0; –1) и (2; 2). Этим решениям на координатной плоскости соответствуют точки с координатами (0; –1) и (2; 2). Если на координатной плоскости отметим все точки, координаты которых являются решениями уравнения $3x - 2y = 2$, то получим *график* этого уравнения.

График уравнения с двумя переменными образуют все точки координатной плоскости, координаты которых являются решениями данного уравнения.

Чтобы выяснить, что является графиком уравнения $3x - 2y = 2$, выразим из него переменную y через переменную x:

$$-2y = -3x + 2; \quad y = 1{,}5x - 1.$$

Формулой $y = 1{,}5x - 1$ задается линейная функция, графиком которой является прямая. Если $x = 0$, то $y = 1{,}5 \cdot 0 - 1 = -1$; если $x = 2$, то $y = 1{,}5 \cdot 2 - 1 = 2$. Проведем через точки (0; –1) и (2; 2) прямую (рис. 38), получим график функции $y = 1{,}5x - 1$. Эта прямая является и графиком уравнения $3x - 2y = 2$.

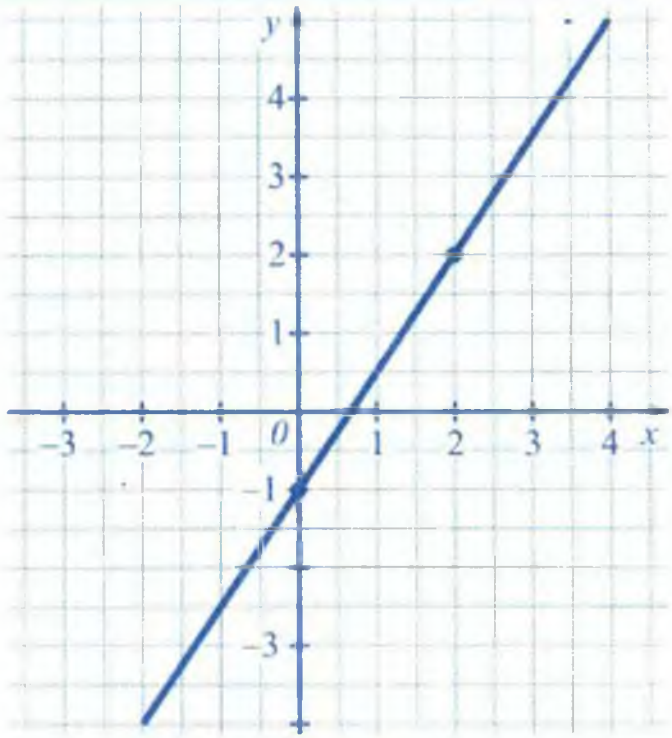


Рис. 38

Вообще, *графиком уравнения $ax + by = c$, в котором хотя бы один из коэффициентов a или b не равен нулю, является прямая.*

Чтобы построить график такого уравнения, можно: 1) выразить переменную y через переменную x (если это возможно) и построить график соответствующей линейной функции или 2) найти два решения уравнения, отметить на координатной плоскости точки, соответствующие этим решениям, и провести через них прямую.

На рисунках 39 и 40 изображены графики линейных уравнений, в которых один из коэффициентов при переменных равен 0:

$0x + y = 2$, или $y = 2$; $2x + 0y = 6$, или $x = 3$.

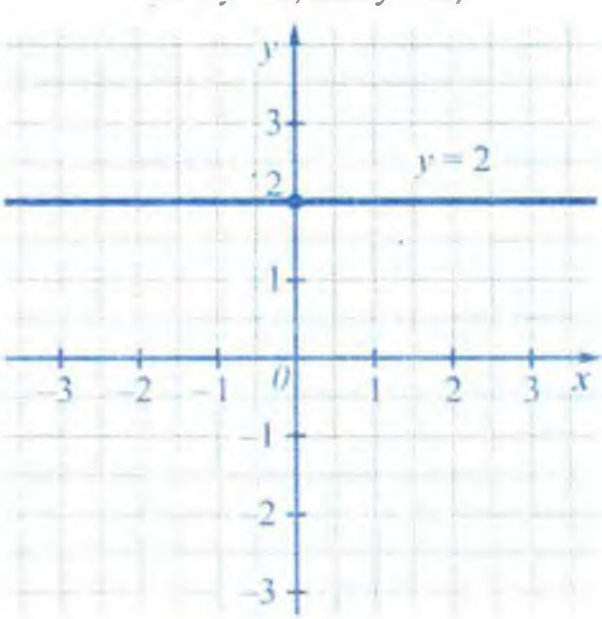


Рис. 39

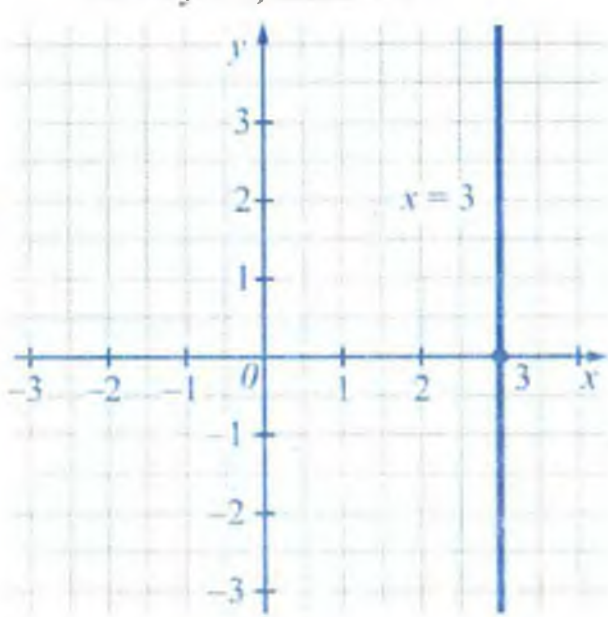


Рис. 40

Графиком уравнения $y = 2$ является график функции $y = 2$, то есть прямая, параллельная оси x и проходящая через точку (0; 2).

Решениями уравнения $2x + 0y = 6$ (или $x = 3$) являются все пары чисел $(x; y)$, в которых $x = 3$, а y — любое число. Точки координатной плоскости, соответствующие таким решениям, образуют прямую, параллельную оси y и проходящая через точку (3; 0).

Для тех, кто хочет знать больше

Уравнение $ax + by = c$, в котором $a = 0$ и $b = 0$, имеет вид $0x + 0y = c$. Если $c = 0$, то любая пара чисел является решением этого уравнения, а его графиком является вся координатная плоскость. Если $c \neq 0$, то уравнение не имеет решений и его график не содержит ни одной точки.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Построить график уравнения $5x + 2y = 4$.

● Сначала найдем два решения уравнения.

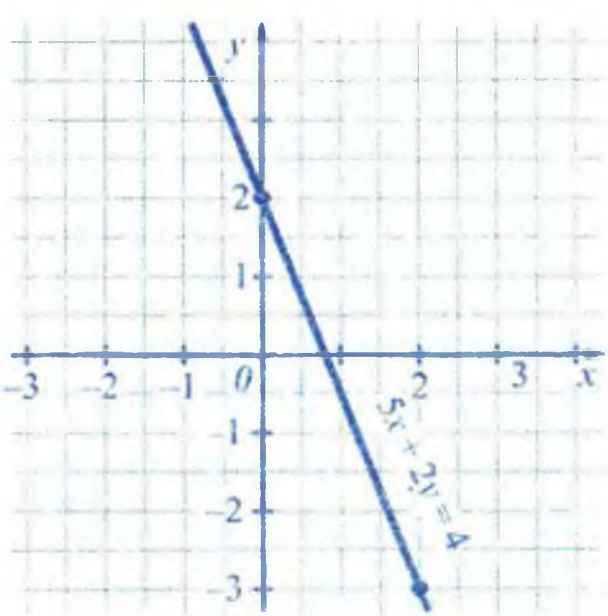
Пусть $x = 0$, тогда: $2y = 4$; $y = 2$. (0; 2) — решение.

Пусть $x = 2$, тогда: $10 + 2y = 4$; $2y = -6$; $y = -3$. (2; –3) — решение.

Решения уравнения можно представлять в виде таблицы.

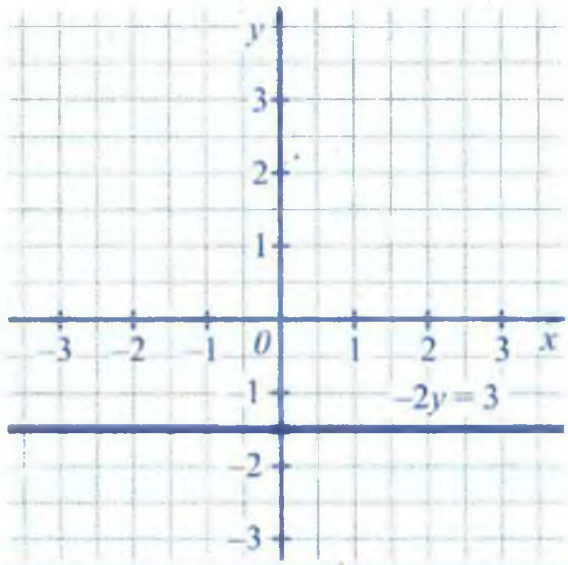
x	0	2
y	2	–3

На координатной плоскости отмечаем точки (0; 2) и (2; –3) и проводим через них прямую. Эта прямая является искомым графиком.



Пример 2. Построить график уравнения $-2y = 3$.

• Данное уравнение содержит одну переменную y. Если нужно построить график такого уравнения, то считают, что оно является линейным уравнением с двумя переменными x и y, в котором коэффициент при переменной x равен 0, то есть $0x - 2y = 3$. Графиком уравнения является прямая $y = -1{,}5$, параллельная оси x и проходящая, например, через точку $(0; -1{,}5)$. •



Устно

914. Назовите координаты нескольких точек, принадлежащих графику уравнения $-x + y = 1$ (рис. 41).

915. Какие из данных точек принадлежат графику уравнения $2x - y = 1$:

а) $A(1; 1)$; б) $B(2; 1)$;

в) $C(0; 1)$; г) $D(0; -1)$?

916. Укажите координаты нескольких точек, которые принадлежат графику уравнения $x - 2y = 0$.

917. График какого уравнения изображен на рисунке 42; рисунке 43?

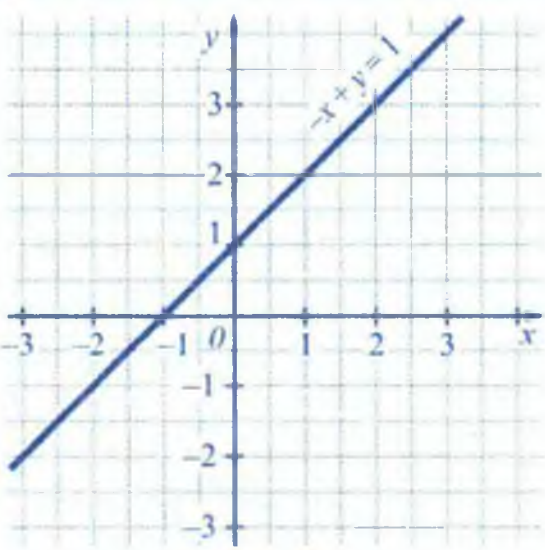


Рис. 41

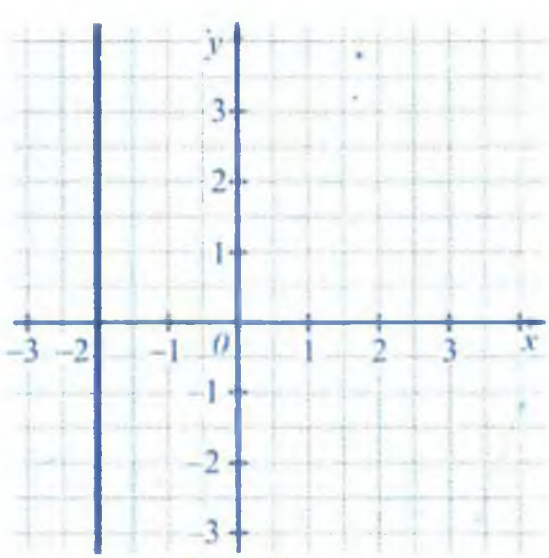


Рис. 42

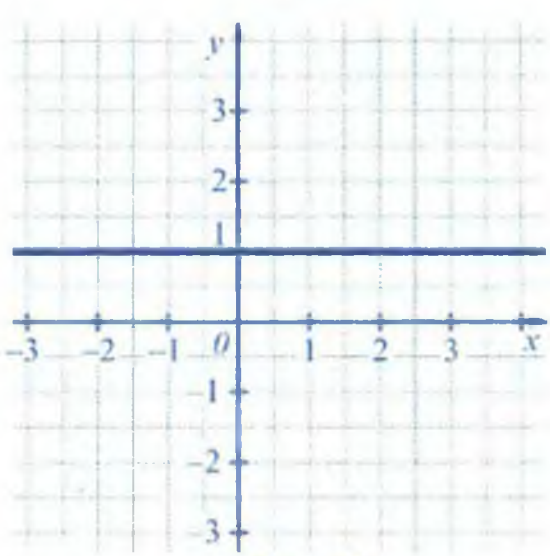


Рис. 43

Уровень А

918. Какие из точек $K(-2; 0{,}5)$, $L(0; 2)$, $M(2; 4)$, $N(3; 0{,}25)$ не принадлежат графику уравнения $-3x + 4y = 8$?

919. Какие из точек $A(2; 11)$, $B(3; 12)$, $C(0; 7)$, $D(-1; 5)$ принадлежат графику уравнения $-2x + y = 7$?

Постройте график уравнения:

920. а) $x - 3y = 6$; б) $3x + y = -1$; в) $x - 2y = 0$;
г) $4x + y = 0$; д) $1{,}5x = 6$; е) $-0{,}3y = 0{,}6$.

921. а) $x + 2y = 3$; б) $3x - y = 0$;
в) $8x = 24$; г) $0{,}7y = -2{,}8$.

Уровень Б

922. В одной системе координат постройте графики уравнений:
а) $x + y = 2$; б) $-x - y = -2$; в) $2x + 2y = 4$.
Что можно сказать о графиках этих уравнений?

923. В одной системе координат постройте графики уравнений:
а) $x - y = -2$; б) $x - y = 0$; в) $x - y = 2$.
Что можно сказать о графиках этих уравнений?

Постройте график уравнения:

924. а) $5x - 6y = 4$; б) $8x + 16y = 24$.

925. а) $4x + 7y = 3$; б) $12x - 4y = 8$.

926. На прямой, которая является графиком уравнения $7x - 5y = 9$, выбрали точку, абсцисса которой равна 2. Найдите ординату этой точки.

927. На прямой, которая является графиком уравнения $4x + 9y = 1$, выбрали точку, ордината которой равна 1. Найдите абсциссу этой точки.

928. Найдите значение коэффициента a в уравнении $ax + 3y = 4$, если известно, что график уравнения проходит через точку (1; 2). Постройте график уравнения.

929. Найдите значение коэффициента c в уравнении $5x - 2y = c$, если известно, что график уравнения проходит через точку (2; 4). Постройте график уравнения.

Уровень В

930. Существует ли значение a, при котором графики двух уравнений $a^2x + 4y = 5$ и $(a + 1)x - y = 1$ проходили бы через точку (1; 1)?

Постройте график уравнения:

931. а) $|x| - y = 0$; б) $|2x| + y = 0$;
в) $2|x| - |y| = 0$; г) $|x + y| = 2$.

932. а) $(y + 3x)(y - 2x) = 0$; б) $y^2 - 10x + 5xy - 2y = 0$;
в) $(y + 2)^2 + (y + x)^2 = 0$.

Упражнения для повторения

933. Разложите на множители:

а) $7x + ay + 7y + ax$; б) $(x - 2)^2 - 1$;

в) $8x^3 + 125y^3$; г) $(a + b + c)^2 - (a + b)^2$.

934. Найдите наименьше значение функции $y = x^2 - 8x + 1$.

935. Одно число больше другого на 12, а их сумма равна 44. Найдите эти числа.

936*. Решите в целых числах уравнение $3x + 5y = 7$.

28. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными

1. Системы линейных уравнений с двумя переменными и их решения.

Рассмотрим задачу.

В 7-А и 7-Б классах вместе 56 учеников, причем в 7-А классе на 4 ученика больше, чем в 7-Б. Сколько учеников в каждом классе?

Для решения задачи обозначим количество учеников 7-А класса через x, а количество учеников 7-Б класса — через y. По условию задачи, в 7-А и 7-Б классах вместе 56 учеников, то есть $x + y = 56$. В 7-А классе на 4 ученика больше, чем в 7-Б, поэтому разность $x - y$ равна 4: $x - y = 4$.

Имеем два линейных уравнения с двумя переменными:

$$x + y = 56;$$

$$x - y = 4.$$

И в первом, и во втором уравнениях переменные обозначают одни и те же величины — количество учеников 7-А и 7-Б классов. Поэтому нужно найти такие значения переменных, которые обращают в верное числовое равенство и первое, и второе уравнения, то есть нужно найти общие решения этих уравнений.

Если нужно найти общие решения двух уравнений, то говорят, что эти уравнения образуют ***систему уравнений***.

Систему уравнений записывают с помощью фигурной скобки. Систему линейных уравнений с двумя переменными, составленную по условию нашей задачи, записывают так:

$$\begin{cases} x + y = 56; \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Общим решением обеих уравнений этой системы является пара значений переменных $x = 30$, $y = 26$, поскольку равенства $30 + 26 = 56$ и $30 - 26 = 4$ являются верными. Эту пару чисел называют *решением* системы уравнений.

Определение **Решением системы двух уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, при которых каждое уравнение системы превращается в верное числовое равенство.**

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

2. Решение систем линейных уравнений графическим способом.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = -3; \\ -x + 3y = 5. \end{cases}$$

Построим в одной системе координат графики обоих уравнений системы. На рисунке 44 прямая AB — график уравнения $2x + y = -3$, а прямая CD — график уравнения $-x + 3y = 5$. Координаты любой точки прямой AB являются решением первого уравнения системы, а координаты любой точки прямой CD являются решением второго уравнения. Любая общая точка этих прямых имеет координаты, которые являются решением как первого, так и второго уравнений, то есть являются решением системы. Поскольку прямые AB и CD пересекаются в единственной точке $M(-2; 1)$, то система уравнений имеет единственное решение $x = -2$; $y = 1$. Это решение можно записывать и в виде пары $(-2; 1)$.

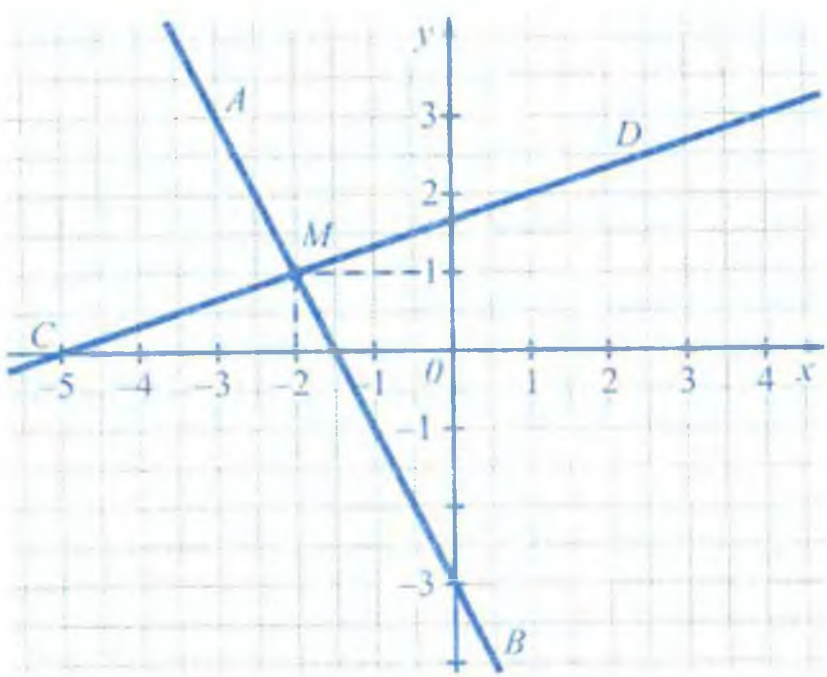


Рис. 44

Способ решения систем линейных уравнений, который мы только что использовали, называют *графическим*.

Чтобы решить систему линейных уравнений графическим способом, нужно построить графики уравнений системы в одной системе координат и найти координаты общих точек этих графиков.

Если в каждом из уравнений системы хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, то графиками таких уравнений являются прямые. Поскольку прямые могут пересекаться, совпадать или быть параллельными, то такие системы уравнений могут иметь одно решение, бесконечно много решений или не иметь решений.

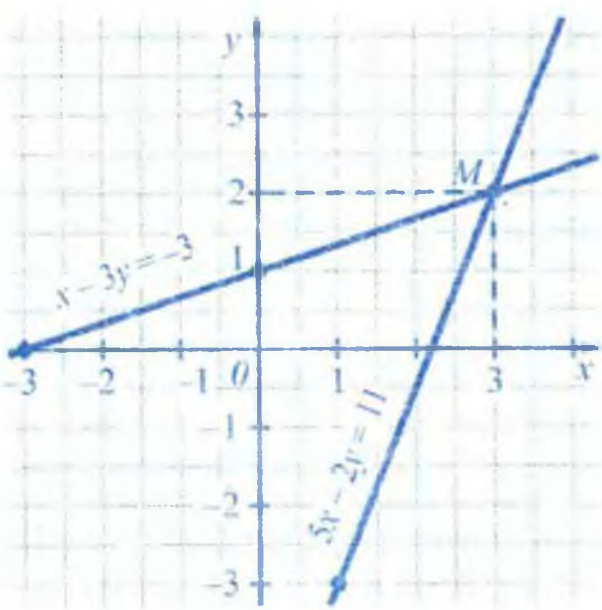
Примеры решения упражнений

Пример 1. Решить графически систему уравнений $\begin{cases} 5x - 2y = 11; \\ x - 3y = -3. \end{cases}$

● Построим графики обоих уравнений системы.

$5x - 2y = 11$		
x	1	3
y	–3	2

$x - 3y = -3$		
x	0	–3
y	1	0



Графики пересекаются в единственной точке — точке $M(3; 2)$. Следовательно, система уравнений имеет единственное решение (3; 2). ●

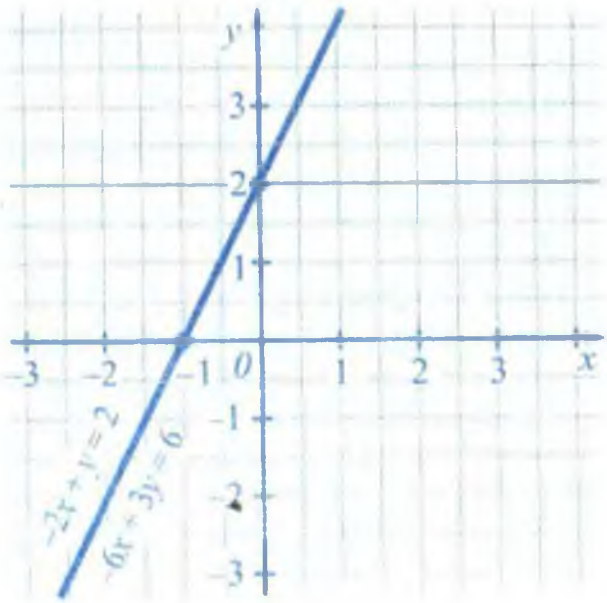
Примечание. Чтобы не ошибиться, определяя по графикам координаты точки M, следует проверить, действительно ли найденные координаты являются решением системы. Проверим: если $x = 3$; $y = 2$, то $5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 11$ и $3 - 3 \cdot 2 = -3$ — верные равенства. Пара (3; 2) является реше-

Пример 2. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} -2x + y = 2; \\ -6x + 3y = 6? \end{cases}$

● Построим графики уравнений системы.

$-2x + y = 2$		
x	0	–1
y	2	0

$-6x + 3y = 6$		
x	0	–1
y	2	0



Графики совпадают. Система уравнений имеет бесконечно много решений. ●

Пример 3. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x + y = 3; \\ 2x + 2y = 3? \end{cases}$

● Построим графики уравнений системы.

$x + y = 3$		
x	0	3
y	3	0

$2x + 2y = 3$		
x	0	1,5
y	1,5	0

Графиками уравнений являются параллельные прямые (поскольку $\angle OAB = \angle OCD = 45°$). Система уравнений решений не имеет. ●

Устно

937. Является ли решением системы уравнений $\begin{cases} x - 2y = 0; \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ пара чисел:

а) $x = 2; y = 1$; **б)** $x = 0; y = 0$?

938. Сколько решений имеет система, графики уравнений которой изображены на рисунке 45; рисунке 46 (на рисунке 46 прямые параллельны)?

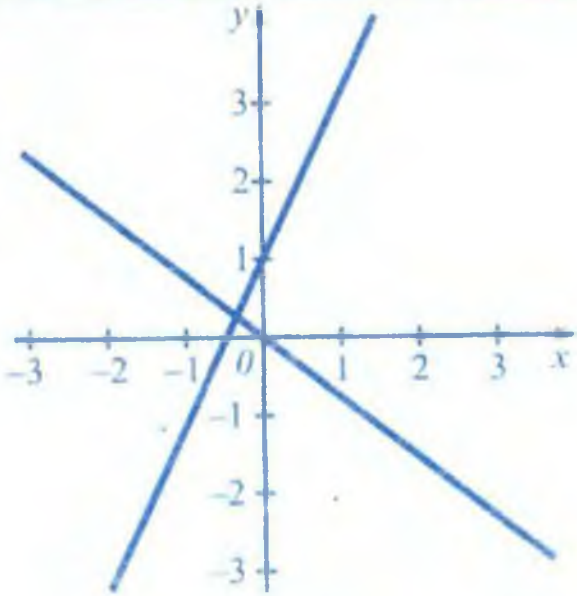


Рис. 45

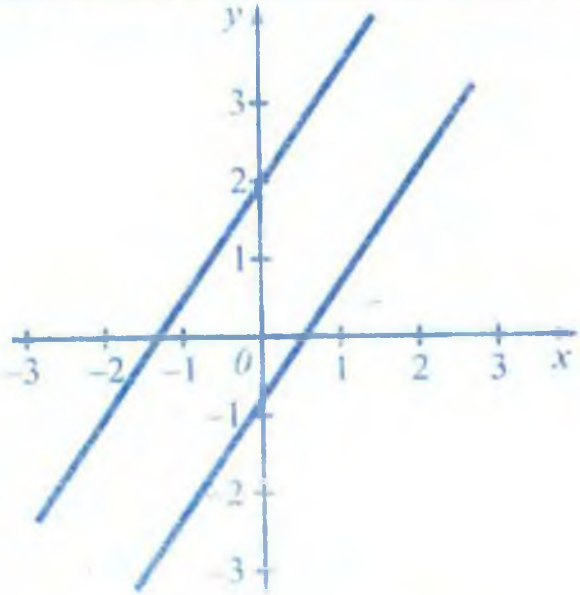


Рис. 46

Уровень А

Решите графически систему уравнений:

939. а) $\begin{cases} x - y = 2; \\ 2x - 3y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = -4; \\ x + 2y = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = 4; \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 4y = -7; \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$

940. а) $\begin{cases} x - y = 0; \\ 2x + 5y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 2; \\ x + 2y = -5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x - y = 8; \\ 2x + y = 10. \end{cases}$

941. Является ли пара чисел (–1; 3) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 5x + 2y = 1; \\ -2x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3x - y = 0; \\ 4x + 2y = -2? \end{cases}$

Уровень Б

942. Составьте систему уравнений, решением которой является $x = -2$; $y = 1$.

943. Составьте систему уравнений, решением которой является (3; –1).

Сколько решений имеет система уравнений:

944. а) $\begin{cases} x - 2y = -3; \\ 2x - 4y = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 2; \\ 6x - 2y = -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+3y=4; \\ 4x+y=-5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y=2x-4; \\ 4x-2y=8? \end{cases}$

945. а) $\begin{cases} x+3y=-2; \\ 2x+6y=-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2y=1; \\ 9x-6y=-2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-2y=-2; \\ x+4y=0? \end{cases}$

946. Найдите какие-либо два решения системы уравнений $\begin{cases} 2x-3y=-2; \\ 6x-9y=-6. \end{cases}$

Уровень В

947. При каких значениях коэффициентов a и b пара чисел (2; –1) является решением системы уравнений $\begin{cases} 5x-ay=10; \\ bx+2y=4? \end{cases}$

948. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} |x|-y=0; \\ x-y=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |2x|-y=0; \\ y=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x|-y=0; \\ x-3y=-4. \end{cases}$

Упражнения для повторения

949. Решите уравнение:

а) $2x-6=2(1-x)$; б) $3(6y-4)+2y=0$;

в) $\frac{5x-1}{6}-2x=\frac{x-1}{4}-7$; г) $\frac{2y+3}{3}-y=y-3$.

950. Докажите, что значение выражения $(n+2)^2-(n-2)^2$ делится на 8 при любом целом значении n.

951*. Каждый из 28 туристов разговаривает на английском или на французском языках. Известно, что на английском языке разговаривают 20 туристов, а на французском — 15. Какова вероятность того, что наугад выбранный турист разговаривает и на английском, и на французском языках?

952. Из уравнения $2x-3y=-4$ выразите:

а) переменную x через переменную y;

б) переменную y через переменную x.

29. Решение систем линейных уравнений способом подстановки

Рассмотрим верное равенство $7 + 2 = 9$. Если в этом равенстве число 2 заменить числовым выражением $2(3 - 2)$, значение которого равно 2, то получим верное равенство $7 + 2(3 - 2) = 9$. Наоборот, если в верном равенстве $7 + 2(3 - 2) = 9$ выражение $2(3 - 2)$ заменить его значением 2, то получим верное равенство $7 + 2 = 9$.

На этих свойствах числовых равенств базируется решение систем линейных уравнений *способом подстановки*. Рассмотрим пример.

Пусть нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 3; \\ 3x - 2y = 8. \end{cases} \qquad (1)$$

Из первого уравнения системы выразим переменную y через переменную x:

$$y = 3 - 2x.$$

Подставим во второе уравнение системы вместо y выражение $3 - 2x$. Получим систему

$$\begin{cases} y = 3 - 2x; \\ 3x - 2(3 - 2x) = 8. \end{cases} \qquad (2)$$

Системы (1) и (2) имеют одни и те же решения (доказательство в рубрике «Для тех, кто хочет знать больше»). Второе уравнение системы (2) имеет только одну переменную x. Решим его:

$$3x - 6 + 4x = 8; \quad 7x = 14; \quad x = 2.$$

В первое уравнение системы (2) подставим вместо x число 2 и найдем соответствующее значение y:

$$y = 3 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Пара чисел $(2; -1)$ — решение системы (2), а также и системы (1).

Способ, использованный при решении системы (1), называют ***способом подстановки***.

Чтобы решить систему линейных уравнений способом подстановки, нужно:

1) выразить из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую;
2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;
3) решить полученное уравнение с одной переменной;

Для тех, кто хочет знать больше

Докажем, что системы (1) и (2) имеют одни и те же решения.

Пусть пара чисел $(a; b)$ — любое решение системы (1). Тогда верными являются числовые равенства $2a + b = 3$ и $3a - 2b = 8$, а поэтому и равенство $b = 3 - 2a$. Заменим в равенстве $3a - 2b = 8$ число b выражением $3 - 2a$, получим верное равенство $3a - 2(3 - 2a) = 8$. Поскольку равенства $b = 3 - 2a$ и $3a - 2(3 - 2a) = 8$ являются верными, то пара чисел $(a; b)$ является решением системы (2). Мы показали, что любое решение системы (1) является решением системы (2).

Наоборот, пусть пара чисел $(c; d)$ — любое решение системы (2). Тогда верными являются числовые равенства $d = 3 - 2c$ и $3c - 2(3 - 2c) = 8$. Заменим в равенстве $3c - 2(3 - 2c) = 8$ выражение $3 - 2c$ числом d, получим верное равенство $3c - 2d = 8$. Из равенства $d = 3 - 2c$ следует, что $2c + d = 3$. Поскольку равенства $2c + d = 3$ и $3c - 2d = 8$ являются верными, то пара чисел $(c; d)$ является решением системы (1). Мы показали, что любое решение системы (2) является решением системы (1).

Таким образом, системы (1) и (2) имеют одни и те же решения.

Системы уравнений с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют ***равносильными***. Следовательно, решая систему уравнений (1), мы заменили ее равносильной системой (2).

Примеры решения упражнений

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x - 5y = 7; \\ 3x + 4y = -18. \end{cases}$

● Выразим из первого уравнения переменную y через переменную x:

$$5y = 4x - 7; \quad y = \frac{4x - 7}{5}.$$

Подставим во второе уравнение системы вместо y выражение $\frac{4x - 7}{5}$ и решим полученное уравнение:

$$3x + 4 \cdot \frac{4x - 7}{5} = -18;$$

$$15x + 4(4x - 7) = -90;$$

$$15x + 16x - 28 = -90;$$

$$31x = -62;$$

$$x = -2.$$

Найдем соответствующее значение переменной y:

$$y = \frac{4 \cdot (-2) - 7}{5} = -3.$$

Ответ. $(-2; -3)$. ●

Пример 2. При каких значениях коэффициента a система уравнений $\begin{cases} 3x - ay = 2; \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ не имеет решения?

● Выразим из второго уравнения переменную x через переменную y: $x = 2y + 3$.

Подставив в первое уравнение системы вместо x выражение $2y + 3$, получим уравнение:

$$3(2y + 3) - ay = 2.$$

Далее получаем:

$$6y + 9 - ay = 2; \quad 6y - ay = 2 - 9; \quad (6 - a)y = -7.$$

Последнее уравнение не имеет корней только в случае, если коэффициент при y равен нулю: $6 - a = 0$; $a = 6$. При этом значении a система уравнений не имеет решения.

Ответ. $a = 6$. ●

Пример 3. Графиком функции является прямая, проходящая через точки $A(-1; 2)$ и $B(2; 5)$. Задать эту функцию формулой.

● Прямая является графиком линейной функции. Пусть искомая линейная функция задается формулой $y = kx + b$, где k и b — пока что неизвестные числа. Поскольку график функции проходит через точки $A(-1; 2)$ и $B(2; 5)$, то должны выполняться два равенства

$$2 = k \cdot (-1) + b \text{ и } 5 = k \cdot 2 + b.$$

Решив систему $\begin{cases} 2 = -k + b; \\ 5 = 2k + b, \end{cases}$ найдем: $k = 1$, $b = 3$. Следовательно, функция задается формулой $y = x + 3$. ●

Уровень А

Решите систему уравнений способом подстановки:

953. а) $\begin{cases} y = 2x + 1; \\ 3x + 2y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = 30; \\ x = 4y + 25. \end{cases}$

954. а) $\begin{cases} x + y = 4; \\ 4x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} u - 3v = 1; \\ 2u + v = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 3y = 3; \\ x - y = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7s + 2t = 3; \\ 5s - t = 7; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x + 9y = 4; \\ x + 3y = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x = y + 7; \\ 4y = 3x - 1. \end{cases}$

955. а) $\begin{cases} x - 2y = 4; \\ 2x - 5y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 11; \\ 4x - y = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x - 6y = 18; \\ 2x + y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5u+4v=11; \\ u+6v=-3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2a-5b=9; \\ a-7b=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x+3y+1=0; \\ 3x-y=4. \end{cases}$

Уровень Б

Решите систему уравнений способом подстановки:

956. а) $\begin{cases} 5x-6y=1; \\ 3x+4y=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+4y=-5; \\ 5x-3y=11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0,2x-4y=2; \\ 0,5x+2y=11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0,7x-0,3y=1,2; \\ -2x+5y=9. \end{cases}$

957. а) $\begin{cases} 3x-2y=2; \\ 4x-6y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x+4y=1; \\ 4x-3y=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x-0,5y=3; \\ 7x+0,2y=16. \end{cases}$

Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений, не выполняя построений:

958. а) $x-y=4$ и $x+2y=-2$; б) $5x-2y=10$ и $3x-4y=-8$.

959. $7x+4y=9$ и $2x+5y=-9$.

Найдите решения системы уравнений:

960. а) $\begin{cases} 5(x-4)+2x=x-2; \\ 4(y+3)-5=x-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2(6x+3)+1=2y-3; \\ 11-4(x-2)=y-2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 8(x+3)-17=-5(y+3); \\ 0,2(y-5)+1=-0,9-0,3x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} p+5(q-p)=3p-2q+6; \\ 2q-p=3p-2q-20; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2(x+y)+3(x-y)=1; \\ 4(x+y)+5(x-y)=3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y-2=0; \\ 4x-y=56. \end{cases}$

961. а) $\begin{cases} 7(x-2)+3x+7=3y+1; \\ 10-5x=4(x-3)+4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8(x-3y)+25y=5x-7; \\ 0,3(x-9y)=0,2x-2y+0,5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3(x-2y)+2(x-y)=2; \\ 5(x-2y)+3(x-y)=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{5}x-\frac{1}{9}y=\frac{2}{3}; \\ 2x-3y=1. \end{cases}$

962. Докажите, что графиками уравнений $4x-2y=5$ и $6x-3y=6$ являются параллельные прямые.

963. Графиком функции является прямая, проходящая через точки $A(-2; 6)$, $B(3; 1)$. Задайте эту функцию формулой.

964. Графиком функции является прямая, проходящая через точки $A(-3; 2)$, $B(3; -1)$. Задайте эту функцию формулой.

Уровень В

965. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 3; \\ x^2 - y^2 = 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 7; \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y+1}{3} = 0; \\ \frac{x-2}{6} = \frac{y}{4}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{x-2y}{3} + 3 = \frac{3x-y}{5}; \\ \frac{2(3x-y)}{3} = \frac{x-2y}{2} + 10; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 4(2x+3y+1) - (2x-3y-1) = 7; \\ 6(2x+3y+1) - 7(2x-3y-1) = 5. \end{cases}$

966. При каких значениях коэффициента a система уравнений $\begin{cases} 4x - y = 9; \\ 6x + ay = 4 \end{cases}$ не имеет решения?

967. При каких значениях коэффициента b система уравнений $\begin{cases} 5x + by = 8; \\ 10x + 3y = 16 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Упражнения для повторения

968. Разложите на множители:

а) $2x - 6 - xy + 3y$;

б) $y^3 - 10y^2 + 25y$;

в) $(a - 2b)^2 - 4a^2$;

г) $27a^3 - b^3$.

969. Докажите, что значения выражения $4(a-2)^2 - (2a-3)^2 + 4a$ не зависят от значений a.

970. Известно, что $a^2 + b^2 = 25$ и $ab = -12$. Найдите: $(a + b)^2$; $(a - b)^2$.

971*. Выражение $2a^2 - ab$ при $a = -2$ и некотором значении b принимает значение 4. Какое значение принимает при тех же значениях a и b выражение $a + 2(a + (2a - b))$?

972*. Можно ли разместить 100 книг на трех полках так, чтобы на второй полке было на 20 книг больше, чем на первой, и на 7 книг меньше, чем на третьей?

30. Решение систем линейных уравнений способом сложения

Рассмотрим два верных равенства:

$$7 + 5 = 12;$$
$$8 + 6 = 14.$$

Сложим почленно эти равенства: левую часть с левой и правую с правой:

$$(7 + 5) + (8 + 6) = 12 + 14.$$

Снова получили верное равенство. Это свойство верных числовых равенств лежит в основе способа решения систем уравнений, который называют *способом сложения*. Рассмотрим пример.

Пусть нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 21; \\ 5x - 2y = 19. \end{cases} \quad (1)$$

Сложим почленно левые и правые части уравнений:

$$(3x + 2y) + (5x - 2y) = 21 + 19; \quad 8x = 40.$$

Заменим одно из уравнений системы (1), например, первое, уравнением $8x = 40$. Получим систему

$$\begin{cases} 8x = 40; \\ 5x - 2y = 19. \end{cases} \quad (2)$$

Системы (1) и (2) имеют одни и те же решения (доказательство в рубрике «Для тех, кто хочет знать больше»). Решим систему (2). Из первого уравнения находим: $x = 5$. Подставив это значение во второе уравнение, получим:

$$5 \cdot 5 - 2y = 19; \quad 25 - 2y = 19; \quad -2y = -6; \quad y = 3.$$

Пара чисел (5; 3) — решение системы (2), а также и системы (1).

Решая систему (1), мы воспользовались тем, что в уравнениях коэффициенты при переменной y являются противоположными числами и после почленного сложения уравнений получили уравнение с одной переменной x.

Решим еще одну систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12; \\ 2x - 3y = -26. \end{cases} \quad (3)$$

В этой системе уравнений коэффициенты при переменной x и коэффициенты при переменной y не являются противоположными числами. Однако, умножив обе части первого уравнения на 2, а второго — на –3, получим систему

$$\begin{cases} 6x + 8y = 24; \\ -6x + 9y = 78, \end{cases}$$

в которой коэффициенты при x — противоположные числа. Сложив почленно уравнения последней системы, получим:

$$17y = 102;\ \ y = 6.$$

Подставив значение y в первое уравнение системы (3), находим:

$$3x + 4 \cdot 6 = 12;\ \ 3x = -12;\ \ x = -4.$$

Следовательно, решением системы (3) является пара чисел (–4; 6).

Чтобы решить систему линейных уравнений способом сложения, нужно:

1) умножить обе части уравнений системы на такие числа, чтобы коэффициенты при одной из переменных в обеих уравнениях системы стали противоположными числами;
2) сложить почленно левые и правые части уравнений;
3) решить полученное уравнение с одной переменной;
4) найти соответствующее значение другой переменной.

Для тех, кто хочет знать больше

Докажем, что системы (1) и (2) имеют одни и те же решения.

Пусть пара чисел (a; b) — любое решение системы (1), тогда верными являются числовые равенства $3a + 2b = 21$ и $5a - 2b = 19$. Сложив эти равенства, получим верное равенство $8a = 40$. Поскольку равенства $8a = 40$ и $5a - 2b = 19$ верны, то пара чисел (a; b) является решением системы (2). Мы показали, что любое решение системы (1) является решением системы (2).

Наоборот, пусть пара чисел (c; d) — любое решение системы (2), тогда верными являются числовые равенства $8c = 40$ и $5c - 2d = 19$. Вычтем из первого равенства второе. Получим верное равенство $3c + 2d = 21$. Поскольку равенства $3c + 2d = 21$ и $5c - 2d = 19$ верны, то пара чисел (c; d) является решением системы (1). Мы показали, что любое решение системы (2) является решением системы (1).

Таким образом, системы (1) и (2) имеют одни и те же решения.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Решить способом сложения систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 5y = 9; \\ 6x + 7y = 9. \end{cases}$$

● Умножим обе части первого уравнения системы на –2. Получим систему

$$\begin{cases} -6x - 10y = -18; \\ 6x + 7y = 9. \end{cases}$$

Почленно сложив уравнения последней системы, получим:

$$-3y = -9;\ \ y = 3.$$

Подставим в первое уравнение системы вместо y число 3 и решим полученное уравнение:

$$3x + 15 = 9; \quad 3x = -6; \quad x = -2.$$

Ответ. (–2; 3). ●

Уровень А

Решите систему уравнений способом сложения:

973. а) $\begin{cases} x - y = 1; \\ x + y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 8y = 18; \\ -3x + 4y = -6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + 5y = 6; \\ 8x - 5y = -1. \end{cases}$

974. а) $\begin{cases} 4x + 5y = 6; \\ 4x + 3y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5m + 2n = -2; \\ 3m + 2n = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 3y = 12; \\ 3x + 2y = 17. \end{cases}$

975. а) $\begin{cases} x - y = 4; \\ 2x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y = -2; \\ -5x + 3y = -6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

976. а) $\begin{cases} 3x - 5y = 2; \\ 2x + 3y = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 2y = 6; \\ 3x + 7y = -8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8x - 3y = 41; \\ 7x + 5y = 13; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + 4y = -1; \\ 9x + 7y = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 5x + 3y = 2; \\ 3x + 5y = -2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -9x + 8y = -25; \\ 5x + 3y = -1. \end{cases}$

977. а) $\begin{cases} 2x - 3y = 8; \\ 5x + 2y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - 4y = 1; \\ -2x + 5y = 20; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - 8y = 11; \\ 4x - 6y = 17; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 5y = -2; \\ 7x - 8y = 10. \end{cases}$

Уровень Б

Найдите решения системы уравнений:

978. а) $\begin{cases} 0{,}1x + 3y = 5; \\ 0{,}3x - 7y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}2x + 0{,}7y = 28; \\ -0{,}6x + 0{,}5y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y = 1; \\ 6x - 5y = 13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 1; \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y = 0. \end{cases}$

979. а) $\begin{cases} 0,8x+0,3y=5; \\ 2x-0,6y=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{5}{6}x+\frac{1}{3}y=-\frac{1}{3}; \\ x+\frac{2}{3}y=\frac{2}{3}. \end{cases}$

980. а) $\begin{cases} 19(x-3)=5(y-2)-3; \\ 3(y+1)=7+19(x-3); \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5(x+2y)-1=6y+2; \\ 2(x+6y)-1=7y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+7)-6=5y; \\ \frac{2}{3}x-5y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{p-q}{3}=\frac{p+q}{5}; \\ 7(p-q)=5(p+q)+1. \end{cases}$

981. а) $\begin{cases} 5(2x-3y)=4x; \\ 6x-4y=4(2x-1)-5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{7}(x-2)+\frac{2}{7}(x+y)=4; \\ 3(x-2)+5(x+y)=7. \end{cases}$

982. Имеет ли решение система уравнений:

а) $\begin{cases} 11x+17y=25; \\ 11x+17y=27; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-7y=6; \\ -4x+14y=-12? \end{cases}$

Уровень В

983. Имеет ли решение система уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+5y=13; \\ 4x-2y=-10; \\ 3x+2y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x+3y=2; \\ 6x+2y=1; \\ 4x+4y=1? \end{cases}$

984. Докажите, что графики уравнений $6x+5y=-7$, $2x-3y=7$ и $4x+y=0$ проходят через одну и ту же точку.

985. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x+y^2=-8; \\ x^2-y^2=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+|y|=7; \\ x-|y|=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-4)^2-(x+4)^2=4y; \\ (y+2)^2-(y+1)^2=2x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4(x+3)-5(x^2-y-3)=9; \\ 6(x+3)+5(x^2-y-3)=1. \end{cases}$

986. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} ax-3y=5; \\ 4x-6y=10 \end{cases}$ в зависимости от значений коэффициента a?

987. Найдите такие числа a, b, c и d, при которых является верным каждое из равенств: $a=bcd$; $a+b=cd$; $a+b+c=d$; $a+b+c+d=1$.

Упражнения для повторения

988. Запишите соответствующие равенства:

а) сумма чисел x и y в 5 раз больше их разности;

б) произведение чисел a и b на 12 больше их частного;

в) сумма чисел x и y составляет треть их произведения.

989. Одно число больше другого в три раза, а их сумма равна 36. Найдите эти числа.

990. Найдите два числа, сумма которых равна 49, а разность — 17.

991. Брат старше сестры в два раза. 5 лет тому назад он был старше сестры на 7 лет. Сколько лет каждому?

992. Вкладчик снял со счета в банке 20% всех денег, а через час — 30% остатка. После этого на его счету осталось 280 грн. Каковым был первоначальный вклад?

31. Решение задач с помощью систем уравнений

Вы уже решали задачи с помощью уравнений с одной переменной. Решим задачу, составив систему уравнений.

Задача. Скорость моторной лодки по течению реки 24 км/ч, а против течения — 19 км/ч. Каковы скорость лодки в стоячей воде и скорость течения реки?

● Пусть скорость лодки в стоячей воде x км/ч, а скорость течения реки — y км/ч. Скорость лодки по течению реки (24 км/ч) равна сумме ее скорости в стоячей воде и скорости течения реки, поэтому получаем уравнение

$$x + y = 24.$$

Скорость лодки против течения реки (19 км/ч) равна разности скорости лодки в стоячей воде и скорости течения реки, поэтому

$$x - y = 19.$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно найти такие значения x и y, которые удовлетворяли бы и первое, и второе уравнения, то есть которые удовлетворяли бы системе этих уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 24; \\ x - y = 19. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $x = 21{,}5$; $y = 2{,}5$.

Ответ. Скорость лодки в стоячей воде 21,5 км/ч; скорость течения реки 2,5 км/ч. ●

Эту задачу можно было бы решить, составив уравнение с одной переменной. Однако для составления такого уравнения пришлось бы провести более сложные рассуждения.

Чтобы решить задачу с помощью систем уравнений, поступают так:

1) обозначают некоторые две неизвестные величины буквами;
2) используя условие задачи, составляют два уравнения с выбранными неизвестными;
3) записывают систему этих уравнений и решают ее;
4) отвечают на поставленные в задаче вопросы.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Если открыть кран теплой воды на 7 мин, а потом кран холодной — на 3 мин, то в ванную нальется 54 л воды. Если же открыть кран теплой воды на 8 мин, а потом кран холодной — на 6 мин, то в ванную нальется 72 л воды. Сколько литров воды наливается в ванную через каждый кран за минуту?

● Пусть за 1 мин через первый кран (теплой воды) наливается x л воды, а через второй кран (холодной воды) — y л. Тогда за 7 мин через первый кран нальется $7x$ л воды, а через второй кран за 3 мин — $3y$ л. В результате, по условию задачи, в ванной будет 54 л воды. Получаем уравнение:

$$7x + 3y = 54.$$

Во втором случае за 8 мин через первый кран нальется $8x$ л воды, а через второй кран за 6 мин — $6y$ л, что, по условию задачи, равно 72 л воды. Имеем второе уравнение:

$$8x + 6y = 72.$$

Получили систему уравнений $\begin{cases} 7x + 3y = 54; \\ 8x + 6y = 72. \end{cases}$

Решим эту систему способом сложения:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 54; \\ -4x - 3y = -36; \end{cases} \quad 3x = 18; \quad x = 6.$$

Из первого уравнения системы находим y:

$$7 \cdot 6 + 3y = 54; \quad 3y = 12; \quad y = 4.$$

Ответ. 6 л; 4 л. ●

Уровень А

993. Мама за 2 кг помидоров и 1 кг огурцов заплатила 8 грн. Если бы она покупала 1 кг помидоров и 2 кг огурцов, то ей нужно было бы заплатить 7 грн. Сколько стоит 1 кг помидоров и сколько 1 кг огурцов?

994. За 2 альбома и 5 тетрадей Маша заплатила 9 грн. Сколько стоит 1 альбом и сколько 1 тетрадь, если 3 тетради дороже 1 альбома на 1 грн.?

995. В магазин завезли 5 ящиков слив и 7 ящиков винограда общей массой 89 кг. Найдите массу одного ящика слив и массу одного ящика винограда, если 1 ящик слив легче 2 ящиков винограда на 6 кг.

996. Два автомобиля разной грузоподъемности вывезли за первый день 50 т зерна, причем первый автомобиль сделал 5 рейсов, а второй — 6. За второй день автомобили вывезли 75 т зерна, причем первый сделал 10 рейсов, а второй — 7. Какова грузоподъемность каждого автомобиля?

997. Сумма двух чисел равна 104. Одно из них на 11 больше другого. Найдите эти числа.

998. Разность двух чисел равна 48, причем одно из них в 5 раз больше другого. Найдите эти числа.

999. Группа туристов вышла в поход на 14 лодках. Часть лодок были двухместными, а часть — трехместными. Сколько было двухместных и сколько трехместных лодок, если группа состояла из 37 туристов и все места были заняты?

1000. На теплоходе есть двухместные и четырехместные каюты, в которых можно перевести 78 пассажиров. Сколько тех и других кают на теплоходе, если всего их 25?

1001. Из двух городов, расстояние между которыми 280 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 2 ч. Известно, что к моменту встречи один из автомобилей проехал на 40 км больше другого. Найдите скорости автомобилей.

1002. Двое рабочих за 4 ч изготовили 80 деталей, причем второй рабочий изготовил на 16 деталей больше, чем первый. Сколько деталей изготавливал за час каждый рабочий?

Уровень Б

1003. На двух полках было 60 книг. Когда четвертую часть книг с первой полки переставили на вторую, то на второй полке книг стало в три раза больше, чем на первой. Сколько книг было на каждой полке вначале?

Указание. При решении задачи используйте таблицу:

	I полка	II полкая	
Было книг	x	y	Вместе 60
Стало книг	$x-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}x$	$y+\frac{1}{4}x$	На второй в три раза больше, чем на первой

1004. На двух ветках сидело 25 воробьев. Когда с первой ветки на вторую перелетело 5 воробьев, а со второй улетело 7 воробьев, то на первой ветке их стало в два раза больше, чем на второй. Сколько воробьев было на каждой ветке сначала?

1005. За 3 ч по течению реки и 5 ч против течения теплоход проходит 338 км, а за 1 ч против течения и 30 мин по течению — 63 км. Найдите скорость теплохода в стоячей воде и скорость течения реки.

1006. Теплоход проходит за 2 ч по течению реки и 3 ч против течения 222 км. Он же за 3 ч по течению реки проходит на 60 км больше, чем за 2 ч против течения. Найдите скорость теплохода в стоячей воде и скорость течения реки.

1007. Летели галки и увидели палки. Если на каждую палку сядет по две галки, то одна палка останется без галок. Если на каждую палку сядет одна галка, то одна галка останется без палки. Сколько было палок и сколько летело галок?

1008. Конь и мул шли рядом с тяжелыми ношами на спинах. Конь жаловался на свою очень тяжелую ношу. «Чего ты жалуешься?», — ответил ему мул. — «Ведь если я возьму у тебе один мешок, то моя ноша станет в два раза тяжелее твоей. А вот если бы ты забрал с моей спины один мешок, то наши ноши стали бы одинаковыми». Сколько мешков нес конь и сколько мул?

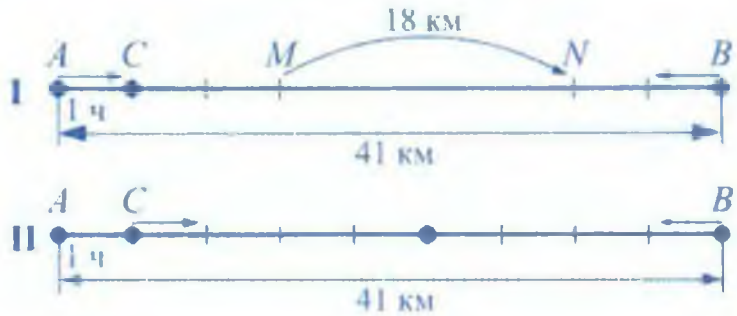
1009. Малое предприятие имеет на двух счетах в банке 24 тыс. грн. Сколько денег на каждом счету, если 35% денег на одном из них равно 85% на другом?

1010. На двух складах было 102 т сахара. Когда с первого склада забрали 15% сахара, то на нем все же оставалось на 9 т сахара больше, чем на втором. Сколько сахара было на каждом складе сначала?

1011. Сумма цифр двузначного числа равна 8. Если цифры числа переставить местами, то получим число, которое меньше данного на 18. Найдите это число.

1012. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 41 км, вышел турист. Через 1 ч навстречу ему из пункта B вышел другой турист. Через 2 ч после выхода второго туриста расстояние между ними было 18 км, а еще через 2 ч они встретились. Найдите скорости туристов.

Указание. При решении задачи используй схемы:



1013. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 240 км, отправляются одновременно два автомобиля. Если автомобили будут ехать навстречу друг другу, то встретятся через 2 ч. Если же они будут ехать в одном направлении, то автомобиль, выехавший из пункта B, догонит автомобиль, выехавший из пункта A, через 12 ч. Найдите скорость каждого автомобиля.

Уровень В

1014. Разность $\frac{1}{5}$ первого числа и $\frac{1}{3}$ второго равна 4. Первое число, уменьшенное на $\frac{1}{4}$ этого числа, в сумме со вторым числом, увеличенным на $\frac{1}{6}$ второго числа, даст 102. Найдите эти числа.

1015. В первом сосуде 25 л воды, а во втором — 45 л. Если первый сосуд долить доверху водой из второго сосуда, то второй сосуд будет наполнен только на треть. Если же второй сосуд долить доверху водой из первого, то первый сосуд будет наполнен водой только на одну пятую. Найдите вместимость каждого сосуда.

1016. Банк купил 10 000 акций предприятия A и 20 000 акций предприятия B на общую сумму 50 000 грн. Когда цена акций предприятия A выросла на 25%, а цена акций предприятия B упала на 10%, то банк продал все акции за 52 000 грн. Какова была первоначальная цена акции каждого предприятия?

1017. Антикварный магазин купил два предмета на общую сумму 360 грн. Продав их, магазин получил 25% прибыли. За сколько был продан каждый предмет, если на первый была наценка 50%, а на второй — 12,5%?

1018. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к этому числу прибавить 36, то получим число, записанное те ми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

1019. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два мотоциклиста. Когда через 1,5 ч первый мотоциклист прибыл в пункт B, второму до пункта B оставалось проехать еще 9 км. Не задерживаясь в пункте B, первый мотоциклист отправился в обратный путь и через 5 мин встретил второго мотоциклиста. Найдите скорости мотоциклистов и расстояние между пунктами.

1020. Чтобы попасть из пункта A в пункт B, нужно сначала ехать по шоссе, а потом — грунтовой дорогой. Двигаясь по шоссе со скоростью 60 км/ч, а по грунтовой дороге — со скоростью 45 км/ч, автомобиль проехал путь от A до B за 1,5 ч. На обратном пути автомобиль повысил скорость на грунтовой дороге на 3 км/ч, а на шоссе снизил скорость на 4 км/ч и проехал путь от B до A также за 1,5 ч. Найдите длину шоссе и длину грунтовой дороги.

1021. Моторная лодка прошла по течению реки от пристани A до пристани B, а потом против течения от B мимо A до пристани C и затратила на весь этот путь 9 ч 20 мин. После этого лодка за 9 ч прошла путь от C до B и от B до A. Найдите расстояние между пристанями A и C, если скорость лодки в стоячей воде 10 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч.

Упражнения для повторения

1022. Упростите выражение:

а) $(m + 2n)(2m - n) + 2n^2$; б) $a^2(b + 5a) + (a - 2b)(2b - 5a^2)$.

1023. Разложите на множители:

а) $a + 3ab - c - 3bc$; б) $x^2 - y^2 + 2(x + y)$;

в) $a^2 - 4b^2 + a - 2b$; г) $c^2 - 3ac + 2a^2$.

1024. Докажите, что значение выражения делится на данное число:

а) $725^3 - 375^3$ на 350; б) $72^3 + 88^3$ на 80.

1025. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных целых чисел при делении на 3 дает в остатке 2.

1026*. Докажите, что не существует чисел x и y, для которых выполнялось бы равенство: $x^2 - 4x + y^2 - 4y + 9 = 0$.

1027. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}x + 2$ и найдите координаты точек его пересечения с осями координат.

Интересно знать

В книге «Геометрия», вышедшей в 1637 году, известный французский математик **Рене Декарт** (1596–1650) предложил новый метод математических исследований — метод координат. Суть этого метода в том, что каждой геометрической фигуре на координатной плоскости ставят в соответствие уравнение или неравенство, которые удовлетворяют координаты каждой точки фигуры и только они. Так, каждой прямой ставят в соответствие уравнение этой прямой вида $ax + by = c$. Если, например, нужно доказать, что некоторые две прямые являются параллельными, то достаточно записать уравнения обеих прямых и доказать, что система этих уравнений не имеет решения. Как видим, геометрическая задача благодаря методу координат сводится к алгебраической задаче. Такое нововведение Декарта дало начало новой геометрии, которую сейчас называют аналитической геометрией.

Рене Декарт родился в департаменте Турень (Франция) в семье дворян. После получения образования служил офицером в армии Мориса Оранского, принимал участие в Тридцатилетней войне. Завершив военную службу, Декарт поехал в Голландию, где написал большую часть своих научных трудов и завоевал славу великого ученого.

Рене Декарт
(1596–1650),
французский философ и математик.
Разработал метод координат,
создал основы аналитической
геометрии

Декарт сделал ряд открытий, которые стали поворотными пунктами во всей математике. Он ввел понятия переменной величины и функции, прямоугольной системы координат, которую мы на его честь называем еще прямоугольной декартовой системой координат.

С уравнениями с несколькими переменными связана одна из самых известных математических теорем, о которой длительное время ведутся разговоры и в среде, далекой от математики. Речь идет о **Великой теореме Ферма**. Эта теорема утверждает, что *уравнение с тремя переменными вида* $x^n + y^n = z^n$ *не имеет решений в целых числах, если показатель степени* $n > 2$.

Как выяснилось, в этом простом, на первый взгляд, математическом утверждении скрыта чрезвычайная сложность. Причина же огромного ажиотажа, разгоревшегося вокруг теоремы Пьера Ферма, такова.

В 1636 году в книге Диофанта Александрийского (III в.) «Арифметика», которую Ферма часто перечитывал, делая пометки на ее широких полях, и которую сохранил для потомков его сын, была сделана запись, что он, Ферма, имеет доказательство теоремы, но оно слишком большое, чтобы его можно было разместить на полях.

Пьер Ферма (1601–1665), французский математик, сделал весомый вклад в развитие теории чисел. Вместе с Рене Декартом является основоположником аналитической геометрии

С этого времени начался поиск доказательства, поскольку в других материалах Ферма его так и не обнаружили.

Кто только не пробовал доказать теорему. Практически каждый математик считал своим долгом заняться Великой теоремой, но усилия были тщетными. За доказательство брались и самые известные математики XVII–XX веков. Эйлер доказал теорему для степеней $n = 3$ и $n = 4$, Лежандр — для $n = 5$, Дирихле — для $n = 7$. В общем же виде теорема оставалась недоказанной.

В начале XX в. (1907) зажиточный немецкий любитель математики Вольфскель завещал сто тысяч марок тому, кто предложит полное доказательство теоремы Ферма. Через некоторое время появились доказательства для показателя степени $n < 100$, потом для $n < 619$. Многим математикам казалось, что они нашли доказательство, но потом в этих «доказательствах» находили ошибки.

Были и попытки опровергнуть Великую теорему путем поиска хотя бы одного решения уравнения $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$. Но даже перебор целых чисел с использованием компьютеров не давал результата — при каких бы значениях n теорему не проверяли, она всегда оказывалась верной.

Только в 1995 году английскому профессору математики из Принстонского университета (США) **Эндрю Уайлсу** удалось доказать Великую теорему. Доказательство было напечатано в одном из ведущих математических журналов и заняло весь номер — более ста листов.

Таким образом, только в конце XX в. весь мир признал, что на 360 году своей жизни Великая теорема Ферма, которая на самом деле все это время была гипотезой, стала-таки доказанной теоремой.

К своему триумфу Уайлс шел более тридцати лет. О теореме Ферма случайно узнал в десятилетнем возрасте, и с тех пор заветная мечта доказать ее не оставляла Эндрю ни на минуту. К счастью, у него хватило здравого смысла, чтобы не пойти путем тысяч упрямых энтузиастов, которые настойчиво старались решить проблему элементарными средствами. Только через двадцать лет, имея уже докторскую степень и занимая должность профессора математики в Принстоне, Уайлс решил отложить все дела и заняться осуществлением своей мечты. Ему удалось доказать Великую теорему Ферма и тем самым решить самую популярную математическую головоломку последних веков.

Вопросы и упражнения для повторения § 7

1. Какое уравнение называют линейным уравнением с двумя переменными? Приведите пример такого уравнения.
2. Что называют решением уравнения с двумя переменными? Является ли пара чисел (4; 1) решением уравнения $x - 2y = 2$?
3. Что является графиком уравнения $ax + by = c$, в котором хотя бы один из коэффициентов a или b не равен нулю?
4. Что называют решением системы уравнений с двумя переменными?
5. Что значит решить систему уравнений?
6. Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными?
7. Как решают систему двух линейных уравнений с двумя переменными графическим способом?
8. Как решают систему двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки?
9. Как решают систему двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения?

1028. Какие из пар чисел (3; 3), (–1; –2), (7; 6), (1; 0,5) являются решениями уравнения $5x - 4y = 3$?

1029. Найдите какие-нибудь два решения уравнения:

а) $-2x + 4y = 8$; б) $x + 3y = -2$.

1030. Составьте линейное уравнение, решением которого является пара чисел:

а) $x = 4,\ y = 3$; б) (–2, 4).

1031. Из уравнения $4x - y = 6$ выразите:

а) переменную x через переменную y;

б) переменную y через переменную x.

1032. Постройте график уравнения:

а) $x - 2y = 4$; б) $4x + y = -4$; в) $3x - 2y = 6$.

1033. Является ли пара чисел (–2; 3) решением системы уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 5; \\ 3x + 4y = 8? \end{cases}$

1034. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=3; \\ x-3y=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2y=-1; \\ x-2y=1. \end{cases}$

1035. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x+3y=1; \\ 2x-y=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2m-n=6; \\ 3m+2n=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-4y=5; \\ 4x-3y=5. \end{cases}$

1036. Решите систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} 6x+y=1; \\ 3x-y=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-4y=9; \\ 3x+2y=-9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x-7y=1; \\ 6x-5y=8. \end{cases}$

1037. Не выполняя построений, найдите координаты точки пересечения графиков уравнений $2x-3y=1$ и $x+3y=5$.

1038. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2{,}8x-1{,}5y=-1; \\ 21x+25y=355; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 99x-114y=282; \\ 11x-14y=30; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2(x-1)+y=x-4; \\ 4(x+1)-5=-y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2(2x+1)-(2y-3)=3; \\ -4(2x-1)+3(y-2)=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{15}=1; \\ 5x-3y=-15; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}; \\ \frac{y}{7}=\frac{x+2}{6}. \end{cases}$

1039*. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (x+3)^2-(x+2)^2=-2y+5; \\ (y-5)^2-(y+3)^2=4+4x. \end{cases}$

1040. Известно, что 5 тонких и 3 общих тетрадей стоят 5 грн. 60 к., а 4 тонких и 2 общих тетрадей — 4 грн. Сколько стоит одна тонкая тетрадь и сколько одна общая?

1041. У Андрея есть 20 монет по 10 к. и 25 к., всего на сумму 3 грн. 80 к. Сколько монет по 10 к. и сколько по 25 к. имеет Андрей?

1042. В пекарне было 18 мешков муки первого сорта и 12 мешков муки второго сорта общей массой 1248 кг. Когда использовали 4 мешка муки первого сорта и 6 мешков муки второго сорта, то осталось 824 кг муки. Какова масса мешка муки каждого сорта?

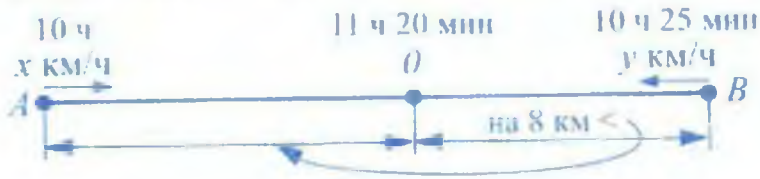
1043. Сумма двух чисел равна 4,5. Найдите эти числа, если половина одного из них равна 75% другого.

1044. Из городов A и B, расстояние между которыми 110 км, в 9 ч 15 мин выехали навстречу друг другу два автобуса и двигались с одинаковой скоростью. В 9 ч 30 мин из города A в город B выехал легковой автомобиль, который в 10 ч встретил автобус, едущий в город A, а в

10 ч 30 мин догнал автобус, едущий в город *B*. Найдите скорости автобусов и автомобиля.

1045*. Из города *A* в город *B* в 10 ч выехал автобус, а из города *B* в город *A* в 10 ч 25 мин — автомобиль. К моменту встречи в 11 ч 20 мин автомобиль проехал на 8 км меньше, чем автобус. Найдите скорости автобуса и автомобиля, если в город *A* автомобиль приехал в 12 ч 20 мин.

Указание. При решении задачи используйте схемы:



1046*. Володя за 3 общих и 5 тонких тетрадей заплатил 5 грн. 60 к., а Сергей за 2 общих и 4 тонких тетрадей — 4 грн. Олег купил только общие тетради. Для расчета 5 грн. было мало, и он дал продавцу 7 грн. Сколько сдачи получил Олег?

Указание. Покажите, что цена общей тетради равна 1 грн. 20 к. Олег купил больше четырех таких тетрадей, поскольку заплатил больше 5 грн., однако меньше шести тетрадей, поскольку для расчета хватило 7 грн. Следовательно, он купил 5 общих тетрадей.

Задания для самопроверки № 7

Уровень 1

1. Укажите решения уравнения $x - y = 2$:

а) (3; 2); **б)** (3; 1); **в)** (5; 2); **г)** (–3; –2).

2. Какая из пар чисел является решением системы уравнений $\begin{cases} 2x - y = 3; \\ 3x + y = 7? \end{cases}$

а) (3; 3); **б)** (2; 2); **в)** (2; 1); **г)** (–1; 5).

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} y = 2 - x; \\ 3x + y = 6 \end{cases}$ способом подстановки и укажите верный ответ:

а) (1; 1); **б)** (0; 2); **в)** (2; 0); **г)** (4; –2).

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=6; \\ 3x-y=2 \end{cases}$ способом сложения и укажите верный ответ:

а) (–2; 8); **б)** (–4; 10); **в)** (4; 2); **г)** (2; 4).

5. Сумма двух чисел равна 21, причем одно из них на 5 больше другого. Найдите эти числа.

Пусть большее число равно x, а меньшее — y. Какая система уравнений соответствует условию задачи?

а) $\begin{cases} x+y=21; \\ y-x=5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x+y=5; \\ y-x=21; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x+y=5; \\ x-y=21; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x+y=21; \\ x-y=5. \end{cases}$

Уровень 2

6. Подберите вместо звездочек такие числа, чтобы пары (3; *) и (* ; 2) были решениями уравнения $5x-2y=9$.

7. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} x-y=2; \\ x+3y=6. \end{cases}$

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+2y=11; \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ способом подстановки.

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+2y=6; \\ 4x-2y=8 \end{cases}$ способом сложения.

10. В магазине муку продают в малых и больших упаковках. Общая масса малой и большой упаковок муки равна 7 кг, а 2 малые и 3 большие упаковки имеют общую массу 19 кг. Какова масса малой упаковки муки и какова большой?

Уровень 3

11. Найдите такое число a, чтобы график уравнения $2x-ay=2$ проходил через точку (–1; 2).

12. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} 2x-5y=-1; \\ 3x+2y=8. \end{cases}$

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x-0,3y=2; \\ 5x+0,2y=24 \end{cases}$ способом сложения.

14. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3(2x-y)-2(x-y)=1; \\ 4x-5(x+2y)=51. \end{cases}$

15. За конфеты и печенье мама заплатила 15 грн. Известно, что 25% стоимости конфет меньше, чем треть стоимости печенья, на 1 грн. 50 к. Сколько гривен мама заплатила за конфеты и сколько за печенье?

Уровень 4

16. Найдите такие числа a и b, чтобы график уравнения $2ax-(b+2)y=2$ проходил через точки $(-1; 4)$ и $(2; 2)$.

17. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} |2x|-y=0; \\ x+y=3. \end{cases}$

18. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x-1)^2+y=(x+2)^2; \\ (y+1)^2-x=(y-2)^2. \end{cases}$

19. При каком значении коэффициента a система уравнений $\begin{cases} x+3y=4; \\ 2x+ay=8 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

20. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько стали каждого сорта нужно взять, чтобы после переплавки получить 70 т стали, которая содержала бы 30% никеля?

ЗАДАЧИ ЗА КУРС АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

1047. Купили 2 кг огурцов по a грн. за килограмм и 5 кг помидоров по b грн. за килограмм. Запишите в виде выражения стоимость покупки.

1048. Автомобиль на протяжении t ч двигался со скоростью 80 км/ч и на протяжении 2 ч — со скоростью 70 км/ч. Запишите в виде выражения путь, пройденный автомобилем за все время движения. Найдите значение этого выражения при $t = 1{,}2$.

1049. Через первую трубу в бассейн каждую минуту поступает a л воды, а через вторую — b л. Сколько литров воды поступит в бассейн через обе трубы за 3 ч?

1050. Найдите значение степени:

а) 9^4; б) $(-3)^5$; в) $(-2{,}5)^3$; г) $\left(3\frac{1}{3}\right)^3$.

1051. Представьте в виде степени с основанием a:

а) a^2a^4; б) $a^7 : a$; в) $(a^3)^5$; г) $(a^5 \cdot a)^4$.

1052. Вычислите:

а) $0{,}4^5 \cdot 2{,}5^5$; б) $(2^2 \cdot 0{,}5^2)^7 \cdot 0{,}25^4 \cdot 4^4$; в) $\left(-\frac{3}{7}\right)^5 \cdot 1{,}7^2 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^5$.

1053. Представьте одночлен в стандартном виде и укажите его степень:

а) $8x^2xy$; б) $-3a^2b \cdot 2(a^5)^2$; в) $-m^3 \cdot 3m^2n \cdot 5n^4$;

г) $0{,}5ac \cdot (-4a^3c)^2 \cdot a^2c$; д) $\frac{2}{3}a^4b \cdot \left(-2\frac{2}{5}ab^2\right)$; е) $\frac{1}{6}x^3y^2 \cdot \left(-1\frac{2}{7}xy\right)^2$.

1054. Представьте одночлен $12a^4b^5$ в виде произведения двух одночленов стандартного вида, одним из которых является: $2a^2b^2$; $-4a^3b$; $-0{,}5b$.

1055. Представьте одночлен $9a^6b^2$ в виде квадрата одночлена.

1056. Представьте одночлен $27x^6y^9$ в виде куба одночлена.

1057. Найдите значение одночлена:

а) $-4a^3b$ при $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{5}$; б) $(2x^3y)^2 \cdot y^4$ при $x = 0{,}25$; $y = 4$.

1058*. Упростите выражение, где n — натуральное число:

а) $(x^3)^{3n} \cdot (x^5x^{n+1})^2$; б) $(-a^n)^{17} \cdot (-a^2)^9$.

1059. Запишите многочлен в стандартном виде и найдите его степень:

а) $3x^2 - 6x + x^2 - 3 + x$; б) $3a \cdot 2ab + a^5 - a^3 - 7a^2b$;

в) $0{,}6a^2b - 1{,}4b^2a + 2{,}8a^2b + 3{,}3ab^2$; г) $5x^3 + 1\frac{5}{14}x^2 - 6\frac{1}{7}x^3 - 1\frac{2}{7}x^2$.

1060. Упростите выражение:

а) $8a^2 + 4a - 3 - (7 - 8a + 3a^2)$; б) $x - 3x^2y - xy + (x^2 - 3x^2y + xy)$;

в) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12}\right)$.

Выполните умножение:

1061. а) $4a(a^2 - 4a + 3)$; б) $(2x^2 - 4x + 8)(-0{,}5x^2)$;

в) $(4ab^2 + 9a^2)(2b^2 - 3a)$; г) $(a - 7)(b + 1)(c - 2)$.

1062. а) $(b + 2c)(b - 2c)$; б) $(5x - 2y)(5x + 2y)$;

в) $(1{,}4a - 0{,}3b)(0{,}3b + 1{,}4a)$; г) $\left(\frac{2}{3}ab + 2c^2\right)\left(\frac{2}{3}ab - 2c^2\right)$.

1063. Возведите в квадрат:

а) $(2x + 3)^2$; б) $(3c - 1)^2$; в) $(0{,}4b - 5a)^2$; г) $\left(2\frac{1}{7} - \frac{1}{2}y\right)^2$.

Упростите выражение:

1064. а) $(x - 3)(x^2 + x + 3) - x^3$; б) $3c - (c - 2)(2c^2 - c + 1) - 5c^2$;

в) $(5 + x)(5 - x) + x^2$; г) $(2b - 9)(2b + 9) - 4b^2$;

д) $(n - 1)(n^2 + n + 1) - n^3$; е) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9) - 27$.

1065. а) $(10 - 3m)(2 + 3m) + (5m - 4)(5 - 2m)$;

б) $(4a + 9)(a^2 - 2a + 2) - (4a - 7)(a + 1)^2$;

в) $(n^2 - 3n)(1 + 3n)(-1 + n) - 3n(n^3 + 1)$;

г) $(4y - 5y^2)^2 + (2y + 5y^2)^2 - 20y^2$.

Запишите в виде многочлена стандартного вида:

1066. а) $(b + 2)(b - 2)(b^2 + 4)$; б) $15x^3(x^2 + 10)(10 - x^2)$;

в) $a^5(a^4 - (2a^3 + a^2(a^2 - 2a + 3))) + 4a^7$.

1067*. а) $(a^2 + 2a - 2)^2$; б) $(5x - 2)^3$; в) $(c - 3)^4$.

1068. Докажите тождество:

а) $y(b - x) + x(b + y) = b(x + y)$;

б) $(-m + n)(m - n) = -(n - m)^2$;

в) $(a + b + c + d)^2 - (a + b)^2 - (c + d)^2 = 2(a + b)(c + d)$;

г) $(n + 1)(n + 3)(n + 5)(n + 7) + 7 = (n^2 + 8n + 8)(n^2 + 8n + 14)$.

Разложите на множители:

1069. а) $2x + 2xy$; б) $a^2 - 2a$; в) $12xy^3 + 8xy^2 - 16x^2y$.

1070. а) $ax - ay + 3x - 3y$; б) $x^2y - 2x + xy - 2$;

в) $9ya - 6ya^2 + 2axy - 3xy$; г) $8x^2a - 15y^3 - 10x^2y + 12ay^2$.

1071. а) $9n^2 - 4m^2$; б) $120 - 30a^4$; в) $27x^3 + 0{,}008y^3$;

г) $x^3 - (m - n)^3$; д) $a^2 + 8a + 16$; е) $6x^2 - 24xy + 24y^2$.

1072. а) $y^4 - \frac{1}{49}y^2$; б) $a^2 - 4b^2 + 2b + a$; в) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4y^4$.

1073*. а) $x^2 - 2x - 3$; б) $a^2 + 3a - 4$; в) $x^2 - 8xy + 7y^2$.

1074. Докажите, что значение выражения:

а) $9^7 - 3^{12}$ делится на 8; б) $49^8 + 3 \cdot 7^{15}$ делится на 10.

1075. Вычислите:

а) $97 \cdot 103$; б) $1{,}8 \cdot 2{,}2$; в) $52^2 - 48^2$; г) $7{,}35^2 - 6{,}35^2$.

1076. Найдите значение выражения:

а) $a^3 - 0{,}5a^2$ при $a = 1{,}5$;

б) $x^2 - 2xy + y^2$ при $x = -0{,}3$; $y = 10{,}3$.

1077. Докажите, что значения выражения $(x + 1)^2 - (x - 1)(x + 3)$ не зависят от значений x.

1078. Докажите, что при любом целом значении n значение выражения:

а) $(2n + 3)^2 - (2n - 1)^2$ делится на 8;

б) $(8n - 4)^2 - 8(4n - 3)$ не делится на 32.

1079. При каком значении x значение выражения $x^2 + 2x + 9$ является наименьшим?

1080. При каком значении x значение выражения $2 - x^2 + 4x$ является наибольшим?

1081*. Докажите, что сумма кубов двух последовательных целых чисел, которые не делятся на 3, кратна 9.

1082*. Может ли разность четвертых степеней двух натуральных чисел быть простым числом?

1083*. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + y^2 - 4y - 2x$.

1084*. Докажите, что если некоторые два целых числа не делятся на 3, то их сумма или разность делятся на 3.

1085*. Два велосипедиста проехали путь от пункта A до пункта B. Первый велосипедист первую половину пути ехал со скоростью 20 км/ч, а вторую половину — со скоростью 16 км/ч. Второй велосипедист первую половину пути ехал со скоростью 19 км/ч, а вторую половину — со скоростью 17 км/ч. Кто из них затратил больше времени на путь из A в B?

Решите уравнение:

1086. а) $3x - 18 = 57 - 2x$; б) $3(x - 2) - 4(x - 4) = 5$;

в) $250(x + 8) = 125x - 500$; г) $0{,}3(1 - x) = 0{,}4(x - 1) - 0{,}7$;

д) $\frac{2}{9}(3x-2)+\frac{1}{3}(x-1)=\frac{2}{9}$; е) $\frac{5}{6}(1-4x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}(5x+3)$;

ж) $\frac{x-4}{5}=1-\frac{x-1}{3}$; з) $\frac{2x+3}{6}+\frac{3x+4}{9}=\frac{5}{18}$.

1087. а) $x(x+5)-x^2=2$; б) $(2x+3)(x-1)=2x^2$;

в) $x(x+0{,}1)=(x-0{,}1)(x+0{,}2)$; г) $\frac{1}{3}x\left(x-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(x^2-2\right)$;

д) $(x-3)(x+3)=(x+1)^2$; е) $2x(x-1{,}5)^2=2x^3-6x^2+3$.

1088. а) $y^3-3y^2=0$; б) $x^3-\frac{1}{4}x=0$;

в) $x^2-6x+9=0$; г) $x^3-2x^2-4x+8=0$;

д) $y^2+2y-48=0$; е) $z^2-15z+56=0$.

1089*. а) $|3-2x|=5$; б) $||x|-2|=6$.

1090*. а) $(|x|+5)(3|x|-9)=0$; б) $|x(x-2)|+x^2=0$; в) $x^2+2|x|+1=0$.

1091*. Докажите, что уравнение $x^4+1+(x-2)^4=2x^2$ не имеет корней.

1092*. Решите уравнение $|x+4|=|7-x|$.

Решите задачи 1093–1098, составив уравнение.

1093. Периметр прямоугольника 68,4 см. Найдите стороны прямоугольника, если одна из них на 3,6 см короче другой.

1094. Сумма двух чисел равна 52,7, одно из них в 2,4 раза больше другого. Найдите большее из этих чисел.

1095. В первой цистерне в три раза больше бензина, чем во второй. Когда из первой цистерны забрали 400 л бензина, а из второй — 800 л, оказалось, что в первой цистерне бензина стало в 8 раз больше, чем во второй. Сколько бензина было в каждой цистерне вначале?

1096. Из города выехал мотоциклист и двигался со скоростью 40 км/ч. Через полчаса вслед за ним выехал автомобиль, скорость которого 60 км/ч. Через сколько времени после своего выезда из города автомобиль догонит мотоциклиста?

1097. Нержавеющая сталь является сплавом железа, хрома и никеля. Лист такой стали содержит 15% хрома, 0,5% никеля, а железа — на 2,78 кг больше, чем хрома. Найдите массу листа.

1098*. Автобус двигался до города N со скоростью 60 км/ч. По дороге его обогнал легковой автомобиль, ехавший со скоростью 80 км/ч. Автомобиль прибыл в город N и через 15 мин отправился в обратный путь. На расстоянии 10 км от города N он снова встретил автобус. На каком расстоянии от города N были автобус и автомобиль при первой встрече?

1099. Функция задана формулой $y=-2x+3$.

а) Найдите значения функции, соответствующие таким значениям аргумента: –2; 0; 6.

б) Найдите значение аргумента, которому соответствует значение функции: 3; 1.

в) При каком значении x значение функции равно значению аргумента?

1100. Постройте график функции $y = 2x - 0{,}5$. С помощью графика найдите:

а) значение функции при $x = -0{,}5$; $x = 1{,}5$;

б) значение x, при котором $y = 1{,}5$.

1101. Постройте график функции $y = 0{,}5x + 1$, где $-4 \le x \le 3$. Какова область определения и область значений функции? Чему равны наибольшее и наименьшее значения функции? Укажите нули функции. При каких значениях x функция принимает положительные значения; отрицательные значения?

1102. Постройте график функции:

а) $y = -x + 1$, где $-3 \le x \le 2$; **б)** $y = 2x^2 - 2$, где $-2 \le x \le 2$.

в) $y = 1{,}5x$; **г)** $y = -1{,}5x$; **д)** $y = 3x + 1$; **е)** $y = -1{,}5x - 1$.

1103. График прямой пропорциональности проходит через точку $A(2; 7)$. Проходит ли этот график через точку $B(-4; -14)$?

1104. На рисунке 47 изображен график функции. Найдите область определения и область значений этой функции. Задайте функцию формулой, если:

а) $0 \le x \le 2$; **б)** $2 \le x \le 6$.

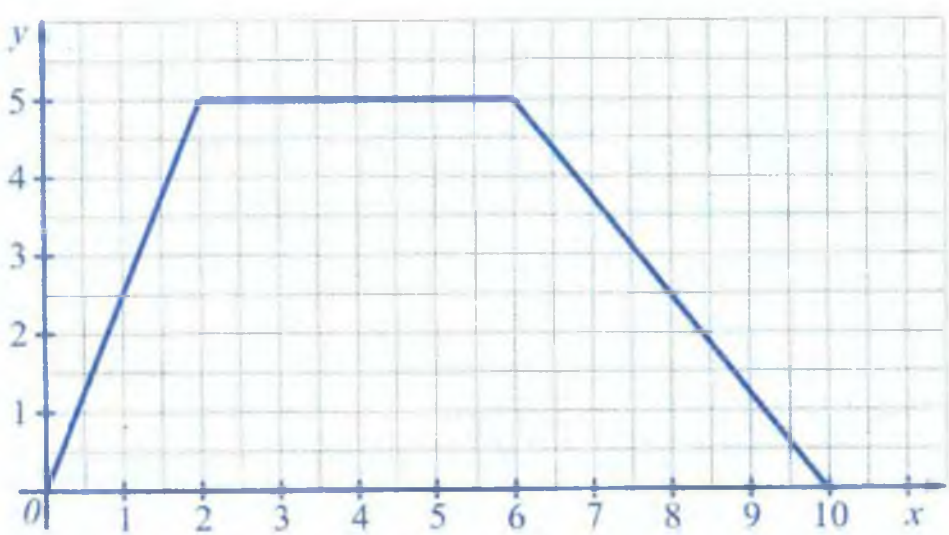


Рис. 47

1105. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 1{,}5x$ и $y = -x + 5$; **б)** $y = -2x$ и $y = 2$.

1106. При каком значении b графики функций $y = 3x + b$ и $y = 2x + 4$ пересекаются в точке, которая лежит на оси абсцисс?

1107. Является ли пара чисел $(2; -1)$ решением уравнения $2x + 5y = -3$?

1108. Постройте график уравнения:

а) $x + 3y = 3$; **б)** $2x - 3y = 6$; **в)** $2x = 5$; **г)** $-3y = 6$.

1109. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} x - y = 2; \\ x + 2y = 5. \end{cases}$

Решите систему уравнений:

1110. а) $\begin{cases} x + 2y = 6; \\ 2x - 3y = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 5y = 8; \\ 2x + 3y = -8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 15x - 8y = 4; \\ 9x - 5y = 1. \end{cases}$

1111. а) $\begin{cases} 3(2x - 5) + 2y = x + 2; \\ 5(x + 1) - 15 = y + 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0,2(2x + 0,5) - 0,3(2y - 3) = 1,8; \\ -38(5x - 1) + 38(5y + 6) = 0. \end{cases}$

1112. а) $\begin{cases} x + \frac{1}{9}y = 3\frac{1}{3}; \\ 3x - \frac{2}{3}y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{y-2}{6} = -2; \\ \frac{x+8}{8} - \frac{y+7}{6} = 0. \end{cases}$

1113. Найдите точку пересечения графиков уравнений $2x + 3y = -2$ и $4x - 5y = 7$.

1114. Принадлежит ли точка пересечения графиков уравнений $2x + 4y = -6$ и $10x - y = 12$ графику уравнения $3x + y = 1$?

1115. График линейной функции проходит через точки $A(-1; 1)$ и $B(3; -7)$. Задайте эту функцию формулой.

1116*. При каком значении k система уравнений $\begin{cases} x + 2y = 5; \\ 2x + 4y = k \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Решите задачи 1117–1121, составив систему уравнений.

1117. Сумма двух чисел равна 20,5, одно из них на 2,3 больше другого. Найдите эти числа.

1118. Два автоматических станка за 8 ч совместной работы изготавливают 2000 деталей. Первый станок за 2 ч и второй за 3 ч вместе изготавливают 630 деталей. Сколько деталей изготовляет за час каждый станок?

1119. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 17 км, вышли навстречу друг другу два туриста и встретились через 2 ч. Найдите скорости туристов, если скорость одного из них на 0,5 км/ч меньше скорости другого.

1120. Брату и сестре вместе 10 лет. Сколько лет каждому из них, если через год брат будет в два раза старше сестры?

1121*. Молоко одной коровы содержит 5% жира, а другой — 3,5%. Смешав молоко обеих коров, получили 10 л молока жирностью 4%. Сколько при этом использовали литров молока от каждой коровы?

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

К § 1. Линейные уравнения с одной переменной

1122. Решите уравнение:

а) $|x - 1| + |x + 1| = 0$; б) $|x - 4| + |2x - 8| = 0$.

1123. Сколько корней в зависимости от числа a (говорят: параметра a) имеет уравнение:

а) $|x - a| = 0$; б) $|x| = a$; в) $|x - a| + |x - 1| = 0$?

1124. Решите уравнение $ax = a$ с параметром a.

● *Решение.* Рассмотрим два случая.

1) $a \neq 0$. Тогда: $ax = a$; $x = 1$ (разделили обе части уравнения на a).

2) $a = 0$. Тогда: $ax = a$; $0x = 0$; корнем уравнения является любое число.

Ответ. Если $a \neq 0$, то $x = 1$; если $a = 0$, то корнем уравнения является любое число. ●

Решите уравнение с параметром a:

1125. а) $x - a = 3$; б) $x + a = -4$; в) $3x = a$;
г) $-2x = a + 2$; д) $0{,}5x + 3a = 1{,}5$; е) $a - 4x = 3a$.

1126. а) $ax = 5$; б) $ax = 0$; в) $ax = 10a$;
г) $(a + 2)x = 2$; д) $4ax + 4a = 8a$; е) $a(1 - x) = 5a$.

1127. Дано уравнение $a(x - 1) + 5a = 8(x + a) + 1$ с параметром a.

а) При каких значениях a уравнение не имеет корней?

б) Существуют ли значения a, при которых уравнение имеет больше, чем один корень?

1128. Из города A в город B выехал автобус и двигался со скоростью 60 км/ч. Через полчаса он встретил легковой автомобиль, который ехал из города B. Этот автомобиль приехал в город A и через 40 мин выехал обратно в город B. На расстоянии 20 км от города B легковой автомобиль догнал автобус. Найдите расстояние между городами, если скорость легкового автомобиля все время составляла 90 км/ч.

1129. Сплав меди, цинка и олова общей массой 1 кг содержит олова на 20% больше, чем меди, а цинка — на 50% больше, чем олова. Найдите массу цинка в сплаве.

1130. Оля любит кофе с молоком. Когда ей дали полную чашку самого кофе, она отпила $\frac{1}{5}$ чашки и долила молока. Потом снова отпила $\frac{1}{5}$ чашки и снова долила молока. После этого в чашке стало кофе на 56 мл больше, чем молока. Найдите объем чашки.

1131. Велосипедист проехал некоторый путь с постоянной скоростью. Если бы он ехал на 2 км/ч быстрее, то затратил бы на этот путь в 1,1 меньше времени. С какой скоростью ехал велосипедист?

К § 2. Целые выражения

1132. Можно ли в записи $*1*2*3*4*5*6*7*8*9*10$ поставить вместо звездочек знаки «+» или «–» так, чтобы значение полученного выражения равнялось: **а)** 5; **б)** 0; **в)** 60?

1133. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $n(n+1)+(n+2)(n+3)$ является составным числом.

1134. Выражение $a^2+2ab+2a-b+4$ при $a=2$ и некотором значении b принимает значение 0. Какое значение принимает выражение a^2+ab+b^2 при тех же значениях a и b?

1135. При некоторых натуральных значениях m и n число $3m+2n$ делится на 7. Докажите, что при тех же значениях m и n на 7 делится и число:
а) $10m+9n$; **б)** $4m+5n$; **в)** $m+3n$.

1136. При некоторых натуральных значениях m и n число $5m-n$ делится на 8. При тех же значениях m и n на 8 делится и число $3m+4n$. Докажите, что тогда и сами числа m и n делятся на 8.

1137. **а)** Докажите, что если два целых числа при делении на 7 дают равные остатки, то разность этих чисел делится на 7.
б) Докажите, что среди любых восьми целых чисел всегда найдутся два числа, разность которых делится на 7.

1138. Запишите формулу целых чисел, которые делятся на 5, а при делении на 2, 3 и 4 дают в остатке 1.

1139. (*Задача-шутка.*) Женщина несла на базар 2 корзины яиц. Ее нечаянно толкнул мужчина, корзины упали, а яйца разбились. Мужчина, чтобы рассчитаться, спросил, сколько всего было яиц. Женщина ответила:
— Я их не считала, но когда складывала в корзины по 2, по 3, по 4, по 5, по 6, то каждый раз оставалось по одному яйцу, а когда складывала по 7, то осталось 2 яйца. Еще знаю, что в каждую корзину вмещается не более 70 яиц.
— Сколько яиц было в корзинах?

1140. К некоторому трехзначному числу справа приписали одну цифру и из полученного числа вычли первоначальное. Оказалось, что разность делится на 9. Какую цифру приписали?

1141. Докажите, что число $\overline{aaabbb}$ делится на 37.

1142. **а)** Докажите, что сумма чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ кратна 111.
б) Докажите, что не существует трехзначного числа $\overline{abc}$, для которого число $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ было бы квадратом натурального числа.

1143. Два ученика поочередно пишут n-значное число: число единиц пишет первый, число десятков — второй, число сотен — снова первый и т. д. Может ли второй ученик достичь того, чтобы полученное число делилось на 9, если первый мешает ему это сделать? Рассмотрите случаи: **а)** $n=10$; **б)** $n=15$.

К § 3. Одночлены

1144. Докажите, что при каждом натуральном значении n число:

а) $3^{4n} + 4$ делится на 5; **б)** $9^{2n} - 1$ делится на 10.

1145. Докажите, что при каждом натуральном значении n число $4^{2n} + 4$ делится на 10.

1146. Докажите, что при каждом натуральном значении n число $10^n - 4$ делится на 3, но не делится на 9.

1147. Докажите, что не существует натуральных чисел m и n, для которых было бы верным равенство $m(m + 1) = 3^n + 2^n$.

1148. Что больше:

а) 125^{125} или 25^{185}; **б)** 250^8 или 375^7?

1149. Какой цифрой может заканчиваться запись квадрата целого числа; четвертой степени целого числа; восьмой степени целого числа?

1150. **а)** Докажите, что не существует целого числа, квадрат которого равен $\underbrace{33...3}_{100 \text{ троек}}$.

б) Существуют ли натуральные значения m и n, при которых равенство $m^4 = 10^n + 4$ является верным?

в) Докажите, что не существует натуральных чисел m и n, для которых было бы верным равенство $m^8 = 10^n + 2$.

1151. Найдите наименьшее натуральное число, которое при умножении на 2 дает квадрат натурального числа, а при умножении на 3 — куб натурального числа.

К § 4. Многочлены

1152. **а)** Число n при делении на 6 дает в остатке 3, а число m — в остатке 4. Какой остаток при делении на 6 дает число: $3n + 5m$; nm?

б) Числа m, n и k при делении на 5 дают в остатке соответственно 2, 3 и 4. Докажите, что число $nk - m(m - 1)$ делится на 5.

1153. В четырехзначном числе число десятков и число тысяч на 1 больше числа единиц, а число сотен на 1 больше числа десятков. Докажите, что это четырехзначное число делится на 11.

1154. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, является квадратом натурального числа. Найдите все двузначные числа, имеющие такое свойство.

1155. Решите уравнение $(5|x| - 6)(3|x| + 5) = 5(3x^2 + 1)$.

1156. Решите уравнение с параметром:

а) $2(x - 3) = 3(x - a)$; **б)** $4(|x| - 1) = a - 4$.

1157. Докажите, что при любом значении параметра a корнем уравнения $x(x + a^2) - a^2 = x(x - 1) + 2$ является положительное число.

1158. Докажите, что:

а) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 + 2^{10} = 2^{11} - 1$;

б) $4(1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^8 + 5^9) = 5^{10} - 1$.

Указание. **а)** $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 + 2^{10} = (2 - 1)(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 + 2^{10})$. Выполнив умножение, упростите последнее выражение.

1159. Докажите, что значение выражения $27^7 + 9^{11} - 81^5$ делится на 11.

1160. Докажите, что значение выражения $2^{n+3} + 5^{n+3} - 2^n + 5^n$ делится на 7 при любом натуральном значении n.

1161. Докажите, что сумма четырех последовательных натуральных степеней числа 3 делится на 120.

1162. Разложите на множители:

а) $2a - a^2 - 6b + 9b^2$;

б) $81x^2 - 49x^2y^2 + 144xy + 64y^2$;

в) $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc$.

К § 5. Формулы сокращенного умножения

1163. Упростите выражение $(a - (-b)^n)^2 + (a + (-b)^n)^2$, где n — натуральное число.

1164. Решите уравнение:

а) $(|x| - x)(|x| + x) = 1 - |x|$;

б) $(2|x| - 1)(2|x| + 1) = (x - 1)(4x - 1)$;

в) $(1 - |x|)(1 + |x|)(1 + |x|^2) + x^4 = |x|$.

Разложите на множители:

1165. **а)** $(a^2 + 1)^2 + 6(a^2 + 1) + 5$; **б)** $(c^2 - 3c)^2 - 2(c^2 - 3c) - 8$;

в) $(a^2 - 4a)^2 - 2a^2 + 8a - 15$; **г)** $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3$.

1166. **а)** $a^4 + 4a^2 - 5$; **б)** $a^4 + a^2 + 1$.

1167. **а)** $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$; **б)** $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 1$.

1168. Докажите, что значение выражения $25^6 - 2^{21}$ делится на 497.

1169. Докажите, что разность четвертых степеней двух целых чисел, одно из которых при делении на 5 дает в остатке 1, а второе — в остатке 2, кратна 5.

1170. Разность квадратов натуральных чисел m и n является простым числом. Докажите, что:

а) $m = n + 1$;

б) число $4m + n^2$ является квадратом целого числа.

1171. Найдите все натуральные числа m и n, для которых справедливо равенство:

а) $(m + n)^2 - n^2 = 3$; **б)** $m^2 - (m - n)^2 = 9$.

1172. Найдите все целые значения m и n, для которых справедливо равенство $(n + 2m)^2 - (n + m)^2 = 5$.

1173. Докажите, что не существует натуральных чисел m и n, для которых справедливо равенство:

а) $m^3 - (m - 2n)^3 = 99$; б) $(2m + 1)^3 + (m + 2)^3 = 2^n$.

1174. Докажите, что если число y является средним арифметическим чисел x и z, то $x^4 + 2x^3z - 2xz^3 - z^4 - 4x^2y^2 + 4y^2z^2 = 0$.

Решите уравнение:

1175. а) $x^{10} - x^9 = x^4 - x^3$; б) $1 - x + x^2 + (x^3 - x^2)^{20} = x$.

1176. а) $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$; б) $|x|^2 + 2|x| = 3$.

1177. а) $x^3 - 7x - 6 = 0$; б) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$.

1178. а) $(2x^2 - 1)^2 + 2(2x^2 - 1) - 3 = 0$; б) $(x^2 + 4x)^2 - 4x(x^2 + 4x) + 3x^2 = 0$.

1179. Решите уравнение с параметром a:

а) $(a - 2)x = a^2 - 4$; б) $ax - 2x = 2a - 4$.

1180. Найдите наименьшее значение a, при котором уравнение $x^2 - 12x + 30 = a$ имеет хотя бы один корень.

1181. а) Докажите, что квадрат целого числа или делится на 3, или при делении на 3 дает в остатке 1.

Указание. Целое число n может иметь вид: 1) $n = 3k$; 2) $n = 3k + 1$; 3) $n = 3k + 2$, где k — целое число. Рассмотрите три возможных случая.

б) Докажите, что при каждом натуральном значении n число $3n + 2$ не является квадратом целого числа.

в) Докажите, что сумма квадратов трех последовательных целых чисел не является квадратом целого числа.

г) Докажите, что не существует натуральных чисел m и n, для которых выполнялось бы равенство $m^2 + 1 = 3n$.

1182. а) Докажите, что не существует целых чисел m и n, для которых выполнялось бы равенство $8n + 2 = m^2$.

Указание. Предположим, что такие целые числа m и n существуют. Тогда из равенства $8n + 2 = m^2$ следует, что m^2 является четным числом. Поэтому и число m — четное. Пусть $m = 2k$, где k — целое число. Обоснуйте, что равенство $8n + 2 = 4k^2$ при целых n и k не может быть верным.

б) Докажите, что среди чисел вида $8n + 2$, где n — натуральное число нет квадрата целого числа.

в) Докажите, что сумма квадратов двух последовательных нечетных чисел не является квадратом целого числа.

1183. а) Пусть n — некоторое натуральное число. Докажите, что за числом n следующие $2n$ натуральных чисел не являются квадратами натуральных чисел.

б) Докажите, что число $5^{20} + 1$ не является квадратом натурального числа

в) Докажите, что не существует натуральных чисел m и n, для которых выполнялось бы равенство $5^{2m} + 4 = n^2$.

К § 6. Функции

1184. Двое ребят соревновались в плавании на дистанции 100 м. На рисунке 48 изображены графики их заплывов на первых 60 м дистанции. Назовите победителя, считая, что каждый из ребят плыл с постоянной скоростью. Найдите расстояние между ребятами через 45 с после старта; в момент финиша победителя.

1185. График линейной функции проходит через точки (–1; –2) и (2; 1). Найдите все значения a, при которых точка $(2a; 2 - a)$ принадлежит этому графику.

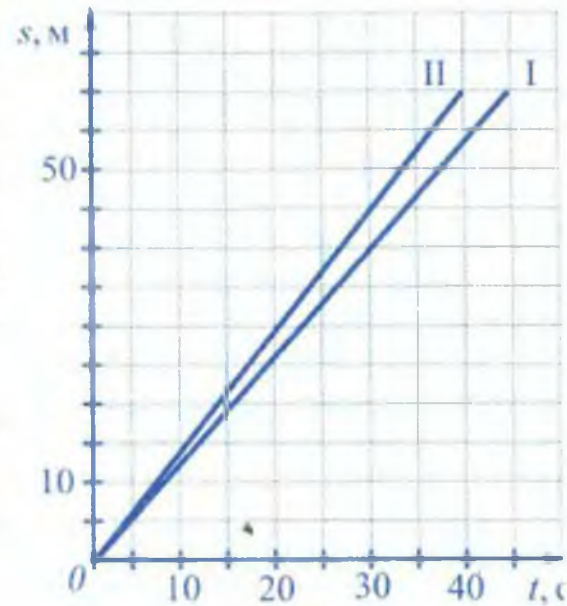


Рис. 48

К § 7. Системы линейных уравнений с двумя переменными

1186. Найдите все значения параметра a, при которых одним из решений уравнения $2(5a + 1)^2x - 5(2a - 1)^2y = 7$ является пара чисел (2; 5).

1187. Решите в целых числах уравнение:

а) $3n - 7m = 5$; б) $n^2 - m^2 = 9$;

в) $n^2 + 2mn - 8m^2 = 7$; г) $n^2 + 2m^2 - 2mn - 4m + 4 = 0$.

1188. Постройте график уравнения: $|x| - |y| = 0$.

Решите систему уравнений:

1189. а) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 6; \\ 2y - x = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y = 0; \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$

1190. а) $\begin{cases} (x+1)^2 + (x-1)^2 = 2y; \\ x^2 = 2y - 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 2y - 7 = 0; \\ x^2 - y^2 - 8 = 0. \end{cases}$

1191. а) $\begin{cases} 2x + y + z = 23; \\ x + 2y + z = 22; \\ x + y + 2z = 21; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; \\ 2x + 2y + 2z = 6. \end{cases}$

Примечание. Уравнения систем содержат 3 переменные: x, y и z. Решить такие системы — значит найти все значения переменных x, y и z, при которых каждое уравнение системы превращается в верное числовое равенство.

1192. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 3x + (a-2)y = 4a; \\ -3x + 3ay = -2 \end{cases}$ в зависимости от значений параметра a?

1193. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} 2|x| - y = a; \\ |x| - y = 0 \end{cases}$ имеет два решения?

1194. Даны 10 чисел. Известно, что сумма любых девяти из этих чисел равна 1. Чему равна сумма всех данных чисел?

1195. По двум параллельным железнодорожным путям едут навстречу друг другу два поезда. Длина первого поезда 130 м, а второго — 104 м. При встрече на протяжении 4,68 с поезда шли один мимо другого. Если бы поезда двигались в одном направлении и первый поезд перегонял бы второй, то они бы шли один мимо второго на протяжении 46,8 с. Найдите скорость каждого поезда.

Логические задачи

1196. К вершине горы ведет лестница, имеющая ступеньки. На нижних 500 ступеньках лежат камни — по одному на ступеньке. Сизиф может взять любой камень и перенести его вверх, но не далее чем на ближайшую свободную ступеньку. После этого Аид может перекатить вниз на одну ступеньку любой камень, если предыдущая ступенька является свободной. Сизиф и Аид действуют по очереди. Начинает Сизиф, и его цель — положить камень на самую верхнюю ступеньку. Может ли Аид этому помешать? Каким будет ответ, если количество всех ступенек будет равно 1000?

1197. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 21. Разрешается стереть любые два числа и написать их разность (если стерли числа a и b, то можно написать число $a - b$ или число $b - a$). Повторив эту операцию 20 раз, получим одно число. Может ли это число равняться: **а)** 1; **б)** 0?

1198. В книге 320 страниц. Можно ли выбрать некоторые 15 страниц этой книги так, чтобы сумма номеров выбранных 30 страниц была равна 1500?

1199. Пять рыбаков поймали 9 рыб. Докажите, что по крайней мере двое из них поймали рыб поровну.

1200. Двое из четырех друзей всегда говорят правду, а двое — всегда лгут. Однажды состоялся такой разговор.

Второй первому: «Ты лгун».

Третий второму: «Сам ты лгун».

Четвертый третьему: «Оба они лгуны, как и ты, кстати».

Кто из них говорит правду?

1201. Можно ли из 82 шаров, каждый из которых имеет определенный цвет, выбрать 10 шаров так, чтобы все они были разного цвета или все имели некоторый один цвет?

1202. В алфавите острова *Абаба* есть только две буквы *а* и *б*. Имя любого жителя острова можно получить, заменяя в слове *Абаба* записанные подряд буквы *аб* на *ббб*, *ба* — на *ааб* или *бб* — на *ааа* (замену можно делать несколько раз). Есть ли на острове житель по имени *Бааабба*?

ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ МАТЕМАТИКИ

Феофан Прокопович
(1681–1736)

Феофан Прокопович — один из известнейших мыслителей конца XVII – начала XVIII в., профессор и ректор Киево-Могилянской академии, общественный и церковный деятель. Философ и математик, поэт и публицист, он оставил после себя большое количество работ. Писал на латыни, на украинском, русском, польском языках, делал переводы книг и комментировал их.

Феофан Прокопович был одним из наиболее образованных людей своего времени. Его библиотека насчитывала около 30 тысяч книг, написанных на разных языках.

Родился Феофан Прокопович в Киеве 7 июня 1681 года в семье купца. Он рано потерял родителей, и его опекуном стал дядя по матери, ректор Киево-Могилянской академии Феофан Прокопович. Дядя отдал своего семилетнего племянника в начальную школу при Киево-Братском монастыре, а через три года — в Киево-Могилянскую академию. Во время учебы юноша был одним из лучших учеников, не раз побеждал в научных диспутах.

Стремясь углубить свои знания, семнадцатилетний Феофан Прокопович отправился в традиционное для того времени научное путешествие. Два года находился во Львове, читал студентам лекции по поэтике и риторике. После этого поехал в Рим, где поступил в коллегию св. Афанасия.

В 1702 году Феофан Прокопович возвращается в Украину. С 1704 года он преподает философию в Киево-Могилянской академии. Его любимым предметом была математика. Поэтому в курс философии он включил два математических курса — арифметику и геометрию, написав оригинальные учебники по этим предметам.

В 1707 году Феофана Прокоповича избирают заместителем ректора, с 1711 по 1715 год он был ректором Киево-Могилянской академии. В 1715 году по приказу царя Феофан Прокопович отправился в Петербург, где принимал участие в создании Петербургского университета и Российской академии наук.

Самым весомым математическим трудом Феофана Прокоповича является курс лекций по математике, теоретические сведения в котором на то время были самыми полными в царской России.

Михаил Васильевич Остроградский
(1801–1861)

Почетное место в истории математики занимает наш соотечественник **Михаил Остроградский**. Он был членом Туринской, Петербургской, Римской, Американской и Французской Академий Наук. Слава его была настолько велика, что родители, желая поощрить своих детей к обучению, убеждали их словами: «Учись, и будешь, как Остроградский».

Михаил Остроградский родился в 1801 году в Полтавской губернии в семье помещика. Уже в детские годы он проявлял удивительную любознательность и наблюдательность, но учился в Полтавской гимназии, куда его отдали в девять лет, посредственно по всем предметам. Михаил мечтал о карьере военного и очень обрадовался, когда отец решил забрать его из гимназии и устроить в один из гвардейских полков. В последний момент по совету одного из родственников, который заметил большие способности мальчика, было решено продолжить учебу. В шестнадцать лет Остроградский стал студентом Харьковского университета.

В 1818 году Остроградский сдал экзамены за курс университета, а в 1820 году — экзамены на звание кандидата наук. Но университетские власти, считая Остроградского «неблагонадежным», отказались присудить ему ученую степень и даже лишили диплома об окончании университета.

И все же Остроградский стал известным ученым, академиком. Неудача только разожгла в нем желание упорно работать. Он едет в Париж и там посещает лекции Коши, Лапласа, Пуассона и других выдающихся математиков. Общение с французскими учеными, изучение их работ приводит Остроградского к собственным открытиям. Его работы публикуются в журнале Парижской Академии наук. Слухи о больших успехах Остроградского дошли и на родину.

В 1828 году Остроградский вернулся в царскую Россию. В Петербурге он преподавал математику в Главном педагогическом институте, Морском кадетском корпусе и в Михайловском артиллерийском училище.

Михаил Остроградский написал много математических работ, среди которых есть работы по алгебре и теории чисел, он является автором нескольких учебников, а теоремы и формулы Остроградского изучают студенты математических специальностей всех университетов мира.

Дмитрий Александрович Граве
(1863–1939)

Дмитрий Граве родился в 1863 году в городе Кириллове около Вологды (Россия), окончил физико-математический факультет Петербургского университета (1885).

Будучи студентом, Дмитрий Граве занимался научной работой, был инициатором издания журнала «Записки физико-математического кружка Петербургского университета», где были напечатаны его первые работы.

После защиты магистерской роботы в 1889 году Граве становится приват-доцентом Петербургского университета.

В 1897 году Дмитрий Граве защитил докторскую диссертацию и переехал в Украину. Сначала он работал профессором Харьковского университета и Харьковского технологического института.

В 1902 году профессор Граве возглавил кафедру чистой математики Киевского университета, где и продолжалась почти вся его научно-педагогическая деятельность.

В 1905–1915 годах Дмитрий Граве разработал несколько учебных курсов, относящиеся в основном к алгебре и теории чисел, наиболее весомыми из которых являются «Элементарный курс теории чисел» и «Элементы высшей алгебры». Он развил на математическом отделении Киевского университета семинарскую форму занятий со студентами.

В конце 1933 года был организован Институт математики Академии наук УССР, первым директором которого стал Граве.

Большой заслугой Дмитрия Граве является создание первой в Украине всемирно признанной алгебраической школы.

Михаил Филиппович Кравчук
(1892–1942)

Работы **Михаила Кравчука**, которых он написал более 180, относятся к разным разделам математики, в частности к алгебре и теории чисел. Введенные им специальные многочлены сейчас известны математикам как многочлены Кравчука. Он является автором важных работ по истории математики, многих учебников для высшей и средней школ. Много сил, энергии, таланта отдал Михаил Кравчук образованию, сделал важный вклад в развитие украинской математической терминологии.

Михаил Кравчук родился 30 сентября 1892 года в селе Човницы (теперь Волынская область) в семье землемера.

В 1910 году золотой медалист Луцкой гимназии становится студентом физико-математического факультета Киевского университета им. св. Владимира.

В 1915–1917 годах Кравчук выезжает в Москву на специальные студии, где сдает магистерские экзамены. В 1918 году его избирают приват-доцентом Киевского университета.

В 1924 году Михаил Кравчук защищает докторскую диссертацию. На протяжении 1927–1938 гг. работает в высших учебных заведениях Киева. Со времени образования в Киеве Института математики (1933 г.) и до начала 1938 года возглавляет в нем отдел математической статистики.

Михаил Кравчук был организатором первой в Украине математической олимпиады школьников (1935 г.).

В сентябре 1938 года Кравчук был арестован сталинским режимом, его обвинили в украинском буржуазном национализме. Приговор — тюремное заключение сроком на 20 лет. Далее — Магадан, где в марте 1942 года Михаил Кравчук и умер.

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАССОВ

Делимость натуральных чисел

1. Любое натуральное число a, на которое делится данное натуральное число n, называют *делителем* числа n.

2. Любое натуральное число n, которое делится на данное натуральное число a, называют *кратным* числу a.

Число 12	делители: 1; 2; 3; 4; 6; 12.
	кратные: 12; 24; 36; 48; ...

3. Натуральное число называют *простым*, если оно имеет только два разных делителя: единицу и само это число.

4. Число, которое имеет больше чем два делителя, называют *составным*.

5. Каждое составное число можно записать в виде произведения нескольких простых чисел, то есть *разложить его на простые множители*.

Например: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

6. На **10** делятся те и только те натуральные числа, запись которых заканчивается цифрой 0.

7. На **5** делятся те и только те натуральные числа, запись которых заканчивается цифрами 0 или 5.

8. На **2** делятся те и только те натуральные числа, запись которых заканчивается четной цифрой.

9. На **3** делятся те и только те натуральные числа, сумма цифр которых делится на 3.

10. На **9** делятся те и только те натуральные числа, сумма цифр которых делится на 9.

Наибольший общий делитель

11. Наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из данных чисел, называют *наибольшим общим делителем* этих чисел.

Чтобы найти наибольший общий делитель двух чисел, можно разложить эти числа на простые множители и найти произведение общих множителей.

Например: $144 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot 3$; $60 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5$;

НОД(144; 60) $= 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Наименьшее общее кратное

12. *Наименьшим общим кратным* натуральных чисел называют наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел.

Чтобы найти наименьшее общее кратное двух чисел, каждое из них можно разложить на простые множители, к разложению одного из чисел дописать из разложения другого числа те множители, которых нет в разложении первого, и перемножить записанные числа.

Например: $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$; $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$;

$$НОК(144; 60) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 720.$$

Десятичные дроби

13. Сложение и вычитание десятичных дробей выполняют поразрядно. При этом дроби записывают одну под другой так, чтобы запятая была под запятой.

Например:
$$\begin{array}{r} +\ 0{,}714 \\ 11{,}3 \\ \hline 12{,}014 \end{array}; \quad \begin{array}{r} -\ 1{,}75 \\ 0{,}592 \\ \hline 1{,}158 \end{array}.$$

14. Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, нужно выполнить умножение, не обращая внимание на запятые, а потом в произведении отделить запятой столько десятичных знаков, сколько их в обоих множителях вместе.

Чтобы разделить десятичную дробь на десятичную дробь, нужно в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько десятичных знаков имеет делитель, а потом выполнить деление на натуральное число.

Например:
$$\begin{array}{r} \times\ 1{,}8 \\ 0{,}32 \\ \hline 36 \\ 54 \\ \hline 0{,}576 \end{array}; \quad 5{,}472 : 1{,}52 = 547{,}2 : 152 = 3{,}6.$$
$$\begin{array}{r|l} 547{,}2 & 152 \\ -\ 456 & 3{,}6 \\ \hline 912 & \\ -\ 912 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Частные случаи умножения и деления десятичных дробей:

$0{,}731 \cdot 10 = 7{,}31$; $1{,}23 \cdot 100 = 123$; $5{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}53$; $21{,}53 \cdot 0{,}01 = 0{,}2153$;

$14{,}2 : 10 = 1{,}42$; $14{,}2 : 100 = 0{,}142$; $153 : 100 = 1{,}53$; $0{,}73 : 0{,}1 = 7{,}3$.

Обыкновенные дроби

15. *Основное свойство дроби.* Если числитель и знаменатель обыкновенной дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получим дробь, равную данной.

Например: $\frac{3}{7}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 2}=\frac{6}{14}$; $\frac{15}{20}=\frac{15:5}{20:5}=\frac{3}{4}$.

16. Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, нужно:

1) найти наименьшее общее кратное знаменателей;
2) найти дополнительные множители, разделив наименьшее общее кратное на каждый знаменатель;
3) числитель и знаменатель каждой дроби умножить на соответствующий дополнительный множитель.

Например: приведем к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{16}$

1) НОК(4; 12; 16) = 48;
2) дополнительные множители: 48 : 4 = 12; 48 : 12 = 4; 48 : 16 = 3;
3) $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 12}{4\cdot 12}=\frac{36}{48}$; $\frac{5}{12}=\frac{5\cdot 4}{12\cdot 4}=\frac{20}{48}$; $\frac{7}{16}=\frac{7\cdot 3}{16\cdot 3}=\frac{21}{48}$.

17. Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно к числителю первой дроби прибавить числитель второй и записать в числителе, а знаменатель записать прежним.

Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй и записать в числителе, а знаменатель записать прежним.

Например: $\frac{3}{11}+\frac{4}{11}=\frac{7}{11}$; $\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$; $1-\frac{1}{8}=\frac{8}{8}-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

Чтобы сложить или вычесть дроби с разными знаменателями, нужно их сначала привести к общему знаменателю.

18. Чтобы умножить две обыкновенные дроби, нужно умножить их числители и произведение записать в числителе, умножить их знаменатели и произведение записать в знаменателе.

Чтобы разделить одну дробь на другую, достаточно делимое умножить на число, обратное делителю.

Например: $\frac{12}{25}\cdot\frac{10}{27}=\frac{\cancel{12}^{4}\cdot\cancel{10}^{2}}{\cancel{25}^{5}\cdot\cancel{27}^{9}}=\frac{8}{45}$; $\frac{3}{11}:\frac{45}{77}=\frac{3}{11}\cdot\frac{77}{45}=\frac{\cancel{3}^{1}\cdot\cancel{77}^{7}}{\cancel{11}^{1}\cdot\cancel{45}^{15}}=\frac{7}{15}$.

19. Чтобы обыкновенную дробь представить в виде десятичной, достаточно числитель дроби разделить на его знаменатель.

Например: $\frac{3}{20} = 0{,}15$.

20. Чтобы найти дробь от числа, нужно число умножить на эту дробь.

Например: найдем $\frac{2}{3}$ от 45: $45 \cdot \frac{2}{3} = \frac{45 \cdot 2}{3} = 30$;

30% от 140 — это 0,3 от 140: $140 \cdot 0{,}3 = 42$.

Чтобы найти число по данному значению его дроби, нужно это значение разделить на дробь.

Например: найдем число, $\frac{5}{6}$ которого равно 40:

$$40 : \frac{5}{6} = 40 \cdot \frac{6}{5} = \frac{40 \cdot 6}{5} = 48;$$

найдем число, 17% которого равно 51: 17% = 0,17; 51 : 0,17 = 300.

21. Чтобы найти процентное отношение двух чисел, нужно найти отношение этих чисел и записать его в процентах.

Например: найдем процентное отношение чисел 12 и 28:

$$\frac{12}{28} = \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \cdot 100\% = \frac{300}{7}\% = 42\frac{6}{7}\%.$$

Положительные и отрицательные числа

22. Модулем положительного числа и нуля является это же число; модулем отрицательного числа является противоположное ему число:

$|a| = a$, если $a \geq 0$; $|a| = -a$, если $a < 0$.

Например: $|5{,}3| = 5{,}3$; $|0| = 0$; $|-1{,}8| = 1{,}8$.

23. Чтобы сложить два отрицательных числа, нужно сложить их модули и поставить перед полученным числом знак «–».

Чтобы сложить два числа с разными знаками, нужно найти модули чисел, из большего модуля вычесть меньший модуль и поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

Например:

$-1{,}6 + (-2{,}3) = -3{,}9$; $-0{,}7 + 0{,}7 = 0$; $3{,}2 + (-4{,}7) = -(4{,}7 - 3{,}2) = -1{,}5$.

24. Чтобы из одного числа вычесть другое, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например: $-15-(-9)=-15+9=-6$.

25. Чтобы найти произведение двух отрицательных чисел, достаточно перемножить модули этих чисел.

Чтобы найти произведение двух чисел с разными знаками, достаточно перемножить их модули и поставить перед полученным числом знак «–».

Например: $(-1{,}1)\cdot(-0{,}9)=1{,}1\cdot 0{,}9=0{,}99$; $1\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-\left(\frac{11}{9}\cdot\frac{3}{4}\right)=-\frac{11}{12}$.

26. Чтобы найти частное двух отрицательных чисел, достаточно разделить модуль делимого на модуль делителя.

Чтобы найти частное чисел с разными знаками, достаточно разделить модуль делимого на модуль делителя и поставить перед полученным числом знак «–».

Например: $-105:(-21)=105:21=5$; $\frac{2}{3}:\left(-\frac{1}{4}\right)=-\left(\frac{2}{3}\cdot 4\right)=-2\frac{2}{3}$.

27. Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «+», нужно опустить скобки и знак «+», стоящий перед ними, и записать все слагаемые, которые были в скобках, со своими знаками:

$$a+(-b+c)=a-b+c.$$

Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «–», нужно опустить скобки и знак «–», стоящий перед ними, и записать все слагаемые, которые были в скобках, с противоположными знаками:

$$a-(b-c)=a-(+b-c)=a-b+c.$$

28. Чтобы привести подобные слагаемые, нужно сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть.

Например: $7a-9a+4a=(7-9+4)a=2a$.

ОТВЕТЫ

§ 1

15. $a = -3$. **16.** $a = 23$. **17.** *Указание.* Обоснуйте, что при $x = 2$ значение левой части уравнения является нечетным числом. **20.** 3750 грн. **21.** 148 т. **32. а)** 16; **б)** 1,125; **в)** $\frac{2}{15}$; **г)** $-\frac{7}{8}$. **33. а)** 0,2; **б)** $-1\frac{1}{2}$. **34. а)** –1; **б)** $-1\frac{4}{9}$. **35. а)** $\frac{1}{3}$; **б)** 6. **36. а)** –3; –2; –1; **б)** 0; 1; 2; 3; $5\frac{1}{3}$. **39. а)** 54 080 жителей; **б)** 50 000 жителей. **48. а)** 2; **б)** –35; **в)** –10,2; **г)** 4. **49. а)** 2; **б)** 0,7; **в)** –0,1; **г)** 6. **50. а)** 5; **б)** 2,5; **в)** 2,5; **г)** 3,5; **д)** –4; **е)** корней нет. **51.** 0. **52.** 4. **53.** 3. **54. а)** 1; **б)** 5; **в)** –2; **г)** корнем уравнения является любое число. **55. а)** $-\frac{4}{5}$; **б)** $1\frac{8}{9}$; **в)** $-1\frac{2}{3}$; **г)** 0. **56. а)** 10; **б)** –1; **в)** –8; **г)** $-1\frac{1}{4}$. **57. г)** –2; 9; **д)** 2,5; 5; **е)** $\frac{2}{7}$. **58. а)** –4; 4; **б)** –2; 2; **в)** корней нет. **59. а)** –4; 4; **б)** –5; 11; **в)** корней нет; **г)** 7; **д)** –3; 3; **е)** –16; 16. **60. а)** 1; **б)** $-\frac{2}{7}$. **61. а)** 8; 12; **б)** –6; –2; **в)** –1; 1; **г)** –0,5; 1,5. **62. а)** 5; **б)** –3; 2; **в)** 4; **г)** корней нет; **д)** корнем уравнения является любое неположительное число; **е)** корнем уравнения является любое неотрицательное число. **63. а)** 0; **б)** корней нет; **в)** корней нет. **64.** 19. *Указание.* Число a должно быть делителем числа $4389 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$. Устанавливаем, что только делитель $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$ является трехзначным числом, которое заканчивается цифрой 1. **69.** 30 яблок. **70.** 40 кг; 28 кг. **71.** 18 и 15 компьютеров. **72.** 784 га; 224 га. **73.** 36 и 12 лет. **74.** 16 и 20 деталей. **75.** 300 страниц. **76.** 90 км. **77. а)** 9 см; 6 см; 10 см; **б)** 10,5 см; 5,5 см; 9 см. **78.** Олег — 2 грн.; Сергей — 6 грн.; Виталий — 4 грн. **79.** 130 кг; 150 кг; 180 кг. **80.** 52,5 кг; 45 кг; 37,5 кг. **81.** 66 и 54 яблок. **82.** 20 км/ч; 16 км/ч; 12 км. **83.** 400 км. **84.** 200 км. **85.** 30 км. **86.** 21 км/ч. **87.** 40 км. **88.** 56 км/ч; 60 км/ч. **89.** 56, 14 и 11 лет. **90.** 60 и 35 книг. **91.** 80 семиклассников. **92.** 90 деталей. **93.** 350 грн. **94.** 10 мин; 40 мин. **95.** 28 учеников. **96.** 8 ц, 2 ц. **97.** 40 л; 30 л. **98.** 500 г. **99.** 38 т. **102.** 34. **105.** 30 способами. **109. в)** 2; **г)** 5; **д)** –2,6; **е)** 4. **110. а)** 5; **б)** –1. **111. а)** корней нет; **б)** –2; 2. **112. а)** 0; 4; **б)** –2; 1. **113. а)** 7; **б)** –0,6. **114.** $a = 0$. **115.** Не существует. **116.** 108 см^2. **117.** 8 см; 12 см; 10 см. **118.** 70 га. **119.** 15 км. **120.** 1,2 ч. **121.** 3 кг; 7 кг. **122.** 40 л.

Задания для самопроверки № 1

1. в). **2.** б). **3.** а); г). **4.** б). **5.** в). **7.** а) — 1); б) — 3); в) — 1); г) — 2). **8. а)** 1; **б)** $\frac{1}{8}$. **9.** 5 км/ч. **10.** Нет. **11. а)** $-\frac{5}{8}$; **б)** 14. **12.** 51 м; 30 м. **13.** 5 ч. **15. а)** $1\frac{1}{3}$; **б)** –2; 2. **16.** 300 м. **17.** 1,5 кг.

§ 2

138. 2400 кг. **139.** 160 деталей. **142. а)** 22,45; **б)** 530. **143. а)** $4\frac{1}{6}$; **б)** 4,6. **146.** $x = 2,5$. **147.** $x = -7$. **148.** $x = 2$. **161.** 120; 5040; 2 нулями; 24 нулями. **164.** 23 числа. **165.** $6n + 5$. **166. а)** 17,6 кг; **б)** 25 кг. **179. а)** $44a + 40$; **б)** $8,5b - 4a$; **в)** $-6y + 4$; **г)** $-2x - 23y - 6$. **180. а)** $2x - 11z$; **б)** $-14a + 15b - 3$. **181. а)** –6,9; **б)** –11; **в)** 28. **182. а)** –4; **б)** 27. **192. а)** $28c + 26$; **б)** $x - 4,5$; **в)** $-6x + 2y + 3z$; **г)** $4a - 11\frac{1}{3}b$; **д)** $-6x + 18$; **е)** $15n - 20$. **193. а)** $6a + 12$; **б)** $1,5a - 5,4b$; **в)** $12n + 18$; **г)** $\frac{2}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{2}{9}$. **196. а)** 1; **б)** 2. **197. а)** –3; **б)** 0,5. **209. а)** –5; 5; **б)** –7; –3; **в)** –3. **210.** –15; 5; 20. **211.** 60 км/ч. **212.** $\frac{1}{2}$. **218. а)** $35 - 54a$; **б)** $5x - 10$; **в)** $x - 4y - 9$; **г)** $7b + 5$; **д)** $-0,1x + 2y - 1,2$; **е)** $2,5a + 15$. **219. а)** –47; **б)** 0,1. **220.** 13. **221.** $x = 1,8$.

Задания для самопроверки № 2

1. г). **2.** б). **3.** б). **4.** в). **5.** в). **6.** $2a - b$. **7.** $13a + 8,2$. **8.** $-2,5x + 2,75$; 0,75. **10.** $6a - 2$. **11.** 8,24. **12.** $4a - 3b$. **14.** $-\frac{3}{14}$. **15.** $8a - 17$.

§ 3

249. 11; 1; 1; 5; 31. **250.** –5; 0; 22. **254. а)** 0; 100; 0; **б)** 0; 99; –1; **в)** 0; 1; 1; **г)** 0; 1; 1. **258. в)** 2; **г)** –35. **259.** 7 матчей выиграла, 2 сыграла вничью. **260.** –5; –10; –9. **278. а)** 10 000; **б)** 1 000 000; **в)** 1; **г)** 100 000; **д)** $4\frac{17}{27}$; **е)** 1; **ж)** 1; **з)** $5\frac{5}{7}$. **279. а)** 1000; **б)** 1 000 000; **в)** 1; **д)** 81; **е)** $-9\frac{1}{3}$. **282. а)** a^{m+2}. **283. а)** a^{35}; **б)** a^{18}; **г)** a^{15}. **284. б)** a^{15}; **г)** a^{12}. **290. г)** 33. **291.** 20 выражений. **292.** 117 км. **293.** 250 м^3. **306. а)** $-1,25a^7b^5$; **б)** $0,27a^6b^5$; **в)** $-x^5y^8$; **г)** $16a^6b^{12}$; **д)** $-0,5m^{10}n^8$; **е)** $1,1a^7b^7c^7$. **307. а)** $-25m^4n^3$; **б)** $-0,1p^5q^3$; **в)** $-9a^{12}b^5$; **г)** $-1,5x^9y^5z^6$. **312. а)** 12; **б)** 4; **в)** 64; **г)** –24. **313. а)** 400 000; **б)** 1; **в)** –32. **314. а)** –10; **б)** 256. **315. а)** $16x^{48}$; **б)** $2x^{22n}$; **в)** $8a^{4n+2}b^{4n+2}$; **г)** $-x^{8n+5}$. **316. а)** 1; **б)** 0,16.

317. В 8 раз. **318. а)** 2; **б)** –1. **320.** 1000 грн. **321.** 855 км. **331. а)** $-2a^5b$; **б)** a^3b^3; **в)** $-x^4y^2$; **г)** $-112a^7b^4$; **д)** $-10x^6z^5$; **е)** $81a^{12}b^{16}c^{20}d^4$; **ж)** $-0{,}2a^5b^5$; **з)** $-10x^3y^5$; **и)** $-256m^8n^{21}$. **333. а)** 27; **б)** –320. **334. в)** 1; **г)** 256. **337. а)** 0; **б)** корней нет; **в)** 0.

Задания для самопроверки № 3

1. в). **2.** б). **3.** г). **4.** в). **5.** г). **6.** а) — 2); б) — 1); в) — 3). **7. а)** 44; **б)** 80; **в)** 1000. **8. а)** $6a^5$; **б)** $-1{,}5a^5b^5$; **в)** $16a^4c^{12}$. **9. а)** 1; **б)** 20 000. **10. а)** 6^{36}; **б)** 3^{46}; **в)** 2^{24}. **11. а)** $36x^8y^8$; **б)** $63a^8b^{12}c^{12}$; **в)** $-0{,}0016m^{47}n^{60}$; **г)** $6{,}25a^{11}x^{11}$. **12. а)** Например, $2a^2b^2 \cdot 4a^{10}b^{10} \cdot 8b^6$; **б)** $(-4a^5b^8) \cdot (-16a^7b^{10})$; **в)** $(4a^4b^6)^3$. **13. а)** 256; **б)** 32. **14. а)** 2^{4n+10}; **б)** 2^{9n+22}. **15. а)** 1; **б)** 9. **16.** 4. **17. а)** 0; **б)** корней нет.

§ 4

346. а) 12; **б)** 2,21; **в)** –18. **347. а)** 28; **б)** 0. **350. а)** –0,44; **б)** –10. **351. а)** 168; **б)** 2. **356.** *Указание.* Предположим, что при $x = n$, где n — целое число, значение многочлена равно нулю. Тогда верным является равенство $n^5 - 6n^2 + 1 = 0$. Обоснуйте, выходя из этого равенства, что 1 должна делиться на n, откуда $n = 1$ или $n = -1$. Однако при $n = 1$ и при $n = -1$ данное равенство является неверным. **359. а)** –2; **б)** –0,6; **в)** 0,5; **г)** 0,75. **360.** 18,4 км/ч. **372. а)** 0,8; **б)** –2. **373. а)** 0,5; **б)** –0,8. **374. а)** a^2b^3; **б)** $-x^4 - 2x - 11$; **в)** $2xy - 2x^2$; **г)** $-5a^2 - 5b - 3$. **375. а)** $-x^2 - 5x$; **б)** $8ab + 4b^2$; **в)** $-n^2 + 7n$. **376. а)** $P = -3x^2 - x + 3$; **б)** $P = x^2 + 2$; **в)** $P = 3x^2$. **377.** $-2x^2 + 2x + 6$. **378. а)** 2; **б)** –1,75. **379. а)** –1,2; **б)** 2. **382.** Поровну. **383.** $a = -1$, $b = 1$. **387.** 400 г. **391. б)** $-10a^2 - 8a$; **в)** $2a^5 - a^3$; **г)** $-12x^3 - 2x$. **392. а)** $-3a^3$; **б)** $4b^3 - 4b + 1$. **393. а)** $2a^2$; **б)** $-2y^2$; **в)** $-3m - 6$; **г)** 0. **394. а)** c^3; **б)** $-5x^3 - 15x^2$; **в)** $4a^2$; **г)** 0. **395. а)** –1; **б)** 2,5; **в)** –0,75; **г)** 6. **396. а)** 1; **б)** 2,4. **397. а)** $-2a^2 - 8a + 8$; **б)** $15x^6 - 18x^4$; **в)** $-8m^4n^3 + 8m^4n^2$; **г)** $-2x^2 + x$; **д)** $11abc$; **е)** $-18x^5y^2$. **398. а)** $2a^3$; **б)** $-4xy^2 + 2x$; **в)** $-8m^3n^5$; **г)** $-\frac{2}{3}a^2b^2 - 4a^4$. **405. а)** 5; **б)** 0,7; **в)** 3; **г)** 2. **406. а)** –15; **б)** 2; **в)** 1; **г)** 1,5. **407. а)** –1; **б)** 4. **408. а)** 0; **б)** 3. **409.** 1,5; 8,5. **410.** 60 см^2. **411.** 200 м^2. **412. а)** 0; **б)** $-a^n$; **в)** $x^{3n+4} + x^{3n+2}$. **415.** Мальчиков на 5 больше, чем девочек. **416.** $\left(3 - 2x + \frac{1}{3}x^2\right)$ л. *Указание.* После первого отливания и доливания воды в 1 л смеси содержится $\frac{3-x}{3}$ л спирта. **417.** 90 км. **418.** 180 км. **419.** 60 пиратов. **427. а)** $6a^2 - 4$; **б)** –12; **в)** –15; **г)** $a^3 + a$; **д)** $a^2 - 3b^2$; **е)** $-4y^2$. **428. а)** $7x + 6$; **б)** $3a^2$; **в)** $5ab - 8b^2$; **г)** $2m^2 - 15n^2$. **429. а)** 5; **б)** 0,6. **430. а)** 4; **б)** 1. **435. а)** $12a^2 - 10$; **б)** $45x - 4$;

в) $5a$; г) $7b^3$; д) $14x^4y^2$. **436.** а) $18x^2 - 15$; б) $-35b + 10$; в) $x^3 + 9y^3$; г) $2ab$. **437.** а) 1,8; б) 2; в) –1; г) 2. **438.** а) $1\frac{1}{3}$; б) 4; в) корнем является любое число. **446.** 3; 4; 5. **447.** 9 см; 5 см. **448.** 8 см; 4 см. **449.** 0. **450.** а) $a^n + b^n$; б) $2^{n+3} + 5$. **455.** 223. **456.** 50 к. **457.** 3 км/ч. **458.** 25,2 км. **474.** а) 6,25; б) 103. **475.** а) 1,96; б) 28. **476.** а) 0; 5; б) 0; –3. **477.** а) 0; –2; б) 0; 2. **478.** а) $ab^3(a + b - ab)$; б) $12x^4y^3(3 - 4x^2y)$; в) $8a^2b^2(3b - 2ab - 5a)$; г) $-0{,}6m^4n^5(5n - 2m + 7mn)$; д) $\frac{2}{15}x^2y^3z^2(xy - 2z + 7xz^2)$; е) $\frac{4}{9}abc(c + 2b - 4a)$. **479.** а) $2x^4z^3(1 + 2z - 2z^2)$; б) $15a^2b^2(3a^2 - 4ab + 5b^2)$; в) $-1{,}8m^2n^4(2n - 3m + 5)$; г) $\frac{3}{7}x^3y^3z^4(2x^2 - y^2 + 4z)$. **480.** а) $(m + k)(a - b)$; г) $(a - b)(m - 3)$; е) $(x - 2)(x + 2)$; ж) $(a - b)(2x - a + b)$; з) $2x(a + b)(2 + a + b)$. **481.** а) $(x - k)(m - n)$; в) $(s - t)(a - b)$; г) $(a - b)(2 + x)$; д) $(m - 4)(m - 9)$; е) $(m - n)(x + 2m - 2n)$. **482.** а) 0,5; б) $\frac{17}{21}$. **483.** а) 5; б) 0. **484.** а) 0; –20; б) 0; 0,4; в) 0; $\frac{2}{5}$. **485.** а) 0; 0,2; б) 0; –0,2; в) 0; $1\frac{3}{4}$. **492.** 12 см; 10 см; 5 см. **493.** 350 км. **496.** а) 26,3; б) 1; в) $\frac{1}{3}$. **498.** ж) $(1 - 2n)(a - b)$; з) $(y - 1)(4a - 3)$. **499.** г) $(c + b)(6 - a)$; д) $(x + y)(1 - b)$; е) $(a - 1)(7m + 5x)$. **500.** а) $(a + 1)(a^2 + 1)$; б) $(x - 4)(x^2 + 2)$; в) $(b - a)(b - 2)$; г) $(x + y)(10 + x)$; д) $(3 - x)(a + x)$; е) $(a - 1)(xy + 5)$. **501.** а) $(x + 2)(x^2 + 1)$; б) $(a^2 + 5)(a^4 + 5)$; в) $(a + 2b)(a + 3)$; г) $(x + 3a)(x - 2)$. **502.** а) $(a^2 + b^2)(1 - ay)$; б) $(b - y)(bn - y)$; в) $(c + 2)(3a^2 - 5bc)$; г) $(2x^2 + 3y)(6 + 5x)$; д) $(3y - 4x)(0{,}3a + 0{,}4y)$; е) $\left(\frac{1}{17}x + \frac{4}{17}yz\right)(3xyz - 1)$. **503.** а) $(y^2 - a)(x^2 + 2y)$; б) $(a - 2c)(2ab - 1)$; в) $(2x^3 + 3y^2)(3y + 4z^2)$; г) $(n^2 + 3m^2)(0{,}2mn - 0{,}5)$. **504.** а) $(a - b + c)(x + 3)$; б) $(x^2 - y^2 + 4z)(a - 4b)$; в) $(a + b)(-5 + 3n - m)$; г) $(b + c)(n^2 + p^2 - p)$. **505.** а) $(a + b + 2)(ab + 1)$; б) $(a - b + 1)(c + d)$; в) $(a + b)(2a^2 + 2b - 1)$. **506.** а) 2,5; б) 37; в) 0. **507.** а) 38; б) $-9\frac{4}{9}$. **508.** $(a + b - 1)(a^2 + b^2)$. **510.** Если $x > 3$, то значения многочлена положительны; если $x < 3$, — отрицательны. **511.** 1; 5. **512.** а) $(a - 2)(a - 5)$; б) $(x + 1)(x + 4)$; в) $(x + y)(x + 2y)$; г) $(a - 3b)(a - 4b)$. **513.** а) 1; 2; б) –5; –3. **514.** а) –2; 0; б) 1; 2; 3; 4. **516.** 1 грн. 20 к. **517.** 60 и 35 книг. **518.** 26,5 т; 28 т. **525.** а) $12b^2 - 14b$; б) $4x + 8$; в) $-ab^2 + 2a - 1$; г) 0; д) $4bc$; е) 0. **527.** а) –1; б) –1,5; в) 16; г) –31. **530.** 7 см; 5 см. **531.** а) 0,6; б) корней нет; в) –1. **533.** а) $(a + b)(2 + x)$; б) $(x - y)(3 - a)$; в) $(x + 2)(x^2 + 1)$; г) $(1 - 2y)(0{,}1x + 0{,}2y)$; д) $5(b + 2)(a^2 - 2bc)$; е) $(4z - 5y)(x^2 - 5y^2)$.

534. а) $(x-7)(x-2)$; б) $(x+2)(x+6)$. **535.** а) 0; 3; б) 0; –2; в) 0; –2,5; г) 0; $2\frac{2}{3}$. **536.** а) 2; 3; б) –3; –1. **537.** а) –18; б) 85; в) 42. **541.** 0,5.

Задания для самопроверки № 4

1. в). **2.** в). **3.** б). **4.** г). **5.** в). **6.** б). **7.** а) $2a-6$; б) $-x^2-3x-1$. **8.** а) $6x^4-2x^3+2x^2$; б) $6a^2-19ab+10b^2$. **9.** а) $4x(1-3x)$; б) $-10(2+a)$; в) $2a^2b(1+2a-a^2)$. **10.** 75. **11.** а) 0; 0,5; б) 0; –4. **12.** $5x^4-4x^2+3x$. **13.** а) $-3{,}2x^7y^5+6{,}8x^5y^3$; б) $2a^3-7a^2b-6ab^2+8b^3$. **14.** а) 3; б) 0; 1. **15.** а) $(m-n)(m-2n+3)$; б) $(a-x)(am-x)$. **17.** а) $a^3b-2\frac{13}{15}a^2b^2+2ab^3$; б) $x^3+6x^2y+11xy^2+6y^3$. **18.** –9. **19.** а) –6; б) $-\frac{3}{5}; \frac{3}{5}$. **20.** а) $(a-b)\left(\frac{2}{9}+a-b\right)$; б) $(x+2)(x+a)$. **21.** 20 см^2; 14 см^2.

§ 5

551. а) 3; б) –5; в) $-4x^4$; г) $64c^8$; д) $9a^2b^2$; е) $8a^2$; ж) $-6b^3+24b$. **552.** а) 7; б) $25-2c$; в) a^6; г) $-4z^4$; д) 0. **553.** а) z^2+1; б) $\frac{9}{49}a^2+\frac{21}{25}b^2$; в) $-x^2-\frac{2}{3}$; г) $1\frac{1}{9}a^4$. **554.** а) $\frac{1}{4}a^2$; б) $6b^2-2\frac{7}{9}$. **555.** а) b^4-1; б) $16x^4-1$; в) $16-y^4$; г) $81n^4-256$; д) y^4-16z^4; е) a^8-1. **556.** а) $81-c^4$; б) z^4-625; в) $256x^4-y^4$; г) $81k^8-16$. **559.** а) 5; б) 0,5; в) 1; г) 0. **560.** а) 0,5; б) 0,4. **561.** а) 0; б) $a^{32}-b^{32}$. **562.** *Указание.* Учитывая, что $a-b=1$, левую часть равенства можно записать в виде $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$. **564.** –1. **566.** 5 км/ч. **567.** 10%. **568.** 1,35 кг. **576.** а) $2a^2+2$; б) b^2; в) $-20x$; г) $2x-2$. **577.** а) 16; б) $2x^2+8$. **578.** а) 1; б) –2. **579.** а) –5; б) 1. **588.** а) $-8a$; б) 1; в) $12n^2+2$; г) a^2+b^2+2ab. **589.** а) $2a^2+8b^2$; б) x^4+25x; в) a^2+b^2-1. **590.** а) –0,3; б) 2; в) 0,5; г) 0,25. **591.** а) 1; б) –9; в) –1. **593.** $-4a^{20}b^{20}$. **596.** 2. **597.** *Указание.* Рассмотрите возможные случаи: 1) $m=5k+1$; 2) $m=5k+2$; 3) $m=5k+3$; 4) $m=5k+4$, где k — целое число. **599.** 48; 60. **600.** 12,6; 7. **601.** 51 и 30 деталей. **616.** а) $(a+1)(a+3)$; б) $(3b-3)(3b+1)$; в) $(2-3b)(6+3b)$; г) $(2a-5-5b)(2a-5+5b)$; д) $(x+1)(7x+5)$; е) $(-2a-8b)(4a+2b)$. **617.** а) $(2x-4)(2x+2)$; б) $(-2a-3)(6a+3)$; в) $(-x+y)(9x-3y)$. **618.** –34,4; $2\frac{1}{7}$. **619.** 44; $\frac{2}{7}$. **620.** а) –2; –4; б) 1; –0,2; в) –5; –1; г) –6; 0. **621.** а) 2; 3; б) 1; 3. **625.** а) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$; б) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$. **626.** а) –2; 2; б) –1; 1; в) –4; 0. **629.** а) 12 лет; б) 6 лет. **630.** 80 км/ч. **637.** а) 100; 0,01; 400; б) 400; 10 000. **638.** 100; 100. **641.** а) 1; б) 100; 81. **642.** $\frac{1}{9}$. **643.** а) 4; б) –6. **644.** а) 3;

б) –5. **645.** а) 25; б) $\frac{1}{81}$. **647.** $x = \frac{2}{3}$, $y = -2$. **648.** Корнем является любое число. **649.** а) 0,0081; б) 25. **650.** 0; 0,25. **664.** в) $(3a^2 - 5)(9a^4 + 15a^2 + 25)$; е) $(10 - ab^3c^4)(100 + 10ab^3c^4 + a^2b^6c^8)$. **665.** в) $(0{,}4x^3y^2z - 3)(0{,}16x^6y^4z^2 + 1{,}2x^3y^2z + 9)$. **668.** а) a^3; б) x^6; в) 0; г) 16. **669.** а) x^3; б) $2b^3$. **670.** а) –2; б) 4,5. **671.** а) 1; б) 8. **675.** 11,375. **676.** а) $2x^2 + 2y^2$; б) $10ab$; в) $-a^2$. **677.** а) 9; б) 12. **678.** 105 км. **679.** а) 7; –0,6; б) 0; 1; –3. *Указание.* $|a| = |b|$ тогда и только тогда, когда $a = b$ или $a = -b$. **680.** г) $4a(a - 1)(a + 1)$; д) $x^2(x - 1)(x + 1)$; е) $c(a - 3b)(a + 3b)$; ж) $c(3 + b)(9 - 3b + b^2)$. **681.** г) $3y^2(y - 1)(y + 1)$; д) $2x(3y - 1)(3y + 1)$; ж) $6a(1 - b)(1 + b + b^2)$; з) $a^3(1 - a)(1 + a)$. **682.** б) $-(b - c)^2$; д) $a(3a + 1)^2$; е) $m(1 - 5m)^2$. **683.** в) $-6(a - 2b)^2$; г) $x(x - 6)^2$. **684.** а) 800; б) 125. **685.** а) 300; б) 26 000. **686.** а) –3; 3; б) –0,5; 0,5. **687.** а) –5; 5; б) –0,2; 0,2. **688.** а) $(a - n)(a + n)(a^2 + n^2)$; б) $(k - 2)(k + 2)(k^2 + 4)$. **689.** а) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$; б) $(3 - b)(3 + b)(9 + b^2)$. **690.** а) $3(m + 8)(n - 3)$; б) $x^3(b - 1)(x + 1)$; в) $-4c(a + 8)(b + 3)$; г) $2y^2(y - a)(y - b)$; д) $0{,}5a(a + x)(3 - x)$; е) $xy(a - 1)(xy + 5)$. **691.** а) $2c(1 + x)(2a + b)$; б) $m(a - b)(m + 3)$; в) $-ab(a + b)(a + 1)$; г) $0{,}2x^2(x + 3y)(x - 2)$. **692.** а) $(x - y - z)(x - y + z)$; б) $\left(\frac{2}{3}x - a - b\right)\left(\frac{2}{3}x + a + b\right)$; в) $(c - 3 - k)(c - 3 + k)$; г) $(2x - y - 2)(2x + y + 2)$. **693.** а) $(m + n - k)(m + n + k)$; б) $\left(\frac{3}{4}a - 2x - y\right)\left(\frac{3}{4}a + 2x + y\right)$; в) $(a - 4 - b)(a - 4 + b)$; г) $(p - q + 5)(p + q - 5)$. **695.** 0. **696.** а) $(a + b)(a - b + 1)$; б) $(x - a)(x + a + 1)$; в) $(2x - y)(2x + y - 1)$; г) $(x - y)(3{,}5x + 3{,}5y - 1)$. **697.** а) $(c - b)(c + b + 1)$; б) $(x + y)(1 + x - y)$; в) $(a - x)(a + x + 4{,}8b)$. **698.** а) 66; б) 19 200. **699.** а) 31; б) 20 400. **700.** а) –1; 0; 1; б) –0,5; 0; 0,5; в) –2; 2; 4; г) –2; 0,5; 2; д) –1; 0; 1; е) 2. **701.** а) –2; 0; 2; б) –0,5; 0; 0,5; в) –3; 1; 3; г) –1; 0,25; 1. **702.** а) $(x - 2)(x + 4)$; б) $(a - 6)(a - 2)$; в) $(2c - 3)(2c + 1)$; г) $(x - 5y)(x - y)$; д) $(a + b)(a + 11b)$; е) $(3a - 4b)(3a + 2b)$. **703.** а) $(a - b)(2a - 2b + 1)$; б) $3ab(a - b)$. **704.** а) 1; 7; б) –10; –2; в) 3; 5; г) –2; 1; 2; 3. **710.** а) 36; б) –3. **712.** 0,4 кг. **713.** 2,2 кг. **714.** 50%. **725.** а) 0 (при $x = 2$); б) 3 (при $x = 2$). **726.** а) 0 (при $a = -3$); б) 1 (при $x = 3$). **732.** а) –7 (при $x = 1$); б) 7 (при $a = -2$); **734.** а) 3; 4; б) –3; 4. **735.** а) Корней нет; б) 1. **737.** а) *Указание.* Равенство можно записать в виде $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1 = 0$. **738.** 2 + 2. **739.** Да. **741.** 3 км/ч. **742.** 124 га; 186 га; 258 га. **746.** а) –27; б) $6x^2 - 2$; в) $29a^2$; г) $-2ab - 2bc - 2ca$; д) $2a^8$. **749.** а) –5; б) –0,5; в) $\frac{19}{100}$; г) $\frac{4}{45}$. **752.** в) $x^2y^2(x - y)(x + y)$; д) $(c - 1)^2(c + 1)^2$; е) $(a - b - 1)(a - b + 1)$; ж) $(m + 4)(9m - 4)$; з) $(x + y)(x - y - 1)$; и) $(a - b)(a + 3b)$. **754.** а) $(a - 1)(a + 1)^2(a^2 - a + 1)$; б) $(z - 2)(z + 1)(z^2 + 2z + 4)$; в) $2(x - 1)^2(x^2 + x + 1)$. **755.** а) $(x^2 + xy + y^2)^2(1 - x + y)(1 + x - y)$;

б) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$. **756. а)** –3; 0; 3; **б)** –1; 0; 1; **в)** –1; 1; 5; **г)** –1,5; –1; 1. **757. а)** корней нет; **б)** 0; **в)** 1. **762. а)** 1; **б)** 16.

Задания для самопроверки № 5

1. г). **2.** в). **3.** в). **4.** в). **5.** г). **6.** б). **7.** $-2a + 10$; 9. **8. а)** $9b^2 + 24b + 16$; **б)** $4a^2 - 20a + 25$. **9. а)** –2; **б)** –3. **10. а)** $(3y - 4)(3y + 4)$; **б)** $3(x - y)(x + y)$; **в)** $(3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2)$. **11. а)** $(3a + 2)^2$; **б)** $(10a - b)^2$. **12. а)** $98y^2$; **б)** $-6b^2 + 5$. **14. а)** $(a^3 - 2b^2)(a^3 + 2b^2)$; **б)** $(0{,}1a - 3b)(0{,}01a^2 + 0{,}3ab + 9b^2)$; **в)** $0{,}4a^2(a + 1)^2$. **16. а)** 0; 1,5; **б)** –5; 7. **17. а)** $x^4 - 8x^2y^4$; **б)** $a^6 - 1$. **18. а)** $(m^2 + mn + n^2)(m - n + 3)$; **б)** $(a + b + c - x)(a + b + c + x)$. **19. а)** $-\frac{1}{4}$; **б)** –9; –1; 1.

§ 6

787. а) $x = 0$; $x = 4$; **б)** $x = 2$. **788. а)** $x = -2$; $x = 0$; **б)** $x = -1$. **791.** –2. **792.** –4; 0; 4. **793.** Да, например, при $x = -a$. **794.** 1 ч 10 мин. **795.** 192 числа. **812. в)** $t = 0$; $t = 20$; **г)** $5 \le t \le 10$; 50 м. **813. б)** 0,5 ч; **в)** 4 км/ч; 5 км/ч; **г)** 4 км/ч. **819.** $x = 0{,}6$. **820. а)** –1,5; 0,5; **б)** –1. **821.** 5 кг. **855.** $x < 1{,}75$. **856.** $x < 4$. **864.** Да. **865.** $a = 5$. **868. а)** 0; **б)** $8 - 4x^2$. **871.** 25%. **872.** 27 л; 9 л. **873.** 2,5 км/ч. **874. в)** $x = 0{,}75$. **875. в)** 32°F; 212°F. **885.** $k = -0{,}5$. **888.** –1; 2 — корни уравнения. **889. а)** $k = 0{,}5$; **б)** $k = 5$.

Задания для самопроверки № 6

1. г). **2.** в). **3.** б). **4.** б). **5.** б). **6.** а); г). **7.** а) — 3); б) — 2); в) — 4); г) — 1). **8.** 2; –2,5. **9. а)** –2; **б)** –3; 0. **11.** Да. **12.** Область определения: $-4 \le x \le 4$. Область значений: $-3 \le y \le 3$. Функция принимает отрицательные значения, если $-3{,}5 < x < 2$. **13.** 0; 6. **14.** $x = -1$ — ноль функции. Функция принимает отрицательные значения, если $x > -1$. **15.** (2,8; 3,4). **16.** Да. **17.** $y = -7$. **18.** $x = -3$; $x = 1$. **19.** Да. **20.** $x < -1$.

§ 7

903. (2; 2). **904.** 4. **905.** 3. **906. а)** $(x; -3)$, где x — любое число; **б)** $(3; y)$, где y — любое число. **907. б)** $x = 2k$, $y = 5 - 3k$, где k — любое целое число; **в)** $x = 9k + 3$, $y = 4k + 2$, где k — любое целое число. **908.** (9; 2); (3; 7). **909.** $a = 0{,}2$. **910.** 8008 единиц. **911.** 250%. **926.** 1. **927.** –2. **928.** –2. **929.** 2. **930.** Существует: $a = 1$. **933. а)** $(x + y)(7 + a)$; **б)** $(x - 3)(x - 1)$; **г)** $c(2a + 2b + c)$. **934.** –15. **935.** 28; 16. **936.** $x = 4 - 5k$, $y = 3k - 1$, где k — любое целое число. **939. а)** (4; 2); **б)** (0; 4); **в)** (2; 1); **г)** (–1; 1). **940. а)** (1; 1); **б)** (3; –4); **в)** (3; 4). **944. а)** Бесконечно много; **б)** нет; **в)** один; **г)** бесконечно много.

945. а) Бесконечно много; **б)** нет; **в)** один. **947.** $a = 0$; $b = 3$. **948. а)** (–1; 1); **б)** (–1,5; 3); (1,5; 3); **в)** (2; 2); (–1; 1). **949. а)** 2; **б)** 0,6; **в)** 5; **г)** 3. **951.** $\frac{1}{4}$. **953. а)** (1; 3); **б)** (7; –4,5). **954. а)** (1; 3); **б)** (4; 1); **в)** (3; 1); **г)** (1; –2); **д)** решений нет; **е)** (3; 2). **955. а)** (4; 0); **б)** (3; 5); **в)** (1,5; –2); **г)** (3; –1); **д)** (7; 1); **е)** (1; –1). **956. а)** (2; 1,5); **б)** (1; –2); **в)** (20; 0,5); **г)** (3; 3). **957. а)** (1; 0,5); **б)** (1; –1); **в)** (2; 10). **958. а)** (2; –2); **б)** (4; 5). **959.** (3; –3). **960. а)** (3; –2); **б)** (–11; 65); **в)** (1; –6); **г)** решений нет; **д)** (0,5; 1,5); **е)** (12; –8). **961. а)** (2; 4); **б)** (–2; –1); **в)** (–6; –4); **г)** (5; 3). **963.** $y = -x + 4$. **964.** $y = -0{,}5x + 0{,}5$. **965. а)** (4; 1); **б)** (4; 3); **в)** (5; 2); **г)** (6; 3); **д)** $\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{6}\right)$. **966.** $a = -1{,}5$. **967.** $b = 1{,}5$. **968. а)** $(x-3)(2-y)$; **б)** $y(y-5)^2$; **в)** $(-a-2b)(3a-2b)$. **970.** 1; 49. **971.** –10. **972.** Нет. **973. а)** (4; 3); **б)** (–2; –3); **в)** (0,5; 1). **974. а)** (–1; 2); **б)** (–2; 4); **в)** (5; 1). **975. а)** (3; –1); **б)** (0; –2); **в)** (–1; 3). **976. а)** (–1; –1); **б)** (2; –2); **в)** (4; –3); **г)** (0,5; –0,5); **д)** (1; –1); **е)** (1; –2). **977. а)** (1; –2); **б)** (5; 6); **в)** (5; 0,5); **г)** (6; 4). **978. а)** (20; 1); **б)** $\left(11\frac{2}{3}; 20\right)$; **в)** (48; 55); **г)** $\left(1\frac{1}{5}; 1\right)$. **979. а)** (2,5; 10); **б)** (–2; 4). **980. а)** (3,5; 4,5); **б)** $\left(\frac{11}{17}; -\frac{1}{17}\right)$; **в)** $\left(3; -\frac{1}{5}\right)$; **г)** $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$. **981. а)** (2,5; 1); **б)** (16; –23). **982. а)** Нет; **б)** да. **983. а)** Да; **б)** нет. **985. а)** (–2; 0); **б)** (3; –1); (3; 1); **в)** (0,3; –1,2); **г)** (–2; 2). **986.** При $a \neq 2$, — одно решение; при $a = 2$, — бесконечно много решений. **987.** $a = \frac{1}{42}$; $b = \frac{1}{7}$; $c = \frac{1}{3}$; $d = \frac{1}{2}$. **989.** 27; 9. **991.** 14 и 7 лет. **992.** 500 грн. **993.** 3 грн.; 2 грн. **994.** 2 грн.; 1 грн. **995.** 8 кг; 7 кг. **996.** 4 т; 5 т. **997.** 57,5; 46,5. **998.** 60; 12. **999.** 5 двуместных; 9 трехместных. **1000.** 11 двуместных; 14 четырехместных. **1001.** 80 км/ч; 60 км/ч. **1002.** 12 и 8 деталей. **1003.** 20 и 40 книг. **1004.** 17 и 8 воробьев. **1005.** 43 км/ч; 3 км/ч. **1006.** 45 км/ч; 3 км/ч. **1007.** 3 палки, 4 галки. **1008.** 5 и 7 мешков. **1009.** 17 тыс. грн.; 7 тыс. грн. **1010.** 60 т; 42 т. **1011.** 53. **1012.** 5 км/ч; 4 км/ч. **1013.** 50 км/ч; 70 км/ч. **1014.** 80; 36. **1015.** 50 л; 60 л. **1016.** 2 грн.; 1,5 грн. **1017.** 180 грн; 270 грн. **1018.** 48. **1019.** 57 км/ч; 51 км/ч; 85,5 км. **1020.** 42 км; 36 км. **1021.** 8 км. **1023. а)** $(1 + 3b)(a - c)$; **б)** $(x + y)(x - y + 2)$; **в)** $(a - 2b)(a + 2b + 1)$; **г)** $(c - a)(c - 2a)$. **1034. а)** (2; 1); **б)** (–1; –1). **1035. а)** (4; –1); **б)** (2; –2); **в)** (0,5; –1). **1036. а)** (1; –5); **б)** (–1; –3); **в)** (3; 2). **1037.** (2; 1). **1038. а)** (5; 10); **б)** (4; 1); **в)** (1; –3); **г)** (0,5; 2); **д)** (6; 15); **е)** (10; 14). **1039.** (–1; 1).

1040. 40 к.; 1 грн. 20 к. **1041.** 8 и 12 монет. **1042.** 40 кг; 44 кг. **1043.** 2,7; 1,8. **1044.** 80 км/ч; 100 км/ч. **1045.** 72 км/ч; 96 км/ч. **1046.** 1 грн.

Задания для самопроверки № 7

1. б). **2.** в). **3.** в). **4.** г). **5.** г). **6.** (3; 3); (2,6; 2). **7.** (3; 1). **8.** (5; 3). **9.** (2; 0). **10.** 2 кг; 5 кг. **11.** $a = -2$. **12.** (2; 1). **13.** (4; 20). **14.** (–1; –5). **15.** 6 грн.; 9 грн. **16.** $a = 0{,}2$; $b = -2{,}6$. **17.** (1; 2); (–3; 6). **18.** $\left(-\frac{3}{7}; \frac{3}{7}\right)$. **19.** $a = 6$. **20.** 20 т; 50 т.

Задачи за курс алгебры 7 класса

1064. а) $-2x^2 - 9$; **б)** $-2c^3 + 2$. **1065. а)** $-19m^2 + 57m$; **б)** 25; **в)** $-11n^3 + 5n^2$; **г)** $50y^4 - 20y^3$. **1070. а)** $(x - y)(a + 3)$; **б)** $(x + 1)(xy - 2)$; **в)** $y(3 - 2a)(3a - x)$; **г)** $(2x^2 + 3y^2)(4a - 5y)$. **1072. б)** $(a + 2b)(a - 2b + 1)$; **в)** $(x - 2y - 2y^2)(x - 2y + 2y^2)$. **1073. а)** $(x - 3)(x + 1)$; **б)** $(a - 1)(a + 4)$; **в)** $(x - y)(x - 7y)$. **1079.** $x = -1$. **1080.** $x = 2$. **1082.** Нет. **1083.** –5. **1085.** Первый. **1086. а)** 15; **б)** 5; **в)** –20; **г)** 2; **д)** 1; **е)** $\frac{2}{27}$; **ж)** 4; **з)** –1. **1087. а)** 0,4; **б)** 3; **в)** корней нет; **г)** $2\frac{2}{3}$; **д)** –5; **е)** $\frac{2}{3}$. **1088. а)** 0; 3; **б)** –0,5; 0; 0,5; **в)** 3; **г)** –2; 2; **д)** –8; 6; **е)** 7; 8. **1089. а)** –1; 4; **б)** –8; 8. **1090. а)** –3; 3; **б)** 0; **в)** корней нет. **1092.** 1,5. **1094.** 37,2. **1095.** 3600 л; 1200 л. **1096.** 1 ч. **1097.** 4 кг. **1098.** 130 км. **1103.** Да. **1106.** $b = 6$. **1110. а)** (2; 2); **б)** (–1; –2); **в)** (4; 7). **1111. а)** (3; 1); **б)** (0,2; –1,2); **1112. а)** $\left(2\frac{1}{3}; 9\right)$; **б)** (–4; –4). **1113.** (0,5; –1). **1114.** Да. **1115.** $y = -2x - 1$. **1116.** $k = 10$. **1118.** 120 и 130 деталей. **1119.** 4,5 км/ч; 4 км/ч. **1120.** 7 лет; 3 года. **1121.** $3\frac{1}{3}$ л; $6\frac{2}{3}$ л.

Задачи повышенной сложности

1122. а) Корней нет; **б)** 4. **1126. а)** Если $a \neq 0$, то $x = 5 : a$; если $a = 0$, то корней нет; **б)** если $a \neq 0$, то $x = 0$; если $a = 0$, то корнем уравнения является любое число; **д)** если $a \neq 0$, то $x = 1$; если $a = 0$, то корнем уравнения является любое число; **е)** если $a \neq 0$, то $x = -4$; если $a = 0$, то корнем уравнения является любое число. **1127. а)** $a = 8$; **б)** не существуют. **1128.** 290 км. **1129.** 450 г. **1130.** 200 мл. **1131.** 20 км/ч. **1134.** 12. **1139.** 121 яйцо. **1140.** 0 или 9. **1144. а)** *Указание.* Докажите, что запись числа $3^{4n} + 4$ заканчивается цифрой 5. **1151.** 72. **1152. а)** 5; 0. **1156. а)** $x = 3a - 6$; **б)** если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, то $x = -0{,}25a$ и $x = 0{,}25a$. **1162. а)** $(a - 3b)(2 - a - 3b)$; **б)** $(9x + 8y - 7xy)(9x + 8y + 7xy)$;

в) $(a + b + c)(ab + bc + ac)$. **1163.** $2a^2 + 2b^{2n}$. **1164. а)** -1; 1; **б)** $0{,}4$; **в)** -1; 1. **1165. а)** $(a^2 + 2)(a^2 + 6)$; **б)** $(c - 4)(c - 2)(c - 1)(c + 1)$; **в)** $(a - 5)(a - 3)(a - 1)(a + 1)$; **г)** $(x - 1)(x + 1)^2(x + 3)$. **1166. а)** $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 5)$; **б)** $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$. **1167. б)** $(2x + y + 1)^2$. **1171. а)** $m = 1$, $n = 1$; **б)** $m = 5$, $n = 1$; $m = 3$, $n = 3$; $m = 5$, $n = 9$. **1175. а)** -1; 0; 1; **б)** 1. **1176. а)** 1; -1; 2; -2; **б)** -1; 1. **1179. а)** Если $a \neq 2$, то $x = a + 2$; если $a = 2$, то корнем уравнения является любое число; **б)** если $a \neq 2$, то $x = 2$; если $a = 2$, то корнем уравнения является любое число. **1180.** $a = -6$. **1186.** $a = 0{,}2$. **1189. а)** $(-2{,}5; 0{,}25)$; **б)** $(0; 0)$; $(1; 1)$. **1190. а)** $(1; 2)$; $(-1; 2)$; **б)** $(3; 1)$; $(-3; 1)$. **1192.** Если $a \neq 0{,}5$, — одно решение, если $a = 0{,}5$, — бесконечно много решений. **1193.** $a > 0$. **1194.** $1\frac{1}{9}$. **1196.** Да, если всех ступенек 1001; нет, если всех ступенек 1000. **1197. а)** Да; **б)** нет. **1198.** Нет. **1200.** Первый и третий. **1201.** Да. **1202.** Нет.

Предметный указатель

Аргумент 119
Возведение в степень
— одночлена 57
— произведения 53
— степени 53
Выражения
— с переменными 32
— целые..... 32
Вычитание многочленов..... 68
График
— линейного уравнения с двумя переменными 156
— линейной функции 134
— функции..... 124
Зависимая переменная 118
Корень уравнения..... 6
Многочлен..... 65
— стандартного вида 65
Независимая переменная..... 118
Область
— значений функции 119
— определения функции 119
Одночлен..... 57
— стандартного вида 57
Пряма пропорциональность 136
Разложение многочленов на множители..... 80
— способом вынесения общего множителя за скобки 81
— способом группировки..... 85
Решение систем линейных уравнений
— графическим способом 162
— способом подстановки 167
— способом сложения 172
Решение уравнения с двумя переменными 152
Свойства
— линейной функции..... 135
— степени..... 51
— уравнений с двумя переменными 153
— уравнений с одной переменной 9
Система линейных уравнений с двумя переменными 161
Сложение многочленов 68
Способы задания функции..... 119
Степень
— многочлена 66
— одночлена 58
— с натуральным показателем 48
Тождественно равные выражения. 39
Тождественные преобразования выражений 40
Тождество 39
Угловой коэффициент 134
Умножение
— многочленов 75
— одночленов 57
— одночлена на многочлен 71
Уравнение
— линейное 13
— с одной переменной..... 6
— с двумя переменными..... 152
Формула
— квадрата суммы..... 95
— квадрата разности 95
— разности квадратов 99
— разности кубов 104
— суммы кубов..... 104
Функция 118
— линейная 133

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Понятие уравнения 6
2. Решение уравнений. Свойства уравнений 9
3. Линейные уравнения с одной переменной 13
4. Решение задач с помощью уравнений 18

Вопросы и упражнения для повторения § 1 27

РАЗДЕЛ II. ЦЕЛЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 2. ЦЕЛЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

5. Выражения с переменными. Целые выражения 32
6. Тождественно равные выражения. Тождества 39

Вопросы и упражнения для повторения § 2 45

§ 3. ОДНОЧЛЕНЫ

7. Степень с натуральным показателем 48
8. Свойства степени с натуральным показателем 51
9. Одночлен и его стандартный вид 57

Вопросы и упражнения для повторения § 3 62

§ 4. МНОГОЧЛЕНЫ

10. Многочлен и его стандартный вид 65
11. Сложение и вычитание многочленов 68
12. Умножение одночлена на многочлен 71
13. Умножение многочлена на многочлен 75
14. Разложение многочленов на множители способом вынесения общего множителя за скобки 80
15. Разложение многочленов на множители способом группировки 85

Вопросы и упражнения для повторения § 4 88

§ 5. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

16. Умножение разности двух выражений на их сумму 92
17. Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений 95
18. Разложение на множители разности квадратов двух выражений 98

Предметный указатель

Аргумент 119
Возведение в степень
— одночлена 57
— произведения 53
— степени 53
Выражения
— с переменными 32
— целые..... 32
Вычитание многочленов..... 68
График
— линейного уравнения с двумя переменными 156
— линейной функции 134
— функции..... 124
Зависимая переменная 118
Корень уравнения..... 6
Многочлен..... 65
— стандартного вида 65
Независимая переменная..... 118
Область
— значений функции 119
— определения функции 119
Одночлен..... 57
— стандартного вида 57
Пряма пропорциональность..... 136
Разложение многочленов на множители..... 80
— способом вынесения общего множителя за скобки 81
— способом группировки..... 85
Решение систем линейных уравнений
— графическим способом 162
— способом подстановки 167
— способом сложения 172
Решение уравнения с двумя переменными 152
Свойства
— линейной функции..... 135
— степени 51
— уравнений с двумя переменными 153
— уравнений с одной переменной 9
Система линейных уравнений с двумя переменными 161
Сложение многочленов 68
Способы задания функции..... 119
Степень
— многочлена 66
— одночлена 58
— с натуральным показателем 48
Тождественно равные выражения. 39
Тождественные преобразования выражений 40
Тождество 39
Угловой коэффициент 134
Умножение
— многочленов 75
— одночленов 57
— одночлена на многочлен 71
Уравнение
— линейное 13
— с одной переменной..... 6
— с двумя переменными..... 152
Формула
— квадрата суммы 95
— квадрата разности 95
— разности квадратов 99
— разности кубов 104
— суммы кубов 104
Функция 118
— линейная 133

19. Разложение многочленов на множители с использованием формул квадрата суммы и квадрата разности 101
20. Разность и сумма кубов двух выражений 104
21. Применение нескольких способов для разложения многочленов на множители 107
22. Применение преобразований выражений 110
Вопросы и упражнения для повторения § 5 114

РАЗДЕЛ III. ФУНКЦИИ

§ 6. ФУНКЦИИ
23. Функция. Способы задания функции 118
24. График функции. Функция как математическая модель реальных процессов 123
25. Линейная функция 133
Вопросы и упражнения для повторения § 6 145

РАЗДЕЛ IV. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ
26. Уравнения с двумя переменными 152
27. График линейного уравнения с двумя переменными 156
28. Системы двух линейных уравнений с двумя переменными 161
29. Решение систем линейных уравнений способом подстановки 167
30. Решение систем линейных уравнений способом сложения 172
31. Решение задач с помощью систем уравнений 176
Вопросы и упражнения для повторения § 7 184
ЗАДАЧИ ЗА КУРС АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА 189
ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ 195
ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ МАТЕМАТИКИ 202
СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАССОВ 206
ОТВЕТЫ 211
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 221