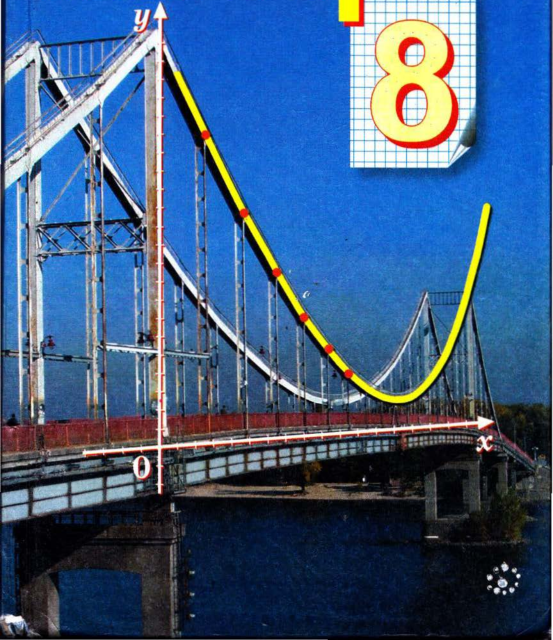
Г.П. БЕВЗ, В.Г. БЕВЗ

Алгебра

8



Числа

N — натуральные,

Z — целые,

Q — рациональные,

R — действительные

Законы действий

$$a + b = b + a,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
$$ab = ba,$$
$$(ab)c = a(bc),$$
$$a(b + c) = ab + ac$$

Свойства степеней

$$a^m a^n = a^{m+n},$$
$$(a^m)^n = a^{mn},$$
$$(ab)^n = a^n b^n,$$
$$a^m : a^n = a^{m-n},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Формулы сокращённого умножения

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Свойства дробей

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$
$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m},$$
$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn},$$
$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$$

Свойства корней

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$
$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|,$$
$$(\sqrt{a})^2 = a,$$
$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Области допустимых значений этих равенств приведены в тексте учебника

Стандартный вид числа

$x = a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$,

n — порядок числа x

Квадратные уравнения

$ax^2 + bx + c = 0$ — уравнение,

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$x^2 + px + q = 0$ — приведённое уравнение,

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ — его корни,

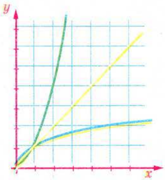
$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$ — теорема Виета

Г. П. БЕВЗ, В. Г. БЕВЗ

Алгебра

Учебник для 8 класса
общеобразовательных учебных заведений

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины



Учебник – победитель
Всеукраинского конкурса учебников
для 12-летней школы
Министерства образования и науки Украины в 2008 г.

Киев
«Зодіак-ЕКО»
2008

ББК 22.1я721
Б36

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(приказ от 17 марта 2008 г. № 179)

Издано за счёт государственных средств. Продажа запрещена

Перевод с издания:
Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. Алгебра: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. — К.: Зодіак-ЕКО, 2008.
Переводчик Е. С. Святицкая

ТВОРЧЕСКАЯ ГРУППА СОЗДАТЕЛЕЙ УЧЕБНИКА

Юрий Кузнецов — руководитель проекта, автор концепций: структуры, дизайна;
Григорий Бевз, Валентина Бевз — авторы текста и методического аппарата;
Олег Костенко — заместитель руководителя проекта;
Наталия Демиденко — редактор-организатор, контрольное редактирование;
Андрей Виксенко — разработчик макета, художественного оформления, художник обложки;
Валентина Максимовская — организатор производственного процесса;
Галина Кузнецова — экономическое сопровождение проекта;
Роман Костенко — маркетинговые исследования учебника;
Андрей Кузнецов — мониторинг апробации учебника

Бевз, Г. П.
Б36 Алгебра : учебник для 8 кл. общеобразоват. учеб. заведений / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Зодіак-ЕКО, 2008. — 256 с. : ил.

ISBN 978-966-7090-51-7 (укр.).
ISBN 978-966-7090-57-9 (рус.).
ББК 22.1я721

ISBN 978-966-7090-51-7 (укр.).
ISBN 978-966-7090-57-9 (рус.).

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 3

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Дорогие восьмиклассники!

Этот учебник — продолжение учебника алгебры, с которым вы работали в 7 классе. Он содержит теорию, задачи и упражнения, «Задания для самостоятельной работы», «Тестовые задания», «Типовые задания к контрольной работе» и др.

Пользуясь учебником, вы значительно расширите свои математические познания и умения. До сих пор вам были известны из алгебры только рациональные числа, целые выражения и линейные уравнения, в 8 классе вы ознакомитесь с действительными числами, рациональными выражениями и квадратными уравнениями. Следовательно, научитесь решать и такие задачи, которые прежде решать не умели. Изучая теоретический материал, обращайте внимание на слова, напечатанные *курсивом*, — это новые алгебраические термины. Вы должны усвоить их, понять, что они означают, и запомнить. Выделенные **жирным** шрифтом предложения — это основные определения, правила и другие важные математические утверждения. Желательно научиться их формулировать (можно — своими словами) и применять при решении предлагаемых упражнений и задач.

В каждом параграфе учебника имеется рубрика «Хотите знать ещё больше?». Она содержит дополнительный материал, адресованный тем, кто увлекается математикой. В учебнике есть также «Сведения из курса алгебры 7 класса», «Исторические сведения».

В рубрике «Выполним вместе!» приведены образцы решений основных видов задач. Полезно ознакомиться с ними перед выполнением домашних заданий (они обозначены).

Каждый параграф учебника дополняют упражнения разной сложности: для устного решения и уровней А и Б.

Большая подборка задач и упражнений для повторения поможет вам закрепить полученные навыки. Отдельно приведены задачи повышенной сложности. Прежде всего они предлагаются тем ученикам, которые интересуются математикой и стремятся лучше овладеть этим предметом. Надеемся, что решение логических задач доставит вам удовольствие.

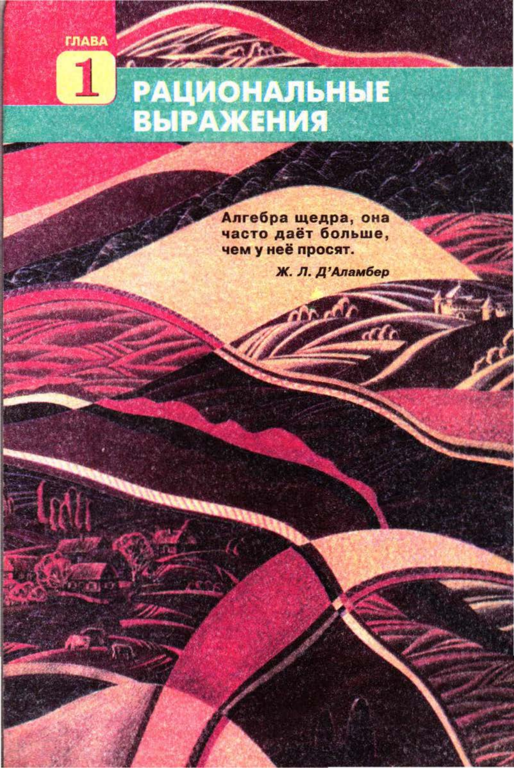
Желаем успехов в изучении алгебры!

ГЛАВА 1

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Алгебра щедра, она часто даёт больше, чем у неё просят.

Ж. Л. Д'Аламбер



До сих пор вам были известны только целые алгебраические выражения, но с их помощью можно решать лишь простые задачи. Более значимой и удобной является алгебра, в которой используются не только целые выражения, но и дробные. Такие выражения имеют общее название — **рациональные**.

В этой главе вы узнаете, что такое:

- **алгебраические дроби и действия с ними;**
- **рациональные выражения, тождества и уравнения;**
- **стандартный вид числа;**
- **функция** $y = \frac{k}{x}$ **и её свойства.**

§1. ДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ И ОДНОЧЛЕНОВ

В курсе алгебры 7 класса вы ознакомились с целыми выражениями, научились складывать и вычитать их, умножать и возводить в степень. Теперь рассмотрим, как можно делить выражения.

Разделить выражение A на выражение B — означает найти такое выражение X, при котором $X \cdot B = A$.

Примеры. $a^7 : a^4 = a^3$, поскольку $a^3 \cdot a^4 = a^7$,

$x^{12} : x^{11} = x$, поскольку $x \cdot x^{11} = x^{12}$.

Следовательно, если a — отличное от нуля число, m и n — натуральные числа, причём $m > n$, то

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Ведь по правилу умножения степеней, $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$. Из тождества $a^m : a^n = a^{m-n}$ следует правило:

при делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют без изменения, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Пользуясь этим правилом, можно записать:

$$6^9 : 6^7 = 6^2,\ a^8 : a^3 = a^5,\ (-x)^{15} : (-x)^8 = (-x)^7.$$

Если $a \neq 0$, то всегда $a^m : a^m = 1$. Чтобы тождество $a^m : a^n = a^{m-n}$ было верно и для данного случая, в математике принято считать, что при каждом значении a, отличном от нуля, $a^0 = 1$. Запись 0^0 не имеет смысла.

Примеры. $7^0 = 1$; $3{,}5^0 = 1$; $(-8)^0 = 1$.

Рассмотрим, как можно делить одночлены.

$$12a^3 : 6a = 2a^2, \text{ поскольку } 2a^2 \cdot 6a = 12a^3;$$

$$15x^2y : 5xy = 3x, \text{ поскольку } 3x \cdot 5xy = 15x^2y;$$

$$-a^2z^3 : 2az^3 = -\frac{1}{2}a, \text{ поскольку } -\frac{1}{2}a \cdot 2az^3 = -a^2z^3.$$

! Чтобы разделить одночлен на одночлен, необходимо:
1) разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя;
2) к найденному частному приписать множителями каждую переменную делимого с показателем, равным разности показателей этой переменной в делимом и делителе.

Пример. Надо разделить одночлен $8a^5m^2x^4$ на $4am^2x^2$.

Делим 8 на 4, a^5 — на a, m^2 — на m^2 и x^4 — на x^2. Имеем, соответственно, 2, a^4, 1 и x^2. Итак,

$$\boxed{8a^5m^2x^4 : 4am^2x^2 = 2a^4x^2.}$$

Но, например, одночлен a^2c на nc таким способом разделить нельзя. Их частное тождественно не равно некоторому одночлену. Говорят, что во множестве одночленов деление не всегда возможно. Если необходимо разделить и такие одночлены, частное которых не является одночленом, его записывают в виде дроби. Об этом вы узнаете в следующем параграфе.

Хотите знать ещё больше?

Рассмотрим, как можно делить не только одночлены, но и выражения, содержащие степени многочленов.

Например,

$$(8-x)^5 : (8-x)^2 = (8-x)^3,$$

$$12a^4(a+c)^4 : 4a^3(a+c)^3 = 3a(a+c).$$

Иногда перед делением надо преобразовать многочлены. Разделим, например, $x^2 - 2ax + a^2$ на $x - a$:

$$(x^2 - 2ax + a^2) : (x - a) = (x - a)^2 : (x - a) = x - a.$$

Известны и другие способы деления многочленов. В частности, многочлены можно делить «углом», подобно тому, как делят числа. Сравните, например, деление чисел 7488 и 234 и деление многочленов $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ и $x^2 - 2x + 3$:

$$\begin{array}{r|l} -\,7488 & 234 \\ \cline{2-2} 702 & 32 \\ \hline -\,468 & \\ 468 & \\ \hline 0 & \end{array}; \qquad \begin{array}{r|l} -\,x^3 - 3x^2 + 5x - 3 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} x^3 - 2x^2 + 3x & x - 1 \\ \hline -\,-x^2 + 2x - 3 & \\ -x^2 + 2x - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}.$$

Частное от деления многочленов не всегда является многочленом, как и частное от деления двух целых чисел не всегда число целое. То есть во множестве многочленов деление не всегда возможно.

Проверьте себя

1. Что означает «разделить выражение A на выражение B»?
2. Сформулируйте правило деления одночленов.
3. Как можно проверить, верно ли выполнено деление одного выражения на другое?
4. Чему равна нулевая степень числа, отличного от нуля?
5. Обозначает ли запись 0^0 какое-либо число?

Выполним вместе!

1. Разделите: а) $6a^2x^5$ на $2ax$; б) a^5c^3 на $-2ac^3$.

   ✓ Решение. а) $6a^2x^5 : 2ax = 3ax^4$;

   б) $a^5c^3 : (-2ac^3) = -\frac{1}{2}a^4 = -0{,}5a^4$.

   Ответ. а) $3ax^4$; б) $-0{,}5a^4$.

2. Проверьте, правильно ли выполнено деление:

$$-18x^5y^3 : (-6xy^2) = 3x^4y.$$

✔ Решение. $3x^4y \cdot (-6xy^2) = -18x^5y^3$.

Произведение частного и делителя тождественно равно делимому, следовательно, деление выполнено верно.

Ответ. Правильно.

3. Упростите выражение: $(a-2)^8 : (a-2)^6 + 4(a-1)$.

✔ Решение. $(a-2)^8 : (a-2)^6 + 4(a-1) =$

$$= (a-2)^{8-6} + 4a - 4 = (a-2)^2 + 4a - 4 =$$
$$= a^2 - 4a + 4 + 4a - 4 = a^2.$$

Ответ. a^2.

Выполните устно

1. Вычислите:

а) $325 : 10$; б) $327 : 3{,}27$; в) $\frac{3}{5} : \frac{5}{3}$.

2. Зная, что $a \cdot b = 12$, вычислите:

а) $a : 12$; б) $b : 12$; в) $12 : ab$.

Найдите частное (3—4).

3. а) $3^{12} : 3^7$; б) $(-8)^6 : (-8)^5$; в) $10^{10} : 10^{10}$;
г) $(-3)^5 : (-3)^3$; д) $7^5 : 7^0$; е) $50^3 : 50$.

4. а) $a^{18} : a^7$; б) $x^6 : x$; в) $m^9 : m^9$;
г) $n^{11} : n^{10}$; д) $p^{30} : p^{10}$; е) $c^{14} : c^7$.

5. Укажите, какое частное нужно вписать в каждую пустую клетку таблицы.

Делимое	Делитель				
	3	$3a$	$-2a$	$2a^2$	$-6a^4$
$6a^5$					
$-9a^4$					

6. Выполните деление:

а) $(x-5)^3 : (x-5)$; б) $(2x+y)^4 : (2x+y)$;
в) $(m+n)^5 : (m+n)^2$; г) $(1-3x)^4 : (1-3x)^4$.

Уровень A

Вычислите (7—8).

7. а) $2^8 : 2^4$; б) $0{,}4^3 : 0{,}4$; в) $3^{10} : 9$; г) $3{,}75^8 : 3{,}75^7$;

д) $\left(-\frac{2}{3}\right)^6 : \left(-\frac{2}{3}\right)^4$; е) $\left(1\frac{1}{2}\right)^5 : \left(1\frac{1}{2}\right)^4$; ё) $\left(\frac{3}{5}\right)^7 : \frac{81}{625}$.

8. а) $0{,}6^9 : 0{,}6^6$; б) $(-0{,}2)^{10} : (-0{,}2)^7$; в) $\left(-\frac{2}{5}\right)^8 : \left(-\frac{2}{5}\right)^5$;

г) $\left(1\frac{1}{3}\right)^5 : \left(1\frac{1}{3}\right)^4$; д) $3{,}3^{11} : 3{,}3^9$; е) $(-8\ 75)^7 : (-8\ 75)^6$.

9. Найдите значение выражения:

а) $5^4 : 5^2 - 2^5$; б) $(-2)^5 : (-2)^2 + 2^3$; в) $1 + 3^7 : 3^5$;

г) $100 + 19^3 : 19^3$; д) $2^3 \cdot 2 - 3^2 : 3$; е) $0^4 : 4^0 - 44^0$.

Найдите частное (10—12).

10. а) $x^8 : x^3$; б) $m^{10} : m^4$; в) $n^5 : n$;

г) $p^{12} : p$; д) $x^{10} : x^9$; е) $c^5 : c^5$.

11. а) $(3x)^{20} : (3x)^{16}$; б) $(2y)^{34} : (2y)^{29}$;

в) $(-5a)^{17} : (-5a)^{14}$; г) $(10m^2)^{23} : (10m^2)^{19}$.

12. а) $(x+4)^8 : (x+4)^6$; б) $(6-2a)^9 : (6-2a)^8$;

в) $(3b-2)^{12} : (2-3b)^3$; г) $(x-y)^{10} : (y-x)^5$.

Разделите (13—14).

13. а) $18a^4x$ на $9a$; б) $-9a^2cx^4$ на $-3ax^2$;

в) $20x^4y^3z^2$ на $4x^2y$; г) $-15a^5b^2c$ на $-5a^3c$.

14. а) $12x^4y^3$ на $3xy^2$; б) $16x^2y^2$ на $8x^2y$;

в) $9a^3b^2$ на $-3a^2b$; г) $-18m^6n^3$ на $3mn^2$.

15. Выполните деление:

а) $3a^5 : a^2$; б) $6m^8 : 3m^3$; в) $2a^{10} : 2a$;

г) $\frac{2}{3}a^2z^3 : \frac{1}{3}az^3$; д) $0{,}8x^2yz : 0{,}2xy$; е) $-2\frac{1}{5}abcx : 2{,}2ax$.

Вычислите значение выражения (16—17).

16. а) $(3^5-7)^0$; б) 17^0+15; в) $(8^0-2)\cdot(2{,}5^7-3)^0$;
г) $9^{10}:9^8\cdot(3^2-10)^0$; д) $6^4:6^3-(5:125)^0$.

17. а) 16^0+4; б) $(128-8^2)^0$;
в) $(7^0-12)\cdot(3+14^0)$; г) $(2^6-14)^0+(5^3-13\cdot2)^3$.

18. Найдите отношение чисел 27^6 и $2{,}7^6$.

19. Разгадайте ребус, укажите фамилию отца алгебры (рис. 1).

Рис. 1

Найдите значение выражения (20—21).

20. а) $-36a^8:9a^5$, если $a=7$;
б) $x^9:0{,}5x^3$, если $x=\frac{1}{2}$;
в) $0{,}03x^{16}y^8:10x^{10}y^5$, если $x=2$, $y=10$.

21. а) $12m^5:6m^3$, если $m=-5$;
б) $x^4:2x^3$, если $x=0{,}8$;
в) $0{,}01a^3b^7:4a^2b^4$, если $a=1000$, $b=3$.

Уровень Б

22. Выполните действия:
а) $4^5:16+(7{,}6-11{,}6)^3$; б) $6^8:36-6^7:6^4$;
в) $\left(4-3\frac{1}{4}\right)^5:\left(\frac{3}{4}\right)^2$; г) $\left(\frac{7}{8}\right)^{12}:\left(2\frac{1}{8}-1\frac{1}{4}\right)^{10}$;
д) $\left(\frac{1}{2}\right)^6:0{,}5^4+\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; е) $0{,}25^3:\left(\frac{1}{2}\right)^2+15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

23. На какой одночлен нужно умножить одночлен $3ax^3$, чтобы получить:
а) $6a^2x^5$; б) $12a^5x^7$; в) $-a^6x^3$?

Выполните деление одночленов (24—25).

24. а) $a^3x^5:a^2x^4$; б) $n^7x^3:n^5x^2$; в) $x^6m:x^5m$;
г) $ab^2c^3:abc$; д) $6ac^3:2ac^2$; е) $10ax^7:5ax^5$;
ё) $24c^5x^5:8c^4x$; ж) $20m^2x^7:4mx^5$.

25. а) $-2,5a^2x^3 : 0,5ax$; б) $-3,2c^5x^4 : 0,4cx^4$;
в) $6a^3xz^2 : (-3az)$; г) $16n^5xy^4 : (-4nx)$;
д) $\frac{3}{5}abx^5 : \frac{1}{5}ax^4$; е) $\frac{3}{7}a^2x^3y^4 : \frac{1}{14}ax^3y$;
ё) $-\frac{6}{7}an^2x^3 : \frac{2}{7}n^2x^2$; ж) $-\frac{4}{5}a^7x^6 : \left(-\frac{2}{15}a^6x\right)$.

26. Выполните деление:
а) $7(x-7)^5 : (x-7)^4$; б) $(3+2,5x)^{10} : (3+2,5x)^9$;
в) $ac(a-2c)^7 : (a-2c)^5$; г) $(1+2ax^2)^{15} : (2ax^2+1)^{13}$;
д) $2,5a^2(x+2)^4 : (x+2)^3$; е) $2a^8(2a+3)^8 : (2a+3)^6$.

27. Упростите выражение:
а) $(4-x)^5 : (4-x)^3 + 8(x-2)$;
б) $4a(a+3) - (2a+3)^{10} : (2a+3)^8$;
в) $(x+1)^7 : (x+1)^4 - 3x(x+1)$;
г) $6a(2-a) - (a-2)^{11} : (a-2)^8$.

28. Решите уравнение:
а) $x^8 : x^5 = -1$; б) $4x^5 : 2x^4 = 6$;
в) $(z-3)^7 : (z-3)^6 = 5$; г) $(x-2)^5 : (x-2)^2 = -1$.

29. Замените «звёздочку» одночленом таким образом, чтобы образовалось верное равенство:
а) $* : (-5x^8) = 4x^2$; б) $* : 3n^5 = 12n^5$;
в) $0,6a^4 : * = 0,2$; г) $-x^{11} : * = 5x^3$;
д) $* : \frac{1}{2}m^2n^6 = -8n$; е) $\frac{3}{4}x^{12}y^3 : * = \frac{1}{2}xy^2$.

30. Найдите значение выражения:
а) $\frac{1}{3}m^3n^2p^2 : \left(-\frac{2}{3}m^2n^2p^2\right)$, если $m = 4$, $n = 14$, $p = 114$;
б) $\left(-1\frac{1}{2}a^4b^3c^2\right) : \left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right)$, если $a = \frac{1}{10}$, $b = 10$, $c = 7$;

в) $(-4{,}5x^5y^5z^5):(-1{,}5x^5y^4z)$, если $y=0{,}5$, $z=2$; $x=9$;

г) $(-1{,}7p^2q^2r^3):28{,}9p^2qr$, если $p=28{,}9$, $q=1{,}7$, $r=-1$.

31. Представьте в виде степени частное от деления:

а) $a^{m+3}:a^m$; б) $b^{n+2}:b^{n-2}$; в) $x^{2m+5}:x^{2m}$;

г) $y^{3n+1}:y^{n+1}$; д) $m^{5k}:m^{3k+1}$; е) $n^{6k-2}:n^{2(k+1)}$.

32. Выполните деление:

а) $16x^{n+2}y^{n+3}:8x^{n+1}y^{3-n}$; б) $36x^{1-n}y^{2n}:3x^{1-2n}y^n$;

в) $-2ab^{m+1}c^m:(-5a^{1-m}b)$;

г) $2{,}7a^mb^{m-1}c^{m-2}:0{,}3b^{m-2}c^{m-3}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

33. Выполните действия:

а) $7x^2-2x+(5+11x-6x^2)$; б) $8ab+7b-(4ab+7b-3)$;

в) $2a^3(4a^2+3a)$; г) $(x-1)(x^2-2x+2)$;

д) $(x-2)(x+2)$; е) $(3a-b)(3a+b)(9a^2+b^2)$.

Представьте в виде многочлена выражение (34—35).

34. а) $7x^2-2x(3x-y)$; б) $(a+2)(a-5)+3a$;

в) $3x(x-6)+(2x^2+18x-4)$; г) $(a-2)(a+3)+2a(1-a)$.

35. а) $(x-y)(x+y)-x(x-3)$; б) $(b+1)^2+3b(2b-1)$;

в) $y(y+2x)-(x+y)^2$; г) $(b+4)^2-(b-3)(b+3)$.

36. Разложите на множители выражение:

а) x^2-16; б) x^2-9y^4; в) x^2-6x+9;

г) a^3-4a; д) $3a^2-6ab+3b^2$; е) $2x+2y-ax-ay$.

Решите уравнения (37—39).

37. а) $3{,}5-3x=x-4{,}5$; б) $3x-(x+2)=5$;

в) $5-3(x+1{,}5)=2(x+3)$; г) $9x-3(x+1{,}5)=4x+0{,}5$.

38. а) $x+\frac{2}{3}x=-\frac{1}{3}$; б) $x:\frac{1}{2}=\frac{4}{5}$;

в) $\frac{2}{5}x-\frac{3}{8}x=\frac{7}{20}$; г) $5:x=\frac{10}{11}$.

39. а) $3x - 1\frac{7}{16}x = \frac{5}{8}$; б) $x : \frac{2}{3} = \frac{1}{3} : \frac{18}{19}$;

в) $3\frac{4}{9}x + \frac{5}{12}x = 1\frac{7}{18}$; г) $\frac{2}{7} : x = \frac{5}{14}$.

Решите систему уравнений (40—41).

40. а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 0, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$

41. а) $\begin{cases} u - 2v = 1, \\ u + 2v = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2s + t = 7, \\ s - 2t = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} m = n, \\ 4m = n + 6. \end{cases}$

42. Составьте задачу, математическая модель которой представлена на рисунке 2. Решите её:
а) с помощью системы двух уравнений;
б) с помощью одного уравнения;
в) арифметическим способом.

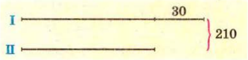


Рис. 2

43. Найдите два числа, если их сумма равна 71, а разность составляет 31.

44. Половина одного числа на 4 больше трети второго, а половина второго — на 18 больше четверти первого. Найдите эти числа.

45. 20 % первого числа на 15 меньше, чем 30 % второго, а 40 % первого — на 2 больше, чем 20 % второго. Найдите эти числа.

46. Разность двух чисел равна 10, а разность их квадратов составляет 240. Найдите эти числа.

§2. ДЕЛЕНИЕ И ДРОБИ

Деление двух целых выражений не всегда можно выполнить без остатка. Например, частные $a^3 : a^5$, $4xy^2 : 2yz$ нельзя записать в виде целых выражений. Деление одночленов нельзя выполнить без остатка, если делитель содержит переменную, которой нет в делимом, либо если показатель степени любой переменной в делителе больше показателя степени этой же переменной в делимом.

Если частное от деления одного выражения на другое не является целым выражением, то его записывают в виде дроби. Например:

$$2 : 3 = \frac{2}{3},\ a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5},\ 2ax : 3bx^2 = \frac{2ax}{3bx^2},$$

$$ax : (a + x) = \frac{ax}{a+x}.$$

Дробью называют частное от деления двух выражений, записанное с помощью черты дроби.

Какими бы не были выражения A и B, их частное $\frac{A}{B}$ — дробь. Выражения A и B — члены этой дроби, A — ***числитель***, B — ***знаменатель***.

Подобно другим выражениям дроби бывают числовые и содержащие переменные.

Например, дроби $\frac{5}{7}$, $\frac{-3}{0{,}4}$, $\frac{2^2+3^2}{4^2+5^2}$ — числовые выражения, а $\frac{ab}{x}$, $\frac{4m}{m+1}$, $\frac{a-2b}{a+b}$ — выражения, содержащие переменные.

Обыкновенная дробь — отдельный вид дроби. Это дробь, члены которой — натуральные числа. Если члены дроби — многочлены, её называют ***алгебраической дробью***.

Дроби, содержащие переменные, имеют смысл не при всех значениях переменных. Например, если $a = 5$, то

$$\frac{2a+3}{a-5} = \frac{2\cdot5+3}{5-5} = \frac{13}{0}.$$

Запись $\frac{13}{0}$ — не число, поскольку на 0 делить нельзя. Следовательно, дробь $\frac{2a+3}{a-5}$ при $a = 5$ не имеет смысла. При всех других значениях a она имеет смысл. Говорят, что для данной дроби ***допустимы*** все значения переменной a, кроме $a = 5$.

> **Для переменных, входящих в знаменатель дроби, допустимы только те значения, которые не превращают этот знаменатель в нуль.**

Рассмотрим две дроби:

$$\frac{6}{a} \text{ и } \frac{6(a-3)}{a(a-3)}.$$

Составим таблицу их значений для таких a: −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

a	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{6}{a}$	−1,5	−2	−3	−6		6	3	2	1,5	1,2	1	$\frac{6}{7}$
$\frac{6(a-3)}{a(a-3)}$	−1,5	−2	−3	−6		6	3		1,5	1,2	1	$\frac{6}{7}$

Как видно из таблицы, при указанных значениях a, равных −4, −3, −2, −1, 1, 2, 4, 5, 6, 7, обе дроби имеют равные значения. Равны они и при других значениях переменной a, кроме 0 и 3. Значение $a = 0$ недопустимо для обеих рассматриваемых дробей, а значение $a = 3$ – для второй дроби. При всех допустимых значениях переменной a все соответствующие значения этих дробей равны.

> **Два выражения, соответствующие значения которых равны при всех допустимых значениях переменных, называются *тождественно равными*, или *тождественными*.**

Это определение отличается от аналогичного определения для целых выражений только словом «допустимых». Говоря только о целых выражениях, это слово ранее мы исключали, поскольку для них все значения переменных допустимы.

Два тождественных выражения, соединённых знаком равенства, образуют *тождество.* Замена одного выражения другим, тождественным ему, называется *тождественным преобразованием* данного выражения.

Хотите знать ещё больше?

Соотношение дробей разных видов можно проиллюстрировать следующей диаграммой (рис. 3). Здесь каждое более узкое понятие является частью более широкого. Обыкновенные дроби – это составляющая числовых дробей, которые, в свою очередь, являются частью алгебраических дробей, и т. д.

Примеры обыкновенных дробей:

$$\frac{3}{7},\ \frac{11}{35},\ \frac{1}{149};$$

числовых:

$$\frac{0{,}5}{2{,}3},\ \frac{-\frac{3}{4}}{0{,}25},\ \frac{3{,}7-\frac{1}{2}}{2^2+7};$$

Рис. 3

алгебраических:

$$\frac{a}{5},\ \frac{1}{n},\ \frac{x^2-2}{2x},\ \frac{a^2-3ac+5c^2}{2ac}.$$

Общее понятие дроби довольно широкое. Кроме алгебраических бывают неалгебраические дроби, вам ещё неизвестные, например,

$$\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{x}},\ \frac{\cos x}{\sin x},\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^2},\ \frac{1+\ln x}{2\ln x}.$$

Проверьте себя

1. Что такое дробь?
2. Как называются члены дроби?
3. Какие дроби называются алгебраическими? Приведите примеры.
4. Что такое «допустимые значения переменных»? Приведите примеры.
5. Какие выражения называют тождественными?
6. Что такое тождество?

Выполним вместе!

1. Какие значения переменных допустимы для дроби:

а) $\frac{1}{x+7}$; б) $\frac{x-a}{x^2-a^2}$?

Решение. а) $x+7=0$, если $x=-7$. Это значение x недопустимо для данной дроби. Все другие значения допустимы;

б) $x^2-a^2=0$, если $(x-a)(x+a)=0$, отсюда либо $x=a$, либо $x=-a$.

Ответ. а) Для данной дроби допустимы все значения, кроме $x=-7$;

б) допустимы все значения, кроме $x=a$ и $x=-a$.

2. Докажите, что дробь $\frac{m}{m^2+1}$ имеет смысл при всех значениях m.

Доказательство. При каждом рациональном значении m число m^2 неотрицательное, а m^2+1 — положительное. Знаменатель данной дроби при каждом значении m не равен 0.

Следовательно, при каждом значении m данная дробь имеет смысл, что и требовалось доказать.

3. Тождественны ли выражения:

а) $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ и $2a^2b$; б) $\frac{(-a)^7}{a^6}$ и $\frac{(-a)^6}{a^5}$?

Решение. а) Представим дробь $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ в виде частного двух одночленов и выполним деление:

$$\frac{14a^3b^2}{7ab} = 14a^3b^2 : 7ab = 2a^2b.$$

При всех допустимых значениях переменных ($a \neq 0$, $b \neq 0$) первое выражение равно второму, поэтому их соответствующие значения равны. Следовательно, выражения $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ и $2a^2b$ тождественны.

б) Выполним действия в каждом выражении, используя свойства степеней:

$$\frac{(-a)^7}{a^6} = \frac{-a^7}{a^6} = -a; \quad \frac{(-a)^6}{a^5} = \frac{a^6}{a^5} = a.$$

При всех допустимых значениях переменных ($a \neq 0$) выражения принимают противоположные значения. Следовательно, они нетождественны.

Ответ. а) Выражения тождественны; б) выражения нетождественны.

Выполните устно

47. Какие из данных выражений — дроби:

а) $x-\frac{1}{x}$; б) $\frac{1}{2}-\frac{3}{x}$; в) $\frac{-\frac{2}{3}}{0,5}$; г) $\frac{1-a^2}{2a}$?

48. Вычислите:

а) $\frac{0,8}{2}$; б) $\frac{2}{0,5}$; в) $\frac{0,6}{-0,2}$; г) $\frac{2^5}{2^6}$.

49. Какие значения переменных допустимы для дробей:

а) $\frac{2x}{x+3}$; б) $\frac{1}{x(x-y)}$; в) $\frac{c-x}{1+c^2x^2}$; г) $\frac{a}{a^2-1}$?

50. Тождественны ли выражения:

а) $\frac{4x^4}{4x^2}$ и x^2; б) $\frac{8m^5}{5m^4}$ и $3m$; в) $\frac{7x^2}{7x^4}$ и x^2;

г) $\frac{a-b}{ab}$ и $\frac{a+b}{ab}$; д) $\frac{ab}{a+b}$ и $\frac{ba}{a+b}$; е) $1+\frac{a^2}{b}$ и $\frac{a+b}{b}$?

Уровень А

51. Запишите в виде дроби частное от деления:

а) 2 на 7; б) x на y; в) $3m$ на c;

г) $2x$ на $3y$; д) x^2 на $1+x$; е) $4ab$ на $(a+b)^2$.

52. Запишите дробь, в которой: а) числитель $2c$, знаменатель $3p$; б) числитель 1, знаменатель $x-y$; в) числитель z^2, знаменатель $2+z^2$.

53. Составьте дробь, в которой числитель равен $6m$, а знаменатель: а) на 5 меньше, чем числитель; б) равен числителю; в) в 2 раза меньше, чем числитель; г) равен квадрату числителя без единицы.

54. Вычислите:

а) $\frac{5^8}{5^5}$; б) $\frac{0{,}3^{10}}{0{,}3^{11}}$; в) $\frac{(-3)^{12}}{5\cdot(-3)^9}$; г) $\frac{-0{,}5^8}{(-0{,}5)^9}$; д) $\frac{3{,}4^0}{2^5-5^2}$.

55. Найдите значение выражения:

а) $\frac{8^9}{8^6\cdot 8^4}$; б) $\frac{7^2\cdot(-7)^5}{(-7)^6}$; в) $\frac{0{,}2^7}{0{,}2^8\cdot 10}$; г) $\frac{2{,}4^4}{8^4\cdot 0{,}3^4}$.

Определите, при каких значениях переменных не имеет смысла дробь (56—58).

56. а) $\frac{m}{n}$; б) $\frac{2}{a-3}$; в) $\frac{x+p}{x+4}$; г) $\frac{3c-8}{3c+8}$.

57. а) $\frac{3}{x-5}$; б) $\frac{a-6}{a+9}$; в) $\frac{3m}{2-m}$; г) $\frac{12z}{3z-15}$.

58. а) $\frac{3a}{a^2-16}$; б) $\frac{1}{x(x^2-9)}$; в) $\frac{m}{(m^2-1)(m^2-4)}$; г) $\frac{a^0}{a^2+1}$.

59. Приведите примеры дробей, знаменатели которых равны нулю, если:

а) $x=5$; б) $z=-1$; в) $t=0$; г) $x=0$ или $x=-3$.

60. Укажите значения x, допустимые для дроби:

а) $\frac{1}{x-5}$; б) $\frac{2}{5-x}$; в) $\frac{3x}{x^2-4}$; г) $\frac{x-3}{x^2+3}$.

61. Какие значения x допустимы для дроби:

а) $\frac{3}{x+5}$; б) $\frac{x}{x-1}$; в) $\frac{3x}{3+x}$;

г) $\frac{-5}{x}$; д) $\frac{2}{x^2+4}$; е) $\frac{1}{2x-5}$?

62. Найдите значение дроби:

а) $\frac{36}{3x-x^2}$, если $x=-3$; б) $\frac{a+4}{6a}$, если $a=\frac{1}{2}$;

в) $\frac{1}{c^2-9}$, если $c=-3$; г) $\frac{m}{|m|}$, если $m=-5$.

63. Заполните таблицу:

a	-2	-1	0	1	2	3	4	10
$\frac{2}{a-3}$								
$\frac{2a}{a^2-3a}$								

Какие значения a допустимы для дроби $\frac{2}{a-3}$? А для дроби $\frac{2a}{a^2-3a}$? Равны ли значения этих дробей, если $a = 100$?

64. Является ли тождеством равенство:

а) $\frac{a^5}{a^4}=a$; б) $\frac{m^5}{m^4}=m^3$; в) $\frac{6x^3}{3x}=m^3$?

65. Можно ли считать тождественными дроби:

а) $\frac{12}{x}$ и $\frac{12x^3}{x^2}$; б) $\frac{2a}{b}$ и $\frac{2a^2}{b^2}$;

в) $\frac{3x^2}{6x}$ и $\frac{6x^2}{12x}$; г) $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$?

Докажите тождество **(66—67)**.

66. а) $\frac{2a\cdot 3b}{a+b}=\frac{6ab}{a+b}$; б) $\frac{15a^3b^2}{5a^2b}=3ab$;

в) $\frac{2a+5a}{3a+4a}=\frac{3a+4a}{2a+5a}$; г) $\left(\frac{2ab^2}{6a}\right)^3=3\cdot\left(\frac{b^3}{9}\right)^2$.

67. а) $\frac{a^6}{a^3}=a^2\cdot a$; б) $\frac{(m-1)^7}{(m-1)^5}=\frac{(m-1)^5}{(m-1)^3}$;

в) $\frac{3a^5+2a^5}{a^5}=\frac{15a^5}{2a^5+a^5}$; г) $x+y=\frac{(x+y)^2}{x+y}$.

Уровень Б

Запишите в виде одночлена или дроби частное (**68—69**).

68. а) $-8x^4 : 2a$; б) $-6x^4 : 3x^5$; в) $-9x^7 : 9x^7$;

г) $32ac^2 : 8a^3c$; д) $2{,}5x^7 : 0{,}5x^3$; е) $1{,}2 : (-0{,}3xy^3)$.

69. а) $6ac : (-3a)$; б) $6xy : (-3xz)$; в) $4a^2 : (-2a^3)$;

г) $-3 : 21x$; д) $3{,}3a^5c^3 : 11a^3$; е) $1{,}8p^2 : 6q^2$.

70. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{x^2}{a^2-10}$, если $x = 2{,}5$;

б) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}$, если $x = -12$ и $y = 13$;

в) $\dfrac{2(a+b)}{a-b}$, если $a = 9$ и $b = -7$;

г) $\dfrac{x}{y(x-2)}$, если $x = 6$ и $y = \dfrac{1}{3}$.

71. Пользуясь калькулятором, найдите значение дроби $\dfrac{2x^2+3}{3x}$, если: а) $x = 2{,}75$; б) $x = 21{,}8$.

72. Составьте и заполните таблицу значений дробей $\dfrac{2a}{2+a}$, $\dfrac{a}{1+0{,}5a}$ и $\dfrac{2a^2}{2a+a^2}$ для целых значений a, $|a| \le 5$. Какой вывод можно сделать?

73. При любом ли значении переменной x значение дроби:

а) $\dfrac{9}{x^2+1}$ положительное; б) $\dfrac{3x^2}{4x^2-4x+1}$ положительное;

в) $\dfrac{-x^2}{x^2+15}$ отрицательное; г) $\dfrac{x^2+6}{2x-x^2-1}$ отрицательное?

74. Докажите, что при любом значении переменной x значение дроби $\frac{5}{x^2+3}$ положительное, а значение дроби $\frac{(-3)^2}{-3-x^2}$ отрицательное.

75. Докажите, что для данной дроби допустимы любые значения переменных:

а) $\frac{3x}{x^2+1}$; б) $\frac{5}{(x-1)^2+3}$; в) $\frac{2}{4x^2-4x+3}$.

76. При каких значениях переменной x не имеет смысла дробь:

а) $\frac{2}{x(1+x)}$; б) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; в) $\frac{x^3}{4x^2-100}$;

г) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$; д) $\frac{-1}{x^3-x^2}$; е) $\frac{3}{9x-x^3}$?

77. Какие значения x допустимы для дроби:

а) $\frac{1}{x(x-1)(x+2)}$; б) $\frac{3-x}{(2x-1)(x^2-16)}$; в) $\frac{(x-3)^2}{(2x+1)^2(x-7)^2}$;

г) $\frac{x+13}{(x^2+1)(2x^2+3)}$; д) $\frac{x^2-5x+100}{(x^2-4)(x^4-1)}$; е) $\frac{1}{x^2-4x+4}$?

78. Укажите допустимые значения переменной для дроби:

а) $\frac{2x}{x+7}$; б) $\frac{4}{1-2x}$; в) $\frac{5a}{a^2+3}$; г) $\frac{m+12}{m^2-16}$;

д) $\frac{3}{(y-1)(y+6)}$; е) $\frac{8-x}{x(x^2+1)}$; ё) $\frac{(c-2)^2}{24}$; ж) $\frac{7a-2}{a^2-5a}$.

79. Запишите дроби, не имеющие смысла, если:

а) $x = 3$; б) $y = -1$; в) $y = -4$ и $y = 0$; г) $a = 0$ и $a = 0{,}5$;

д) $m = 1$ и $m = -5$; е) $x = 0$ и $x = -2$ либо $x = 2$.

80. Решите уравнения относительно переменной x и укажите, при каких значениях a уравнение имеет корни:

а) $ax - 2 = 2x + 3$; б) $ax - a = 7x - 4$;

в) $4(a^2x - 3) = a + x$; г) $9x - 5 = a(ax - 2)$.

81. При каких значениях c значение дроби $\frac{c+2}{5}$ равно:

а) 1; б) 0; в) −1; г) 2; д) −100?

82. При каких значениях x значение дроби $\frac{3x-12}{4}$ равно:

а) -3; б) 0; в) 1; г) 3?

Решите уравнения (**83—86**):

83. а) $\frac{4x+1}{3}=3$; б) $\frac{2x-3}{7}=9$; в) $\frac{2x+3}{5}=7$.

84. а) $\frac{x+4}{3}=\frac{2x-1}{5}$; б) $\frac{x+1}{3}=\frac{2x+1}{9}$; в) $\frac{x-3}{4}=\frac{2-3x}{5}$;

г) $\frac{7+3x^2}{3}=\frac{2x^2+5x-2}{2}$; д) $\frac{4x^2-x+9}{6}=\frac{2x^2+1}{3}$.

85. а) $\frac{2x}{3}-\frac{3x}{5}=6$; б) $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}=14$; в) $\frac{5x}{3}=\frac{x}{5}-2$.

86. а) $\frac{x+2}{3}=\frac{x-2}{5}$; б) $\frac{2x-1}{5}=\frac{5-x}{3}$; в) $\frac{3x+1}{5}-\frac{2x}{3}=6$.

87. Можно ли считать тождественными дроби:

а) $\frac{a}{a-2}$ и $\frac{a^2}{a^2-4}$; б) $\frac{a}{a-2}$ и $\frac{a^2}{(a-2)^2}$?

88. Тождественны ли выражения:

а) $\frac{a}{a^2-b^2}$ и $\frac{b}{a^2-b^2}$; б) $\frac{x}{x^2-y^2}$ и $\frac{x}{(x-y)(x+y)}$;

в) $\frac{a^2+2ab^2+b^2}{(a+b)^2}$ и $\frac{(a-b)^2}{a^2-2ab+b^2}$; г) $\frac{x+1}{x-1}$ и $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy-y^2}$?

89*. Докажите тождество, разделив числитель на знаменатель:

а) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1}=x^2-5x+6$;

б) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-2}=x^2-4x+3$;

в) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3}=x^2-3x+2$.

90. Докажите тождество:

а) $\frac{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}{(x-3)(x+4)}=x^2+x-2$;

б) $\dfrac{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}{(x-1)(x+2)}=x^2+x-12.$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

91. Сократите дробь

а) $\dfrac{35}{56}$; б) $\dfrac{144}{441}$; в) $\dfrac{5120}{2520}$; г) $\dfrac{693}{825}$; д) $\dfrac{3366}{4488}$.

92. Заполните пустые клетки таблицы.

Делимое	Делитель				
	a^2	ac	$2a^3c$	$-2ac^3$	$-12c^2$
$6a^5c^4$					
$12a^3c^5$					
$-6a^4c^3x$					
$0{,}5a^3c^2$					

93. Задайте формулами функции, графики которых изображены на рисунках 4 и 5.

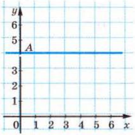


Рис. 4

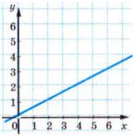
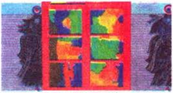


Рис. 5

§3. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ



Вспомните основное свойство обыкновенной дроби. Если числитель и знаменатель обыкновенной дроби умножить на одно и то же натуральное число, то получим равную ему дробь. Иными словами, при любых натуральных a, b и m

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}.$$

Это равенство — тождество. Докажем его для любых рациональных a, b и m, если $b \neq 0$ и $m \neq 0$.

Пусть $\frac{a}{b}=r$, где r — некоторое рациональное число. По определению действия деления, $a = br$. Умножив обе части этого равенства на отличное от нуля число m, получим равенство $am = bm \cdot r$, отсюда $\frac{am}{bm}=r$.

Следовательно, если $b \neq 0$ и $m \neq 0$, то $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$.

Доказанное тождество справедливо для любых дробей и является ***основным свойством дроби***.

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же выражение, то получим дробь, которая тождественно равна данной.

$$\frac{A}{B}=\frac{A \cdot M}{B \cdot M}; \quad \frac{A \cdot M}{B \cdot M}=\frac{A}{B}.$$

Здесь под «выражением» понимают выражение с переменными, которое тождественно не равно нулю, либо число, отличное от нуля.

Основное свойство дроби даёт возможность заменить дробь вида $\frac{A \cdot M}{B \cdot M}$ тождественно равной ему дробью $\frac{A}{B}$. Такое преобразование называют ***сокращением дроби***. Например,

$$\frac{cx^3}{ax^3}=\frac{c}{a}, \quad \frac{5a^2m^3x}{10m^4}=\frac{a^2x}{2m}.$$

Первую из этих дробей сократили на x^3, вторую — на $5m^3$.

Исходя из основного свойства дроби, приходим к следующим выводам.

1. Значение дроби не изменится, если знаки числителя и знаменателя изменить на противоположные.

2. Значение дроби не изменится, если изменить знаки одного из членов дроби и перед самой дробью.

$$\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B};\quad \frac{A}{B}=\frac{-A}{-B};\quad \frac{A}{B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}.$$

Если члены дроби — многочлены, то перед сокращением дроби их часто необходимо разложить на множители. Иногда перед сокращением дроби изменяют знак числителя или знаменателя, изменив соответственно и знак перед дробью.

Примеры.

$$\frac{2ax-4a}{x^2-4}=\frac{2a(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{2a}{x+2};$$

$$\frac{m^2-1}{1-m}=-\frac{(m-1)(m+1)}{m-1}=-\frac{m+1}{1}=-m-1.$$

Примечание. Последнее преобразование и равенство $\frac{m^2-1}{1-m}=-m-1$ справедливы только для $m \neq 1$. Чтобы не усложнять решение упражнений, такие условия можно не указывать. Каждую дробь будем рассматривать только при допустимых значениях её переменных.

Хотите знать ещё больше?

Сократить дробь можно делением числителя и знаменателя на их общий делитель, выраженный не только целым выражением, но и дробным. Например, можно записать

$$\frac{\left(\frac{m}{a}-5\right)x}{\left(\frac{m}{a}-5\right)a}=\frac{x}{a}.$$

Это равенство — тождество, верное при условии $a \neq 0$ и $m \neq 5a$.

Кроме того, имеются дроби, члены которых содержат выражения с модулями, например:

$$\frac{|a|\cdot c^2}{c},\ \frac{a^2}{|a|}.$$

Такие дроби не относятся к алгебраическим дробям. Подробнее с ними вы ознакомитесь в старших классах. А теперь рассмотрим наиболее простые случаи. Первую дробь можно сократить на c. Равенство

$$\frac{|a| \cdot c^2}{c} = |a| \cdot c$$

верно при любых значениях a и $c \neq 0$.

Равенство $\frac{a^2}{|a|} = a$ верно, если $a > 0$. Если $a < 0$, то $\frac{a^2}{|a|} = -a$.

Проверьте себя

1. Сформулируйте основное свойство дроби.
2. Что значит «сократить дробь»?
3. При каких a, b, m значение дроби $\frac{am}{bm}$ существует? А значение дроби $\frac{a}{b}$?
4. Можно ли умножить числитель и знаменатель дроби на 0?
5. Сформулируйте следствие из основного свойства дроби.

Выполним вместе!

1. Сократите дробь $\frac{a^2 - 4}{a^2 + 2a}$.

✔ Решение. $\frac{a^2-4}{a^2+2a} = \frac{(a-2)(a+2)}{a(a+2)} = \frac{a-2}{a}$.

2. Представьте дробь $\frac{3}{2x}$ со знаменателем: а) $4x^3$; б) $6x(x - 1)$.

✔ Решение. а) Чтобы получить знаменатель $4x^3$, нужно $2x$ умножить на $2x^2$. Следовательно, $\frac{3}{2x} = \frac{3 \cdot 2x^2}{2x \cdot 2x^2} = \frac{6x^2}{4x^3}$;

б) чтобы получить знаменатель $6x(x - 1)$, нужно $2x$ умножить на $3(x - 1)$. Следовательно,

$$\frac{3}{2x} = \frac{3 \cdot 3(x-1)}{2x \cdot 3(x-1)} = \frac{9(x-1)}{6x(x-1)}.$$

Ответ. а) $\frac{6x^2}{4x^3}$; б) $\frac{9(x-1)}{6x(x-1)}$.

3. Приведите к общему знаменателю дроби $\frac{3}{ax^2}$ и $\frac{2a}{cx^3}$.

✔ Решение. Общий знаменатель — acx^3.

$$\frac{3}{ax^2}=\frac{3\cdot cx}{ax^2\cdot cx}=\frac{3cx}{acx^3},\quad \frac{2a}{cx^3}=\frac{2a\cdot a}{cx^3\cdot a}=\frac{2a^2}{acx^3}.$$

Ответ. $\frac{3cx}{acx^3}$; $\frac{2a^2}{acx^3}$.

Выполните устно

94. Сократите дробь:

а) $\frac{8}{12}$; б) $\frac{21}{105}$; в) $\frac{160}{20}$; г) $\frac{-21}{21}$;

д) $\frac{-6}{54}$; е) $\frac{14}{-56}$; ё) $\frac{-40}{-48}$; ж) $\frac{0,9}{0,15}$.

95. Сократите дробь:

а) $\frac{a^3}{a^5}$ на a, a^2, a^3; б) $\frac{8x^5}{12x^4}$ на x, x^2, x^3, x^4, $4x$, $2x^2$, $4x^4$.

96. Оцените работу восьмиклассников (рис. 6).

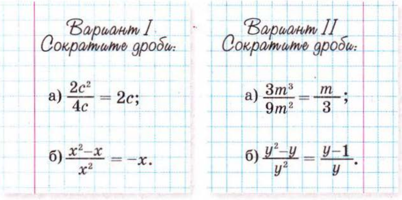


Рис. 6

97. На какие выражения можно сократить дробь $\frac{a^2c^4}{a^4c^2}$?

98. Приведите к общему знаменателю выражения:

а) $\frac{1}{a}$ и $\frac{2}{c}$; б) $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{3}{2x}$; в) $\frac{a}{xy}$ и $\frac{b}{yz}$.

Уровень A

Сократите дробь (99—107).

99. а) $\frac{4}{18}$; б) $\frac{120}{40}$; в) $\frac{15}{15}$; г) $\frac{3,6}{12}$.

100. а) $\frac{2a}{4b}$; б) $\frac{a^5}{a^7}$; в) $\frac{x}{x^4}$; г) $\frac{4a}{a}$.

101. а) $\frac{6a^2}{12a^3}$; б) $\frac{3c}{15c^4}$; в) $\frac{7b^3}{14b^3}$; г) $\frac{18}{9a^2x}$.

102. а) $\frac{-6}{12}$; б) $\frac{130}{-70}$; в) $\frac{-25}{-30}$; г) $\frac{0,5}{0,2}$.

103. а) $\frac{a^3}{-a^5}$; б) $\frac{-c^3}{c^5}$; в) $\frac{-x}{-xa}$; г) $\frac{-2a^2}{-a}$.

104. а) $\frac{12^{10}}{12^{12}}$; б) $\frac{35^5}{-35^4}$; в) $\frac{0,3^8}{0,3^{11}}$; г) $\frac{(-0,4)^4}{-0,4^4}$.

105. а) $\frac{x(a-2)}{x(b+2)}$; б) $\frac{mp(m-p)}{m^2p(m+p)}$; в) $\frac{27x^2(x+1)}{9x(x+1)}$.

106. а) $\frac{x(a+b)^2}{y(a+b)}$; б) $\frac{(a-x)^2c}{(a-x)^2m}$; в) $\frac{4x(x-y)}{7y(x-y)^2}$.

107. а) $\frac{2a(x+3)}{a^2(x+3)}$; б) $\frac{m^2(m-n)^2}{n^2(m-n)^2}$; в) $\frac{6a(2-x)}{3a^2(2-x)}$.

Сократите дробь, разложив, если необходимо, числитель и знаменатель дроби на множители (108—111).

108. а) $\frac{a(b-x)}{xb-x^2}$; б) $\frac{a(4a-3)}{4a^2-3a}$; в) $\frac{x^2(5x-1)}{5xy^2-y^2}$;

г) $\frac{xc-mc}{ax-am}$; д) $\frac{ax^2-x^3}{ax-x^2}$; е) $\frac{2x-x^4}{2y-x^3y}$.

109. а) $\frac{8a-8b}{16b}$; б) $\frac{xy}{x+xy}$; в) $\frac{m-n}{3m-3n}$;

г) $\frac{a+1}{a^2+a}$; д) $\frac{ax-ay}{bx-by}$; е) $\frac{6a-3b}{6b-12a}$.

110. а) $\dfrac{5-x}{(x-5)^2}$; б) $\dfrac{7a^3+a^4}{a^3+7a^2}$; в) $\dfrac{a^5-ma^2}{a^3b^2-mb^2}$.

111. а) $\dfrac{2c^2-4c}{2a-ac}$; б) $\dfrac{b-a}{(a-b)^2}$; в) $\dfrac{m^4-m}{1-m^3}$.

112. Выполните деление:

а) $24p^2x : 48px^2$; б) $-3ax : 12a^2x^3$;

в) $(a^2c+bc) : (xa^2+xb)$; г) $(c^2-n^2) : (n-c)$.

113. Представьте дробь $\dfrac{2}{a}$ со знаменателем: а) $3a^4$; б) $5a^2(a-3)$.

114. Приведите к общему знаменателю дроби:

а) $\dfrac{2}{x}$ и $\dfrac{1}{a}$; б) $\dfrac{a}{2m}$ и $\dfrac{b}{3m^2}$; в) $\dfrac{2}{c}$ и $\dfrac{1}{a-b}$;

г) $\dfrac{8}{x}$ и $\dfrac{7}{x(x-a)}$; д) $\dfrac{1}{x-a}$ и $\dfrac{1}{x+a}$; е) $\dfrac{1}{(a+b)^2}$ и $\dfrac{2a}{a-b}$.

Докажите тождество (115—118).

115. а) $\dfrac{5x^2y}{xy}=\dfrac{10xy}{2y}$; б) $\dfrac{6ab}{2b^2c}=\dfrac{3ac}{bc^2}$;

в) $\dfrac{4b(a+b)}{12b}=\dfrac{5a(a+b)}{15a}$; г) $\dfrac{2(x-y)}{xy-y^2}=\dfrac{4(x-y)}{2y(x-y)}$.

116. а) $\dfrac{a^2-1}{a-1}=a+1$; б) $\dfrac{a^2-1}{a+1}=a-1$;

в) $\dfrac{4a^2-x^2}{2a+x}=2a-x$; г) $\dfrac{4a^2-x^2}{2a-x}=2a+x$.

117. а) $\dfrac{(a+c)^2}{a+c}=a+c$; б) $\dfrac{(a+c)^3}{a+c}=(a+c)^2$;

в) $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=x+1$; г) $\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}=x-1$.

118. а) $\dfrac{x^3-c^3}{x^2+xc+c^2}=x-c$; б) $\dfrac{x^3+c^3}{x+c}=x^2-xc+c^2$.

119. Замените «звёздочку» одночленом таким образом, чтобы равенство стало тождеством:

а) $\dfrac{5x^3}{*} = \dfrac{x}{2}$; б) $\dfrac{3}{xy} = \dfrac{*}{2x^2y}$; в) $\dfrac{3}{7y^2} = \dfrac{3xy}{*}$;

г) $\dfrac{*}{10a^4x} = \dfrac{4x^3}{5a^3}$; д) $\dfrac{*}{16m^7} = \dfrac{3n}{4m}$; е) $\dfrac{4x^3}{5a^3} = \dfrac{8ax^4}{*}$.

120. Сократив дробь, ученик вытер на классной доске часть записей (рис. 7). Восстановите эти записи.

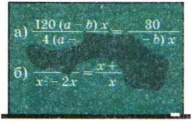


Рис. 7

121. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{6a^3c^2}{3a^2c^3}$, если $a = 8$, $c = 16$;

б) $\dfrac{x^2-9}{x+3}$, если $x = 3{,}25$.

Уровень Б

Сократите дробь (122—125).

122. а) $\dfrac{7a^2b}{21ab^3}$; б) $\dfrac{35xz^5}{7xz^5}$; в) $\dfrac{25ax^2}{75a^8x}$; г) $\dfrac{5^3cm}{5^0c^2m}$.

123. а) $\dfrac{x^2-a^2}{3x^3-3a^2x}$; б) $\dfrac{5x^2-5xy}{5(x-y)^2}$; в) $\dfrac{3x^2c-6xc^2}{x^2c-2xc^2}$.

124. а) $\dfrac{a^2-2ac+c^2}{(a-c)^3}$; б) $\dfrac{(x+z)^4}{x^2+2xz+z^2}$; в) $\dfrac{a^2-n^2}{a^2-2an+n^2}$.

125. а) $\dfrac{ax+ay-az}{cx+cy-cz}$; б) $\dfrac{a^3-1}{a^2+a+1}$; в) $\dfrac{x^2-xz+z^2}{x^3+z^3}$.

126. Выполните деление:

а) $8a^2c^3 : 4a^3c^2$; б) $5a^3x^5 : (-25a^2x^4)$;

в) $(nx^2+mx^2) : (m+n)$; г) $(a^2-36) : (36-a^2)$;

д) $(xa^3-x) : (a-1)$; е) $(nx^3+n^4) : (nx+n^2)$.

Докажите тождество (127—128).

127. а) $\dfrac{4ab}{(a+b)^2-(a-b)^2}=1$; б) $\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2+(a-b)^2}=\dfrac{1}{2}$;

в) $\dfrac{x+y}{x^2-y^2}=\dfrac{x-y}{x^2-2xy+y^2}$; г) $\dfrac{a^2+ab}{a+b}=\dfrac{a^3-a}{(a-1)(a+1)}$.

128. а) $\dfrac{3a^2+2a}{6+9a}=\dfrac{2(a^3+a)}{6+6a^2}$; б) $\dfrac{x^3-1}{(x+1)^2-x}=\dfrac{x-2x^2+x^3}{x^2-x}$;

в) $\dfrac{a^4-2a^2+1}{a^3-a^2-a+1}=a+1$; г) $\dfrac{a^6-2a^3+1}{(a^2+a+1)^2}=(a-1)^2$.

Упростите выражение (129—131).

129. а) $\dfrac{3x+2+3xy+2y}{2y-2+3xy-3x}$; б) $\dfrac{6a^2+15ab-8ac-20bc}{12a^2-9ab-16ac+12bc}$.

130. а) $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x^2+3x+2}$; б) $\dfrac{2a^2-18}{a^2+2a-15}$; в) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$.

131. а) $\dfrac{x(y+1)^2-y(x+1)^2}{x(y+1)-y(x+1)}$; б) $\dfrac{3p^3-81q^3}{2p^2q+6q^2p+18q^3}$.

132. Изменится ли значение дроби, если x и y одновременно умножить на 10:

а) $\dfrac{x}{y}$; б) $\dfrac{5x}{y}$; в) $\dfrac{x-y}{3x}$; г) $\dfrac{x-y}{x+y}$;

д) $\dfrac{x+y}{y^2}$; е) $\dfrac{10x}{x^2+y^2}$; ё) $\dfrac{x-5}{y+5}$; ж) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$?

133. Какая из данных дробей: а) наименьшая; б) наибольшая, если каждое из чисел a и c больше 1:

$\dfrac{a}{c-1}$; $\dfrac{a}{c+1}$; $\dfrac{2a}{2c+1}$; $\dfrac{2a}{2c-1}$; $\dfrac{3a}{3c+1}$; $\dfrac{3a}{3c-1}$?

134. Восстановите утраченные в знаменателях записи:

а) $\dfrac{15(x-y)^2x^2}{21(x-\dots}=\dfrac{5x}{\dots-y)}$; б) $\dfrac{4(x^2-y^2)}{24\dots}=\dfrac{x+y}{\dots x}$.

135. Представьте дробь, тождественную дроби $\dfrac{x+y}{3x}$, если её знаменатель равен:

а) $9x^2y$; б) $12xy^2$; в) $3x(x-y)$; г) $6x^2-6xy$.

Приведите к общему знаменателю дроби (136—138).

136. а) $\frac{3}{a-2}$ и $\frac{2}{(2-a)^2}$; б) $\frac{5}{3x-4}$ и $\frac{7}{4-3x}$; в) $\frac{4z}{3-z}$ и $\frac{1}{(z-3)^3}$.

137. а) $\frac{x+3}{x(x-5)}$ и $\frac{x}{x^2-25}$; б) $\frac{a+b}{a-b}$ и $\frac{a+2}{a^2-b^2}$.

138. а) $\frac{a+b}{a^2(a-b)}$ и $\frac{a+2}{a^3-ab^2}$; б) $\frac{a+2}{a^3-8}$ и $\frac{1}{a^2-2a}$.

Упростите выражение (139—141).

139. а) $\frac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}$; б) $\frac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}$.

140. а) $\frac{x^2-(a-b)x-ab}{x^3+bx^2+ax+ab}$; б) $\frac{(x+a)^2-(z+c)^2}{(x+z)^2-(a+c)^2}$.

141. а) $\frac{x^4+\left(2c^2-a^2\right)x^2+c^4}{x^4+2ax^3+a^2x^2-c^4}$; б) $\frac{a^3c-2a^2c^2+ac^3-ab^2c}{\left(a^2+c^2-b^2\right)^2-4a^2c^2}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

142. Напишите число без показателя степени:

а) $3 \cdot 10^5$; б) $2{,}7 \cdot 10^7$; в) $1{,}43 \cdot 10^6$.

143. Решите уравнение: а) $5(2x-8)+8(3x-2)=12$;

б) $5-2x(3x-2)=x(x+4)-7x(x-5)$.

144. Составьте выражение для вычисления площади фигуры, изображённой на рисунке 8 (*а*, *б*).

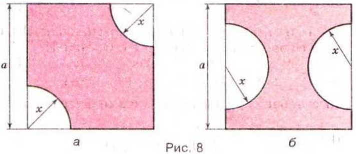


Рис. 8

145. Катер за 7 ч проходит по течению реки такой же путь, как и за 9 ч против течения. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки — 2,5 км/ч.

§4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Выражение, составленное из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления или возведения в степень, называется *рациональным*.

Примеры рациональных выражений:

$$3,\ x,\ a-x^2,\ m+\frac{x-1}{x^2+1},\ \left(\frac{a}{x}+1\right):\left(\frac{a+x}{2x}-1\right)^2.$$

Целые выражения — это рациональные выражения, не содержащие действия деления на переменную.

Дробные выражения — это рациональные выражения, содержащие действие деления на переменную.

Целые выражения и дроби — простейшие виды рациональных выражений. Другие виды этих выражений связаны между собой, как показано на схеме (рис. 9).

Рис. 9

Словом «другие» здесь обозначены дробные рациональные выражения, которые не являются дробями, например:

$$a-\frac{a}{1+\frac{1}{a}},\quad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{x+y}-\frac{1}{xy}.$$

Уравнение называется *рациональным*, если его левая и правая части — рациональные выражения.

Рациональное уравнение называется *дробным*, если его правая или левая части — выражения дробные.

Примеры дробных уравнений:

$$\frac{2x(x-2)}{x}=0;\quad \frac{1}{5+x}-\frac{2}{x}=3;\quad \frac{x}{2}+\frac{2}{x}=2x;\quad \frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x+2}.$$

Для того чтобы решать такие уравнения, необходимо знать, как выполняют действия с дробными выражениями. Поэтому в следующих параграфах будем рассматривать сложение, вычитание, умножение, деление и возведение дробей в степень.

Простейшие дробные уравнения, то есть уравнения, в которых левая часть — это дробь, а правая — нуль, решают пользуясь условием равенства дроби нулю.

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличный от нуля.

Например, чтобы решить уравнение $\frac{5x-3}{10x}=0$, нужно приравнять к нулю числитель и решить полученное уравнение:

$$5x-3=0,\ 5x=3,\ x=\frac{3}{5}.$$

Кроме того, проверить, не равен ли нулю при таком значении x знаменатель:

$$10\cdot\frac{3}{5}=6\neq 0.$$

Следовательно, $x=\frac{3}{5}$ — корень данного уравнения.

Обратите внимание! Условие равенства дроби нулю состоит из двух частей:

1) числитель равен нулю;

2) знаменатель отличный от нуля.

Каждая из этих частей условия является одинаково важной.

Хотите знать ещё больше?

В представленной выше схеме словом «дроби» называют только *рациональные дроби* (часть рациональных выражений). Но дроби бывают не только рациональные, например,

$$\frac{2-x}{2-|x|},\ \frac{\sin x}{\cos x},\ \frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}.$$

Это также дроби, но нерациональные. Поэтому, забегая немного вперёд, соотношение между разными видами выражений можно представить в виде диаграммы (рис. 10).

Рис. 10

Если выражение содержит переменные под знаком модуля, его не считают рациональным. При этом многие такие выражения можно заменить двумя, тремя либо бо́льшим количеством рациональных выражений. Например, рассмотрим дробь $\frac{x-|x|}{2x^2}$.

Если $x \geq 0$, то $|x| = x$; если $x < 0$, то $|x| = -x$. Поэтому

$$\frac{x-|x|}{2x^2} = \begin{cases} 0, \text{ если } x > 0, \\ \frac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ \text{не существует, если } x = 0. \end{cases}$$

Проверьте себя

1. Какие выражения называют рациональными?
2. Какие выражения называют целыми?
3. Какие выражения называют дробными?
4. Чем отличаются понятия «дробь» и «дробное выражение»?
5. Какие уравнения называют рациональными?
6. Какие уравнения называют дробными?
7. Сформулируйте условия равенства дроби нулю.

Выполним вместе!

1. При каких значениях переменной x значение дроби $\frac{5x-1}{4-3x}$ равно нулю?

✔ Решение. Значение дроби равно нулю лишь тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличный от нуля. Приравняем числитель к нулю: $5x-1=0$, $5x=1$, $x=0{,}2$.

Если $x=0{,}2$, то знаменатель $4-3x$ не равен нулю. Следовательно, если $x=0{,}2$, то дробь $\frac{5x-1}{4-3x}$ равна нулю.

Ответ. $x=0{,}2$.

2. Имеет ли корни уравнение $\frac{x-3}{x^2-9}=0$?

✔ Решение. Значение дроби равно нулю лишь тогда, когда нулю равен его числитель. Числитель дроби в данном уравнении равен нулю только тогда, когда $x=3$. Но при таком значении x знаменатель равен нулю. Но на нуль делить нельзя. Символ $\frac{0}{0}$ — не число.

Ответ. Уравнение корней не имеет.

Выполните устно

146. Какое из данных выражений: 1) целое; 2) дробное; 3) рациональное:

а) $\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}$; б) $\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$ в) $x^4:y^4$; г) $\frac{(x+y)^2}{2}$;

д) $\frac{2+3x}{3x+2}$; е) $5+5:x$; ё) $\frac{1-x^2}{x+1}$; ж) $a^3\cdot b^3$?

147. Найдите значение выражения $\frac{12}{m}$, если:

а) $m=1$; б) $m=2$; в) $m=3$; г) $m=4$;
д) $m=5$; е) $m=6$; ё) $m=7$; ж) $m=8$.

148. При каких значениях переменной не имеет смысла выражение:

а) $\frac{x+1}{4}+\frac{4}{x+1}$; б) $x+\frac{1}{x+1}$; в) $\frac{1}{x(x+1)}$?

149. При каких значениях переменной дробь равна нулю:

а) $\frac{x+5}{x-5}$; б) $\frac{5}{x-5}$; в) $\frac{x-5}{5}$; г) $\frac{x^2-5}{x+5}$?

Уровень A

150. Какие из данных выражений целые, а какие — дробные:

а) $\frac{7x+3}{x}$; б) $\frac{3x-7}{3}$; в) $\frac{1}{3}x+7$; г) $\frac{1}{3}:(x-7)$?

151. Найдите значение выражения:

а) $7{,}5-2{,}5^2$; б) $1\frac{1}{2}-2{,}5$; в) $\frac{3{,}5}{2{,}3+4{,}7}$; г) $(1+51)^0$.

152. Найдите значение выражения $\frac{10}{x}+\frac{x}{10}$, если:

а) $x=1$; б) $x=2$; в) $x=5$; г) $x=10$.

Укажите, при каких значениях x не имеет смысла выражение (153—154).

153. а) $\frac{9}{x}$; б) $\frac{3}{x^2}$; в) $-\frac{5}{x^3}$; г) $\frac{8}{-x}$.

154. а) $\frac{5}{x+3}$; б) $\frac{7}{x-2}$; в) $\frac{x}{x+1}$; г) $\frac{x+1}{x-3}$.

155. При каких значениях x равно нулю значение дроби:

а) $\frac{x-3}{8}$; б) $\frac{x+5}{14}$; в) $\frac{2x+3}{3x}$; г) $\frac{x(x-3)}{x^2+2x}$?

156. Приведите примеры дробей, которые равны нулю, если:

а) $x=3$; б) $y=-1$; в) $x=0{,}5$; г) $y=-1{,}5$.

157. Может ли равняться нулю значение дроби:

а) $\frac{5}{x+3}$; б) $\frac{(-1)^2}{(x-1)^2}$; в) $\frac{x-1}{x}$; г) $\frac{x+1}{x^2-1}$?

158. Является ли значение $x=15$ корнем уравнения:

а) $\frac{30}{x}=2$; б) $\frac{1}{x-8}=\frac{1}{7}$; в) $\frac{x+15}{x-15}=0$?

159. Какое из чисел -2; -1; 0; 1; 2 является корнем уравнения $\frac{2x-x^2}{4-x^2}=0$?

Решите уравнения (**160—161**).

160. а) $\frac{x+3}{3-x}=0$; б) $\frac{2x-10}{x+5}=0$; в) $\frac{x^2}{x+2}=0$; г) $\frac{x-1}{x^2+1}=0$.

161. а) $\frac{x(x+1)}{x^2-1}=0$; б) $\frac{x^2-4}{x^2+4}=0$; в) $\frac{x^2-25}{(x+5)^2}=0$; г) $\frac{2x^2-10x}{x(x+5)}=0$.

Уровень Б

162. Расположите выражния $4a^2b$; $\frac{a^2}{4b}$; $4+a^2b$; $4:a^2b$; $4a^2+|b|$; $(4+a^2b)$; $(4+a)^2:b$; $\frac{|b|}{4a}$; $\frac{a^2b}{4}$; $\frac{4+a^2}{b}$; $\left(\frac{a}{4}\right)^2+b$ в соответствующих колонках таблицы.

Рациональные выражения	
целые	дробные

163. Является ли дробью выражение:

а) $\frac{1}{2}x$; б) $\frac{x+5}{5}$; в) $5(x+5)$; г) $\frac{x+y}{0{,}1}+10$; д) $5\frac{2}{3}$?

Какое из этих выражений — дробное?

164. Найдите значение выражения $|x|+|y|$, если

а) $x=0{,}75$, $y=-7{,}25$; б) $x=1{,}331$, $y=-1{,}331$.

Является ли это выражение рациональным?

165. Найдите значение числового выражения:

а) $\frac{1{,}5}{4{,}5-1\frac{1}{2}}$; б) $\frac{15^2-5^2}{20}$; в) $\frac{144}{12^2}+\left(\frac{144}{12}\right)^2$.

166. Найдите значение выражения:

а) $x^2+2x+1-\frac{1}{x^2+2x+1}$, если: 1) $x=0$; 2) $x=1$; 3) $x=9$;

б) $4a^2-4a+1+\frac{1}{4a^2-4a+1}$, если: 1) $a=\frac{1}{2}$; 2) $a=5\frac{1}{2}$.

167. Найдите значение выражения, рассмотрев все возможные случаи:

а) $1+\frac{|a|}{a}$; б) $\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}$; в) $\frac{a|b|}{ab}$; г) $\frac{ab}{|ab|}$.

168. Скорость лодки составляет v км/ч, а скорость течения реки — 2 км/ч. За какое время лодка проходит 100 км: а) по течению; б) против течения?

169. Скорость катера — 50 км/ч, а скорость течения реки — v км/ч. За какое время лодка проходит 50 км: а) по течению реки; б) против течения?

170. Один повар приготовил 96 вареников за n мин, а второй — 105 вареников за m мин. Сколько вареников приготовили оба повара за 1 ч?

171. Смешали m г 10 %-го и n г 15 %-го растворов соли. Какова концентрация полученного раствора?

172. Может ли значение данной дроби быть отрицательным? А равным нулю?

а) $\frac{8}{2+c^2}$; б) $\frac{n^2+2}{(n-1)^2+2}$; в) $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^4+2}$.

Определите, при каких x равно нулю значение дроби (173—174).

173. а) $\frac{2x+3}{x^2+5}$; б) $\frac{x^2-4x}{x+3}$; в) $\frac{x^2-9}{x-3}$; г) $\frac{x}{x^2-3x}$.

174. а) $\frac{x+3}{6-2x}$; б) $\frac{2y-1}{y^2-1}$; в) $\frac{x(x-4)}{12+x}$; г) $\frac{12m}{m+m^2}$.

175. Приведите примеры дробей, равных нулю, если:

а) $x=0$; б) $m=-4$ и $m=4$; в) $y=0$ и $y=-2$;

г) $x=5$; д) $z=3$ и $z=-4$; е) $a=-\frac{1}{3}$ или $a=\frac{2}{3}$.

176. Является ли значение $x = 12$ корнем уравнения:

а) $\frac{x}{4}=3$; б) $\frac{3x-1}{5}=7$; в) $\frac{x+12}{x-12}=0$;

г) $\frac{x-2}{2-x}=1$; д) $\frac{x-4}{4}=\frac{x}{6}$; е) $\frac{x(x-9)}{4}=x-3$?

177. Докажите, что данное уравнение не имеет решений:

а) $\frac{5}{x-3}=0$; б) $\frac{z^2+10}{z-5}=0$; в) $\frac{x-7}{x^2-7x}=0$.

Решите уравнения (**178—180**).

178. а) $\frac{2x-3}{5x}=0$; б) $\frac{15-3x}{x+4}=0$; в) $\frac{0{,}5+2x}{x^2-1}=0$.

179. а) $\frac{3x}{x^2-1}=0$; б) $\frac{x^2-2x+1}{1-x^3}=0$; в) $\frac{x^2-1}{x^2+4}=0$.

180. а) $\frac{x^2+4}{x^2-1}=0$; б) $\frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}=0$; в) $\frac{4-4x+x^2}{4-x^2}=0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

181. Выполните действия:

а) $1\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$; б) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$; в) $7-\frac{9}{11}$; г) $\frac{5}{21}-1\frac{1}{35}$.

Приведите к общему знаменателю дроби (**182—184**):

182. а) $\frac{a}{4(a-b)}$ и $\frac{b}{20(a-b)}$; б) $\frac{x+z}{xyz}$ и $\frac{6y}{xz^2}$.

183. а) $\frac{x}{2(x-1)}$ и $\frac{2}{x(x-1)}$; б) $\frac{1}{x^2+x}$ и $\frac{1}{x^2+2x+1}$.

184. а) $\frac{2a}{a^2-b^2}$ и $\frac{b}{18a}$; б) $\frac{3}{x^2-a^2}$ и $\frac{x+1}{(x+a)^2}$.

185. Разложите на множители:

а) $6x^2-6y^2$; б) $5-5m^2$; в) ax^2-a^3;

г) $3x^4-12x^2$; д) $20a^2-45b^2$; е) $48x^2-75y^2$.

§5. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ

Для натуральных чисел a, b, c справедливо равенство

$$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}}.$$

Выполняется оно и для произвольных рациональных значений a, b, c, кроме $c = 0$. Докажем это.

Пусть a, b и $c \neq 0$ — произвольные рациональные числа. Тогда $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ — также рациональные числа. Если $\frac{a}{c}=r$ и $\frac{b}{c}=p$, то, по определению действия деления, $a = cr$ и $b = cp$. Сложив левые и правые части этих равенств, получим $a + b = c\,(r + p)$. По определению действия деления, из полученного равенства следует, что

$$r+p=\frac{a+b}{c}, \text{ то есть } \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Аналогично можно доказать и тождество

$$\boxed{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}}.$$

Из этих двух тождеств следуют правила сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

Чтобы найти разность дробей с одинаковыми знаменателями, необходимо из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого, а знаменатель оставить тот же.

На основании этих правил выполняют сложение и вычитание любых дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{A}{C}\pm\frac{B}{C}=\frac{A\pm B}{C}.$$

Примеры. $\dfrac{5ax}{3m}+\dfrac{2c}{3m}=\dfrac{\overset{a}{5x}+2c}{3m}$; $\quad \dfrac{a}{m+x}-\dfrac{m}{m+x}=\dfrac{a-m}{m+x}$.

Чтобы найти сумму или разность дробей с разными знаменателями, сначала их нужно привести к общему знаменателю, как при сложении и вычитании обыкновенных дробей.

Чтобы привести дроби к общему знаменателю, знаменатель каждой дроби нужно разложить на множители. Если знаменатели дробей не имеют общих множителей, то сложение и вычитание выполняют по формуле:

$$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot D}\pm\frac{C\cdot B}{D\cdot B}=\frac{A\cdot D\pm C\cdot B}{B\cdot D}.$$

Примеры.

$$\frac{1}{2a}+\frac{3a}{5x}=\frac{5x}{10ax}+\frac{6a^2}{10ax}=\frac{5x+6a^2}{10ax};$$

$$\frac{x}{x^2-4}-\frac{2}{3x+6}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}-\frac{2}{3(x+2)}=$$

$$=\frac{3x}{(x-2)(x+2)3}-\frac{2(x-2)}{3(x+2)(x-2)}=\frac{3x-2x+4}{3(x-2)(x+2)}=\frac{x+4}{3(x^2-4)}.$$

Иногда нужно найти сумму или разность дроби и целого выражения. Их можно складывать или вычитать, как дроби, записав целое выражение в виде дроби со знаменателем 1.

Пример.

$$\frac{2xy}{3c}+5c=\frac{2xy}{3c}+\frac{5c}{1}=\frac{2xy+15c^2}{3c}.$$

Аналогично упрощают выражения, состоящие из трёх или более дробей, соединённых знаками «плюс» или «минус». Например,

$$\frac{2c}{3x}+\frac{1}{a}-\frac{3a}{2x}=\frac{4ac}{6ax}+\frac{6x}{6ax}-\frac{9a^2}{6ax}=\frac{4ac+6x-9a^2}{6ax}.$$

Хотите знать ещё больше?

Если рассматривать каждое тождество только при его допустимых значениях переменных, то есть при условии, что левая и правая части имеют смысл, то мы сознательно упрощаем задачу. Доказав тождество, подтверждаем лишь то, что оно верно на всей области допустимых значений, но не указываем, какая это область.

Чтобы получить исчерпывающее решение такой задачи, необходимо не только убедиться, что тождество правильное для всей области допустимых значений, но и показать, какова эта область. Либо чётко указать, какие из действительных чисел не относятся к этой области. Например, показав, что

$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x}=\frac{y}{(x-y)x},$$

желательно указать, что доказанное равенство верно, если $x \neq y$ и $x \neq 0$.

В ответственных случаях, например в экзаменационных работах, такие уточнения целесообразны.

Проверьте себя

1. Сформулируйте правило сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.
2. Как складывать дроби с разными знаменателями?
3. Как найти разность дробей с разными знаменателями?
4. Как найти сумму или разность дроби и целого выражения?

Выполним вместе!

1. Найдите разность дробей $\frac{3-a^2}{a^2}$ и $\frac{3}{a^2}$.

Решение. $\frac{3-a^2}{a^2}-\frac{3}{a^2}=\frac{3-a^2-3}{a^2}=\frac{-a^2}{a^2}=-1$.

Ответ. -1.

2. Найдите сумму дробей $\frac{6}{a}$ и $\frac{3a}{a^2-c}$.

Решение. Общий знаменатель дробей $a(a^2-c)$. Чтобы привести данные дроби к общему знаменателю, надо умножить первую дробь на a^2-c, а вторую — на a.

$$\frac{6}{a}+\frac{3a}{a^2-c}=\frac{6a^2-6c+3a^2}{a(a^2-c)}=\frac{9a^2-6c}{a(a^2-c)}=\frac{3(3a^2-2c)}{a(a^2-c)}.$$

Ответ. $\frac{3(3a^2-2c)}{a(a^2-c)}$.

3. Выполните действия: $\frac{3a^2}{2a-b}-\frac{a^2-b^2}{b-2a}$.

Решение. Используем формулу

$$-\frac{A}{B}=\frac{A}{-B}.$$

$$\frac{3a^2}{2a-b}-\frac{a^2-b^2}{b-2a}=\frac{3a^2}{2a-b}+\frac{a^2-b^2}{2a-b}=\frac{3a^2+a^2-b^2}{2a-b}=$$

$$=\frac{4a^2-b^2}{2a-b}=\frac{(2a-b)(2a+b)}{2a-b}=2a+b.$$

Ответ. $2a+b$.

Выполните устно

186. Сложите дроби:

а) $\frac{2}{5}$ и $\frac{4}{5}$; б) $\frac{7}{13}$ и $\frac{6}{13}$; в) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{5}{4}$;

г) $\frac{a}{2x}$ и $\frac{3}{2x}$; д) $\frac{2c^2}{3ab}$ и $\frac{1-c^2}{3ab}$; е) $\frac{2x}{x+2}$, $\frac{6}{x+2}$ и $\frac{x}{x+2}$.

187. Найдите разность дробей:

а) $\frac{2c}{3ax}$ и $\frac{c}{3ax}$; б) $\frac{7x}{6ab}$ и $\frac{x}{6ab}$; в) $\frac{2a}{a-3}$ и $\frac{6}{a-3}$;

г) $\frac{4x+1}{3x-2}$ и $\frac{x-3}{3x-2}$; д) $\frac{a^2}{a-c}$ и $\frac{c^2}{a-c}$; е) $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$ и $\frac{2x}{(x-1)^2}$.

Представьте в виде дроби выражение (188—189).

188. а) $\frac{x}{3a}+\frac{y}{3a}$; б) $\frac{1}{-5x}+\frac{a}{-5x}$; в) $\frac{1}{4m}+\frac{3}{4m}+\frac{5}{4m}$;

г) $\frac{1}{9a}-\frac{c}{9a}$; д) $\frac{x+m}{2m}-\frac{x}{2m}$; е) $\frac{x+3}{0{,}5c}-\frac{9}{0{,}5c}$.

189. а) $\frac{a}{a+x}+\frac{2x}{a+x}-\frac{x}{a+x}$; б) $\frac{2c}{c-x}-\frac{c}{c-x}-\frac{x}{c-x}$;

в) $\frac{m+c}{2x}+\frac{m-c}{2x}$; г) $\frac{2x}{0{,}5a}-\frac{x-c}{0{,}5a}-\frac{c}{0{,}5a}$.

190. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x}-\frac{2}{2x}$; б) $\frac{a}{7m}+\frac{2a}{7m}+\frac{4a}{7m}$;

в) $\frac{3}{5ac}-\frac{2}{5ac}+\frac{4}{5ac}$; г) $\frac{5}{3am}-\frac{2{,}5}{3am}+\frac{0{,}5}{3am}$.

191. Какую дробь надо записать в рамку на карточке, чтобы в сумме с написанной дробью получить номер карточки (рис. 11)?

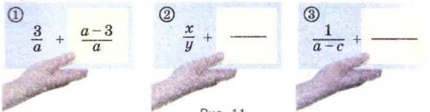


Рис. 11

Уровень A

Представьте в виде дроби или одночлена выражение (**192—196**).

192. а) $\frac{2a}{a-c}-\frac{a}{a-c}-\frac{c}{a-c}$; б) $\frac{3a}{a^2-1}-\frac{2a}{a^2-1}+\frac{1}{a^2-1}$;

в) $\frac{3x+y}{x+y+z}+\frac{z-2x}{x+y+z}$; г) $\frac{2a-b}{a+b-c}-\frac{a-2b+c}{a+b-c}$.

193. а) $\frac{1-a}{1-c^2}+\frac{a-3}{1-c^2}-\frac{c-3}{1-c^2}$; б) $\frac{a^2-c^3}{a-c}+\frac{c^3-a^3}{a-c}+\frac{a^3-a^2}{a-c}$.

194. а) $\frac{a+b-c}{3abc}+\frac{a-b+c}{3abc}+\frac{b-a+c}{3abc}$;

б) $\frac{x+y-z}{x+y+z}+\frac{x-y+z}{x+y+z}+\frac{-x+y+z}{x+y+z}$.

195. а) $\frac{2.}{3a}+\frac{4}{3a}-\frac{6-a^2}{3a}$; б) $\frac{2a+3}{5b}+\frac{2a-9}{5b}+\frac{a+1}{5b}$;

в) $\frac{x^2}{x+1}+\frac{2x-1}{x+1}+\frac{1-x}{x+1}$; г) $\frac{2(m+n)}{m-n}-\frac{m}{m-n}-\frac{m}{m-n}$.

196. а) $\frac{5x}{2y}-\frac{x+y}{2y}+\frac{2x+y}{2y}$; б) $\frac{2a^2}{a+b}+\frac{ab}{a+b}-\frac{a^2}{a+b}$;

в) $\frac{2a-5}{2a-3}+\frac{a-2}{2a-3}-\frac{a-4}{2a-3}$; г) $\frac{x^3}{x^2-4}-\frac{x^3-x}{x^2-4}-\frac{2}{x^2-4}$.

197. Докажите тождество:

а) $\frac{a}{a+c}+\frac{c}{a+c}=1$; б) $\frac{a}{a-c}-\frac{c}{a-c}=1$;

в) $\frac{x(1+y)}{x-y}-\frac{y(1+x)}{x-y}=1$; г) $\frac{a(b-1)}{a-b}-\frac{b(a-1)}{a-b}=-1$.

198. Упростите выражение:

а) $\frac{a^2}{a+3}-\frac{9}{a+3}$; б) $\frac{2}{m^2-4}+\frac{m}{m^2-4}$;

в) $\frac{5a-1}{a^2-b^2}-\frac{5b-1}{a^2-b^2}$; г) $\frac{a^2-30}{a-5}+\frac{5}{a-5}$.

199. Упростите левую часть уравнения и найдите его корни:

а) $\frac{x}{x+5}-\frac{3}{x+5}=0$; б) $\frac{2x+3}{5x}+\frac{3x+2}{5x}=0$;

в) $\frac{2x}{x+3}+\frac{6}{x+3}=0$; г) $\frac{1}{x^2-x}-\frac{x+1}{x^2-x}=0$.

200. Решите уравнения:

а) $\frac{8}{3x}+\frac{2x}{3x}=0$; б) $\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x-2}=0$;

в) $\frac{x-5}{x^2-25}-\frac{x}{x^2-25}=0$; г) $\frac{5x-1}{2x+5}+\frac{2x+15}{2x+5}=0$.

Приведите к общему знаменателю выражения (201—202).

201. а) $\frac{3}{2x}$ и $\frac{1}{3x}$; б) $\frac{a}{4c}$ и $\frac{c}{4a}$; в) $\frac{35}{9a^2}$ и $\frac{7}{12a}$;

г) $\frac{4}{a^3}$ и $\frac{7}{a^2b}$; д) $\frac{1}{x^2y}$ и $\frac{1}{y^2z}$; е) $\frac{2}{3ax^2}$ и $\frac{a}{6bx^2}$.

202. а) $\frac{1}{a^2-x^2}$ и $\frac{2}{a+x}$; б) $\frac{a}{a-c}$ и $\frac{c}{a^2-c^2}$; в) $\frac{a}{45b}$ и $\frac{b}{18a}$;

г) $\frac{2c}{c^3-cz^2}$ и $\frac{3z}{c^2+cz}$; д) $\frac{x}{a(x+a)^2}$ и $\frac{a}{x(x+a)}$; е) $\frac{3x}{56a^3}$ и $\frac{x^2}{63a}$.

Используя формулы $\frac{M}{A-B}=\frac{-M}{B-A}$ или $(A-B)^2=(B-A)^2$, сведите к общему знаменателю дроби (203—204).

203. а) $\frac{1}{a-c}$ и $\frac{3}{c-a}$; б) $\frac{x}{x-y}$ и $\frac{1-y}{y-x}$; в) $\frac{-5}{a^2-4}$ и $\frac{a}{4-a^2}$.

204. а) $\frac{4ax}{a+x}$ и $\frac{5x}{x^2-a^2}$; б) $\frac{3x}{x-1}$ и $\frac{1}{(1-x)^2}$;

в) $\frac{4}{35(x-2)}$ и $\frac{x}{14-7x}$; г) $\frac{1}{c-a}$, $\frac{2}{a-c}$ и $\frac{3}{(a-c)^2}$.

205. Сложите дроби:

а) $\frac{1}{x}$ и $\frac{3}{2x}$; б) $\frac{a}{c}$ и $\frac{3-a}{4c}$; в) $\frac{a+x}{2x}$ и $\frac{x-a}{3x}$;

г) $\frac{1}{a+b}$ и $\frac{3}{x(a+b)}$; д) $\frac{a-c}{c}$ и $\frac{-a^2}{c(a-c)}$; е) $\frac{1}{2a^2bx^3}$ и $\frac{5}{3ax^4}$.

206. Найдите разность дробей:

а) $\frac{4a}{ax^2}$ и $\frac{5}{ax}$; б) $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{a-c}$; в) $\frac{x^2-m}{m(x+m)}$ и $\frac{x}{m}$;

г) $\frac{3}{a-b}$ и $\frac{2}{a+b}$; д) $\frac{x^2}{(a+x)^2}$ и $\frac{x}{a+x}$; е) $\frac{x}{3a^2b^3c}$ и $\frac{2}{5abc^3}$.

207. Найдите сумму и разность дробей:

а) $\frac{1}{3cx}$ и $\frac{c-x}{3c^2x}$; б) $\frac{a^2}{(a-b)^2}$ и $\frac{a}{a-b}$; в) $\frac{3}{c(x-y)}$ и $\frac{2}{x^2-xy}$.

Выполните действия (**208—211**).

208. а) $\frac{1}{2x}+\frac{4}{x+2}$; б) $\frac{2}{3c}-\frac{1}{c-3}$; в) $\frac{2}{a-x}-\frac{1}{ax}$.

209. а) $\frac{6}{4x-5y}-\frac{3}{2x}$; б) $\frac{3}{4}-\frac{x+2}{4-3x}$; в) $\frac{7+2x}{5-3x}+\frac{2}{3}$.

210. а) $\frac{a+b}{c}+1$; б) $m+\frac{3c-m^2}{m-c}$; в) $5-\frac{3x^2}{a-x^2}$.

211. а) $a+\frac{1-a^2}{a}$; б) $2c-\frac{2c}{c-1}$; в) $x^2-\frac{x^3}{a+x}$.

212. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $\frac{5x-3}{4x+4}-\frac{4x-2}{3x+3}$; б) $\frac{3m-2}{8+4m}-\frac{2m-2}{6+3m}$.

Решите уравнение (**213—214**).

213. а) $\frac{5}{2x+1}-\frac{5}{3x-2}=0$; б) $\frac{3}{1+2x}+\frac{2}{1-x}=0$;

в) $\frac{3x-7}{x-5}+\frac{x+3}{5-x}=0$; г) $\frac{1}{1+x}-\frac{x}{1-x^2}=0$.

214. а) $\frac{3a-1}{3a^2}-\frac{2+a}{2a}=0;$ б) $\frac{a}{3a-3}-\frac{5}{2-2a}=0;$

в) $\frac{m}{(m+3)^2}+\frac{2}{m+3}=0;$ г) $\frac{1+m^2}{m-m^2}+\frac{m+5}{m-1}=0.$

Уровень Б

Представьте в виде дроби выражение (215—218).

215. а) $\frac{4x-5y+8}{18y}+\frac{7x+3y-5}{30y}+\frac{2x+5y+3}{45y};$

б) $\frac{2a+3b}{4c}-\frac{a+2b}{6c}+\frac{4a-b}{8c}-\frac{3a-4b}{12c}.$

216. а) $\frac{x-4}{2x}-\frac{5x-7}{10x}-\frac{3x+9}{4x}+\frac{2x+5}{5x};$

б) $\frac{2a-ab+3b}{9ab}-\frac{a-2ab}{ab}-\frac{4a+ab-5b}{6ab}.$

217. а) $\frac{x+1}{x-1}-1;$ б) $\frac{a}{3bc^2}+\frac{2b}{5ac^2}-c;$ в) $1-a+\frac{2a^2}{a+1}.$

218. а) $\frac{2}{3x+6}+\frac{x^2-x-2}{x^2-4}-1;$ б) $1+\frac{2m+1}{m^3-1}-\frac{m}{m-1}.$

Упростите выражение (219—228).

219. а) $\frac{9x^2+4y^2}{12x^2y-8xy^3}+\frac{3x}{2xy-3x^2};$ б) $\frac{2a+1}{6-3a}-\frac{a+3}{6a-12}+\frac{2a+1}{2a-4}.$

220. а) $\frac{6a-4b}{4ab-2b^2}+\frac{8a-3b}{8a^2-4ab};$ б) $\frac{x-1}{2x+2}-\frac{3x-4}{3x+3}+\frac{2x-1}{6x+6}.$

221. а) $\frac{5}{a-1}-\frac{8}{1+a}+\frac{3a+7}{a^2-1};$ б) $\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x-1}{x^2-x}.$

222. а) $\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x-1}-\frac{5}{x+2};$ б) $\frac{2}{(a+1)^3}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{2}{1-a}.$

223. а) $\frac{2x-3}{3x-3}-\frac{3x-1}{4x+4}-\frac{x+2}{x^2-1};$ б) $\frac{7}{a+b}+\frac{3a^2-2b^2}{a^2-b^2}-\frac{3}{1}-\frac{5}{a-b}.$

224. а) $\frac{2}{a}+\frac{3}{x-2a}-\frac{2a-3x}{4a^2-x^2}$; б) $\frac{1}{a-2}+\frac{3}{a+2}+\frac{2a}{(a+2)^2}$.

225. $\frac{2}{x+4}-\frac{x-3}{x^2-4x+16}-\frac{x^2-9x}{x^3+64}$.

226. $\frac{1}{2a-3x}-\frac{2a+3x}{4a^2+6ax+9x^2}-\frac{6ax}{8a^3-27x^3}$.

227. $\frac{3}{(x-a)(x-c)}+\frac{2}{(x-a)(c-a)}-\frac{2}{(c-x)(a-c)}$.

228. $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

229. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2a}{1-a^2}+\frac{a+1}{2a-2}-\frac{a-1}{3a+3}$, если $a=3$;

б) $\frac{x+2}{x}-\frac{x}{x-2}+\frac{x+2}{x^2-2x}$, если $x=\frac{1}{5}$;

в) $\frac{1}{x}+\frac{x+2y}{x^2-2xy}-\frac{4x}{x^2-4y^2}$, если $x=2$, $y=3$;

г) $\frac{x-3}{x^2+3x}-\frac{x+3}{x^2-3x}-\frac{4x}{x^2-9}$, если $x=7$.

230. Представьте дробь в виде суммы дробей:

а) $\frac{2x+9}{12x^2}$; б) $\frac{4a^2+5b^2}{10ab}$; в) $\frac{6a^2+3b^2+ab}{ab(2a^2+b^2)}$.

231. Представьте дробь в виде суммы целого и дробного выражений:

а) $\frac{10x^2-y^2}{5x^2}$; б) $\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; в) $\frac{x^3-xy+y^3}{x^2-xy+y^2}$.

232. Докажите тождество:

а) $\frac{m}{m+n}+\frac{2mn}{m^2-n^2}-\frac{n}{m-n}=1$;

б) $\frac{x^3}{x^2-4}-\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x+2}=x-1$.

233. **Для любознательных.** Пройдите лабиринт так, чтобы пересечь дроби, сумма которых равна 2. Нельзя проходить дважды один и тот же отрезок пути либо пересекать уже пройденную линию (рис. 12).

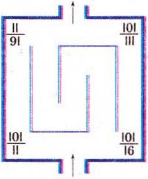


Рис. 12

234. Докажите, что значение выражения $\frac{7x^2+4}{3x^2+3}-\frac{5x^2+3}{2x^2+2}$ не зависит от значения x.

235. Докажите, что значение выражения не может быть отрицательным числом:

а) $\frac{2b^2}{a^2+2}-\frac{4b}{a^2+2}+\frac{2}{a^2+2}$; б) $\frac{4y^2}{x^2+1}+\frac{12y}{1+x^2}+\frac{9}{x^2+1}$;

в) $\frac{1}{(1-m)^2}+\frac{3m}{(m-1)^2}+\frac{m}{m-1}$; г) $\frac{10x}{(x-2)^2}+\frac{6(x+4)}{(2-x)^2}+\frac{4x}{x-2}$.

236. Докажите, что при каждом допустимом a значение выражения $\frac{a^3+3a}{a+2}-\frac{3a^2-14a+16}{a^2-4}+2a$ является положительным числом.

237. Докажите тождество:

а) $\frac{a^2-x^2}{a-x}=a+x$; б) $\frac{a^3-x^3}{a-x}=a^2+ax+x^2$;

в) $\frac{a^4-x^4}{a-x}=a^3+a^2x+ax^2+x^3$;

г) $\frac{a^5-x^5}{a-x}=a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4$.

238. Выполните действия:

а) $\frac{1}{x^2+3xy}+\frac{2}{9y^2-x^2}+\frac{1}{2x-6y}$;

б) $\frac{7-x^2}{x^3-1}+\frac{3x+5}{x^2+x+1}+\frac{2}{1-x}$;

в) $\frac{3-b}{b-2}-\frac{b+4}{2b^3-8b}+\frac{b+3}{b+2}-\frac{b}{b^2-4}$;

г) $\frac{3a+2}{9a^2-6a+4}-\frac{18a}{27a^3+8}-\frac{1}{3a+2}$.

239. Докажите тождество:

а) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{8}{1-x^8}$;

б) $\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1+2x}+\frac{2}{1+4x^2}+\frac{4}{1+16x^4}=\frac{8}{1-256x^8}$.

Решите уравнения (240—243).

240. а) $\frac{x-25}{5x-25}-\frac{3x+5}{5x-x^2}=0$; б) $\frac{6}{x^2-6x}+\frac{12+x}{6x-36}=0$;

в) $\frac{x^2-6x}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=0$; г) $\frac{x+3}{x^2-1}-\frac{x-1}{x^2+x}=0$.

241. а) $\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x+1}{1-x}=0$; б) $\frac{1}{2x-1}+\frac{6x}{1-8x^3}=0$;

в) $\frac{x^2}{(x-2)^2}-\frac{x+2}{2x-4}=0$; г) $\frac{x^2-8}{x^3+8}-\frac{1}{x+2}=0$.

242. а) $\frac{12x}{4x^2-9}+\frac{2x-3}{4x+6}+\frac{2x+3}{6x-9}=0$;

б) $\frac{1}{x^2+3x}+\frac{3}{9-x^2}+\frac{1}{2x^2-6x}=0$.

243. а) $\frac{1}{x-2}-\frac{x-2}{x^2+2x+4}-\frac{6x}{x^3-8}=0$;

б) $\frac{3x^2+7x+3}{x^3-1}-\frac{2x-1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x-1}=0$.

Докажите тождество (244—246).

244. $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(x-z)^2}{(x+y)^2-z^2}+\frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}=1$.

245. $\frac{x^2-yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2+xz}{(y+z)(y-x)}+\frac{z^2+xy}{(z-x)(z+y)}=0$.

246. $\frac{(y-b)(z-b)}{b(b-c)}+\frac{(y-c)(z-c)}{c(c-b)}+\frac{yz}{bc}=1$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

247. Напишите вместо букв числа, названия которых начинаются на указанные буквы, и такие, чтобы их суммы в каждой строке и каждом столбике были равны (рис. 13).

В	В	Д
Ч	Д	Д
Ч	Ш	Ш

Рис. 13

248. Вычислите:

а) $5^{30} \cdot 3^{30} - (15^{15} - 1)(15^{15} + 1)$;

б) $7^{24} \cdot 8^{24} + (1 - 56^{12})(1 + 56^{12})$.

Выполните действия (249—250).

249. а) $2 + \frac{8}{15} \cdot 1\frac{9}{16}$; б) $1\frac{5}{12} \cdot 2 + 4 \cdot 1\frac{1}{18} + 1\frac{1}{9} \cdot 1\frac{1}{4}$.

250. а) $2\frac{2}{11} \cdot \frac{7}{8} - 6 \cdot \frac{1}{5}$; б) $2\frac{1}{10} \cdot 4\frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{3}{8} - \frac{9}{20} \cdot 6$.

§6. УМНОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ

Правило умножения обыкновенных дробей вы уже знаете. Для любых натуральных чисел a, b, c и d справедливо равенство

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.}$$

Докажем, что это равенство — тождество, то есть оно выполняется для всех допустимых значений a, b, c, d ($b \neq 0$ и $d \neq 0$). Пусть $\frac{a}{b} = r$ и $\frac{c}{d} = p$. По определению действия деления, $a = br$ и $c = dp$, отсюда $ac = br \cdot dp = bd \cdot rp$. Поскольку $bd \neq 0$, то из равенства $ac = bd \cdot rp$, по определению действия деления, имеем:

$$rp = \frac{ac}{bd}, \text{ или } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Из доказанного тождества следует правило умножения дробей.

! **Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить их числители и отдельно — знаменатели, затем первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем дроби.**

На основании этого правила выполняют умножение любых дробей:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}.$$

Примеры.

$$\frac{2x}{3n}\cdot\frac{m}{5n}=\frac{2x\cdot m}{3n\cdot 5n}=\frac{2xm}{15n^2};$$

$$\frac{a}{a-b}\cdot\frac{2x}{a+b}=\frac{a\cdot 2x}{(a-b)(a+b)}=\frac{2ax}{a^2-b^2}.$$

Поскольку целое выражение можно считать дробью со знаменателем 1, то, по сформулированному правилу, можно перемножать дроби и целые выражения.

Примеры.

$$\frac{2a}{mx}\cdot 3m^2=\frac{2a}{mx}\cdot\frac{3m^2}{1}=\frac{2a\cdot 3m^2}{mx}=\frac{6am}{x};$$

$$(c^2-1)\cdot\frac{c}{(c+1)^2}=\frac{(c^2-1)c}{(c+1)^2}=\frac{(c-1)(c+1)c}{(c+1)^2}=\frac{(c-1)c}{c+1}.$$

Правило умножения дробей распространяется на произведение трёх множителей и более, например:

$$\frac{1}{a-b}\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{4a^2}=\frac{a(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)4a^2}=\frac{1}{4a}.$$

Возвести дробь в n-ную степень означает перемножить n таких дробей:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}=\frac{aa\cdot\ldots\cdot a}{bb\cdot\ldots\cdot b}=\frac{a^n}{b^n}.$$

Чтобы возвести дробь в степень, необходимо возвести в эту степень числитель и знаменатель, затем первый результат записать в числителе, а второй — в знаменателе дроби.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}.$$

Пример. Возведём дробь $\frac{ax^2}{2c}$ в пятую степень:

$$\left(\frac{ax^2}{2c}\right)^5=\frac{(ax^2)^5}{(2c)^5}=\frac{a^5x^{10}}{32c^5}.$$

Хотите знать ещё больше?

Вы уже знаете, что для умножения многочленов возможно обратное преобразование: разложение многочленов на множители. Существует ли преобразование, обратное умножению дробей?

Любую дробь можно представить как произведение двух, трёх или произвольного количества других дробей. Например,

$$\frac{a}{m}=\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{m},\quad \frac{a}{m}=\frac{a}{n}\cdot\frac{n}{c}\cdot\frac{c}{m}.$$

Преобразование, обратное умножению дробей, неоднозначно, неопределённо. Упростим задачу. *Представьте дробь* $\frac{a}{n}$ *в виде произведения двух дробей, одна из которых равна* $\frac{n}{ca}$. В данном случае ответ подобрать несложно:

$$\frac{a}{n}=\frac{n}{ca}\cdot\frac{ca^2}{n^2}.$$

Решение таких задач в более сложных случаях, как и операций, обратных возведению дробей в степень, рассмотрим позднее.

Проверьте себя

1. Сформулируйте правило умножения двух дробей.
2. Как умножить дробь на целое выражение? А целое выражение — на дробь?
3. Чему равно произведение нескольких дробей?
4. Как возвести дробь в степень?

Выполним вместе!

1. Найдите произведение дробей: $\frac{x^2-c^2}{2xc}$ и $\frac{16}{(x-c)^2}$.

Решение.

$$\frac{x^2-c^2}{2xc}\cdot\frac{16}{(x-c)^2}=\frac{(x-c)(x+c)\cdot 16}{2xc(x-c)^2}=\frac{8(x+c)}{xc(x-c)}.$$

Ответ. $\frac{8(x+c)}{xc(x-c)}$.

2. Найдите значение выражения $\left(\frac{x-5}{5-x}\right)^4$.

✔ Решение. $\left(\frac{x-5}{5-x}\right)^4=\left(-\frac{x-5}{x-5}\right)^4=(-1)^4=1.$

Ответ. При каждом значении x, кроме $x=5$, значение данного выражения равно 1.

3. Представьте в виде степени дроби выражение $\frac{a^7x^{14}}{(a-x)^{21}}$.

✔ Решение.

$$\frac{a^7\cdot x^{14}}{(a-x)^{21}}=\frac{a^7\cdot\left(x^2\right)^7}{\left((a-x)^3\right)^7}=\left(\frac{ax^2}{(a-x)^3}\right)^7.$$

Ответ. $\left(\frac{ax^2}{(a-x)^3}\right)^7$.

Выполните устно

251. Перемножьте дроби:

а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{7}$; б) $\frac{2,5}{2}$ и $\frac{0,4}{5a}$; в) $\frac{3}{-5}$ и $\frac{-3}{4}$;

г) $\frac{x}{a}$ и $\frac{m}{2c}$; д) $\frac{3}{ab}$ и $\frac{0,5}{ax^2}$; е) $\frac{-1}{ab}$ и $\frac{-1}{ac}$.

Выполните умножение (252—253).

252. а) $\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{t}$; б) $\frac{2a}{b}\cdot\frac{m}{n}$; в) $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x}$; г) $\frac{4a}{c}\cdot\frac{x}{3a}$.

253. а) $\frac{3}{2b}\cdot\frac{6b}{c}$; б) $\frac{x^3}{3}\cdot\frac{9}{x^4}$; в) $\frac{m^2}{10}\cdot\frac{5}{m}$; г) $\frac{8a^2}{15}\cdot\frac{25}{12a}$.

254. Возведите в квадрат и куб дробь:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{x}{ac}$; в) $\frac{0,1}{x^2}$; г) $\frac{-2a}{x^3}$.

Уровень А

Выполните умножение (255—260).

255. а) $\frac{2,7}{2x^2}\cdot\frac{20}{9x^3}$; б) $\frac{1}{4a^3}\cdot\frac{-2a}{7c}$; в) $\frac{2ab}{-5a^2}\cdot\frac{5c^2}{4a^2b^3}$;

г) $2m^2 \cdot \frac{n}{8m}$; д) $\frac{-b}{12ac} \cdot 4ac^2$; е) $\frac{5a^2}{3bc^2} \cdot (-6ac^3)$.

256. а) $\frac{15n^6}{-8m^2} \cdot \frac{4m^2}{5n}$; б) $\frac{3a^3}{-x^4} \cdot \frac{5x}{4a}$; в) $\frac{1}{2cx} \cdot \frac{-4c^2}{3x^2}$;

г) $2ax^2 \cdot \frac{3a}{x^3}$; д) $-\frac{7a^2m}{8xn} \cdot 4x^2n$; е) $\frac{-1}{2a^2c} \cdot (-3a^4)$.

257. а) $\frac{a+b}{x} \cdot \frac{3x^2}{2(a+b)}$; б) $\frac{1}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{4xy}$; в) $\frac{3}{x^2-y^2} \cdot \frac{(x+y)^2}{3}$;

г) $\frac{a^2-ab}{m^3} \cdot \frac{m^2}{a-b}$; д) $\frac{3ax}{ax+ac} \cdot \frac{cx+c^2}{9x}$; е) $\frac{6m}{a^2-a} \cdot \frac{2a-2}{9m^2}$.

258. а) $\frac{a-b}{3} \cdot \frac{15}{a^2-b^2}$; б) $\frac{a-x}{4m^2} \cdot \frac{16am}{(a-x)^2}$; в) $\frac{a^2-c^2}{2ac} \cdot \frac{8}{(a+c)^2}$;

г) $\frac{3a-3b}{4a+4c} \cdot \frac{(a+c)^2}{a^2-b^2}$; д) $\frac{3a+9}{(a+3)^2} \cdot \frac{2a-4}{a^2-4}$; е) $\frac{x^2-y^2}{12} \cdot \frac{0{,}6}{(x-y)^2}$.

259. а) $\frac{(x-y)^2}{(x+y)y} \cdot \frac{y^2}{x^2-y^2}$; б) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)b} \cdot \frac{b}{a^2-b^2}$;

в) $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^3-b^3}{a(a+b)}$; г) $\frac{x^2-xy}{y(x+y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$.

260. а) $\frac{x^2-c^2}{x^2-a^2} \cdot \frac{a+x}{c+x}$; б) $\frac{a^2-4}{a^2+4} \cdot \frac{a+2}{a-2}$;

в) $\frac{a^3-1}{a+1} \cdot \frac{a^3+1}{a-1}$; г) $\frac{x^2-1}{x^3-1} \cdot \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

261. Возведите в квадрат дробь:

а) $\frac{5a}{4x}$; б) $\frac{x}{a+x}$; в) $\frac{-m}{2ac^3}$; г) $\frac{3xz}{2a+z}$.

262. Возведите в квадрат, куб и четвёртую степень дробь $\frac{2a}{3cx^2}$.

Возведите в степень (263—264).

263. а) $\left(\frac{m}{3n}\right)^2$; б) $\left(\frac{a}{2dx}\right)^3$; в) $\left(-\frac{3c}{1-a^2}\right)^2$; г) $\left(\frac{-2x}{3abc}\right)^4$.

264. а) $\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2$; б) $\left(\frac{2a}{c-3}\right)^0$; в) $\left(\frac{2ab}{3c}\right)^2$; г) $\left(\frac{x^2z}{2a^3}\right)^3$.

265. Упростите выражение:

а) $\frac{x^2-9y^2}{a^2+8ab+16b^2}\cdot\frac{a^2-16b^2}{3y-x}$; б) $\frac{x^2+6x+9}{2x-4}\cdot\frac{x^2-4}{3x+9}$;

в) $\frac{2x-6}{x^2+2xy+y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2-3x}$; г) $\frac{x^2-10x+25}{6x+3y}\cdot\frac{2xy+y^2}{25-x^2}$.

266. Восстановите утраченные записи:

а) $\frac{(x+2)^2}{a^2\ldots}\cdot\frac{ax^2}{\ldots}=\frac{x(x+2)}{\ldots(x-2)}$; б) $\frac{x-y}{\ldots}\cdot\frac{2x^2y^2}{\ldots}=\frac{xy}{x+y}$.

Уровень Б

267. Выполните умножение дробей:

а) $\frac{4a^2-9}{3+2a}\cdot\frac{6a}{3-2a}$; б) $\frac{1-9x^4}{3x^2-1}\cdot\frac{x-1}{3x^2+1}$;

в) $\frac{a^3+x^3}{a-x}\cdot\frac{a^2-2ax+x^2}{a^2-ax+x^2}$; г) $\frac{a^6-1}{a^2+1}\cdot\frac{1+a^2}{a^4+1+a^2}$.

Перемножьте дроби (268—269).

268. а) $\frac{2x}{y^2}\cdot\frac{y^4}{6x^3}\cdot\frac{9x}{y}\cdot\left(-\frac{5y^3}{3x^2}\right)$; б) $\frac{3}{a}\cdot\frac{b^2}{4a}\cdot\frac{a^3}{9b^3}\cdot\frac{8a}{b}$.

269. а) $\frac{a+3}{10a^2}\cdot\frac{6-2a}{a}\cdot\frac{5a^3}{3-a}$; б) $\frac{0{,}2}{x}\cdot\frac{x^2-1}{2x}\cdot\frac{5x}{x+1}$;

в) $\frac{-6x^4}{35y^6z^3}\cdot\frac{5y^4z^7}{42x^6}\cdot\left(-\frac{49x^3y^2}{z^4}\right)$; г) $\frac{a^3b^2}{-20c^4}\cdot\frac{-5a^4c}{24b^5}\cdot\frac{16b^3c^3}{-30a^6}$.

270. Заполните таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{x+1}{x}\cdot\frac{2x}{x^2-1}$							
$\frac{x^2-4}{x}\cdot\frac{x^2-2x}{x+1}$							

271. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{ax^2-a}{x^2+ax+a^2}\cdot\dfrac{a^3-x^3}{4+4x}$, если $a=4$, $x=3$;

б) $\dfrac{y^2-16x^2}{4x^2+10x+25}\cdot\dfrac{8x^3-125}{4x-y}$, если $x=\dfrac{1}{4}$, $y=3$;

в) $\dfrac{x^2-xy+2y-4}{xy+2y}\cdot\dfrac{x^2+2x}{(x-y)^2-4}$, если $x=3$, $y=2$;

г) $\dfrac{ab-2b}{(b-3)^2-4a^2}\cdot\dfrac{4a^2+2ab+3b-9}{a^2-2a}$, если $a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$.

272. Выполнив преобразования дробных выражений, ученик вытер часть классной доски (рис. 14). Восстановите запись.

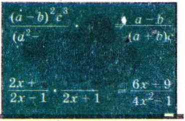


Рис. 14

Упростите выражение (273—274).

273. а) $\dfrac{x+3}{24x^2}\cdot\dfrac{9+x^2}{9-x^2}\cdot(-4x(x-3))$;

б) $\dfrac{4a^2b}{4a^2-b^2}\cdot\dfrac{6a^2-3ab}{12a^3b^3}\cdot\dfrac{2ab^2}{2a+b}$.

274. а) $\left(-8a^2(a+b)\right)\cdot\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{b-a}{(8a)^2}$;

б) $\dfrac{x^2-x}{2x+2}\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+4x}\cdot\dfrac{x^2-16}{3x-3}$.

Возведите в степень дробь (275—276).

275. а) $\left(-\dfrac{x^2z}{a^3n}\right)^2$; б) $\left(\dfrac{-3m^2n}{2ac^3}\right)^3$; в) $\left(\dfrac{xy^2z}{-2an^4}\right)^4$.

276. а) $\left(\dfrac{0{,}2a^2}{3x^2y^3}\right)^3$; б) $\left(\dfrac{a-c}{-2x^2z}\right)^3$; в) $\left(\dfrac{0{,}3ax^5}{2x-1}\right)^0$.

277. Представьте дробь в виде степени:

а) $\frac{a^{15}\cdot x^{30}}{(a+x)^{15}}$; б) $\frac{(x-y)^{10}\cdot(x+y)^{20}}{(2x+y)^{20}}$.

Упростите выражение (278—283).

278. а) $\left(-\frac{3a^2}{2a^2b^3}\right)^2\cdot 12a^4b^6$; б) $\left(\frac{x^2}{-2y^3}\right)^2\cdot\left(\frac{-2y^2}{x^3}\right)^3$.

279. а) $\left(-8x^6y^3\right)\cdot\left(\frac{3z^4}{2x^2y}\right)^3$; б) $\left(\frac{a^2}{3b^3}\right)^3\cdot\left(\frac{9b^4}{a^3}\right)^2$.

280. а) $\frac{ax^3}{5-5a}\cdot\frac{a^2-2a+1}{0{,}2ax^3}$; б) $\left(\frac{2a-1}{a-1}\right)^2\cdot\frac{a^3-1}{4a^2-4a+1}$.

281. а) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}\cdot\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$; б) $\frac{1}{a+c}\cdot\left(\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+1$.

282. а) $\frac{25+10a}{a-1}\cdot\left(\frac{3a+4}{4a^2-25}-\frac{1}{2a-5}\right)$; б) $\left(\frac{x+y}{x}-\frac{2x}{x-y}\right)\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}$.

283. а) $\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}\cdot\frac{x+x^2}{1-x}$; б) $\left(\frac{a^2+3a}{9a^2-1}-\frac{1}{3a+1}\right)\cdot\frac{9a^2+3a}{a^2+1}$.

284. Найдите значение выражения:

а) $\frac{2x+4}{(x-2)^2}\cdot\frac{x^2-4}{(x+2)^2}$, если $x=3{,}2$;

б) $\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\cdot\frac{3m^2}{2m^2+4m+2}$, если $m=4{,}357$.

Докажите тождество (285—286).

285. а) $\frac{1-a^2}{1+b}\cdot\frac{1-b^2}{1+a}\cdot\left(1+\frac{a}{1-a}\right)=1-b$;

б) $\left(1-\frac{3-a}{a+2}\right)\cdot\left(\frac{a^2+1}{2a-1}-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

286. а) $\frac{1}{5x}-\frac{1}{x+y}\cdot\left(\frac{x+y}{5x}-x-y\right)=1$;

б) $\frac{a^2-x^2}{a+1}\cdot\frac{a^2-1}{a+x}\cdot\left(a+\frac{ax}{a-x}\right)=a^3-a^2$.

287. Докажите, что квадрат суммы двух взаимно обратных дробей на 2 больше суммы их квадратов.

288. Докажите, что при любом натуральном n число

$\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(n^2+n\right)$ — натуральное.

Решите уравнение (289—291).

289. а) $\frac{2x^2}{x-3}\cdot\frac{x^2-9}{x}=0$; б) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{x}=0$.

290. а) $\frac{3x+2}{2x-3}\cdot\frac{5x-7}{7x-5}=0$; б) $\frac{(x-1)^2}{x^4-16}\cdot\frac{x-2}{x^2+1}=0$.

291. а) $\left(\frac{x^2}{2}+x+0{,}5\right)\cdot\frac{x^2-9}{(x-1)(x+3)}=0$;

б) $\frac{3x^2-12}{x-3}\cdot\left(3-2x+\frac{x^2}{3}\right)=0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

292. Просклоняйте слова: *дробь, частное, знаменатель.*

293. График какого уравнения с двумя переменными изображён на рисунке 15? Является ли эта прямая графиком функции?

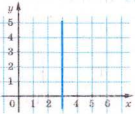


Рис. 15

294. Разложите на множители:

а) $6x^2-6y^2$; б) $5-5m^2$;

в) ax^2-a^3; г) $3x^4-12x^2$;

д) $20a^2-45b^2$; е) $48x^2-75y^2$.

295. Выполните действия:

а) $\left(1\frac{8}{13}:3\frac{3}{13}+\frac{5}{7}:\frac{8}{21}\right):\left(8\frac{1}{8}+3\frac{1}{2}\right)$;

б) $\left(28\frac{4}{5}:13\frac{5}{7}+6\frac{3}{5}:\frac{2}{3}\right):\left(1\frac{11}{16}:2\frac{1}{4}\right)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант I

1°. Вычислите: $3^5 : 81 + (5,3 - 7,3)^3$.

2•. Сократите дробь: а) $\frac{8x^2c}{12axc^3}$; б) $\frac{15a^2-60}{20a+40}$.

3•. Найдите сумму, разность и произведение дробей:

а) $\frac{ac^2}{12x}$ и $\frac{5ac^2}{12x}$; б) $\frac{x-1}{x(x-4)}$ и $\frac{1}{4-x}$.

Вариант II

1°. Вычислите: $2^5 : 8 + (3,5 - 5,5)^2$.

2•. Сократите дробь: а) $\frac{16ax^2}{24amx^3}$; б) $\frac{6n^2-24}{12n-24}$.

3•. Найдите сумму, разность и произведение дробей:

а) $\frac{n^2x}{12c}$ и $\frac{7n^2x}{12c}$; б) $\frac{a-1}{a(a-5)}$ и $\frac{1}{5-a}$.

Вариант III

1°. Вычислите: $4^5 : 16 + (7,5 - 5,5)^3$.

2•. Сократите дробь: а) $\frac{20cx^3}{24cnx^2}$; б) $\frac{12x^2-48}{10x+20}$.

3•. Найдите сумму, разность и произведение дробей:

а) $\frac{ax^2}{10m}$ и $\frac{3ax^2}{10m}$; б) $\frac{n+1}{n(n-5)}$ и $\frac{1}{5-n}$.

Вариант IV

1°. Вычислите: $32 : 2^4 + (5,7 - 7,7)^3$.

2•. Сократите дробь: а) $\frac{32az^2}{24acz^3}$; б) $\frac{8c^2-32}{15c-30}$.

3•. Найдите сумму, разность и произведение дробей:

а) $\frac{cx^3}{14n}$ и $\frac{5cx^3}{14n}$; б) $\frac{c-2}{c(c-3)}$ и $\frac{1}{3-c}$.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ ОЦЕНИВАНИЮ

Тестовые задания № 1

1. Представьте выражение $x^8 : x^4 y$ в виде степени:
а) x^2; б) x^{12}; в) x^4; г) x^{32}.

2. Вычислите: $(-3{,}27)^3 : 3{,}27^3$:
а) 1; б) 3; в) 3,27; г) −1.

3. Найдите корень уравнения $x^5 : x^2 = 1$:
а) 5; б) 2; в) 1; г) 10.

4. При каком значении x не имеет смысла дробь $\frac{5-x}{3x-6}$:
а) $x = 0$; б) $x = 5$; в) $x = 2$; г) $x = 3$?

5. Укажите общий знаменатель дробей $\frac{2}{3x^2}$ и $\frac{3}{2xy}$:
а) $3x^2y$; б) $2xy$; в) $6x^2y$; г) $6xy$.

6. Укажите пропущенный член тождества $\frac{5}{xy} = \frac{*}{3x^2y}$:
а) $15x$; б) $15x^3$; в) $5x^2$; г) $5y^2$.

7. Суммой дробей $\frac{2}{x}$ и $\frac{x}{2}$ является дробь:
а) $\frac{2+x}{x+2}$; б) $\frac{2+x}{2x}$; в) $\frac{2x}{x+2}$; г) $\frac{4+x^2}{2x}$.

8. Произведение дробей $\frac{x}{x^2-4}$ и $\frac{x+2}{x}$ равно:
а) $\frac{x^2+2}{x^3-4}$; б) $\frac{1}{x-2}$; в) $\frac{2+x}{x-2}$; г) $\frac{1}{x+2}$.

9. Корнем какого уравнения является число 5:
а) $\frac{x+5}{x-5} = 0$; б) $\frac{x}{5} = 0$; в) $\frac{2x+10}{x+5} = 0$; г) $\frac{2x-10}{x+5} = 0$?

10. Сколько корней имеет уравнение $\frac{7}{x^2-1} = 0$:
а) один; б) два;
в) бесконечное множество; г) ни одного?

Типовые задания для контрольной работы № 1

1. Сократите дробь:

а°) $\dfrac{6a^2b^3}{8a^4b^2}$; б•) $\dfrac{3a^2-75}{9a+45}$.

2. При каких значениях переменных не имеет смысла дробь:

а°) $\dfrac{5}{a-2}$; б•) $\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$?

3. Выполните действия:

а°) $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{2y}{x+y}$; б•) $\dfrac{a^2}{a^2-4}-\dfrac{a}{a+2}$.

4. Перемножьте дроби:

а°) $\dfrac{2a^2b}{3x^3}\cdot\dfrac{5ax^2}{4x^3}$; б•) $\dfrac{9xy^3}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x+y}{6y^2}$.

5. Решите уравнение:

а°) $\dfrac{2x-5}{x+5}=0$; б•) $\dfrac{2x^2-18}{x^2+3x}=0$.

6. Упростите выражение:

а°) $\left(\dfrac{3a}{a+1}+\dfrac{3}{a+1}\right)^2$; б•) $\dfrac{2c-1}{4c+2}+\dfrac{2c+1}{6c-3}+\dfrac{4c}{4c^2-1}$.

7. Вычислите значение выражения:

а°) $a-\dfrac{a^2}{a-1}$, если $a=2$;

б•) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}-\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$, если $x=1{,}5$, $y=0{,}5$;

в••) $\dfrac{4m^2+2mn-n^2}{8m^2+3n^2}$, если $\dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{2}$.

8••. Решите уравнение $4(a^2x-1)=9(a+x)$ относительно переменной x и укажите, при каких значениях a уравнение имеет корни.

§7. ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

Действие деления дробей — обратное умножению:

$\frac{3}{5}:\frac{4}{7}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 4}$, поскольку $\frac{3\cdot 7}{5\cdot 4}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3}{5}$.

Аналогично

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}, \text{ поскольку } \frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.$$

Выражение $\frac{ad}{bc}$ — произведение дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{d}{c}$. Следовательно,

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.}$$

Дробь $\frac{d}{c}$ называют ***обратной дроби*** $\frac{c}{d}$. Поэтому при делении дробей можно воспользоваться следующим правилом.

! **Чтобы разделить две дроби, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.**

$$\boxed{\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}.}$$

Примеры.

$$\frac{4a^2b}{5x}:\frac{2ax}{3b^2}=\frac{4a^2b}{5x}\cdot\frac{3b^2}{2ax}=\frac{12a^2b^3}{10ax^2}=\frac{6ab^3}{5x^2};$$

$$\frac{1}{a+b}:\frac{a}{a^2-b^2}=\frac{1}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{a}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)a}=\frac{a-b}{a}.$$

Поскольку целое выражение можно представить в виде дроби со знаменателем 1, то, согласно сформулированному правилу, дробь можно делить на целое выражение и целое выражение — на дробь:

$$\frac{4ax^2}{5c}:2a^2x=\frac{4ax^2}{5c}\cdot\frac{1}{2a^2x}=\frac{2x}{5ac};$$

$$(2a+3):\frac{a}{2a-3}=\frac{2a+3}{1}\cdot\frac{2a-3}{a}=\frac{4a^2-9}{a}.$$

Хотите знать ещё больше?

Проанализируем, при каких значениях переменных a, b, c, d значение частного $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ существует.

Знаменатели дробей не равны нулю, поэтому $b \neq 0$ и $d \neq 0$. Не равно нулю и значение c, поскольку при этом условии значение второй дроби равно 0, а на нуль делить нельзя.

Следовательно, данное частное имеет значение только в том случае, если выполняются все три следующих условия: $b \neq 0$, $d \neq 0$ и $c \neq 0$.

Рассмотрим, при каких значениях x имеет смысл выражение

$$\frac{6}{x-|x|}:\frac{x+|x|}{2}.$$

Если $x \geq 0$, то $x-|x|=0$; в этом случае знаменатель первой дроби равен 0, и частного не существует.

Если $x < 0$, то $x+|x|=0$; в этом случае значение второй дроби равно 0, а на нуль делить нельзя.

Следовательно, данное выражение не имеет смысла при любом значении x.

Проверьте себя

1. Что означает «разделить одно выражение на другое»?
2. Какая дробь называется обратной данной дроби?
3. Сформулируйте правило деления дробей.
4. Как разделить дробь на целое выражение? А как — целое выражение на дробь?
5. При каких значениях переменных частное дробей $\frac{a}{m}:\frac{c}{n}$ имеет смысл?

Выполним вместе!

1. Упростите выражение $1-\frac{a}{c}:\frac{a}{c^2}$.

✔ Решение.

$$1-\frac{a}{c}:\frac{a}{c^2}=1-\frac{a}{c}\cdot\frac{c^2}{a}=1-\frac{a\cdot c^2}{c\cdot a}=1-c.$$

Ответ. $1-c$.

2. Найдите частное от деления дроби $\frac{ac^2}{a^2-1}$ на $\frac{2c}{a^3-a^2}$ и укажите, при каких значениях переменных частное существует.

✔ Решение.

$$\frac{ac^2}{a^2-1}:\frac{2c}{a^3-a^2}=\frac{ac^2}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{a^2(a-1)}{2c}=\frac{a^3c}{2(a+1)}.$$

Первая из данных дробей не имеет смысла, если $a^2-1=0$, то есть при $a=1$ или $a=-1$.

Вторая дробь не имеет смысла, если $a^2(a-1)=0$, то есть при $a=0$ или $a=1$.

При $c=0$ значение второй дроби равно 0, а на нуль делить нельзя.

Следовательно, частное этих дробей существует, если $a\neq0$, $a\neq1$, $a\neq-1$ и $c\neq0$.

Ответ. $\frac{a^3c}{2(a+1)}$; частное существует при $a\neq0$, $a\neq1$, $a\neq-1$, $c\neq0$.

Выполните устно

296. Разделите выражение c^3 на: c, c^2, c^3, c^4, c^5, c^6.

297. Разделите дробь $\frac{2}{x}$ на: x^2, x, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$.

298. Вычислите частное:

$10:\frac{1}{5}$; $20:\frac{4}{5}$; $\frac{2}{3}:2$; $\frac{3}{4}:6$;

$\frac{2}{3}:\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}:\frac{5}{3}$; $1\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}:1{,}5$.

299. Заполните пустые клетки таблицы:

A	$\frac{c}{2x}$	$-\frac{c}{2x}$	$\frac{c}{4x}$	$\frac{c^2}{4x}$	$\frac{1}{ax}$	$\frac{c}{ax^2}$
$\frac{c}{2x}:A$						

Уровень A

Выполните деление (300—308).

300. а) $\frac{4}{7}:\frac{2}{21}$; б) $-15:\frac{5}{7}$; в) $\frac{3{,}5}{4}:\frac{-7}{16}$;

г) $\frac{5x}{3y}:\frac{10x}{6y}$; д) $\frac{3a}{8b^2}:\frac{1}{4b^2}$; е) $\frac{4m^2}{n^3}:\frac{12m^3}{n^4}$.

301. а) $\frac{1}{3ax^2}:\frac{1}{9a^2x}$; б) $\frac{6x^2}{y}:\frac{1{,}5x^3}{y^2}$; в) $\frac{14}{5x^3}:\frac{7x}{2y^2}$;

г) $\frac{2a}{3x}:\frac{4a^2}{9x}$; д) $\frac{18c^2}{5xy}:\frac{9c^3}{15x^2}$; е) $\frac{1{,}8z^3}{xy^2}:\frac{9z^3}{x^2y}$.

302. а) $\frac{34ab^2}{17b^2}:\frac{1}{ac^2}$; б) $\frac{3m^2n^3}{4ap}:9mn^4$; в) $3x^2:\frac{1}{9x^3}$;

г) $-\frac{2ab}{3xy}:\frac{8a^2b^2}{9x^2y^2}$; д) $\frac{x}{5cz}:\left(-\frac{1}{15z^3}\right)$; е) $1:\frac{2xy}{x^0}$.

303. а) $\frac{1}{x+y}:\frac{1}{(x+y)^2}$; б) $\frac{(a+b)^2}{3c}:\frac{a+b}{6c}$; в) $\frac{x}{x+y}:\frac{x+y}{x}$.

304. а) $\frac{a^3+a^2}{11c^2}:\frac{4a+4}{c^3}$; б) $\frac{8cx}{c^2-2c}:\frac{4cx}{3c-6}$; в) $\frac{mc^2}{m^2-1}:\frac{3c}{m^3-m^2}$.

305. а) $\frac{3a}{x-y}:\frac{6a^2\left(x^2-y^2\right)}{(x-y)^2xy}$; б) $\frac{x^2-2x+1}{3x^2}:\frac{(x-1)^2}{3x^3}$;

в) $\left(a^2-b^2\right):\frac{a+b}{a-b}$; г) $\frac{2x+1}{2x-1}:\frac{2x}{2x-1}$.

306. а) $\frac{4c^2-x^2}{3cx}:\frac{2c+x}{6cx^2}$; б) $2ac^2:\frac{ac^2}{3a-c}$;

в) $\frac{x^3-3x}{x^2-4}:\frac{x^2-3}{x^2+2x}$; г) $\frac{(a+c)^2}{a-c}:\frac{a^2-c^2}{2a}$.

307. а) $\frac{ab^3}{6-6a}:\frac{ab^2}{a^2-2a+1}$; б) $\frac{5a^2-5}{3a^2}:\frac{(a+1)^2}{5a}$;

в) $\left(a^2-4c^2\right):\frac{a-2c}{3ac}$;　　г) $\left(x^6-1\right):\frac{1}{x^6+1}$.

308. а) $\frac{x^2-y^2z^2}{yz+x}:(yz-x)$;　　б) $\frac{9-25x^2}{15x}:(5x+3)$;
в) $(a-4x^2):(16x^4-a^2)$;　　г) $(x^2+x+1):(x^3-1)$.

Упростите выражение (309—310).

309. а) $\frac{3x}{8a}:\left(\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{4c}\right)$;　　б) $\left(\frac{2x}{m}\right)^2:\frac{6x^3}{m^2}$.

310. а) $\frac{-5a^2}{4c^3}:\left(\frac{a^3}{2c^3}:\frac{m}{c^2}\right)$;　　б) $\frac{-9c^2}{5a}:\left(\frac{3c}{10a^2}\right)^3$.

311. **Найдите значение выражения:**

а) $\frac{(t-2)^2}{t-1}:\left(t^2-4\right)$, если $t=0{,}5$;

б) $(2a-4b):\frac{3\left(a^2-4b^2\right)}{a+2b}$, если $a=2{,}65$, $b=7{,}35$.

312. **Какие из чисел −2, −1, 0, 1, 2 удовлетворяют уравнение**

$$\frac{x-1}{x}:\frac{x}{x+1}=\frac{x^4-1}{5x^2}?$$

313. **Решите уравнение:**

а) $x:\frac{2x}{x-2}=3$;　　б) $\frac{3x-2}{2x}:\frac{4}{x}=2$;

в) $\frac{2x+6}{x}:\frac{2}{x}=3$;　　г) $6x:\frac{18x}{3x+2}=\frac{5}{3}$.

Уровень Б

Выполните деление (314—318).

314. а) $\frac{x^2-xy}{x^2+xy}:\frac{xy}{x^2y+xy^2}$;　　б) $\frac{a^2b-4b^3}{3ab^2}:\frac{a^2-2ab}{a^2b}$;

в) $\frac{4x^2-16x+16}{x^2-9}:\frac{x-2}{x-3}$;　　г) $\frac{a^2+6a+9}{36-a^2}:\frac{a+3}{a+6}$.

315. а) $\dfrac{16xy^2-x^3}{x^2-2xy+y^2}:\dfrac{x^2y-16y^3}{x^2-y^2}$; б) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{y^2x-9x^3}:\dfrac{x^2-y^2}{9x^2y-y^3}$;

в) $\dfrac{x^2+xy}{5x^2-5y^2}:\dfrac{x^2-xy}{x^3+y^3}$; г) $\dfrac{x^2-2xy}{x^2+4y^2}:\dfrac{(x-2y)^2}{x^4-16y^4}$.

316. а) $\dfrac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}:\dfrac{5a-5}{3a^3+3}$; б) $\dfrac{1-x^2y^2}{1+xy}:\dfrac{xy-1}{xy^2+y}$;

в) $\left(4a^2-1\right):\dfrac{1+2a}{1-2a}$; г) $\dfrac{3-x}{3+x}:\left(x^2-9\right)$.

317. а) $\dfrac{a^2-3ab}{3b}:(4a-12b)$; б) $(8x-12y):\dfrac{(2x-3y)^2}{xy}$;

в) $(4x^2-y^2):\dfrac{10x+5y}{x-y}$; г) $\dfrac{9a^3-ab^2}{2b}:(3a^2+ab)$.

318. а) $\dfrac{x^2-6x+9}{4x^2-6x+9}:\dfrac{6-2x}{27+8x^3}$; б) $\dfrac{a^2+ax+x^2}{x-1}:\dfrac{a^3-x^3}{x^2-1}$;

в) $\dfrac{2a^3+16}{a^2+3a+9}:\dfrac{a^2-2a+4}{2a^3-54}$;

г) $\dfrac{64a^3-b^3}{16a^2-8ab+b^2}:\dfrac{16a^2+4ab+b^2}{b^2-16a^2}$.

Найдите значение выражения (319—320).

319. а) $\dfrac{ab+4b-5a-20}{b^2-1}:\dfrac{2b-10}{b+1}$, если $a=4$, $b=\dfrac{3}{4}$;

б) $\dfrac{9-(a+x)^2}{6a+6x}:\dfrac{a^2+3a-x^2-3x}{a^2+ax}$, если $a=\dfrac{3}{2}$, $x=\dfrac{1}{2}$.

320. а) $\dfrac{xy+2x+y+2}{4y^2-16}:\dfrac{xy+2x}{4-2y}$, если $x=\dfrac{1}{2}$, $y=3$;

б) $\dfrac{(a-n)^2-16}{a^2-an}:\dfrac{a^2-n^2+4a+4n}{5n-5a}$, если $a=\dfrac{5}{8}$, $n=\dfrac{3}{8}$.

321. Заполните таблицу:

x	-4	-3	-1	0	1	3	4
$\frac{x^2-2x+1}{x+1}:\frac{x-1}{(x+1)^2}$							
$\frac{3x^2-48}{x-1}:\frac{12+3x}{1-x}$							

322. Упростите выражение:

а) $\dfrac{3y-9}{x^2-xy+x-y}:\dfrac{xy-3x+2y-6}{x^2-y^2}$;

б) $\dfrac{a^2-2ab+a-2b}{ab^2+a^2b}:\dfrac{a^2-4b^2}{a^2+ab+a+b}$.

323. На какое выражение нужно умножить дробь $\dfrac{3a}{a-2}$, чтобы получить:

а) $\dfrac{a-2}{3a}$; б) $\dfrac{a+2}{a-2}$; в) $3a(a-2)$?

Упростите выражение (324—332).

324. а) $\left(\dfrac{2a}{3b}\cdot\dfrac{6ab}{5c^2}\right):\dfrac{4ab^2}{9c^2}$; б) $\dfrac{-3xy}{25ac^3}:\left(\dfrac{-2cx}{5a}\cdot\dfrac{3}{-2c^3}\right)$.

325. а) $\left(\dfrac{2a}{m^2c}\right)^3:\left(\dfrac{4a^2}{3mc^2}\right)^2$; б) $\left(\dfrac{-a}{9c^2x}\right)^3:\left(\dfrac{2a}{3cx^2}\right)^4$.

326. а) $\dfrac{8mn}{9ax^2}:\left(\dfrac{6m}{5x}:\dfrac{3x^2}{2n}\right)$; б) $\left(\dfrac{0{,}5ax}{2m}:\dfrac{x}{4m^2}\right):\dfrac{m}{a}$.

327. а) $\left(\dfrac{a+x}{a}-\dfrac{x-y}{x}\right):\dfrac{x^2+xy}{a^2}$; б) $\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}\right):\dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy}$.

328. а) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$; б) $\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}-\dfrac{2x+1}{2x-1}\right):\dfrac{4x}{5-10x}$.

329. а) $\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b}{a}\right):\left(\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}\right)$; б) $\left(1+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right):\dfrac{1}{x^2-1}$.

330. а) $\left(\frac{1}{1-x}-1\right):\left(1+x-\frac{1-2x^2}{1-x}\right)$;

б) $\left(1-\frac{b}{a+b}\right):\left(a+b-\frac{b^2}{a+b}\right)$.

331. а) $\left(\frac{1}{a+b}+\frac{b^2}{a^3-ab^2}\right):\left(\frac{a-b}{a^2+ab}-\frac{a}{ab+b^2}\right)$;

б) $(a+b):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-ab\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)$.

332. а) $\left(\frac{c-x}{c^2+cx}-\frac{c}{cx+x^2}\right):\left(\frac{x^2}{c^3-cx^2}+\frac{1}{c+x}\right)$;

б) $\frac{a+b}{ab}:\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{b-a}$.

333. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2-2x+1}{4x+8}:\frac{x-1}{x+2}=6$; б) $\frac{4x^2-1}{3-x}:\frac{2x+1}{6-2x}=10$;

в) $\frac{x^2-9}{x^2+4}:\frac{x+3}{x-2}=0$; г) $\frac{16-x^2}{3x}:\frac{16+x^2}{6x^2}=0$.

Разделите многочлен на многочлен, записав частное в виде дроби и сократив её (334—338).

334. а) $(a^5-a):(a^2-1)$; б) $(z^6-z^2):(z^2-1)$;

в) $(2a+8b):(16b^2-a^2)$; г) $(4x^2-4xy+y^2):(y^2-4x^2)$.

335. а) $(c^6-c^2):(c^3-c)$; б) $(c^4+c):(c^2+c)$;

в) $(x^3+4x^2+4x):(x^2+2x)$; г) $(x^4+x):(x^2-x+1)$.

336. а) $(ac+ax+bc+bx):(c+x)$;

б) $(ac-ax+bc-bx):(a+b)$.

337. а) $(a^3-2a^2+2a-4):(a^2+2)$;

б) $(a^3+2a^2-2a-4):(a+2)$.

338. а) $(2a^3b^2+3abc^2x-2a^2bcx-3c^3x^2):(ab-cx)$;

б) $(32ac^2+15cx^2-48ax^2-10c^3):(2c^2-3x^2)$.

Упростите выражение (339—341).

339. а) $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 : \frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}$; б) $\left(\frac{x+z}{2x}\right)^3 : \frac{x^2+z^2+2xz}{8x^4}$;

в) $\left(1-\frac{a}{c}\right)^2 : \frac{a^2-2ac+c^2}{6c^3}$; г) $\left(2+\frac{x}{a}\right)^3 : \frac{x^2+4a^2+4ax}{8a^3}$.

340. а) $\left(1-\frac{2c}{a+c}\right)^2 : \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^3$; б) $\frac{3a^4}{a^2+x^2-2ax} : \left(1+\frac{x}{a-x}\right)^2$;

в) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}-a\right) : \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)+\frac{ba}{2}$; г) $\left(\frac{a^2+b^2}{a}-2b\right) : \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$.

341. а) $\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) : \frac{a+b+c}{2abc}+a^2$;

б) $\left(1-\frac{b^2-a^2-c^2}{2ac}\right) : \left(\frac{a+c}{b}-1\right)-\frac{b^2}{2ac}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

342. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 8(2x-3y-3)=6x(4y-3)-3y(8x-5), \\ 3(10x+3y)=9y(4x+7)-6x(6y+1); \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-2)^2-(x+3)^2=(y-3)^2-(y+2)^2, \\ (x+2)^2+(x-3)^2=2x(x-4)+13y. \end{cases}$

343. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика уравнения:
а) $3x+2y=6$; б) $x-5y=12$.

344. В лагере отдыхали только ученики 7—9 классов. Количество учеников 7 и 8 классов представлено на диаграмме (рис. 16). Дорисуйте диаграмму в тетради, если всего в лагере было 95 учеников.

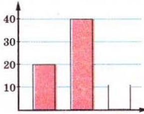


Рис. 16

§8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Вы уже знаете, что любое числовое выражение после выполнения всех действий принимает конкретное значение, выраженное некоторым числом. **Преобразования рациональных выражений выполняют так же, как находят значение числового выражения.** Заданное выражение заменяют другим, тождественным ему. Такие преобразования называются **тождественными преобразованиями.**

Тождественные преобразования рациональных выражений выполняют частями или «цепочкой», используя известные вам из предыдущих параграфов правила действий с дробями и целыми выражениями. Если выражение содержит несколько действий разных ступеней, то их выполняют в такой же последовательности, что и преобразования числовых выражений:

1) действия в скобках;
2) действия третьей ступени (возведение в степень);
3) действия второй ступени (умножение, деление);
4) действия первой ступени (сложение, вычитание).

Любое рациональное дробное выражение можно представить в виде дроби, а некоторые — даже в виде целого выражения. Рассмотрим, например, выражения: $a-\frac{a}{1+\frac{1}{a}}$, $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{x+y}-\frac{1}{xy}$.

Первое из них можно преобразовать таким образом:

1) $1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}$; 2) $a:\frac{a+1}{a}=\frac{a^2}{a+1}$;

3) $a-\frac{a^2}{a+1}=\frac{a^2+a-a^2}{a+1}=\frac{a}{a+1}$.

Следовательно, $a-\frac{a}{1+\frac{1}{a}}=\frac{a}{a+1}$.

Аналогичным способом (последовательно) можно упростить и второе выражение. А можно преобразовать и «цепочкой»:

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{x+y}-\frac{1}{xy}=\frac{y+x}{xy}:(x+y)-\frac{1}{xy}=\frac{1}{xy}-\frac{1}{xy}=0.$$

Хотите знать ещё больше?

В математике часто приходится не только упрощать выражения, например сумму нескольких дробей записать одним выражением, но и осуществлять обратные операции.

Задача *(О. Коши)*. Разложите дробь $\frac{2}{x^2-1}$ на сумму двух дробей со знаменателями $x-1$ и $x+1$.

✔ Решение. Пусть $\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$. **(1)**

Преобразуем правую часть равенства в дробь:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=$$

$$=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(A+B)+A-B}{(x-1)(x+1)}.$$

Подставляем это выражение в правую часть (1):

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(A+B)+A-B}{(x-1)(x+1)},\text{ отсюда } x(A+B)+A-B=2.$$

Правая часть последнего равенства не содержит переменной x. Это возможно только при условии, если $A+B=0$, то есть $B=-A$. В этом случае $A-(-A)=2$, отсюда $2A=2$, $A=1$, $B=-1$.

Следовательно, $\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}$.

Ответ. $\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}$.

Проверьте себя

1. Какие выражения называют рациональными?
2. Какие выражения называют дробными?
3. Какие действия можно выполнять с рациональными выражениями?
4. Каков порядок выполнения действий?

Выполним вместе!

1. Упростите выражение:

а) $\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}$; б) $\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{y}{x-y}\right):\frac{x^2-3xy}{x-y}$.

✔ Решение.

а) Данное выражение преобразуем последовательно:

1) $\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}=\frac{1}{x+2}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{x}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)\cdot x}=\frac{x-2}{x}$;

2) $\frac{x+1}{x}-\frac{x-2}{x}=\frac{x+1-x+2}{x}=\frac{3}{x}$.

б) Преобразуем данное выражение «цепочкой»:

$$\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{y}{x-y}\right):\frac{x^2-3xy}{x-y}=\frac{(x-y)^2-y(x+y)}{(x+y)(x-y)}:\frac{x(x-3y)}{x-y}=$$

$$=\frac{x^2-2xy+y^2-yx-y^2}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{x-y}{x(x-3y)}=\frac{x^2-3xy}{(x-y)(x+y)}\cdot\frac{x-y}{x(x-3y)}=$$

$$=\frac{x(x-3y)(x-y)}{(x-y)(x+y)x(x-3y)}=\frac{1}{x+y}.$$

Ответ. а) $\frac{3}{x}$; б) $\frac{1}{x+y}$.

2. Представьте дробь $\frac{5x+19}{x+3}$ в виде $m+\frac{n}{x+3}$, где m и n — целые числа.

✔ Решение.

$$\frac{5x+19}{x+3}=\frac{5(x+3)+4}{x+3}=\frac{5(x+3)}{x+3}+\frac{4}{x+3}=5+\frac{4}{x+3}.$$

Выполните устно

Упростите выражение (345—348).

345. а) $\left(a+\frac{x}{c}\right):\left(a+\frac{x}{c}\right)$; б) $\left(1+\frac{a}{n}\right):\frac{n+a}{n}$.

346. а) $1:\frac{a-c}{a+c}$; б) $1:\frac{1+x}{x-1}$.

347. а) $\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(n-\frac{1}{n}\right):\left(n^2-\frac{1}{n^2}\right)$; б) $\frac{a}{c}\cdot\frac{a-c}{a+c}\cdot\frac{a+c}{a}$.

348. а) $\frac{a^3-1}{a-1}:(a^2+a+1)$; б) $\frac{1+x^3}{1+x}:(1-x+x^2)$.

Уровень A

Выполните действия (349—352).

349. а) $\frac{a}{a-1}\cdot(a-1)^2+1$; б) $(x+2)\cdot\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x}$;

в) $\frac{1}{x}-\frac{x-2}{x}:(x-2)^2$; г) $\frac{3}{a^2-16}\cdot(a+4)+\frac{a}{2}$.

350. а) $(x-3)\cdot\frac{5}{9-x^2}+\frac{4}{x}$; б) $\frac{a+6}{a}:(a+6)^2+\frac{1}{a}$;

в) $\frac{2}{(x+3)}\cdot(x^2-9)+\frac{6}{x+3}$; г) $\frac{5}{a^2-4}\cdot(a+2)^2-\frac{10}{a-2}$.

351. а) $\frac{x+2}{x+3}:\frac{5x+10}{9-x^2}-\frac{2x-1}{15}$; б) $\left(\frac{6y}{y-4}-3y\right):\frac{6-y}{y-4}$;

в) $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}\cdot\frac{x^2}{x+y}+\frac{1-x^2}{x-y}$; г) $\frac{m-5}{m+5}\cdot\left(m+\frac{2m^2}{5-m}\right)$.

352. а) $\frac{a^2-4}{9-a^2}:\frac{a-2}{3+a}-\frac{2}{3-a}$; б) $\left(x-\frac{5x}{x+3}\right):\frac{x-2}{x+3}$;

в) $\frac{a^2-b^2}{4a+4}\cdot\frac{a+1}{a-b}+\frac{a+b}{4}$; г) $\left(\frac{2a}{2a-1}+1\right)\cdot\frac{6a-3}{4a^2-a}$.

Упростите выражение (353—357).

353. а) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{xy}{x+y}$; б) $\frac{a-b}{ab}:\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$;

в) $\left(1+\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{a}{b}\right)$; г) $\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{y}\right):\left(\frac{1}{xy}-\frac{1}{y}\right)$.

354. а) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$; б) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right):\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{b}{a}\right)$;

в) $\left(\frac{m}{m+1}+1\right):\left(1-\frac{3m^2}{1-m^2}\right)$; г) $\left(\frac{3a+1}{3a-1}-\frac{3a-1}{3a+1}\right):\frac{12a}{15a-5}$.

355. а) $\frac{a-b}{a}\cdot\left(\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}\right)$; б) $\left(\frac{x}{y}-\frac{x}{x+y}\right)\cdot\frac{x+y}{x}$;

в) $\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right):\frac{2}{x^2-y^2}$; г) $\left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}\right):\frac{4}{a^2-b^2}$.

356. а) $\frac{a^2-2a+1}{a^2-1}\cdot\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2$; б) $\frac{1-4x^2}{4x^2+4x+1}\cdot\frac{3x}{2x-1}$.

357. а) $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}\cdot\frac{x+a}{a^2+ax+x^2}$; б) $\left(\frac{2a}{a-x}\right)^3\cdot\frac{a^2-2ax+x^2}{6a^2}$.

Докажите тождество (358—359).

358. а) $\frac{(2a+1)^2}{(2a-1)^2+8a}=1$; б) $\frac{(2a-1)^2}{(2a+1)^2-8a}=1$.

359. а) $\frac{8c}{(2c+1)^2-(2c-1)^2}=1$; б) $\frac{8a^2+2}{(2a+1)^2+(2a-1)^2}=1$.

360. Докажите, что значение выражения не зависит от значений переменных, входящих в него:

а) $\left(\frac{4}{x}-\frac{x}{4}\right)\left(\frac{1}{4-x}-\frac{1}{4+x}\right)$; б) $\left(\frac{2}{3a}-\frac{3a}{2}\right)\left(\frac{1}{3a-2}+\frac{1}{3a+2}\right)$;

в) $\left(\frac{2a}{b}-\frac{8b}{a}\right)\left(\frac{a}{a-2b}-\frac{a}{a+2b}\right)$; г) $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{x^2y}{y-x}+\frac{x^2y}{y+x}\right)$.

361. Выполните действия:

а) $\left(\frac{x+y}{y}-\frac{2y}{y-x}\right)\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}$; б) $\left(\frac{2a}{a+x}+\frac{x-a}{a}\right):\frac{x^2+a^2}{x+a}$;

в) $\left(a+x-\frac{2ax}{a+x}\right):\left(\frac{a-x}{a+x}+\frac{x}{a}\right)$; г) $\left(\frac{y}{x}-\frac{2y}{x+y}\right)\cdot\left(y+\frac{x^2+y^2}{x-y}\right)$.

362. Найдите значение выражения:

а) $\frac{a}{a+1}\cdot\left(a-\frac{1}{a}\right)$, если $a=2{,}37$;

б) $\left(\frac{x+1}{x}-\frac{2x}{x-1}\right)\cdot\frac{1-x}{x^2+1}$, если $x=-0{,}25$;

в) $\left(\frac{a+x}{a}-\frac{x-1}{x}\right)\cdot\frac{a^2x}{x^4-a^2}$, если $a=2{,}25$, $x=3{,}5$.

363. Докажите равенства, которые *Евклид* (III в. до н. э.) доказал геометрическим способом для положительных a и b.

а) $ab+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$;

б) $a^2+b^2=2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2\right)$.

Уровень Б

Упростите выражение (364—377).

364. а) $\dfrac{\frac{a}{n}+\frac{c}{n}}{\frac{a}{n}}$; б) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$; в) $\dfrac{m+\frac{mn}{m-n}}{m-\frac{mn}{m-n}}$.

365. а) $\dfrac{a-\frac{b^2}{a+b}}{b-\frac{a^2}{a+b}}$; б) $\dfrac{x-\frac{yz}{y-z}}{y-\frac{xz}{x-z}}$; в) $\dfrac{x+2-\frac{1}{x+2}}{x+2+\frac{x}{x+2}}$.

366. а) $\dfrac{a(a-x)-x(a+x)}{\frac{a}{a+x}-\frac{x}{a-x}}$; б) $\left(\frac{a^2}{4b^2}+\frac{9b^2}{a^2}+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{a}{2b}-\frac{3b}{a}\right)$.

367. а) $1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{x}}}$; б) $\dfrac{n}{n-\frac{1}{n-\frac{n}{1-n}}}$.

368. а) $\frac{n^2-1}{n^2+n}\cdot\left(1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^2$; б) $\frac{a^4+c^4}{(a-c)^2}-\dfrac{2}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)^2}$.

369. а) $\left(\dfrac{2c}{3c+1}+\dfrac{3c}{1-2c}\right)\cdot\dfrac{9c^2+6c+1}{10c^2+10c}$; б) $\dfrac{1-\dfrac{2x}{a}+\dfrac{x^2}{a^2}}{1-\dfrac{x}{a}}$.

370. а) $\dfrac{\dfrac{1}{a+c}-\dfrac{1}{x}}{a+c-x}\cdot\left(\dfrac{a}{c}-\dfrac{c}{a}\right)$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{a+c}-\dfrac{2}{x}}{a+c-\dfrac{x}{2}}:2$;

в) $\left(n-\dfrac{1}{1-n}\right)\cdot\dfrac{n^2-2n+1}{n^2-n+1}$; г) $\left(\dfrac{xy}{ab}+\dfrac{ax}{b^2}-\dfrac{by}{a^2}\right):\left(\dfrac{xy}{ab}-\dfrac{ax}{b^2}+\dfrac{by}{a^2}\right)$.

371. а) $\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+x-\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\left(x+1-\dfrac{1}{1-x}\right):\left(x-\dfrac{x^2}{x-1}\right)$.

372. а) $(a^2-1)\cdot\left(\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}-1\right)$; б) $\left(\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{c}{a}\right):\left(\dfrac{a}{c^2}-\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$.

373. а) $\left(1-\dfrac{2x-3y}{2x+3y}\right):\left(\dfrac{2xy}{4x^2-9y^2}+\dfrac{y}{3y-2x}\right)$; б) $1-\dfrac{x^2-c^2}{x}:\dfrac{c-x}{x^2}$;

в) $\left(\dfrac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\dfrac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}\right)$.

374. а) $\left(\dfrac{3}{a-1}-\dfrac{3a^2+6a+3}{a^2-1}:\dfrac{a^4+a}{a^3+1}\right)\cdot\dfrac{a+a^2}{-3}$;

б) $\left(\dfrac{4a}{a+2}-\dfrac{a^3-8}{a^3+8}:\dfrac{a^2-4}{4a^2-16a+16}\right)\cdot\dfrac{a+2}{16}$.

375. а) $\dfrac{4ab}{b^2-a^2}:\left(\dfrac{1}{b^2-a^2}+\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2}\right)$;

б) $\dfrac{3c-3}{c^2-4}\cdot\dfrac{c+2}{c^2-2c+1}-\dfrac{3(c+2)}{c^2-4}$.

376. а) $\left(\dfrac{x^2}{x+a}-\dfrac{x^3}{x^2+2xa+a^2}\right):\left(\dfrac{x}{x+a}-\dfrac{x^2}{x^2-a^2}\right)$;

б) $\dfrac{4a^2+16+16a}{a-2}\cdot\left(\dfrac{a}{2a-4}-\dfrac{a^2+4}{2a^2-8}+\dfrac{2}{a^2+2a}\right)$.

377. а) $\left(\frac{2x-1}{x+1}-x\right)\cdot\left(\frac{3}{x^3+1}-\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^2-x+1}\right)$;

б) $\frac{3x^2}{a^2-x^2}-3a\left(\frac{1}{a-x}-\frac{x}{a^3-x^3}\cdot\frac{a^2+ax+x^2}{a+x}\right)$;

в) $\frac{xy^2-x^3}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{(x-y)^2}-\frac{y}{x^2-y^2}\right)+\frac{y}{x-y}$.

Докажите тождество **(378–380)**.

378. а) $\frac{2a-b}{ab}-\frac{1}{a+b}\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{b}$;

б) $\frac{1}{x+y}\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)+1=\frac{x^2+y^2}{xy}$.

379. а) $\left(\frac{4ab}{a-b}+a-b\right):\left(1+\frac{2b}{a-b}\right)=a+b$;

б) $\left(\frac{2a+2}{a-1}+a+1\right)\cdot\left(1-\frac{2}{a+1}\right)=a+1$.

380. а) $\frac{1}{xy}+\left(x^2-xy-\frac{x-y}{xy+y^2}\right):\frac{x^2-xy}{x+y}=x+y$;

б) $\left(\frac{xy+y^2}{x^2-xy}+xy+y^2\right)\cdot\frac{x}{x+y}-\frac{y}{x-y}=xy$.

381. Докажите, что выражения A_1 и A_2 тождественно равны:

а) $A_1=\frac{2}{mn}:\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)^2$, $A_2=\frac{m^2+n^2}{(m-n)^2}-1$;

б) $A_1=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2$, $A_2=\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\frac{xy}{x^2-y^2}$;

в) $A_1=\left(a-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{a-b}\right)$,

$A_2=\left(1+\frac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2}\right)\cdot\left(\frac{2a+b}{a}-\frac{3a}{2a-b}\right)$.

382. Значение дроби $\dfrac{ax+15}{a}$ равно 8, если $x = 3$. При каком значении x эта дробь равна 18?

383. Представьте дробь $\dfrac{7x+9}{x+1}$ в виде $a + \dfrac{b}{x+1}$, где a, b — целые числа.

384. При каких целых значениях n число $\dfrac{2n+5}{n+1}$ является целым?

385. Натуральные числа a, b, c, d, e такие, что $ab = 2$, $bc = 3$, $cd = 4$, $de = 5$. Найдите значение дроби $\dfrac{e}{a}$.

386. При каких натуральных значениях n число $\dfrac{4n^2-12n+21}{n-3}$ является натуральным?

387. Докажите, что при любом натуральном значении n число $\dfrac{n^3}{6}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{3}$ — натуральное?

388. Докажите, что при любом значении $a > 1$ число $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}+\dfrac{8}{1+a^8}$ — отрицательное.

389. Докажите, что при всех допустимых значениях x выражение

$$\frac{18x}{27x^3+8}+\frac{1}{3x+2}-\frac{3x+2}{9x^2-6x+4}$$

равно нулю.

390. Докажите, что при всех допустимых значениях x выражение

$$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}+\frac{3}{x^2-x+1}\right)\cdot\left(x-\frac{2x-1}{x+1}\right)$$

не зависит от значения переменной.

391. ***Задача китайского учёного Дай Шу.***
Упростите:

$$\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)\cdot\frac{ab}{a^2-(b+c)^2}.$$

392. Найдите значение выражения:

а) $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2\right):\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)$, если $x = 3{,}7$, $y = -1{,}3$;

б) $\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{a}{b^2}\right)$, если $a=12,\ b=8$;

в) $\left(\frac{xy}{x^2-y^2}+\frac{y}{2y-2x}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{2y}-\frac{y}{2}\right)$, если $x=5{,}6,\ y=-2{,}4$;

г) $\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$, если $x=\frac{1}{3},\ y=12$.

393. Докажите утверждение:

а) если $x=\frac{a-b}{a+b}$, то $\left(\frac{a}{b}-x\right)\cdot\frac{b}{ax+b}=1$;

б) если $x=\frac{ab}{a+b}$, то $\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\cdot\frac{b^3}{a^3}=\frac{a+2b}{b+2a}$;

в) если $x=\frac{ab}{a^2+b^2}$, то $\frac{0{,}5-x}{0{,}5+x}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$.

394. Выполните подстановку и упростите:

а) $\frac{x-a}{x-b}$, где $x=\frac{ab}{a+b}$; б) $\frac{\frac{a}{b}-x}{\frac{a}{b}+x}$, где $x=\frac{a-b}{a+b}$;

в) $\frac{ax}{a+x}-\frac{bx}{b-x}$, где $x=\frac{ab}{a+b}$;

г) $\left(\frac{x+2b}{x-2b}+\frac{x+2a}{x-2a}\right):\frac{x}{2}$, где $x=\frac{4ab}{a+b}$.

395*. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}$;

б) $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

396. Представьте выражение в виде произведения:

а) $0{,}36x^4-(1-0{,}4x^2)^2$; б) $(3+0{,}1y^3)^2-0{,}81y^6$;

в) $(2x-1)^2-(4-5x)^2$; г) $(a-2b)^2-(3a+b)^2$.

397. Круг с буквами перечеркните двумя прямыми таким образом, чтобы из букв в каждой части круга можно было составить алгебраический термин (рис. 17).

Рис. 17

398. Вычислите:

а) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right):(-2)-16\frac{1}{4}:(-4)$;

б) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right):(-3)+\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right):(-2)$.

399. Решите уравнение:

а) $\frac{x+1}{6}-\frac{2x}{9}=5$; б) $\frac{x-2}{3}-\frac{5x+1}{4}=\frac{11x}{12}$;

в) $\frac{3x}{4}+\frac{2(x-1)}{5}=\frac{111}{10}$; г) $\frac{2x+3}{5}+\frac{15-3x}{3}=\frac{4}{5}$.

§9. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Умение преобразовывать дробные выражения необходимо, в частности, для решения дробных уравнений.

Вы уже знаете, что уравнение называется ***рациональным***, если его левая и правая части — рациональные выражения. Рациональное уравнение называют ***дробным***, если его правая, левая либо правая и левая части — дробные выражения.

Примеры дробных уравнений:

$$\frac{1}{x+5}=3,\ x-\frac{1-2x}{x}=2,\ \frac{x+1}{x-2}=\frac{x-3}{x+2}.$$

При решении целого уравнения его часто стараются заменить равносильным. С дробными уравнениями это возможно лишь в некоторых случаях. Их преимущественно заменяют уравнениями-следствиями.

Уравнения называют следствием данного, если все решения данного уравнения удовлетворяют полученное уравнение.

Уравнение-следствие удовлетворяют все корни данного уравнения, но кроме них оно может иметь и посторонние корни.

Дробные рациональные уравнения можно решать разными способами. В частности:

1) заменить данное уравнение равносильным уравнением, левая часть которого — дробь, а правая — нуль;

2) заменить данное уравнение целым, которое является следствием данного.

Рассмотрим на конкретных примерах каждый способ.

Пример 1. Решите уравнение:

$$\frac{2}{x-2}-\frac{x+2}{x+3}=\frac{10}{(x+3)(x-2)}.$$

Решение. Заменим данное уравнение равносильным, в котором правая часть — нуль, а левая — дробь. Для этого дробь перенесём из правой части в левую, изменив знак перед ней на противоположный, и упростим полученное дробное выражение:

$$\frac{2}{x-2}-\frac{x+2}{x+3}-\frac{10}{(x+3)(x-2)}=0,$$

$$\frac{2(x+3)-(x+2)(x-2)-10}{(x+3)(x-2)}=0,\ \frac{x(x-2)}{(x+3)(x-2)}=0.$$

Полученное уравнение равносильно данному. Решить его просто, поскольку дробь равна нулю лишь тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличный от нуля.

Приравняем числитель к нулю: $x(x-2)=0$, если $x=0$ или $x=2$.

Если $x=0$, то знаменатель $(x+3)(x-2)$ не равен 0. Следовательно, $x=0$ — корень данного уравнения. Если $x=2$, то $(x+3)(x-2)=0$.

Следовательно, $x=2$ не удовлетворяет данное уравнение.

Ответ. $x=0$.

Чтобы решить дробное уравнение с использованием уравнения-следствия, обе его части нужно умножить на общий знаменатель — целое выражение. Получаем целое уравнение. Находим его корни и проверяем, какие из них не удовлетворяют данному уравнению. То есть проверка корней — неотъемлемая составляющая решения.

Пример 2. Решите уравнение:

$$\frac{a+3}{a-1}+\frac{1}{a}=1.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на $a(a-1)$ — общий знаменатель дробей.

Имеем:

$$\frac{(a+3)\cdot a(a-1)}{a-1}+\frac{a(a-1)}{a}=a(a-1).$$

$$a^2+3a+a-1=a^2-a,\ 5a=1,\ a=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Проверка. $\dfrac{0{,}2+3}{0{,}2-1}+\dfrac{1}{0{,}2}=\dfrac{3{,}2}{-0{,}8}+5=-4+5=1.$

Ответ. $x=0{,}2$.

Если дробное уравнение имеет вид пропорции либо его можно представить в виде пропорции, то используется основное свойство пропорции. В этом случае также получаем уравнение-следствие.

Хотите знать ещё больше?

Известные вам линейные уравнения — это отдельный вид рациональных уравнений. Как именно связаны между собой рациональные уравнения, иллюстрирует рисунок 18. Рациональные уравнения, которые не являются целыми, называют *дробно-рациональными*. Только некоторые из них сводятся к линейным. Большая часть дробно-рациональных уравнений сводится к таким, решать которые вы ещё не умеете. Решение некоторых из них рассмотрим позднее.

Рис. 18

Дробно-рациональными бывают не только уравнения с одной, но и с двумя, тремя и большим количеством переменных, а также системы таких уравнений. Например, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{4}{y+1}=2, \\ \dfrac{6}{x-1}-\dfrac{4}{y+1}=2. \end{cases}$$

Суммируем левые и правые части этих уравнений и получим: $\dfrac{8}{x-1}=4$, или $4x-4=8$, отсюда $x=3$.

Подставляем это значение x в первое уравнение: $\dfrac{4}{y+1}=1$, отсюда $y=3$.

Ответ. $x=3,\ y=3$.

Проверьте себя

1. Что такое уравнение?
2. Какие уравнения называют рациональными?
3. При каком условии дробь равна нулю?
4. Как решают уравнения с использованием основного свойства пропорции? Сформулируйте это свойство.

Выполним вместе!

1. Решите уравнение $\dfrac{x+3}{6(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}$.

✔ Решение. Согласно основному свойству пропорции: $x^2-9=6x-18$; $x^2-6x+9=0$; $(x-3)^2=0$, отсюда $x=3$.

При таком значении x знаменатели дробей данного уравнения равны нулю. Поэтому это значение x не является корнем уравнения.

Ответ. Уравнение решений не имеет.

2. Какое число нужно прибавить к членам дроби $\frac{3}{5}$, чтобы получить дробь, равную $\frac{5}{6}$?

✔ Решение. Обозначим искомое число буквой x. Тогда по условию задачи:

$$\frac{3+x}{5+x}=\frac{5}{6},\ 18+6x=25+5x, \text{ отсюда } x=7.$$

Проверка. $\frac{3+7}{5+7}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

Ответ. Искомое число равно 7.

Выполните устно

400. При каких значениях переменной числитель дроби равен нулю, при каких — нулю равен знаменатель:

а) $\frac{2x-8}{3x+15}$; б) $\frac{16+4y}{3-6y}$; в) $\frac{6x-18}{x(x+5)}$; г) $\frac{1+3a}{a(2-a)}$;

д) $\frac{y^2-25}{4y-3}$; е) $\frac{5x+2}{16-x^2}$; ё) $\frac{a^2-2a+1}{2a-1}$; ж) $\frac{3y-2}{4+4y+y^2}$?

401. Имеют ли решения уравнения:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2}=0,\qquad \frac{(x+1)^2}{x^2+1}=0,\qquad \frac{x-1}{1-x}=0?$$

402. Объясните, почему не имеют решений уравнения:

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+1=0;\quad x^2+\frac{1}{x^2}=0.$$

403. Решите уравнение:

а) $\frac{x-2}{x}=0$; б) $\frac{3+x}{x}=0$; в) $\frac{x}{x+7}=0$;

г) $\frac{x}{x+2}=0$; д) $\frac{x^2}{x-1}=0$; е) $\frac{5x^3}{x^2+9}=0$.

Уровень A

Решите уравнение (**404—408**).

404. а) $\frac{x+3}{x}-2=0$; б) $\frac{2x-1}{3x}=0$; в) $\frac{x}{x+2}-2=0$;

г) $\frac{x-8}{x}=3$; д) $\frac{5-x}{x}=6$; е) $\frac{x}{x-2}=2$.

405. а) $\frac{x-5}{x}-2=0$; б) $\frac{x}{x+6}+2=0$; в) $\frac{3x-7}{x}+4=0$;

г) $\frac{3x-4}{x}=2$; д) $\frac{5-2x}{x}=3$; е) $\frac{2x}{x+3}=1$.

406. а) $\frac{5x^2+1}{3x}=2x$; б) $\frac{3x^2-4}{x}=2x$; в) $\frac{x^2-1}{x}=2x$;

г) $\frac{2x+3}{x-1}-3=0$; д) $\frac{4x-2}{x+3}+6=0$; е) $\frac{4-3x}{1-2x}-5=0$.

407. а) $\frac{3x}{x+2}=-5$; б) $\frac{2x+5}{x+2}=3$; в) $\frac{x-6}{3x-1}=5$;

г) $\frac{4+x}{3x}=\frac{1}{3}$; д) $\frac{7-2x}{x+1}=\frac{2}{3}$; е) $\frac{x+5}{x-3}=\frac{3}{4}$.

408. а) $\frac{7x^2+1}{2x}=4x$; б) $\frac{5x^2+4}{2x}=3x$; в) $\frac{x^2+3}{x^2+1}=2$;

г) $\frac{3x^2-4}{2x}=x$; д) $\frac{3x^2+5}{x^2-1}=4$; е) $\frac{9-4x^2}{3x}=-x$.

Пользуясь свойством пропорции, решите уравнение (**409—412**).

409. а) $\frac{1}{23-3x}=\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{29}=\frac{1}{34y-5}$; в) $\frac{x}{x+1}=\frac{2}{3}$.

410. а) $\frac{0{,}5}{18-x}=\frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{7x-2}=\frac{13}{0{,}2}$; в) $\frac{2}{x-1}=\frac{5}{x}$.

411. а) $\frac{1}{x^2+4}=\frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{12}$; в) $\frac{5x^2-16}{12x}=\frac{x}{3}$.

412. а) $\frac{4}{x-1}=\frac{x+1}{6}$; б) $\frac{3z-1}{2}=\frac{1}{3z+1}$; в) $\frac{2x^2+8}{6x}=\frac{2x}{3}$.

413. Какое одно и то же число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{11}{17}$, чтобы получить $\frac{3}{4}$?

414. Знаменатель данной дроби на 2 больше, чем числитель. Если его числитель увеличить в 3 раза, а к знаменателю прибавить 67, то получим $\frac{1}{8}$. Найдите данную дробь.

415. Числитель дроби на 5 меньше, чем знаменатель. Если к числителю прибавить 11, а из знаменателя вычесть 2, то получим дробь, обратную данной. Найдите данную дробь.

Уровень Б

Решите уравнение (416—427).

416. а) $\frac{3x^2-5}{x+2}=3x+1$; б) $\frac{6x^2+5}{3x+2}=2x-1$; в) $\frac{4x^2-x}{2x+3}+3=2x$;

г) $\frac{2-x}{3x^2}=\frac{1}{x+2}$; д) $\frac{2}{x+3}=\frac{3-x}{4x^2}$; е) $\frac{x+1}{5}=\frac{3}{x-1}$.

417. а) $\frac{3x^2-4}{x}=3x+1$; б) $\frac{2x^2-3}{2x+1}=x+1$; в) $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1}$;

г) $\frac{2}{z-3}=\frac{3}{z-2}$; д) $\frac{y-2}{y-6}=\frac{y}{y-5}$; е) $\frac{c+1}{c-1}=\frac{c-5}{c-3}$.

418. а) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+3}{x-4}$; б) $\frac{x}{x-3}=\frac{x+4}{x+5}$; в) $\frac{y-5}{y-3}=\frac{y+1}{y-1}$;

г) $\frac{2x+3}{2x-1}=\frac{x-5}{x+3}$; д) $\frac{1+3x}{1-2x}=\frac{5-3x}{1+2x}$; е) $\frac{5y+1}{y-2}=\frac{5y-2}{y-3}$.

419. а) $\frac{6}{x^2-9}+\frac{2}{x+3}=\frac{3}{x-3}$; б) $\frac{7x}{4-x^2}+\frac{5}{2+x}=\frac{3}{2-x}$.

420. а) $\frac{2x+4}{3-x}+1=\frac{5-x}{x+2}$; б) $\frac{3x-5}{x+1}-\frac{x+5}{x-3}=2$.

421. а) $\frac{2x^2+8x-5}{x+3}-2x=1$; б) $2x-\frac{4x^2+3}{2x-1}=5$.

422. а) $\dfrac{4}{1+x}-\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x^2-3}{1-x^2}$; б) $\dfrac{2z-1}{2z+1}-\dfrac{2z+1}{2z-1}=\dfrac{8}{1-4z^2}$.

423. а) $\dfrac{3}{(x+2)^2}+\dfrac{2}{(x-2)^2}=\dfrac{5}{x^2-4}$;

б) $\dfrac{1}{(x+5)^2}-\dfrac{3}{(x-5)^2}=\dfrac{2}{25-x^2}$;

в) $\dfrac{2}{(1+x)^2}-\dfrac{5}{(1-x)^2}=\dfrac{3}{1-x^2}$;

г) $\dfrac{1}{(3-2x)^2}-\dfrac{4}{(3+2x)^2}=\dfrac{3}{9-4x^2}$.

424. а) $\dfrac{8+9x}{36x^2-1}+\dfrac{1}{1-6x}=\dfrac{2}{6x+1}$; б) $\dfrac{1-2x}{1+2x}=\dfrac{1+2x}{1-2x}+\dfrac{16}{4x^2-1}$.

425. а) $\dfrac{5}{2-2t}-\dfrac{5}{18}=\dfrac{8}{3t-3}-\dfrac{2+t}{t-1}$;

б) $\dfrac{3}{8-2x}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{14}{3x-12}-\dfrac{2+x}{x-4}$.

426. $\dfrac{2z-1}{z+4}-\dfrac{3z-1}{4-z}-\dfrac{96}{z^2-16}=5$.

427. $\dfrac{6n+5}{4n+3}+\dfrac{3n-7}{3-4n}+\dfrac{12n^2+30n+7}{9-16n^2}=0$.

428. $\dfrac{7}{(5+2x)(1+2x)}=\dfrac{3}{(5+2x)^2}+\dfrac{4}{(1+2x)^2}$.

429. $\dfrac{1}{(1-3z)^2}-\dfrac{3}{(11+3z)^2}=\dfrac{2}{(1-3z)(11+3z)}$.

Решите систему уравнений (430—434).

430. а) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4},\\[2mm]\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{y}=2,\\[2mm]\dfrac{10}{x}-\dfrac{6}{y}=-1.\end{cases}$

431. а) $\begin{cases} \dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{y}=51, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{8}{y}=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=35, \\ \dfrac{15}{x}-\dfrac{7}{y}=9. \end{cases}$

432. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{5}{8}, \\ \dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{3}{8}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{10}{z-5}+\dfrac{1}{x+2}=1, \\ \dfrac{25}{z-5}+\dfrac{3}{x+2}=2. \end{cases}$

433. а) $\begin{cases} 1+\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{y}{1-x^2}, \\ \dfrac{x-5}{3-y}=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3y}{9-x^2}+\dfrac{x}{x-3}=1, \\ \dfrac{5-y}{x-5}=2. \end{cases}$

434. а) $\begin{cases} x-\dfrac{xy+13}{y+6}=2, \\ y-\dfrac{xy-13}{x+4}=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{11-xy}{y+2}+x=2\dfrac{1}{7}, \\ \dfrac{13-xy}{x-1}+y=8. \end{cases}$

435. Какое число нужно прибавить к знаменателю дроби $\frac{2}{5}$, чтобы получить дробь, на $\frac{3}{20}$ меньше данной?

436. Какое число следует вычесть из знаменателя дроби $\frac{1}{12}$, чтобы значение дроби увеличилось на $\frac{1}{24}$?

437. Когда от верёвки отрезали 6 м, то оказалось, что отрезанная часть относится к остатку, как 2 : 7. Какова длина верёвки?

438. Один брат старше другого на 6 лет. Сколько лет каждому, если три года назад их возрасты относились, как 4 : 3?

439. Расстояние 160 км легковой автомобиль преодолевает на 2 ч быстрее, чем автобус. Определите их скорости, если они относятся, как 2 : 1.

440. Два тракториста, работая вместе, могут вспахать поле за 6 ч, а один первый — за 10 ч. За сколько часов может вспахать поле второй тракторист?

441. Бассейн наполняется водой через две трубы за 6 ч, а через одну трубу — за 10 ч. За сколько часов может наполниться бассейн, если открыть только вторую трубу?

442. Две бригады путейцев, работая вместе, могут отремонтировать дорогу за 12 дней. За сколько дней выполнила бы эту работу каждая бригада, если известно, что производительность первой в 1,5 раза выше, чем производительность второй?

443. Старинная задача. Один человек выпивает бочонок кваса за 14 дней, а вместе с женой — за 10 дней. За сколько дней жена одна выпила бы такой бочонок кваса?

444. **Задача-шутка.**

С женою вместе Елисей
съедают десять карасей,
а с сыном вместе восемь съест,
жена же с сыном — только шесть.
Так сколько для семейки всей
зажарить надо карасей?

445. Бассейн наполняется водой через одну трубу за 4 ч, через другую — за 2 ч. За какое время наполнится бассейн, если открыть одновременно обе трубы?

446. Один рабочий может собрать секционную мебель для кабинета математики за 9 ч, а второй — за 6 ч. Сколько времени понадобится для выполнения работы, если рабочие будут работать одновременно?

447. Катер прошёл 28 км по течению реки и 25 км — против течения. На весь путь понадобилось столько времени, сколько необходимо для прохождения 53 км в стоячей воде. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки составляет 2 км/ч.

448. Решите математические кроссворды, изображённые на рисунках 19 и 20.

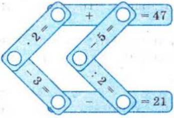


Рис. 19

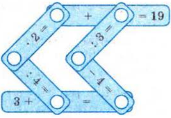


Рис. 20

449. Пассажирский поезд, скорость которого на 20 км/ч больше скорости товарного, затрачивает на путь между станциями A и B на 3 ч меньше, чем товарный поезд. У скорого поезда, скорость которого на 20 км/ч больше скорости пассажирского, уходит на этот путь в 2 раза меньше времени, чем у товарного. Найдите расстояние между A и B и скорость каждого поезда.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

450. Какие из чисел 7, 84, 0, $\frac{2}{9}$, 0,5, –8, $2\frac{1}{3}$, –24, 9 натуральные; какие — целые; какие — рациональные?

451. Докажите, что $10^{12} + 2$ делится на 3.

452. Докажите, что: а) $1 + 10^{10} + 10^{100}$ делится на 3;
б) $10^{15} + 8$ делится на 9; в) $10^{10} - 1$ делится на 9.

453. Постройте график функции:
а) $y = 3 - 2x$; б) $y = \frac{6-x}{2}$.

§10. СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Некоторые дроби часто записывают в виде степеней с отрицательными показателями. Например, вместо $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{m^5}$ пишут a^{-1}, x^{-2}, m^{-5}.

Вспомните, как делят степени с одинаковыми основаниями:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Рассматривая степени только с положительными показателями, отмечают, что последнее равенство верно только при $m > n$. Если это ограничение снять, то получим:

$$1 = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

Поэтому условились, что $a^0 = 1$ (если $a \neq 0$).

$$1 : a^n = a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n}.$$

Следовательно, желательно условиться, что

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

Итак, можно рассматривать степени с произвольными целыми показателями. Объясним кратко смысл этого понятия:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ раз}}, & \text{если натуральное число } n > 1, \\ a, & \text{если } n = 1; \\ 1, & \text{если } n = 0 \text{ и } a \neq 0; \\ \dfrac{1}{a^{-n}} & \text{если число } n \text{ — целое отрицательное и } a \neq 0. \end{cases}$$

Свойства степеней с целыми показателями такие же, как и степеней с натуральными показателями:

!

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$; 4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Докажем первое из этих тождеств (его называют **основным свойством степеней**) для случая, когда m и n — целые отрицательные числа. При этом условии $m = -p$ и $n = -q$, где p, q — натуральные числа. Поэтому

$$a^m \cdot a^n = a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{m+n}.$$

Аналогично можно доказать равенство $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ для случая, когда один из показателей m и n отрицательный, а другой — положительный или равен нулю.

Обратите внимание на степени, в которых основание или показатель равны нулю.

Если a и n не равны нулю, то

$$\boxed{a^0 = 1,\ 0^n = 0.}$$

Выражение 0^0 не имеет смысла, это не число, как и выражение $\frac{0}{0}$.

Выражения, содержащие степени с целыми показателями, можно преобразовать двумя способами: заменить их дробями либо использовать свойства степеней. Например, упростим выражение $9x^{-3} \cdot 3^{-2}x^6$.

Первый способ.

$$9x^{-5} \cdot 3^{-2} x^6 = 9 \cdot \frac{1}{x^5} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot x^6 = x.$$

Второй способ.

$$9x^{-5} \cdot 3^{-2}x^6 = 3^2 \cdot 3^{-2} \cdot x^{-5} \cdot x^6 = 3^{2-2} \cdot x^{-5+6} = 3^0 x = x.$$

Хотите знать ещё больше?

Обратите внимание на то, как расширяется понятие *степень*. Сначала вам были известны только *квадрат числа* и *куб числа*. Далее узнали о степенях чисел и переменных с произвольным *натуральным показателем*. Теперь вы ознакомитесь со степенями с произвольными *целыми показателями*. Со временем узнаете о степенях, показатели которых – произвольные рациональные и даже нерациональные числа.

Проверьте себя

1. Что такое квадрат числа, куб числа?
2. Сформулируйте определение степени числа с натуральным показателем *n*.
3. Что понимают под степенью числа с показателем 1?
4. Что понимают под степенью числа с показателем 0?
5. Что понимают под степенью числа с целым отрицательным показателем?
6. Запишите в виде формулы определение степени с произвольным целым показателем.

Выполним вместе!

1. Вычислите: а) $100 \cdot 2^{-2}$; б) $81 \cdot (-3)^{-4}$.

✔ Решение.

а) $100 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{100}{4} = 25$; б) $81 \cdot \frac{1}{(-3)^4} = \frac{81}{81} = 1$.

Ответ. а) 25; б) 1.

2. Запишите без знаменателя выражение $\frac{2}{ax^2}$.

✔ Решение. $\frac{2}{ax^2}=2\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x^2}=2a^{-1}x^{-2}$.

Ответ. $2a^{-1}x^{-2}$.

3. Упростите выражение: $(a-c)^{-1}\cdot(a^{-1}-c^{-1})$.

✔ Решение. $(a-c)^{-1}\cdot(a^{-1}-c^{-1})=\frac{1}{a-c}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)=$

$$=\frac{1}{a-c}\cdot\frac{c-a}{ac}=\frac{1}{a-c}\cdot\frac{a-c}{-ac}=-\frac{1}{ac}.$$

Ответ. $-\frac{1}{ac}$.

Выполните устно

454. Вычислите: а) 35^0; $(-8)^0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^0$; $1{,}23^0$; $\left(4\frac{1}{3}\right)^0$;

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$; $(-5)^{-1}$; $0{,}3^{-1}$; $0{,}02^{-1}$.

455. Как записать выражение без знаменателя:

$$\frac{1}{2^3};\ \frac{1}{3^2};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{7^4};\ \frac{1}{a^2};\ \frac{1}{c^5}?$$

456. Вычислите: а) 31^0+2^{-1}; б) $3+3^{-1}$; в) 2^2+2^{-2}; г) $(-1)^{-4}$.

457. Сгруппируйте степени: a^{-3}; a^{-2}; a^{-1}; a; a^2; a^3 попарно так, чтобы их произведения были равны между собой.

Уровень A

458. Замените степень с целым отрицательным показателем дробью:

а) 2^{-3}; б) 3^{-2}; в) 77^{-1};

г) b^{-3}; д) $(xy)^{-3}$; е) $(m-n)^{-2}$.

459. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем:

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{7^3}$; в) $\frac{1}{33^2}$;

г) $\frac{1}{ab}$; д) $\frac{1}{x^9}$; е) $\frac{1}{m^2+n^2}$.

460. Представьте числа:

а) $16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ в виде степени с основанием 2;

б) $81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$ в виде степени с основанием 3;

в) $625, 125, 25, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$ в виде степени с основанием 5;

г) $10\,000, 1\,000, 100, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10\,000}$ в виде степени с основанием 10.

Найдите значение выражения (461—462).

461. а) $3^{-4}\cdot 3^2$; б) $5^4\cdot 5^{-4}$; в) $0{,}5^{-3}\cdot 0{,}5^2$; г) $(-2)^{-3}\cdot(-2)^5$;

д) $\left(\frac{2}{3}\right)^7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5$; е) $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; ё) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot 2^2$.

462. а) $7\cdot 14^{-1}$; б) $-2^{-4}\cdot 48$; в) $(-4)^{-3} : \frac{1}{8}$;

г) $10 : (-5)^{-2}$; д) $-0{,}3^{-4}\cdot 0{,}81$; е) $0{,}1 : (-0{,}5)^{-3}$;

ё) $100\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; ж) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} : \frac{2}{9}$; з) $(1{,}5)^{-3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4$.

463. Упростите выражение:

а) $a^{-10}\cdot a^8$; б) $x^5\cdot x^0$; в) $c^{12}\cdot c^{-10}$; г) $a^3 : a^{-3}$.

464. Представьте в виде дроби выражение:

а) $3x^{-2}$; $\frac{3}{x^2}$ б) a^2c^{-3}; $\frac{a^2}{c^3}$ в) $4a^{-2}x^{-3}$; $\frac{4}{a^2x^3}$ г) $\frac{2}{3}a^2c^{-5}x^{-3}$. $\frac{2a^2}{3c^5x^3}$

465. Найдите значение выражения:

а) $800a^{-5}$, если $a = 2$;

б) $0{,}5a^{-2}x^{-5}$, если $a = 4$, $x = 0{,}5$.

Упростите выражение (466—4467).

466. а) $6x^{-2}c\cdot 1{,}5xc^{-3}$; б) $1{,}6x^{-1}y^{-5}\cdot\frac{5}{8}xy$; в) $\frac{3}{4}a^2n^{-4}\cdot 8a^{-3}n^2$;

г) $\frac{6x^{-5}}{a^{-6}}\cdot\frac{a}{36x^{-9}}$; д) $\frac{8x^2}{z}\cdot\frac{z^{-3}}{16x^{-3}}$; е) $\frac{14c^{-17}}{x^{-8}}\cdot\frac{x}{7c^{-18}}$.

467. а) $\frac{1}{6}p^2q^{-5}\cdot\frac{1}{2}p^{-1}q^{-3}$; б) $15ac^{-2}:a^2c$; в) $3{,}6x^4y^5:xy^5$;

г) $\frac{6x^{-5}}{y^{-6}}\cdot\frac{y}{36x^{-7}}$; д) $\frac{5x^{-1}c}{3}\cdot\frac{9x^5}{c^{-3}}$; е) $\left(\frac{a^{-2}}{10^4x}\right)^2\cdot(ax^{-1})^2$.

Представьте степень в виде произведения (468—469):

468. а) $(0{,}5x^{-3}y^2)^{-2}$; б) $(6a^2b)^{-1}$; в) $(-0{,}2m^2n^{-4})^{-3}$;

г) $\left(\frac{1}{2}x^3y^{-2}\right)^{-3}$; д) $\left(\frac{5}{6}m^{-8}n\right)^{-1}$; е) $(-0{,}3x^{-3}y)^2$.

469. а) $(xz^{-2})^{-3}$; б) $(a^3y^{-2})^4$; в) $(5a^{-3}b)^{-1}$;

г) $\left(1\frac{1}{3}a^4b^{-2}\right)^2$; д) $(-0{,}1ab)^{-2}$; е) $(-2m^5n^{-1})^{-1}$.

470. На рисунке 21 изображена развёртка куба. Напишите на каждой её грани одно из выражений a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} таким образом, чтобы произведение на двух противоположных гранях было равно произведению на двух других противоположных гранях.

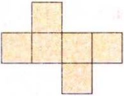


Рис. 21

Уровень Б

Вычислите значение выражения (471—474).

471. а) $\left(\frac{3}{2}\right)^2-4^{-1}\cdot 5$; б) $-\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}+0{,}25^2\cdot 11^2$;

в) $2\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}+35\cdot 2^{-3}$; г) $0{,}6^{-3}:1\frac{2}{3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

472. а) $1000^{-2} : 0{,}1^5 + \frac{2}{5}$; б) $0{,}1^{-1} - 1{,}1^0 : 10^{-1}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (0{,}05)^{-2} + (-0{,}2)^{-3}$; г) $(-0{,}8)^3 : \left(-1\frac{1}{4}\right)^{-2} + 2{,}8$.

473. а) $0{,}064^2 : 0{,}16^3$; б) $0{,}0081^3 \cdot 0{,}3^{-10}$; в) $\frac{125^5}{25^8 \cdot 5^{-3}}$;

г) $\frac{(6^6)^2 \cdot 36^{-2}}{6^{10}}$; д) $\frac{0{,}8^7 \cdot 0{,}16^{-4}}{0{,}64^3 \cdot 0{,}4^{-7}}$; е) $\frac{9^{-4} \cdot 27^3}{100^5 \cdot 10^{-12}}$.

474. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$; б) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-9} : \frac{2}{3}$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \frac{32}{81} - \left(\frac{3^0}{3}\right)^{-1}$; г) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-2} : \frac{6}{7} - \left(1\frac{8}{17}\right)^{-1}$;

д) $\left(\frac{4}{5} + 4^{-2} + 0{,}2 : 5^{-2}\right)^{-1}$.

Упростите выражение (475—477).

475. а) $0{,}2x^{-3} \cdot 5x^2y^3$; б) $3^{-3}a^{-1}x \cdot 81a^2x$; в) $0{,}2c^{-5}x \cdot 5^{-2}c^3x^{-1}$;

г) $0{,}5x^{-6}y^2 \cdot 4x^7y^{-2}$; д) $8a^{-3}b^3 \cdot 0{,}25a^5b^{-1}$;

е) $9a^6b^{-2} : (-3a^2b^{-5})$.

476. а) $\frac{27x^{-1}y^2}{10} \cdot \frac{5x^6}{9y^{-4}}$; б) $\frac{12x^2}{7y^7} \cdot \frac{14y^9}{3x^{-2}}$;

в) $\frac{16a^4b^6}{c^7} : \frac{8b^6c^{-6}}{3a^{-3}}$; г) $\frac{3x^8}{4y^3z^{-2}} : \frac{x^7y^{-4}}{12z^{-2}}$.

477. а) $\left(\frac{x^2y^{-3}}{6z}\right)^{-3} : \left(\frac{x^3y^{-5}}{9z}\right)^{-2}$; б) $\left(\frac{a^{-3}b^4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}$;

в) $(2a^{-2}x^3)^2 \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^6$; г) $4a^7c^{-1} \cdot \left(\frac{ac}{5}\right)^{-1}$;

д) $(x^{-1}y) : \left(\frac{y^2}{2x^2}\right)^{-1}$.

Упростите выражение и найдите его значение (478—479).

478. а) $2{,}2a^{-8}b^5 \cdot 5a^{10}b^{-4}$ при $a=-0{,}2$, $b=50$;

б) $2{,}8x^9y : (0{,}7x^{10}y^{-2})$ при $x=0{,}125$, $y=-0{,}25$.

479. а) $\dfrac{14a^{-7}}{b^{-3}} \cdot \dfrac{b^{-2}}{56a^{-5}}$ при $a=1{,}5$, $b=45$;

б) $\dfrac{21x^{15}}{10y^{-5}} : \dfrac{7x^{12}}{5y^{-2}}$ при $x=\dfrac{3}{7}$, $y=2\dfrac{1}{3}$.

480. Докажите, что выражение принимает одно и то же значение при любом целом n:

а) $\dfrac{5^{2n+1}}{25^n}$; б) $\dfrac{2^{n-1}\cdot 3^{n+1}}{6^n}$; в) $\dfrac{4^{n+1}-4^n}{2^{2n}}$; г) $\dfrac{2\cdot 3^n+3^n}{2\cdot 3^{n+1}}$.

481. Сократите дробь (n — целое число):

а) $\dfrac{4^{n+2}-4^n}{15}$; б) $\dfrac{5^{n+1}+5^{n+3}}{26}$; в) $\dfrac{3^n+1}{3^{-n}+1}$; г) $\dfrac{6^{-n}+6^n}{36^n+1}$.

482. Упростите выражение (n — целое число):

а) $\dfrac{x^{6n}y^{n+4}}{x^{2n}y^{n+5}}$; б) $\dfrac{a^{3n}b^{n-3}}{a^{2n}b^{n-5}}$; в) $\dfrac{x^{-2n}+x^n}{x^{-n}}$; г) $\dfrac{a^{2n}-a^{-3n}}{a^{-2n}}$.

Упростите выражение (483—486).

483. а) $\dfrac{x^7+x^{13}}{x^{-3}+x^3}$; б) $\dfrac{a^8+a^{12}}{a^{-8}+a^{-12}}$;

в) $\dfrac{x^4+2x^6+x^7}{2+x+x^{-2}}$; г) $\dfrac{x^4+3x^5+x^6}{x^{-4}+3x^{-5}+x^{-6}}$.

484. а) $(a^{-1}-c^{-1}) : \dfrac{a^2-c^2}{ac}$; б) $\dfrac{1}{a^{-3}-x^{-3}} - \dfrac{1}{a^{-3}+x^{-3}}$.

485. а) $(m^{-1}+n^{-1})^2+(m^{-1}-n^{-1})^2$; б) $(c^{-2}-c^2)^2-c^{-4}+2$.

486. а) $(x-y)^{-2}(x^2-y^2)$; б) $(a^{-3}-b^{-3})^{-1}-(a^{-3}+b^{-3})^{-1}$.

Решите уравнение (487—488).

487. а) $2x^{-1}-x^{-1}=2$; б) $x^{-2}-x^{-1}=0$; в) $x^{-1}-4x^{-3}=0$.

488. а) $x^{-1}+x=2$; б) $(2x-1)x^{-1}=x$.

489. Может ли значение выражения $\frac{c^{-2}}{c^{-2}-1}$ быть равным 0 или 1? Может ли оно быть больше 1?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

490. Выполните умножение:

а) $(2x-3)(y+1)$; б) $(x-a)(y-b)$;

в) $(m+5)(n-m)$; г) $(6-a)(2b-a)$.

491. Представьте выражение в виде произведения трёх или четырёх множителей:

а) $16a^4-1$; б) $81-x^{12}$; в) $(x^2+xy+y^2)^2-x^2y^2$;

г) $a^2b^2-(a^2+ab-b^2)^2$.

492. На диаграмме (рис. 22) показано количество тетрадей, альбомов, блокнотов и ручек, проданных магазином за неделю. Названия предметов не указаны, но известно, что тетрадей продали больше всего, альбомов — вдвое меньше, чем блокнотов. Сколько чего было продано?

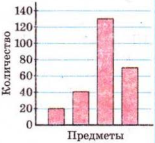
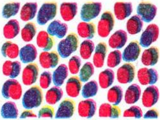


Рис. 22

493. Постройте график уравнения:

а) $2x-3y=0$; б) $2x+3y=x$.

§11. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ЧИСЛА



Если имеют дело с очень большими или очень малыми числами, то такие числа удобно записывать в ***стандартном виде***, то есть в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$ и число n — целое. Показатель степени n называют ***порядком числа*** $a \cdot 10^n$. Массу Земли, которая равна 6 000 000 000 000 000 000 000 т, в стандартном виде записывают так: $6 \cdot 10^{21}$ т. А массу атома Гидрогена

0,0000000000000000000017 г в стандартном виде записывают так: $1,7 \cdot 10^{-21}$ г. Порядок массы Земли равен 21, а порядок массы атома Гидрогена составляет −21.

Над числами, записанными в стандартном виде, математические действия можно выполнять так же, как над одночленами. Но для этого надо научиться преобразовывать произведения вида $a \cdot 10^n$ в равные им произведения с другими показателями степеней. Чтобы значение такого произведения не изменилось при увеличении показателя степени n на 1, 2, 3, значение a необходимо уменьшить соответственно в 10, 100, 1000 раз. Напротив, уменьшая n на 1, 2, 3, значение a надо увеличить соответственно в 10, 100, 100 раз.

Например,

$35 \cdot 10^5 = 3,5 \cdot 10^6$; $0,23 \cdot 10^8 = 2,3 \cdot 10^7$;

$227 \cdot 10^{-4} = 2,27 \cdot 10^{-2}$; $0,024 \cdot 10^{14} = 2,4 \cdot 10^{12}$.

Как выполнять действия с числами, записанными в стандартном виде, покажем на примерах.

Если $a = 1,5 \cdot 10^8$, $b = 2,4 \cdot 10^7$, то:

$$a \cdot b = (1,5 \cdot 10^8) \cdot (2,4 \cdot 10^7) = 1,5 \cdot 2,4 \cdot 10^8 \cdot 10^7 = 3,6 \cdot 10^{15};$$

$$a : b = (1,5 \cdot 10^8) : (2,4 \cdot 10^7) = (15 \cdot 10^7) : (2,4 \cdot 10^7) = 6,25;$$

$$a + b = 1,5 \cdot 10^8 + 0,24 \cdot 10^8 = (1,5 + 0,24) \cdot 10^8 = 1,74 \cdot 10^8;$$

$$a - b = 1,5 \cdot 10^8 - 0,24 \cdot 10^8 = (1,5 - 0,24) \cdot 10^8 = 1,26 \cdot 10^8.$$

Обратите внимание! Числа, записанные в стандартном виде, выражают преимущественно приближённые значения величин. Это объясняется тем, что так часто записывают значения расстояний, площадей, масс, объёмов, скоростей, температур, которые почти всегда приближённые.

Например, масса Луны равна $7,35 \cdot 10^{22}$ кг, то есть 73 500 000 000 000 000 000 000 кг. Является ли это значение точным? Нет, это приближённое значение. Все нули в этом числе — цифры не точные, а округлённые. Значащими являются только три первые цифры: 7, 3 и 5. А все нули заменяют неизвестные нам точные цифры.

Вообще, если значение величин записывают в стандартном виде, то есть $a \cdot 10^n$, то число a — точное, все его цифры являются значащими. А все нули, полученные при умножении a на 10^n, — это результат округления.

Хотите знать ещё больше?

Как следует понимать выражение *число x больше, чем y, на порядок?* Это означает, что число x больше y приблизительно в 10 раз. Например,

$2 \cdot 10^7$ и $9 \cdot 10^7$ — числа одного порядка;

$2 \cdot 10^7$ больше, чем $9 \cdot 10^6$, на порядок, поскольку $7 - 6 = 1$;

$2 \cdot 10^7$ меньше, чем $8 \cdot 10^{10}$, на три порядка, поскольку $10 - 7 = 3$.

Проверьте себя

1. Что такое стандартный вид числа?
2. Приведите пример числа, записанного в стандартном виде.
3. Что такое «порядок числа»?
4. Укажите порядок чисел 327, 0,5, 0,000026.
5. Первое число меньше, чем второе, в 100 раз. На сколько порядков второе число больше первого?

Выполним вместе!

1. Запишите в стандартном виде число:
а) 320; б) 0,4; в) 1000 000; г) 0,00000027.

✔ Решение.
а) $320 = 3{,}2 \cdot 10^2$; б) $0{,}4 = 4 \cdot 10^{-1}$;
в) $1\,000\,000 = 1 \cdot 10^6$; г) $0{,}00000027 = 2{,}7 \cdot 10^{-7}$.

2. Найдите произведение, частное, сумму, разность чисел $x = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ и $y = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$.

✔ Решение. $xy = (4{,}5 \cdot 1{,}5) \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-6} = 6{,}75 \cdot 10^{-13}$;
$x : y = (4{,}5 : 1{,}5) \cdot (10^{-7} : 10^{-6}) = 3 \cdot 10^{-7-(-6)} = 3 \cdot 10^{-1}$;
$x + y = 4{,}5 \cdot 10^{-7} + 15 \cdot 10^{-7} = 19{,}5 \cdot 10^{-7} = 1{,}95 \cdot 10^{-6}$;
$x - y = 4{,}5 \cdot 10^{-7} - 1{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}45 \cdot 10^{-6} - 1{,}5 \cdot 10^{-6} =$
$= -1{,}05 \cdot 10^{-6}$.

Выполните устно

494. Какое из чисел записано в стандартном виде:
а) $0{,}35 \cdot 10^{12}$; б) $2 \cdot 10^{30}$; в) $32{,}4 \cdot 10^8$;

г) $2{,}5 \cdot 10^{-4}$; д) $5 \cdot 100^{4}$; е) $0{,}23 \cdot 10^{6}$?

495. Укажите порядок числа:

а) $3{,}07 \cdot 10^{7}$; б) $5{,}9 \cdot 10^{8}$; в) $6{,}2 \cdot 10^{-8}$;
г) 300 000; д) 8 320 000; е) 0,000008.

496. Вычислите:

а) $2 \cdot 10^{4} + 3 \cdot 10^{4}$; б) $5 \cdot 10^{7} - 3 \cdot 10^{7}$;
в) $(2 \cdot 10^{7}) \cdot (3 \cdot 10^{7})$; г) $(6 \cdot 10^{9}) : (3 \cdot 10^{9})$.

Уровень A

Запишите без показателя степени (**497—498**).

497. а) $7 \cdot 10^{5}$; б) $2{,}3 \cdot 10^{8}$; в) $4{,}7 \cdot 10^{10}$; г) $3{,}02 \cdot 10^{13}$.

498. а) $9 \cdot 10^{-8}$; б) $3{,}5 \cdot 10^{-12}$; в) $1{,}9 \cdot 10^{-9}$; г) $9{,}83 \cdot 10^{-11}$.

Запишите в стандартном виде число (**499—500**).

499. а) 370 000 000; б) 4 250 000 000; в) 1 002 000 000.

500. а) 0,000 000 053; б) 0,000 000 000 27;
в) 0,000 000 034 05.

501. Запишите в стандартном виде массу:
а) Луны — 73 500 000 000 000 000 000 т;
б) Солнца — 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 т.

502. Масса Земли равна 5 980 000 000 000 000 000 000 т, а масса Луны — 73 500 000 000 000 000 000 т. На сколько тонн масса Земли превышает массу Луны?

503. Выразите:

а) $2{,}6 \cdot 10^{3}$ т в граммах; б) $4{,}75 \cdot 10^{12}$ см в метрах;
в) $1{,}44 \cdot 10^{9}$ г в тоннах; г) $9{,}6 \cdot 10^{5}$ см в километрах;
д) $3{,}4 \cdot 10^{-8}$ т в граммах; е) $3{,}2 \cdot 10^{8}$ м^{2} в гектарах.

504. Выполните действия, результат запишите в стандартном виде:

а) $8 \cdot 10^{5} + 4 \cdot 10^{5}$; б) $15 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-8}$;
в) $(2 \cdot 10^{7}) \cdot 30$; г) $(8 \cdot 10^{-9}) : 400$.

505. Выполните действия над числами, записанными в стандартном виде:

а) $(5,2 \cdot 10^9) \cdot (5 \cdot 10^{-2})$; б) $8,4 \cdot 10^6 + 5,6 \cdot 10^6$;

в) $(9,6 \cdot 10^{-12}) : (3,2 \cdot 10^{-16})$; г) $9,5 \cdot 10^{-5} - 8,6 \cdot 10^{-5}$.

506. Найдите произведение чисел $5 \cdot 10^6$ и $8 \cdot 10^9$, а также порядок каждого множителя и произведения.

507. Найдите квадрат и куб числа:

а) $4 \cdot 10^{-12}$; б) $1,3 \cdot 10^{-6}$.

508. Плотность алюминия составляет $2,7 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите массу алюминиевого куба, ребро которого равно:

а) 0,2 м; б) 10^{-3} м; в) $2,5 \cdot 10^{-2}$ дм.

509. Скорость света равна $3 \cdot 10^5$ км/с. Какое расстояние свет проходит за: а) 5 с; б) 1 год?

510. В таблице указаны массы и радиусы семи планет Солнечной системы.

Планета	M, кг	R, м
Меркурий	$3,26 \cdot 10^{23}$	$2,42 \cdot 10^6$
Венера	$4,88 \cdot 10^{24}$	$6,10 \cdot 10^6$
Марс	$6,43 \cdot 10^{23}$	$3,38 \cdot 10^6$
Юпитер	$1,90 \cdot 10^{27}$	$7,13 \cdot 10^7$
Сатурн	$5,69 \cdot 10^{26}$	$6,04 \cdot 10^7$
Уран	$8,69 \cdot 10^{25}$	$2,38 \cdot 10^7$
Нептун	$1,04 \cdot 10^{26}$	$2,22 \cdot 10^7$

По данным таблицы:

а) выразите диаметры планет в километрах;
б) найдите массы планет в тоннах;
в) перечислите планеты в порядке возрастания их масс;
г) вычислите, во сколько раз масса Нептуна больше, чем масса Меркурия;
д) сравните радиусы Урана и Марса. Какой из них больше? Вычислите, на сколько метров;
е) сравните радиусы и массы Урана и Нептуна. Сделайте вывод.

$\begin{array}{r} \times 16 \\ 4 \\ \hline 64 \end{array}$

Уровень Б

511. Выполните действия:

а) $(2,8 \cdot 10^5) \cdot (2,5 \cdot 10^{-7})$; б) $(1,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (9,2 \cdot 10^{-4})$;

в) $(5,7 \cdot 10^4) : (3,8 \cdot 10^{-3})$; г) $(1,56 \cdot 10^{-2}) : (2,6 \cdot 10^{-6})$;

д) $6,2 \cdot 10^{-2} + 4,8 \cdot 10^{-2}$; е) $5,1 \cdot 10^5 - 2,9 \cdot 10^6$.

Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел (512—513).

512. а) $1,8 \cdot 10^4$ и $6 \cdot 10^3$; б) $8 \cdot 10^{-6}$ и $4 \cdot 10^{-6}$.

513. а) $6,5 \cdot 10^7$ и $5 \cdot 10^6$; б) $3,2 \cdot 10^{-5}$ и $4 \cdot 10^{-4}$.

514. Округлите число до десятков, полученный результат запишите в стандартном виде:
а) 1427; б) 155,678; в) 54,23; г) 4911,2.

515. Округлите число до единиц, полученный результат запишите в стандартном виде:
а) 157,415; б) 8901,5; в) 18,9; г) 315,5.

516. Сравните числа:

а) $4,2 \cdot 10^6$ и $3,95 \cdot 10^6$; б) $2,1 \cdot 10^{-5}$ и $2 \cdot 10^{-5}$;

в) $5,8 \cdot 10^9$ и $7,5 \cdot 10^8$; г) $7,3 \cdot 10^{-7}$ и $6,4 \cdot 10^{-6}$;

д) $2,26 \cdot 10^{20}$ и $8,12 \cdot 10^{19}$; е) $4,71 \cdot 10^{-12}$ и $5 \cdot 10^{-13}$.

517. Порядок числа a равен -12. Каков порядок числа:

а) $1000a$; б) $0,0001a$; в) $a \cdot 10^{15}$; г) $\frac{a}{10^{-20}}$?

518. Зная приближённые значения $x \approx 3,7 \cdot 10^{11}$ и $y \approx 8,5 \cdot 10^{10}$, вычислите:
а) xy; б) $x : y$; в) $x + y$; г) $x - y$.

519. Известно, что первая космическая скорость равна $7,9 \cdot 10^3$ м/с, вторая — $1,12 \cdot 10^4$ м/с, третья — $1,667 \cdot 10^4$ м/с. Выразите эти скорости в километрах в секунду и запишите полученные результаты в стандартном виде.

520. Какое расстояние в метрах пролетит за 1 ч спутник, имеющий первую космическую скорость?

521. Скорость света $v = 3 \cdot 10^8$ м/с. Какое расстояние свет преодолевает за 1 год? За сколько секунд проходит 10 км?

522. Выразите:

а) $2{,}5 \cdot 10^3$ м^2 в см^2 и км^2; б) $3{,}7 \cdot 10^2$ м^3 в см^3 и км^3.

523. Известно, что масса Юпитера равна $1{,}90 \cdot 10^{27}$ кг, а Земли — $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг. Что больше: масса Юпитера или масса Земли? Во сколько раз? На сколько порядков?

524. Плотность стали $7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите массу стального листа размером $1{,}5 \times 8 \cdot 10^{-1} \times 2 \cdot 10^{-3}$ м.

525. По данным таблицы:

а) запишите данные значения величин в стандартном виде;

б) округлите значение скорости света в вакууме так, чтобы она имела только одну значащую цифру;

в) сравните (приблизительно) радиус Солнца и расстояние от Земли до Луны;

г) вычислите, на сколько порядков расстояние от Земли до Солнца больше, чем расстояние от Земли до Луны;

д) вычислите, на сколько порядков диаметр эритроцита больше (или меньше), чем диаметр молекулы воды.

Числа «лилипуты» и числа «великаны»

«Лилипуты»	«Великаны»
0,000 000 000 28 м — диаметр молекулы воды	299 792 458 м/с — скорость света в вакууме
0,000 000 000 6 м — толщина плёнки мыльного пузыря	696 000 000 м — радиус Солнца
0,000 003 75 м — радиус эритроцита	510 083 000 км^2 — площадь поверхности Земли
0,000 000 000 000 000 000 001 7 мг — масса атома Водорода	384 400 000 м — расстояние от Земли до Луны
0,000 000 000 001 с — время существования атомов сверхтяжёлого Водорода	149 600 000 000 м — расстояние от Земли до Солнца

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

526. Найдите произведение и частное чисел, сумма и разность которых равны: а) 1,5 и 0,5; б) a и c.

527. Найдите среднее арифметическое чисел 2, 4 и x.

528. Решите уравнение:
а) $|2x-1|=5$; б) $|6-x|=2x$.

529. Представьте в виде многочлена:
а) $(x^n+1)^2$; б) $(a^{2m}-1)^2$; в) $(a^n+a^m)^2$;

г) $(x^{n-1}-x)^2$; д) $\left(\frac{1}{2}y^m+y^{2m}\right)^2$; е) $\left(\frac{1}{4}b^n-2b^2\right)^2$.

§12. ФУНКЦИЯ $y=\frac{k}{x}$

Вы уже знаете, что *функция* — это **соответствие между двумя переменными, при котором каждому значению одной переменной соответствует единственное значение другой переменной.** Вспомните, что такое *аргумент* функции, её *область определения*, *множество значений*, как задают функции (см. с. 248).

Далее мы рассмотрим функцию, заданную формулой $y=\frac{k}{x}$, где k — произвольное действительное число, отличное от нуля; аргумент x может принимать не только положительные, но и отрицательные значения.

Например, дана функция $y=\frac{6}{x}$. Область её определения — множество всех действительных чисел, кроме $x=0$ (поскольку на нуль делить нельзя). Составим таблицу значений этой функции для нескольких значений аргумента:

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y	–1	–1,2	–1,5	–2	–3	–6	—	6	3	2	1,5	1,2	1

Обозначим точки, координаты которых приведены в таблице (рис. 23, *а*). Если бы на этой же координатной плоскости было нанесено больше точек, координаты которых удовлетворяют равенство $y=\frac{6}{x}$, то они разместились бы так, как показано на рисунке 23, *б*. Если для каждого действительного значения x, кроме $x = 0$, по формуле $y=\frac{6}{x}$ вычислить соответствующее значение y и нанести все точки с полученными координатами на координатную плоскость, то получим график данной функции (рис. 23, *в*). Такую линию называют ***гиперболой***. Гипербола состоит из двух ветвей.

График функции $y=\frac{6}{x}$ — гипербола, симметричная относительно начала координат. Её ветви располагаются в I и III координатных углах. (Оси координат делят координатную плоскость на четыре координатных угла, их также называют координатными четвертями, или квадрантами, и нумеруют, как показано на рисунке 24.).

Если таким способом построить график функции $y=\frac{-12}{x}$, то получим также гиперболу, только её ветви будут располагаться в II и IV координатных углах (рис. 25).

График каждой функции $y=\frac{k}{x}$, где k — отличное от нуля данное число, — это гипербола, симметричная относительно начала координат.

Если $k > 0$, то ветви такой гиперболы расположены в I и III координатных углах, если $k < 0$, — то во II и IV.

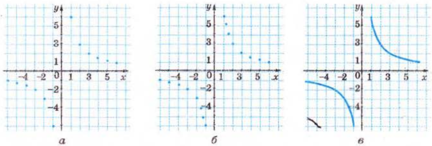


Рис. 23

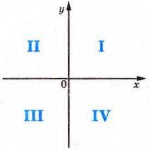


Рис. 24

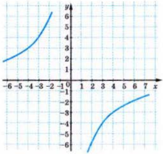


Рис. 25

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ для разных значений k можно определить по графикам, представленным, например, на рисунках 23, *в* и 25. Приводим их в виде таблицы.

Свойства функции	Вид функции	
	$y = \frac{k}{x} (k > 0)$	$y = \frac{k}{x} (k < 0)$
Область определения	Все числа, кроме $x = 0$	Все числа, кроме $x = 0$
Область значений	Все числа, кроме $y = 0$	Все числа, кроме $y = 0$
Положительные значения	$x > 0$	$x < 0$
Отрицательные значения	$x < 0$	$x > 0$
Промежутки убывания	$x < 0$ и $x > 0$	—
Промежутки возрастания		$x < 0$ и $x > 0$

Хотите знать ещё больше?

Функцию, заданную формулой $y = \frac{k}{x}$, обычно называют *обратной пропорциональностью* (в отличие от функции $y = kx$, которую называют прямой пропорциональностью). Ранее обратной пропорциональностью вы называли соответствие, при котором с увеличением одной переменной в несколько раз значения второй уменьшались во столько же раз. Так бывает лишь в случае, когда k и x — положительные числа. Если в функции $y = \frac{k}{x}$ число k — отрицательное, то с увеличением значений x в несколько раз значения y также увеличиваются во столько же раз (рис. 26).

Используя степень с отрицательным показателем, функцию $y = \frac{k}{x}$ можно записать так: $y = kx^{-1}$. Иногда её записывают и так: $yx = k$.

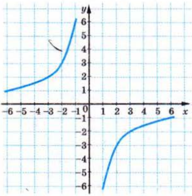


Рис. 26

Пример. Является ли обратной пропорциональностью зависимость, заданная равенством:

а) $y = \frac{k}{|x|}$; б) $y = \frac{k}{x^2}$?

Ответ. а) Нет; б) нет.

Проверьте себя

1. Что такое «функция», «аргумент функции»?
2. Что такое «область определения функции»?
3. Какую функцию называют линейной, какую — прямой пропорциональностью?
4. Приведите примеры прямой пропорциональности.
5. Как называют график обратной пропорциональности?

Выполним вместе!

1. Функция задана формулой $y = \frac{n}{x}$. Найдите значение n, если график функции проходит через точку $A\ (5;\ 2)$.

   ✔ Решение. Подставим значения $x = 5$ и $y = 2$ в формулу, которой задана функция. Получим $2 = \frac{n}{5}$. Следовательно, $n = 10$.

2. Решите графическое уравнение
$$x + 2 = \frac{3}{x}.$$

   ✔ Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = x + 2$ и $y = \frac{3}{x}$ (рис. 27). Графики пересекаются в точках P и Q, абсциссы которых равны приблизительно 1 и −3. Проверяем, точное

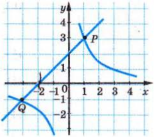


Рис. 27

это значение или приближённое: $1+2=3$, $-3+2=-1$.

Ответ. $x_1=1$, $x_2=-3$.

Выполните устно

530. Какая из заданных функций является прямой пропорциональностью:

а) $y=2x$; б) $y=-\frac{2}{3}x$; в) $y=3x-1$?

531. Какая из заданных функций является обратной пропорциональностью:

а) $y=\frac{6}{x}$; б) $y=\frac{x}{6}$; в) $y=3x^{-1}$; г) $y=-3x$?

532. Укажите область определения функции:

а) $y=\frac{5}{x-2}$; б) $y=\frac{5}{x}-2$; в) $y=\frac{1}{x^2-4}$; г) $y=\frac{x-3}{x^2-9}$.

533. В каких четвертях координатной плоскости находится график функции:

а) $y=\frac{12}{x}$; б) $y=-\frac{8}{x}$; в) $y=x^{-1}$?

534. Чем отличаются графики функций:

а) $y=\frac{-3}{x}$ и $y=-\frac{3}{x}$; б) $y=\frac{1}{z}$ и $y=z^{-1}$?

Уровень А

535. Стороны прямоугольника равны x и y, площадь — 60 см^2. Выразите формулой зависимость y от x.

536. Известно, что сила тока I в проводнике пропорциональна напряжению на концах проводника U и обратно пропорциональна его сопротивлению R. Запишите эту зависимость с помощью формулы.

537. Составьте таблицу значений функции $y=\frac{-12}{x}$ для натуральных значений x, если $-6 \le x \le 6$.

538. Составьте таблицу значений функции $y=\frac{12}{x}$ для натуральных значений x, которые меньше 13. Запишите несколько пропорций из чисел этой таблицы.

539. Функция задана формулой $y = \frac{16}{x}$. Заполните таблицу:

x	-32		-2	$-0{,}5$				8
y		-1			16	8	4	

540. Обратная пропорциональность задана формулой $y = -\frac{10}{x}$. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, которое равно -1000; -100; $0{,}1$; $0{,}02$; 50. При каком значении аргумента значение функции равно -100; -40; 2; 100; 200?

541. Функция задана формулой $y = \frac{10}{x}$. Какое значение функции соответствует значению $x = 0{,}2$? При каком значении аргумента значение функции равно -5?

542. На рисунке 28 построен график обратной пропорциональности, заданной формулой $y = -\frac{4}{x}$. Найдите по графику:

а) значение y, которому соответствует значение x, равно -5; -4; -1; $-0{,}8$; $1{,}6$; 2; 4;

б) значение x, которому соответствует значение y, равное -4; $-2{,}6$; -2; $0{,}8$; 1; $1{,}6$; 5.

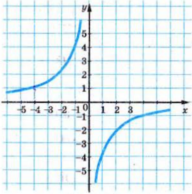


Рис. 28

543. Какие из точек $A(-8; 1)$, $B(16; 0{,}5)$, $C(0; 0)$, $D(0{,}01; -800)$, $E(-32; 0{,}25)$, $F(80; 0{,}1)$, $G(100; -0{,}08)$, $K(-0{,}08; 1000)$ принадлежат графику функции $y = -\frac{8}{x}$?

544. Постройте график функции:

а) $y = \frac{12}{x}$; б) $y = -\frac{12}{x}$; в) $y = \frac{4}{x}$; г) $y = -\frac{1}{x}$.

545. Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{0,5}{x}$; б) $y=\frac{3}{x+1}$; в) $y=-\frac{5}{x-5}$; г) $y=\frac{1}{x}-2$.

546. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y=\frac{2}{x}$; б) $y=-\frac{2}{x}$; в) $y=\frac{9}{x}$; г) $y=-\frac{9}{x}$.

547. Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{1}{2x}$; б) $y=\frac{8}{x}$; в) $y=\frac{12}{x-5x}$; г) $y=\frac{4}{3x}-\frac{3}{2x}$;

д) $y=\frac{3}{x}+1$; е) $y=2-\frac{1}{x}$; ё) $y=\frac{1}{x-2}$; ж) $y=\frac{16}{x+4}$.

548. Функция задана формулой $y=\frac{8}{x}$. Заполните таблицу:

x							
y	1	2	4	8	16	32	64

549. Пересекает ли график функции $y=\frac{2}{x}$ ось абсцисс; ось ординат?

550. При каком значении k график функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку:

а) $A(1; 1)$; б) $B(2; 3)$; в) $C(1; -3)$?

551. График какой функции изображён на рисунках 29 и 30?

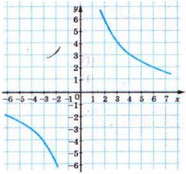


Рис. 29

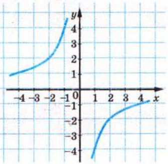


Рис. 30

552. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(2; 1)$. Проходит ли он через точку: $B(1; 2)$, $C(-2; -1)$, $K(-1; -2)$?

553. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(-3; 3)$. Покажите, что он проходит и через точку $B(3; -3)$. Обобщите задачу.

554. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{30}{x}$ и $y = -\frac{30}{x}$ для $x > 0$. Как размещены эти графики?

555. Верно ли, что при равномерном движении время, необходимое поезду для прохождения 10 км пути, обратно пропорционально скорости?

556. Три трактора должны вспахать поле за 48 ч. За сколько часов вспашут поле четыре таких трактора?

Уровень Б

557. На рисунке 31 изображён график зависимости времени, затраченного на путь из пункта A в пункт B, от скорости движения. Какое расстояние между A и B? Сколько потребуется времени, чтобы прибыть из A в B, двигаясь со скоростью 6 км/ч; 30 км/ч; 60 км/ч? С какой скоростью необходимо двигаться, чтобы попасть из A в B за 1 ч; 2 ч; 10 ч?

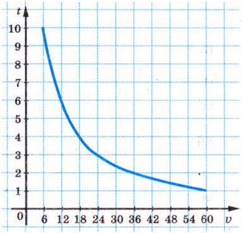


Рис. 31

558. Изобразите формулой зависимость давления постоянной силы F на площадь поверхности S. Является ли эта зависимость обратной пропорциональностью?

559. С увеличением высоты над уровнем моря снижаются атмосферное давление и температура воздуха. Является ли каждая из этих зависимостей обратной пропорциональностью?

560. Медный и алюминиевый бруски имеют одинаковую массу. Какой из них имеет больший объём и во сколько раз? Плотность меди составляет 8,6 г/см^3, алюминия — 2,6 г/см^3.

561. Постройте в одной системе координат графики функций $y=\frac{6}{x}$ и $y=5-x$. С помощью этих графиков определите корни уравнения $\frac{6}{x}=5-x$.

562. Постройте в одной системе координат графики функций:

а) $y=\frac{8}{x}$ и $y=2x$; б) $y=\frac{12}{x}$ и $y=x-4$;

в) $y=-\frac{6}{x}$ и $y=1-\frac{x}{3}$; г) $y=-\frac{4}{x}$ и $y=-2x-2$.

Укажите координаты точек их пересечения.

563. При каких значениях k и b гипербола $y=\frac{k}{x}$ и прямая $y=kx+b$ проходят через точку:

а) $K(3; 4)$; б) $L(-4; 6)$; в) $M(-1; -8)$; г) $N(2; -2)$?

564. Постройте график уравнения:

а) $\frac{1}{4}xy=4$; б) $xy=-6$; в) $2xy=1$.

565. Постройте график функции:

а) $y=\frac{1}{|x|}$; б) $y=\frac{1}{|x|}+1$; в) $y=\frac{1}{x^2}$; г) $y=x^{-2}-2$.

Найдите область определения функции и постройте её график (566—567).

566. а) $y=\frac{32}{(2-x)^2-(2+x)^2}$; б) $y=\frac{48}{(x-1)^2-(x+1)^2}$.

567. а) $y=\frac{3x(x+2)-3x^2-18}{x(x-3)}$; б) $y=\frac{16+7x}{x^2+4x}-\frac{3}{x+4}$.

568*. Постройте график функции:

а) $y=\frac{2}{|x|}$; б) $y=-\frac{12}{|x|}$; в) $y=\frac{36}{|x|}$; г) $y=-\frac{24}{|x|}$.

Постройте график функции, заданной формулой (569—570).

569*. а) $y=\begin{cases}-x-4, & x<-6,\\ -\frac{12}{x}, & -6\le x<-2,\\ 6, & x\ge -2;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}-\frac{8}{x}, & x<-2,\\ -4, & -2\le x<2,\\ \frac{8}{x}, & x\ge 2.\end{cases}$

570*. а) $y=\begin{cases}\frac{6}{x}, & x<-2,\\ 1{,}5x, & -2\le x<2,\\ \frac{6}{x}, & x\ge 2;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}-x-3, & x<-5,\\ -\frac{10}{x}, & -5\le x<0,\\ \frac{10}{x}, & 0<x\le 5,\\ x-3, & x\ge 5.\end{cases}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

571. Вычислите и сравните:

а) сумму кубов чисел 3 и 2 и куб их суммы;

б) разность кубов чисел 5 и 2 и куб их разности;

в) полусумму кубов чисел 7 и 5 и куб их полусуммы.

572. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $-4x(x^2-x-3)+2x(2x^2+x-5)$, если $x=-3$;

б) $3a(4a^2-3a)-6(4+2a^3)-5a(2-5a)$, если $a=\frac{1}{2}$;

в) $(5a(a-4b)+12ab)\cdot 2b+16ab^2$, если $a=3$, $b=1{,}2$.

573. Найдите два числа, если их сумма равна 2,5, а разность квадратов составляет $-2{,}5$.

574. Сумма квадратов двух отрицательных чисел равна 74, а разность их квадратов — 24. Найдите эти числа.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант I

1°. Упростите выражение:

а) $\frac{9ax^3}{x^2-a^2} \cdot \frac{a+x}{6x^2} - \frac{3a^2}{2x-2a}$; б) $\left(n+\frac{1}{2+n}\right) : \frac{n+1}{n+2} - n$.

2°. Решите уравнение: $\frac{3}{x-2} = \frac{10}{x} - \frac{7}{x+2}$.

3°. Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$.

Вариант II

1°. Упростите выражение:

а) $\frac{8cn^2}{c^2-n^2} \cdot \frac{n+c}{4n} - \frac{2n^2}{c-n}$; б) $\left(\frac{a^2+c^2}{c} - 2a\right) : \frac{a-c}{2c} - a$.

2°. Решите уравнение: $\frac{1}{x} + \frac{4}{x-3} = \frac{5}{x-2}$.

3°. Постройте график функции: $y = -\frac{6}{x}$.

Вариант III

1°. Упростите выражение:

а) $\frac{6ac^2}{c^2-a^2} \cdot \frac{a+c}{4c} + \frac{3a^2}{2a-2c}$; б) $\left(1+\frac{a^2}{2a+1}\right) : \frac{a+1}{2a+1} - a$.

2°. Решите уравнение: $\frac{2z^2-7z+3}{2z-1} = 1+z$.

3°. Постройте график функции: $y = \frac{4}{x}$.

Вариант IV

1°. Упростите выражение:

а) $\frac{4xa^3}{a^2-x^2} \cdot \frac{x+a}{6ax} + \frac{2ax}{3(x-a)}$; б) $\left(a+2+\frac{1}{a}\right) : \frac{1-a^2}{a} - 1$.

2°. Решите уравнение: $\frac{x+9}{x-1} + \frac{x+1}{x+5} = 2$.

3°. Постройте график функции: $y = -\frac{4}{x}$.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Обыкновенные дроби в древних Вавилоне и Египте были известны ещё 4 тыс. лет тому назад. Греческие математики умели выполнять с обыкновенными дробями все арифметические действия. В «Арифметике» Диофанта (III в.) также было много дробей с переменными. Например, в книге показано, что

$$\frac{96}{x^2+36-12x^2}-\frac{12}{6-x^2}=\frac{12x^2+24}{x^4+36-12x^2}.$$

В то время дробные выражения записывали не так, как в наши дни. Черту дроби впервые применил итальянский математик Л. Фибоначчи (1180—1240).

Дроби с переменными стали широко использовать после появления «Общей арифметики» известного английского учёного И. Ньютона (1643—1727). В этой книге, в частности, говорилось: «... $\frac{a}{b}$ — это величина, образующаяся при делении a на b, ... $\frac{ab-bb}{a+x}$ означает величину, полученную при делении $ab-bb$ на $a+x$ и т. д. Величины такого рода называют дробями». Тогда вместо b^2 ещё писали bb.

Степени с целыми показателями вводили в математику постепенно. Около 4 тыс. лет тому назад учёные Вавилона рассматривали квадрат и куб числа при вычислении площади квадрата и объёма куба. До наших дней сохранились глиняные плитки с таблицами квадратов и кубов натуральных чисел, изготовленные древними вавилонянами. Со временем учёные стали рассматривать четвёртую, пятую степени и выше, называя их сначала квадрато-квадратом, кубо-квадратом и т. д.

Степень с нулевым показателем ввели в V в. независимо друг от друга самаркандец ал-Каши и француз Ф. Н. Шюке. Степени с отрицательными показателями Ф. Н. Шюке также использовал. Теорию степеней с отрицательными показателями разработал в XVII в. английский математик Д. Валлис. Он отождествлял последовательности

$$a,\ 1,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a^3},\ \ldots,$$

$$a,\ a^0,\ a^{-1},\ a^{-2},\ a^{-3},\ \ldots.$$

Стандартный вид числа ввели в науку только в XX в. с началом использования электронных вычислительных машин (ЭВМ).

ОСНОВНОЕ В ГЛАВЕ

Частное от деления выражения A на выражение B можно записать в виде *дроби* $\frac{A}{B}$. Дробь имеет смысл только тогда, когда её знаменатель не равен нулю. *Алгебраической дробью* называют дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены. Выражение, представленное переменными и числами с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления или возведения в степень с целым показателем, называется *рациональным*. При любых значениях a, b и $c \neq 0$ $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ (*основное свойство дроби*). На основании этого свойства дроби можно сокращать или приводить к общему знаменателю.

Действия с любыми дробями можно выполнять так же, как с обыкновенными дробями. Если знаменатели не равны нулю, то всегда

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, \quad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}, \quad \frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd}.$$

Дробное выражение $\frac{1}{a^n}$ записывают также в виде a^{-n}.

Степень с целым показателем

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}, & \text{если } n \in N, \\ 1, \quad \text{если} \quad n = 0, \quad a \neq 0, \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \text{если} \quad n < 0. \end{cases}$$

Свойства степеней с целыми показателями аналогичны свойствам степеней с натуральными показателями. Если числа m и n — целые, a и b — отличные от нуля, то всегда:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (a^m)^n = a^{mn};$$

Если число x записано в виде $a \cdot 10^n$, где n — целое число, а $1 \leq a < 10$, то говорят, что оно записано в *стандартном виде*, а n — *порядок* числа x.

Функция $y = \frac{k}{x}$ определена на множестве всех действительных чисел, за исключением $x = 0$. Если $k > 0$, то она убывающая.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ ОЦЕНИВАНИЮ

Тестовые задания № 2

1. Дробь $\frac{1}{16}$ можно записать в виде:

а) 2^4; б) 2^6; в) 2^{-4}; г) 2^{-6}.

2. Значение выражения $(3{,}75-5{,}75)^{-2}$ равно:

а) 4; б) −4; в) 0,5; г) 0,25.

3. Представьте в виде дроби выражение $4a^{-2}c^{-3}$:

а) $\frac{1}{4a^2c^3}$; б) $\frac{4}{a^2c^3}$; в) $\left(\frac{2}{ac}\right)^2$; г) $\frac{4}{a^{-2}c^{-3}}$.

4. Порядок числа $3{,}07\cdot10^5$ равен:

а) 3; б) 10; в) 7; г) 5.

5. Какое из данных чисел записано в стандартном виде:

а) $255\cdot10^2$; б) $0{,}1\cdot10^5$; в) $3{,}5\cdot10^{21}$ г) 35700?

6. Сколько корней имеет уравнение $x^{-2}=0$:

а) один; б) два; в) ни одного; г) бесконечное множество?

7. Выражение: $\frac{x^3+1}{x+1}:(x^2-x+1)$ тождественно равно:

а) 0; б) 1; в) −1; г) x.

8. Укажите корни уравнения $\frac{x^2-3x}{x^2-9}=0$:

а) $x=0$; б) $x=3$; в) $x=0$ и $x=3$; г) $x=3$ и $x=-3$.

9. Графиком какой функции является гипербола:

а) $y=5$; б) $y=5x$; в) $y=\frac{5}{x}$; г) $y=\frac{x}{5}$?

10. График функции $y=\frac{2}{x}$ проходит через точку:

а) (0; 2); б) (1; 2); в) (2; 2); г) (3; 2).

Типовые задания для контрольной работы № 2

1. Выполните действия:

а°) $\dfrac{6x^5}{y^4} : \dfrac{12x^5}{y^2}$; б•) $\dfrac{4a^2-1}{a^2-9} : \dfrac{6a+3}{a+3}$.

2. Вычислите:

а°) $\dfrac{3^5 \cdot 3^{-3}}{5^0}$; б•) $\dfrac{4^{-6} \cdot 16^{-5}}{8^{-10}}$; в•) $2{,}8 \cdot 10^{-12} \cdot 4{,}5 \cdot 10^7$.

3. Запишите число в стандартном виде:

а°) 257 000 000; $=2{,}57\cdot10^8$ б•) 0,000 000 002 2. $=2{,}2\cdot10^{-10}$

4. Решите уравнение:

а°) $\dfrac{2}{x-3} = \dfrac{3}{x-2}$; б•) $\dfrac{x+7}{x} - \dfrac{x+6}{x+4} = \dfrac{8}{x^2+4x}$.

5•. Решите графически уравнение $\dfrac{6}{x} = 6x$.

6•. Катер проходит 160 км по течению реки за то же время, что и 136 км — против течения. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 2,4 км/ч.

7. Найдите значение выражения:

а°) $\dfrac{(x-1)^2}{x} \cdot \dfrac{2x}{x-1}$, если $x = 1{,}5$;

б•) $\dfrac{2(a+b)}{3a+b} + \dfrac{1}{a+b} : \dfrac{3a+b}{a^2-b^2}$, если $a = 1{,}5$; $b = -1\dfrac{1}{3}$.

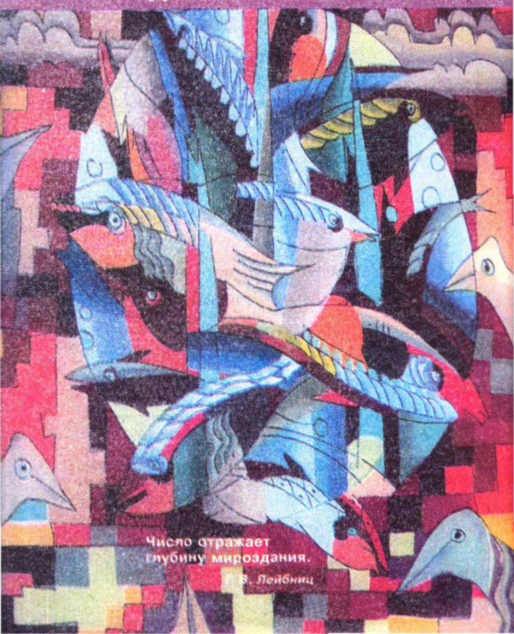
8••. Докажите, что для всех допустимых значений переменных значение выражения является постоянным:

а) $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{(x-2)^2}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{x^2-4} + \dfrac{1}{x^2-4x+4} \right)$;

б) $\left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}+b^{-2}} \right)^{-1} \cdot \left(\left(\dfrac{b}{3a} \right)^{-1} + \left(\dfrac{a}{3b} \right)^{-1} \right)^{-1} \cdot \dfrac{3(a^{-1}+b^{-1})}{(ab)^{-1}}$.

ГЛАВА 2

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА



Число отражает глубину мироздания.

Г. В. Лейбниц

Рациональные числа, с которыми вы ознакомились в предыдущих классах, — это лишь малая часть множества чисел. На числовой прямой кроме рациональных ещё больше нерациональных чисел. Без знания этих чисел, без умения выполнять действия с ними невозможно в дальнейшем изучать математику и другие прикладные науки.

В этой главе вы узнаете, что такое:

- **квадратные корни;**
- **действительные числа;**
- **квадратный корень из произведения, дроби, степени;**
- **преобразование выражений с корнями;**
- **функции $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.**

§13. ФУНКЦИЯ $y = x^2$

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = x^2$. Область её определения — множество всех чисел.

Составим таблицу значений функции для некоторых значений аргумента x:

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	0	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0	1	2,25	4	6,25	9

Нанесём точки, координаты которых приведены в этой таблице (рис. 32, *а*). Если на координатной плоскости нанести больше точек с координатами x и y, удовлетворяющих формулу $y = x^2$, то они разместились бы так, как показано на рисунке 32, *б*. Если для каждого действительного значения x по формуле $y = x^2$ вычислить соответствующее значение y и обозначить точки с такими координатами на координатной плоскости, то получим непрерывную кривую линию, которую называют ***параболой*** (рис. 32, *в*). Парабола имеет две бесконечных ветви, плавно сходящиеся в одной точке — ***вершине параболы***.

Для функции $y = x^2$ вершиной параболы является точка (0; 0). То есть график функции $y = x^2$ проходит через нача-

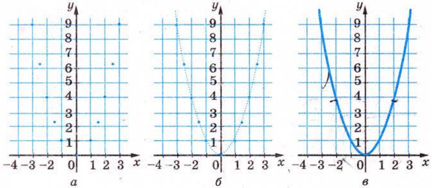


Рис. 32

ло координат. Поскольку противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции, то её график симметричен относительно оси y.

Построенный график даёт возможность наглядно выразить **свойства функции $y = x^2$**.

Свойства функции $y = x^2$, определённые по графику, можно представить в виде таблицы.

Свойства функции	Вид функции $y = x^2$
Область определения	Все числа (R)
Область значения	Все неотрицательные числа ($y \geq 0$)
Положительные значения	$x \neq 0$
Отрицательные значения	—
Промежутки убывания	$x < 0$
Промежутки возрастания	$x > 0$

Для чего надо знать, каков график функции? Подробнее об этом вы узнаете в старших классах. А сейчас обратите внимание на то, что с помощью графиков функций можно решать уравнения, которые иными способами решить сложно либо невозможно.

Сколько решений имеет уравнение $x^2 = 4$? Прямая (её уравнение $y = 4$) пересекает график функции $y = x^2$ в двух точках (рис. 33). Их абсциссы $x = 2$ и $x = -2$ — решения уравнения.

А сколько решений имеет уравнение $x^2 = 2$? Попытайтесь ответить на этот вопрос самостоятельно.

Хотите знать ещё больше?

Кривые в виде парабол используют физики, астрономы, архитекторы и другие специалисты. Графическое изображение траектории струи воды или брошенного (не вертикально) предмета — это параболы (рис. 34). Арки мостов и сооружений нередко имеют форму параболы. У многих прожекторов и различных приёмников радиоволн осевые сечения также параболической формы.

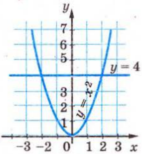


Рис. 33

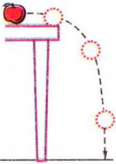


Рис. 34

Функция $y = x^2$ — простейшая из квадратичных функций. Примеры других квадратичных функций:

$$y = x^2 + 1,\ y = x^2 - 3,\ y = -x^2.$$

Каждое значение функции $y = x^2 + 1$ на единицу больше, чем соответствующее значение функции $y = x^2$. Поэтому её график — такая же парабола, только смещённая вверх на единицу (рис. 35).

Попытайтесь построить графики функций:

$$y = x^2 - 1,\ y = -x^2,\ y = 2x^2.$$

Проверьте себя

1. Как называют линию, которая является графиком функции $y = x^2$?
2. Перечислите основные элементы параболы.
3. Укажите основные свойства функции $y = x^2$.
4. На каких промежутках функция $y = x^2$ возрастает, на каких — убывает?

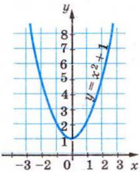


Рис. 35

Выполним вместе!

1. Постройте график зависимости площади квадрата S от длины его стороны a.

✔ Решение. Если сторона квадрата a, то его площадь $S = a^2$. Это одна и та же функция $y = x^2$, лишь обозначенная буквами a и S. Поэтому такими же буквами обозначают и координатные оси. Поскольку длина стороны квадрата может иметь только положительные значения, то область определения рассматриваемой функции — множество положительных чисел. Её график — на рисунке 36.

2. Решите графически уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$.

✔ Решение. Запишем уравнение в виде

$$x^2 = 3 - 2x.$$

В одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = 3 - 2x$ (рис. 37). Пересекаются они в точках, абсциссы которых равны (возможно, приближённо) 1 и -3. Проверка подтверждает, что корни верны.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

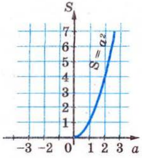


Рис. 36

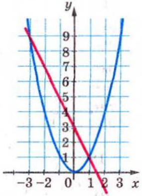


Рис. 37

Выполните устно

575. При каких значениях аргумента значение функции $y = x^2$ равно: 4, 9, 16, 25, 0,01, 0,04, 0,36?

576. При всех ли соответствующих значениях аргумента значения функций $y = x^2$ и $y = (-x)^2$ равны? Чем отличаются графики этих функций?

577. Как называют кривые линии, являющиеся графиками функций $y = x^2$ и $y = x^{-1}$?

578. Может ли функция $y = x^2$ иметь отрицательные значения?

579. Как с помощью графика функции $y = x^2$ построить график функции $y = x^2 + 3$? А функции $y = -x^2$?

Уровень A

580. Заполните таблицу для функции $y = x^2$:

x	-5	$-4{,}5$	-3	$-1{,}5$	-1	0	$0{,}5$	2	$2{,}5$	$3{,}5$	4	5
y												

Постройте график.

581. Постройте график функции $y = x^2$ для:
а) $0 \le x \le 4$; б) $-4 \le x \le 0$; в) $-3 \le x \le 3$.

582. Постройте график функции, выражающей зависимость площади квадрата от его периметра.

583. Проходит ли график функции $y = x^2$ через точки: $A\,(5;\ 25)$; $B\,(-5;\ 25)$; $C\,(5;\ -25)$?

584. Какие из точек принадлежат графику функции $y = x^2$:
$A\,(0{,}1;\ 0{,}01)$; $B\,(0{,}2;\ 0{,}4)$; $C\,(-10;\ 100)$;
$D\,(-1{,}1;\ 1{,}21)$; $E\left(1\frac{1}{2};\ 2\frac{1}{4}\right)$; $F\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{4}{9}\right)$?

585. С помощью графика функции $y = x^2$ (рис. 38) найдите:
а) значение функции, если значение аргумента равно: $-2{,}6$; $-1{,}7$; $-0{,}9$; $0{,}9$; $1{,}4$;
б) значение аргумента, при котором значение функции равно: 2; 3; 4,5; 6.

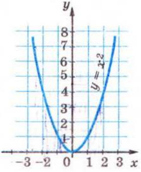


Рис. 38

586. С помощью графика функции $y = x^2$ (рис. 38) найдите:
а) значение функции, если значения x равны: 1,2; 3,1; 2,3;
б) значения x, при которых значения y равны: 1; 2,2; 4; 5,6;
в) целые значения x, при которых значения функции меньше 5;
г) значения аргумента, при которых значения функции — целые числа не больше 7.

587. Заполните пустые клетки таблицы:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$							

Постройте график функции $y = -x^2$.

588. Одна сторона прямоугольника равна x, а другая — в 2 раза длиннее. Как зависит площадь прямоугольника от его меньшей стороны?

589. Как зависит площадь S прямоугольного равнобедренного треугольника от длины его катета a? Заполните таблицу:

a	1	2	3	4	5	6	7	8
S								

Уровень Б

590. В скольких точках пересекаются графики функций:

а) $y = x^2$ и $y = x + 2$; б) $y = x^2$ и $y = -2x + 4$;

в) $y = x^2$ и $y = x^{-1}$; г) $y = x^2$ и $y = -3x$?

591. При каких значениях аргумента функции $y = x^2$ и $y = 2x + 3$ имеют равные значения?

592. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = 8x^{-1}$.

593. Имеем график функции:
1) $y = x^2$; 2) $y = -x^2$.

Пересекает ли данный график прямая:
а) $y = 1$; б) $y = -1$; в) $y = 8$;
г) $y = -8$; д) $y = 1000$; е) $y = -1000$?

Если пересекает, то в какой точке?

594. Докажите, что каждая прямая, параллельная оси y, пересекает график функции $y = x^2$. Каждая ли прямая, параллельная оси x, пересекает график этой функции?

595. При каких значениях x значение функции $y = x^2$ меньше 9? А при каких — больше 9?

596. Найдите значения c, при которых графики функций $y = x^2$ и $y = c$ пересекаются в точке с абсциссой 5. Какова ордината этой точки? Найдите координаты второй точки пересечения данных графиков.

597. На каком промежутке функция $y = x^2$ возрастает быстрее: если x изменяется от 1 до 2 или от 3 до 4?

598. Чем графики функций $y = x^2$ и $y = |x|$ подобны и в чём их отличие? Постройте эти графики в одной системе координат.

599. Постройте график зависимости площади круга от длины его радиуса.

600. Имеет ли решение уравнение:

а) $x^2 = -\frac{1}{3}x - 1$; б) $x^2 + 3 = x$; в) $\frac{4}{x} = x^2$?

601. Решите графическим способом уравнение:

а) $x^2 = x + 2$; б) $x^2 = 3x - 2$; в) $\frac{1}{x} - x^2 = 0$;

г) $x^2 = \frac{8}{x}$; д) $x^2 - x = 6$; е) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

602. Составьте и решите графически уравнение, имеющее:
а) одно решение в I четверти;
б) одно решение во II четверти;
в) одно решение в III четверти;
г) одно решение в IV четверти.

603. Составьте и решите графически уравнение, имеющее:
а) одно решение в I четверти и одно — во II четверти;
б) одно решение в I четверти и одно — в III четверти;
в) одно решение во II четверти и одно — в IV четверти;
г) одно решение во II четверти и одно — в III четверти.

604*. Составьте и решите графически уравнение, корни которого:

а) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;
в) $x = 4$; г) $x_1 = -3$, $x_2 = 0$;
д) $x = 9$; е) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

605*. Решите графически уравнение:

а) $x^2 = 2|x|$; б) $x^2 = \frac{1}{|x|}$.

606*. Постройте график функции, заданной формулой:
а) $y = x^2 + 2$; б) $y = 3 - x^2$; в) $y = (x + 1)^2$.

607*. Решите графически уравнение:

а) $x^2 = 2 - x^2$; б) $x^2 - 1 = \frac{6}{x}$; в) $(x - 3)^2 = x - 1$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

608. Запишите в стандартном виде число:

а) 47 000 000; б) 308 000 000; в) 0,000000039;

г) 0,00000407; д) $803 \cdot 10^9$; е) $0{,}067 \cdot 10^7$;

ё) $3{,}7 \cdot 100^5$; ж) $0{,}42 \cdot 10^{-7}$; з) 2000^5.

609. Укажите порядок числа:

а) $2{,}3 \cdot 10^8$; б) $7{,}8 \cdot 10^{-12}$.

610. Упростите выражение:

а) $2a^2 + 3 - ((a^2 - 5ab) - (7 - 3ab))$;

б) $-(1 - 6xy) + (7 + x^4 - (4xy + 6 - 2x^4))$;

в) $4a^3 + b^3 - (a^3 - 5ab + (3a^3 - (3b^3 + 4ab - a^3)))$.

611. Докажите, что для любого натурального n значение дроби является натуральным числом:

а) $\frac{6^n - 1}{5}$; б) $\frac{10^n + 5}{3}$; в) $\frac{10^n - 1}{9}$;

г) $\frac{3^{4n} + 4}{5}$; д) $\frac{7^{4n} - 1}{10}$; е) $\frac{9^{2n-1} + 1}{10}$.

612. При каком значении x:
а) значение выражения $|x - 5| + 9$ наименьшее;
б) значение выражения $13 - |2x + 3|$ наибольшее?

613. Решите уравнение:
а) $|x - 5| = 8$; б) $|2x - 3| = 2{,}5$; в) $|x - 3| = x$.

§14. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

Уравнение $x^2 = 9$ имеет два решения: 3 и -3. Говорят, что 3 и -3 — квадратные корни из числа 9.

***Квадратным корнем** из числа a* **называют число, квадрат которого равен a.**

Примеры. Квадратными корнями из числа:

а) 1600 являются 40 и -40, поскольку $40^2 = 1600$ и $(-40)^2 = 1600$;

б) 0,49 являются 0,7 и $-0,7$, поскольку $0,7^2 = 0,49$ и $(-0,7)^2 = 0,49$.

Среди известных вам чисел нет такого, квадрат которого был бы равен отрицательному числу, поэтому ***квадратного корня из отрицательного числа не существует.***

Квадратный корень из числа 0 равен нулю. Квадратный корень из положительного числа имеет два значения: одно из них положительное, другое — противоположное ему отрицательное число.

Неотрицательное значение квадратного корня называют *арифметическим значением* этого корня.

Арифметическое значение квадратного корня из числа a обозначают символом $\sqrt{a}$. Например,

$\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{1600} = 40$, $\sqrt{0,49} = 0,7$, $\sqrt{0} = 0$.

П р и м е ч а н и е. Символом $\sqrt{a}$ обозначают только арифметическое значение квадратного корня из числа a, хотя читается оно короче: «квадратный корень из числа a».

Вычисление арифметического значения квадратного корня называют *извлечением квадратного корня.*

Из небольших чисел, являющихся точными квадратами натуральных чисел, извлекать квадратные корни желательно устно.

a	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$\sqrt{a}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Квадратные корни из больших натуральных чисел можно находить, пользуясь таблицей квадратов (см. 2-й форзац). Например, $\sqrt{5329} = 73$, $\sqrt{1000} \approx 32$.

С помощью калькулятора можно извлекать квадратные корни с большей точностью. Например, чтобы извлечь квадратный корень из 1000, набираем это число, затем нажимаем клавишу «√». На экране высвечивается число 31,622776. Следовательно, $\sqrt{1000} \approx 31{,}622776$.

Если таким способом найти значение $\sqrt{0{,}0035}$, то на некоторых калькуляторах высвечиваются два числа: 5,9160797 и −2. Число −2 здесь показывает порядок искомого значения, записанного в стандартном виде. Следовательно,

$$\sqrt{0{,}0035} \approx 5{,}9160797 \cdot 10^{-2} = 0{,}059160797.$$

Хотите знать ещё больше?

Извлекать квадратные корни из натуральных чисел вавилонские учёные умели ещё 4 тыс. лет тому назад. Они составили таблицу квадратов многих натуральных чисел и, пользуясь ею, находили квадратные корни. Если число m не было точным квадратом натурального числа, то они искали ближайшее приближённое значение a квадратного корня из m, представляли число m в виде $m = a^2 + b$ и применяли правило, которое сейчас можно записать в виде формулы

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}.$$

Например, если $m = 108$, то

$$\sqrt{108} = \sqrt{10^2 + 8} = 10 + \frac{8}{2 \cdot 10} = 10{,}4.$$

Проверка. $10{,}4^2 = 108{,}16$.

Это правило извлечения квадратных корней было известно и учёным Древней Греции.

Известны и другие алгоритмы извлечения квадратных корней, но теперь это удобнее делать с помощью калькулятора.

Проверьте себя

1. Что такое квадратный корень из числа a?
2. Сколько существует разных квадратных корней из положительного числа a? А из числа 0?
3. Что такое арифметическое значение квадратного корня из числа a?
4. Сколько существует арифметических значений квадратных корней из положительного числа a? А из числа 0?
5. Как читается выражение: $\sqrt{0,9}$; $\sqrt{a^2+b^2}$?

Выполним вместе!

1. Покажите, что 28 — арифметическое значение квадратного корня из 784.

✔ Решение. $28^2 = 784$; 28 — число положительное, поэтому $\sqrt{784}=28$.

2. Является ли число $\frac{1}{7}$ квадратным корнем из числа $\frac{1}{49}$? А число $-\frac{1}{7}$?

✔ Решение. $\left(\frac{1}{7}\right)^2=\frac{1}{49}$, $\left(-\frac{1}{7}\right)^2=\frac{1}{49}$.

Ответ. Числа $\frac{1}{7}$ и $-\frac{1}{7}$ — квадратные корни из числа $\frac{1}{49}$.

3. Вычислите $2,5\sqrt{64}-3\sqrt{0,64}$.

✔ Решение. $\sqrt{64}=8$, $\sqrt{0,64}=0,8$. Поэтому

$$2,5\sqrt{64}-3\sqrt{0,64}=2,5\cdot 8-3\cdot 0,8=20-2,4=17,6.$$

Ответ. 17,6.

4. Решите уравнение: а) $\sqrt{10x+9}=7$; б) $\sqrt{x^2-9}=4$.

✔ Решение.

а) По определению квадратного корня, $7^2 = 10x + 9$, тогда $10x + 9 = 49$, $10x = 40$, $x = 4$;

б) $4^2 = x^2 - 9$, $x^2 - 9 - 16 = 0$, $x^2 - 25 = 0$, $(x - 5)(x + 5) = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = - 5$.

Ответ. а) $x = 4$; б) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$.

Выполните устно

614. Вычислите:

а) $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{90000}$;

б) $\sqrt{0{,}01}$, $\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt{0{,}09}$, $\sqrt{0{,}16}$, $\sqrt{0{,}0081}$;

в) $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{25}{36}}$, $\sqrt{\frac{16}{9}}$.

615. Найдите все квадратные корни из числа:

$25, 36, 49, 64, \frac{4}{25}, \frac{16}{81}, \quad 3^2, 7^2, 4{,}2^2, \sqrt{81}, \sqrt{16}$.

616. Найдите арифметический квадратный корень из числа:

$9, 100, 400, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 3^2, (-4)^2$.

Уровень A

617. Покажите, что 8 — квадратный корень из числа 64. Существуют ли другие квадратные корни из числа 64?

618. Покажите, что:
а) 5,4 — квадратный корень из числа 29,16;
б) 0,99 — квадратный корень из числа 0,9801.

619. Найдите отрицательные значения квадратных корней из чисел 29,16 и 0,9801.

620. Является ли число −37 арифметическим значением квадратного корня числа 1369? А число 37?

Вычислите значение выражения (621—630).

621. а) $\sqrt{169}$; б) $\sqrt{256}$; в) $\sqrt{324}$; г) $\sqrt{361}$;
д) $\sqrt{400}$; е) $\sqrt{900}$; ё) $\sqrt{2500}$; ж) $\sqrt{3600}$.

622. а) $\sqrt{0{,}04}$; б) $\sqrt{0{,}09}$; в) $\sqrt{0{,}16}$; г) $\sqrt{0{,}64}$;
д) $\sqrt{1{,}21}$; е) $\sqrt{1{,}44}$; ё) $\sqrt{2{,}89}$; ж) $\sqrt{3{,}24}$.

623. а) $\sqrt{121}$; б) $\sqrt{196}$; в) $\sqrt{225}$; г) $\sqrt{625}$;
д) $\sqrt{100}$; е) $\sqrt{10000}$; ё) $\sqrt{1600}$; ж) $\sqrt{2500}$.

624. а) $\sqrt{0{,}01}$; б) $\sqrt{0{,}49}$; в) $\sqrt{1{,}44}$; г) $\sqrt{1{,}69}$;

д) $\sqrt{4{,}84}$; е) $\sqrt{2{,}25}$; ё) $\sqrt{0{,}0004}$; ж) $\sqrt{0{,}0036}$.

625. а) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{16}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; г) $\sqrt{\frac{25}{49}}$;

д) $2\cdot\sqrt{49}$; е) $4\cdot\sqrt{64}$; ё) $7\cdot\sqrt{100}$; ж) $5\cdot\sqrt{144}$.

626. а) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{25}}$; в) $\sqrt{\frac{25}{36}}$; г) $\sqrt{\frac{4}{49}}$;

д) $16:\sqrt{16}$; е) $25:\sqrt{25}$; ё) $90:\sqrt{81}$.

627. а) $-5\cdot\sqrt{36}$; б) $-4{,}7\cdot\sqrt{0}$; в) $0\cdot\sqrt{47}$;

г) $\frac{2}{3}\sqrt{81}$; д) $\frac{1}{5}\sqrt{225}$; е) $-\frac{3}{4}\sqrt{196}$.

628. а) $\sqrt{25}+\sqrt{49}$; б) $8+\sqrt{16}$; в) $\sqrt{36}-4$;

г) $5\cdot\sqrt{36}+\sqrt{16}$; д) $\sqrt{49}-7\cdot\sqrt{25}$; е) $3\cdot\sqrt{16}-2\cdot\sqrt{36}$.

629. а) $3\cdot\sqrt{0{,}01}+\sqrt{0{,}09}$; б) $\sqrt{0{,}04}-0{,}5\cdot\sqrt{1}$;

в) $\sqrt{2{,}25}-\frac{1}{7}\sqrt{1{,}96}$; г) $2\sqrt{0{,}16}+\sqrt{1{,}44}$.

630. а) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{25}$; б) $-\sqrt{0{,}49}\cdot\sqrt{49}$;

в) $\sqrt{81}\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{16}$; г) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{0{,}25}$.

631. Решите кроссворд (рис. 39).

По горизонтали:
4. Наука. 7. Потеря, ущерб. 8. Законченный ряд повторяющихся процессов, действий. 9. Линия в треугольнике.

По вертикали:
1. Дощечка, на которой крепится бумага для нанесения плана местности. 2. Арифметическое действие. 3. Сотая часть. 5. Второе простое число. 6. Латинская буква.

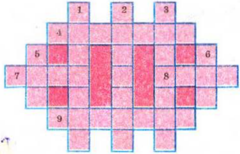


Рис. 39

Пользуясь таблицей квадратов, вычислите значение выражения (632—637).

632. а) $\sqrt{529}$; б) $\sqrt{729}$; в) $\sqrt{841}$; г) $\sqrt{961}$.

633. а) $\sqrt{1089}$; б) $\sqrt{2601}$; в) $\sqrt{2916}$; г) $\sqrt{3364}$.

634. а) $-\sqrt{5041}$; б) $-\sqrt{7396}$; в) $-\sqrt{8464}$; г) $\sqrt{5776}$.

635. а) $-\sqrt{48\,400}$; б) $-32{,}25\cdot\sqrt{0}$; в) $24\sqrt{325\cdot 0}$.

636. а) $169:\sqrt{169}$; б) $576:\sqrt{576}$; в) $24:\sqrt{144}$.

637. а) $\frac{2}{3}\sqrt{36}$; б) $\frac{3}{4}\sqrt{1600}$; в) $-\frac{2}{5}\sqrt{1225}$.

638. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{121}=-11$; б) $\sqrt{47^2}=47$; в) $\sqrt{(-12)^2}=-12$?

639. Пользуясь таблицей квадратов, найдите приближённое значение выражения:

а) $\sqrt{624}$; б) $\sqrt{840}$; в) $\sqrt{5775}$; г) $-\sqrt{6725}$.

Пользуясь калькулятором, найдите приближённое значение выражения (640—641).

640. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{10}$.

641. а) $\sqrt{37}$; б) $\sqrt{3{,}7}$; в) $\sqrt{30{,}7}$; г) $\sqrt{54{,}76}$.

642. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt{-49}$; в) $-\sqrt{64}$; г) $\sqrt{(-5)^2}$;

д) $\sqrt{(-4)^3}$; е) $\sqrt{8\cdot(-4)}$; ё) $-\sqrt{-17}$; ж) $\sqrt{(-6)\cdot(-12)}$?

643. Заполните таблицу:

x	0	1	4	9	16	25	36
$\sqrt{x}$							

644. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2x+3}$, если $x=11$; $x=-1$; $x=33$;

б) $\sqrt{14-m}$, если $m=5$; $m=-2$; $m=14$;

в) $\sqrt{a+2c}$, если $a=6$ и $c=5$; $a=0$ и $c=8$.

645. Найдите сторону квадрата (в сантиметрах), площадь которого равна:

а) 64 см^2; б) 25 дм^2; в) 0,36 дм^2;

г) 16 м^2; д) 0,49 м^2; е) 6,25 м^2.

Уровень Б

646. Заполните таблицу:

a	0	$\frac{1}{9}$				49	144		
$\sqrt{a}$			$\frac{1}{2}$	1	4			15	16

Вычислите (647—648).

647. а) $\sqrt{\frac{121}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{225}{81}}$; в) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; г) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$;

д) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$; е) ; $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ ё) $\sqrt{6\frac{19}{25}}$; ж) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$.

648. а) $\sqrt{0{,}0001}$; б) $\sqrt{0{,}0025}$; в) $\sqrt{0{,}0081}$; г) $\sqrt{0{,}0169}$;

д) $\sqrt{10{,}24}$; е) $\sqrt{10{,}89}$; ё) $\sqrt{12{,}25}$; ж) $\sqrt{98{,}01}$.

Вычислите значение выражения (649—652).

649. а) $\sqrt{225}-\sqrt{196}$; б) $\sqrt{676}+\sqrt{196}$;

в) $\sqrt{2025}+\sqrt{2704}$; г) $\sqrt{1681}-\sqrt{5929}$.

650. а) $2\sqrt{256}+3\sqrt{169}$; б) $4\sqrt{225}-3\sqrt{169}$;

в) $0{,}5\sqrt{1936}-0{,}1\sqrt{256}$; г) $2{,}5\sqrt{676}+1{,}2\sqrt{625}$.

651. а) $\frac{2}{3}\sqrt{784}-\frac{3}{4}\sqrt{676}$; б) $\frac{3}{5}\sqrt{3025}-29\sqrt{0{,}01}$;

в) $-\frac{1}{2}\sqrt{1156}+17\sqrt{0{,}04}$; г) $-\sqrt{7056}-380\sqrt{0{,}25}$.

652. а) $\sqrt{1296}-0{,}2\sqrt{2025}$; б) $0{,}4\sqrt{1225}+\sqrt{256}$;

в) $5{,}4:\sqrt{3{,}24}-\frac{1}{3}\sqrt{144}$; г) $\frac{1}{4}\sqrt{576}+\sqrt{1{,}96}:0{,}35$.

653. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{a+b}$, если $a=102$, $b=19$; $a=-4$, $b=85$;

$a=1{,}21$, $b=\frac{3}{4}$;

б) $\sqrt{2x+y}$, если $x=32$, $y=0$; $x=17$, $y=-18$; $x=\frac{1}{8}$, $y=2$.

Найдите приближённое значение выражения (654—655).

654. а) $27\sqrt{321}-15\sqrt{105}$; б) $32\sqrt{635}+15\sqrt{483}$;

в) $\left(\sqrt{353}-\sqrt{187}\right):12$; г) $\left(\sqrt{879}+\sqrt{1125}\right)\cdot 0{,}5$.

655. а) $34:\sqrt{127}+127$; б) $85:\sqrt{325}-12$;

в) $0{,}24:\sqrt{0{,}15}+2{,}4$; г) $1{,}37:\sqrt{0{,}2}-73{,}8$.

656. Найдите число, квадратный корень которого равен:
а) 48; б) −37; в) 0,07; г) −0,0004.

657. Найдите значение выражениу:

а) $\sqrt{x^2-2x+1}$, если $x=3{,}5$;

б) $\sqrt{x^2+2x+1}$, если $x=-2{,}8$;

в) $\sqrt{4x^2-4x+1}$, если $x=0{,}25$.

658. Существует ли значение переменной x, при котором:

а) $\sqrt{x}=4$; б) $\sqrt{x}=0$; в) $\sqrt{x}=-2$; г) $5+\sqrt{x}=0$;

д) $\sqrt{x}=100$; е) $\sqrt{x}=360$; ё) $\sqrt{x-3}=5$; ж) $\sqrt{-x}=2$?

Решите уравнения (659—662).

659. а) $\sqrt{x}=7$; б) $3-\sqrt{x}=0$; в) $2\cdot\sqrt{x}=12$;

г) $5\sqrt{y}=10$; д) $-3+\sqrt{y}=0$; е) $z\sqrt{z}=0$.

660. а) $\sqrt{x+3}=5$; б) $\sqrt{11-y}=7$; в) $\sqrt{2+x}=-3$;

г) $\sqrt{1+x^2}=1$; д) $\sqrt{5x-1}=3$; е) $1+\sqrt{1-x}=0$.

661. а) $\sqrt{x+2}=3$; б) $\sqrt{x-12}=8$; в) $\dfrac{36}{\sqrt{x-5}}=4$;

г) $\dfrac{15}{\sqrt{x-3}}=3$; д) $\sqrt{14+5x}=8$; е) $\sqrt{6-\sqrt{x}}=3$.

662. а) $\sqrt{\sqrt{x}+5}=4$; б) $\sqrt{x^2+20}=6$; в) $\sqrt{58-x^2}=7$;

г) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=2$; д) $\sqrt{7+\sqrt{6-\sqrt{x}}}=3$.

663. Заполните таблицу:

x	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1
$\sqrt{x}$											

Обозначьте точки с соответствующими координатами на координатной плоскости.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

664. Представьте многочлен в виде степени:

а) a^3-3a^2+3a-1; б) $8y^3-36y^2+54y-27$.

665. Вычислите значение выражения:

а) $(3x-7y)^2-(7x-3y)^2$, если $x=2{,}8$, $y=2{,}2$;

б) $(3x-4y)^2+(4x+3y)^2$, если $x=1{,}8$, $y=2{,}6$.

666. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $(x+5)(x^2-2x-3)-(5x+x^2)(x-2)+3(x+5)$;

б) $(2x^2-3x+6)(x+4)-$
$-(x^2+4x+3)(2x-3)$.

667. На рисунке 40 изображён график движения жука, ползущего прямолинейно и равномерно. За какое время он преодолеет расстояние 6 дм, двигаясь с той же скоростью?

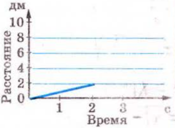


Рис. 40

§15. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Известные вам числа — **целые и дробные, положительные и отрицательные** — представляют собой множество ***рациональных чисел***. Рациональными их называют потому, что каждое можно записать в виде частного, отношения двух целых чисел, а слово «отношение» на латинском языке — *ratio*.

Попытаемся записать рациональные числа $\frac{9}{8}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{4}{11}$ в виде десятичных дробей. Для этого их числители разделим на знаменатели.

Итак, $\frac{9}{8}=1{,}125$, $\frac{7}{6}=1{,}16666...$, $\frac{4}{11}=0{,}363636...$.

В двух последних примерах деление можно продолжать бесконечно (почему?). Полученные доли частного — это бесконечные десятичные дроби, цифры которых периодически повторяются. Это ***бесконечные периодические десятичные дроби.***

Бесконечные периодические десятичные дроби записывают короче:

$$0{,}363636... = (0{,}36);\ 1{,}166666... = 1{,}1(6).$$

Цифру или группу повторяющихся цифр называют ***периодом*** периодической десятичной дроби.

Любую десятичную дробь и даже целое число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, если к её дробной части дописать множество нулей:

$$1{,}125 = 1{,}125000...,\ 18 = 18{,}000...,\ -3{,}7 = -3{,}7000... .$$

Можно доказать, что:

каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби; любая бесконечная периодическая десятичная дробь изображает некоторое рациональное число.

Существуют ли числа, отличные от рациональных? Да, существуют. Например, вычисляя значения $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, π, получаем бесконечные непериодические десятичные дроби:

$$\sqrt{2}=1{,}4142135...,\ \sqrt{10}=3{,}1622776...,\ \pi=3{,}1415926... .$$

Эти числа — нерациональные.

Числа, которые можно представить в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, называют ***иррациональными***. Иррациональный — означает нерациональный (латинское *ir* соответствует отрицательной частице *не*).

Иррациональные числа вместе с рациональными образуют множество действительных чисел.

Множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел обозначают соответственно буквами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$. Каждое из этих множеств является подмножеством (частью) следующего множества (рис. 41). Любое натуральное число является одновременно и целым, и рациональным, и действительным. Любое целое число — также рациональное и действительное. Например, все числа 12, -3, $\frac{2}{7}$, $\sqrt{10}$ — действительные, три первых — рациональные, два первых — целые и только число 12 — натуральное.

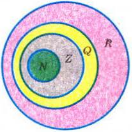


Рис. 41

Действительные числа, записанные в виде бесконечных десятичных дробей, сравнивают по тому же правилу, что и десятичные дроби. Например, число 3,131313... меньше, чем 4,0111..., 3,25 и π, но больше, чем 3,1222..., -2, 0.

Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать, возводить в степень и делить (на числа, отличные от нуля). Для сложения и умножения этих чисел верны переместительный, сочетательный и распределительный законы.

Например,

$$\sqrt{2}+\pi=\pi+\sqrt{2},\ \ (3+\pi)+\sqrt{5}=3+(\pi+\sqrt{5}),$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2},\ \ (\sqrt{5}\cdot\sqrt{20})\cdot\sqrt{8}=\sqrt{5}\cdot(\sqrt{20}\cdot\sqrt{8}),$$

$$\pi\cdot(1{,}020202...+5{,}12345...)=$$
$$=\pi\cdot 1{,}020202...+\pi\cdot 5{,}12345... .$$

Все правила действий над выражениями с переменными, доказанные ранее для рациональных значений переменных, справедливы и для произвольных действительных значений этих переменных. В частности, для любых действительных чисел верны известные вам свойства пропорций, дробей, степеней.

При решении прикладных задач иррациональные числа обычно округляют, отбрасывая бесконечные «хвосты» десятичных знаков. Например, если нужно найти значение суммы чисел π и $\sqrt{2}$ с точностью до тысячных, пишут:

$$\pi+\sqrt{2} \approx 3{,}1416 + 1{,}4142 \approx 4{,}556.$$

Хотите знать ещё больше?

Иррациональность числа $\sqrt{2}$ можно доказать таким образом. Предположим, что число $\sqrt{2}$ рациональное, то есть равно некоторой несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. Тогда $2n^2 = m^2$, то есть число m^2, следовательно, и m — чётное: $m = 2k$, $k \in Z$. Подставив $m = 2k$ в равенство $2n^2 = m^2$, получим $2n^2 = 4k^2$, $n^2 = 2k^2$, число n — тоже чётное. Значит, дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить на 2. А предполагалось, что эта дробь — несократимая. То есть сделанное предположение приводит к противоречию, поэтому число $\sqrt{2}$ не является рациональным.

Докажите таким способом, что числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ — иррациональные.

Проверьте себя

1. Какие числа называют действительными?
2. Какие числа называют рациональными, какие — иррациональными?
3. Приведите примеры иррациональных чисел.
4. Бывают ли иррациональные числа отрицательными?
5. Является ли число 0 целым, рациональным, действительным?
6. Какие действия можно выполнять с иррациональными числами? А с действительными числами?
7. Всегда ли сумма, разность, произведение или частное двух иррациональных чисел — число иррациональное?

Выполним вместе!

1. Представьте в виде десятичной дроби: а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{11}$; в) $\frac{13}{6}$.

✔ Р е ш е н и е. а) Чтобы преобразовать обыкновенную дробь в десятичную, нужно числитель данной дроби разделить на её знаменатель. Имеем:

а) $\frac{3}{8}=0{,}375$; б) $\frac{5}{11}=0{,}4545...=0{,}(45)$;

в) $\frac{13}{6}=2{,}1666...=2{,}1(6)$.

Ответ: а) 0,375; б) 0,(45); в) 2,1(6).

2. Сравните числа:

а) $-\frac{4}{3}$ и $-1{,}33$; б) $-\frac{4}{3}$ и $-1{,}34$; в) $-\frac{4}{3}$ и $-1{,}333...$.

✔ Решение. а) Разделив числитель дроби $\frac{4}{3}$ на знаменатель, получим 1,333... . Число 1,333... больше, чем 1,33. Поэтому $-1{,}333... < -1{,}33$, или $-\frac{4}{3} < -1{,}33$;

б) $1{,}333... < 1{,}34$, следовательно, $-\frac{4}{3} > -1{,}34$;

в) $\frac{4}{3} = 1{,}333...$, следовательно, $-\frac{4}{3} = -1{,}333...$.

Выполните устно

668. Какие из чисел 35, −128, π, $\sqrt{25}$, $\sqrt{10}$, $-\sqrt{0{,}04}$ — рациональные, какие — иррациональные, какие — действительные?

669. Какое из данных утверждений верно:
а) любое натуральное число является действительным;
б) любое целое число является действительным;
в) каждое рациональное число — действительное;
г) каждое иррациональное число — действительное;
д) не каждое действительное число — рациональное;
е) не каждое действительное число — иррациональное?

670. Укажите верные утверждения:
2π — число действительное; $-\pi$ — число иррациональное; $1+\pi$ — число иррациональное; $\pi : 2\pi$ — число рациональное.

671. Верны ли схемы на рисунках 42 и 43?

Рис. 42

Рис. 43

672. Верно ли, что:

а) $10 \in N$; б) $11 \in Z$; в) $12 \in Q$; г) $13 \in R$?

673. Какая из записей верна:

а) $10{,}5 \in N$; б) $10{,}6 \in Z$; в) $10{,}7 \in Q$; г) $10{,}8 \in R$;

д) $\sqrt{3} \in N$; е) $\sqrt{4} \in Z$; ё) $\sqrt{5} \in Q$; ж) $\sqrt{6} \in R$?

Уровень A

674. Из данных чисел выпишите: а) целые, б) иррациональные:

$5,\ \frac{3}{4},\ \sqrt{-4},\ -32,\ \sqrt{3},\ 0{,}7,\ -\sqrt{49},\ \frac{12}{3},\ 0,\ 7\frac{1}{2},\ 2\sqrt{\frac{25}{4}},$

$-1{,}1111,\ \sqrt{3\frac{1}{16}}$.

675. Какие из чисел $-3{,}5,\ -\sqrt{39},\ 6,\ 1{,}010010001,\ \frac{2}{3},\ \sqrt{7},$

$-\sqrt{1024},\ 5\frac{1}{3}$ — рациональные?

676. Имеются ли среди чисел $49,\ -1{,}21,\ 1,\ -2{,}5\sqrt{100},\ 3,\ 0,$

$\sqrt{1000}$ а) натуральные; б) действительные?

677. Какое из чисел иррациональное: $\sqrt{17},\ \sqrt{17{,}64},\ 4\sqrt{3},$

$3\sqrt{4}$, $\sqrt{2\frac{7}{9}}$, $\sqrt{2\frac{8}{9}}$, $5+\sqrt{2}$, $-0{,}30033000333$, π, -2π?

678. Представьте в виде обыкновенной дроби:
а) 0,7; б) 0,53; в) 3; г) 1,25.

679. Представьте в виде десятичной дроби:

а) $\frac{9}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{13}{25}$; г) $\frac{17}{16}$; д) $\frac{1}{125}$.

680. Представьте в виде бесконечной десятичной дроби:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{16}{15}$; г) $\frac{38}{12}$; д) $\frac{1}{7}$.

681. Какое из чисел больше:
а) 0,3754 или 1,2; б) 2,0379 или 2,0401;
в) 2,333... или 2,327; г) 13,777... или 12,888...?

Сравните числа (682—685).

682. а) $\frac{5}{6}$ и $\frac{6}{7}$; б) $\frac{8}{3}$ и $\frac{9}{4}$; в) $-\frac{3}{8}$ и $-\frac{4}{9}$.

683. а) $\frac{2}{3}$ и 0,66; б) $\frac{2}{3}$ и 0,67; в) $\frac{2}{3}$ и 0,666... .

684. а) $\sqrt{2}$ и 1,41; б) $\sqrt{2}$ и 1,42; в) $\sqrt{2}$ и 1,414141... .

685. а) π и 3,14; б) π и $\frac{27}{7}$; в) π и $\sqrt{10}$.

Уровень Б

686. Пользуясь таблицами, вычислите с точностью до тысячных:

а) $\frac{2}{3}+\sqrt{15}$; б) $4{,}13-\sqrt{10}$; в) $\sqrt{23}+\pi$;

г) $\sqrt{35}\cdot\sqrt{10}$; д) $\sqrt{45}\cdot\sqrt{20}$; е) $\pi:\sqrt{5{,}7}$.

687. Пользуясь калькулятором, вычислите:

а) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}$; б) $\sqrt{40}+\sqrt{90}$; в) $\pi+\sqrt{18}$;

г) $3\cdot\sqrt{30}-\frac{2}{3}$; д) $\frac{2}{3}+2\sqrt{3}$; е) $\pi\cdot\sqrt{10}-\frac{2}{7}$.

688. Представьте в виде бесконечной десятичной дроби:

а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{15}$; в) $\frac{4}{9}$; г) $5\frac{7}{18}$.

689. Какое из чисел больше:

а) 0,257 или 0,26; б) −3,0973 или −3,098;

в) 7,666... или 7,67; г) −0,0222... или −0,019?

690. Записи 0,(6) и 0,(58) означают бесконечные периодические десятичные дроби 0,666... и 0,585858... . Какое из этих чисел больше? Найдите рациональное число, которое меньше одного из них, но больше другого.

691. Известно, что числа a и b: 1) натуральные; 2) целые; 3) рациональные. Каким будет в каждом случае число:

а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$?

692. Рациональное или иррациональное число 2,001001001..., если группа его цифр 001 бесконечно повторяется?

693. Рациональное или иррациональное число 2,010010001..., если после каждой его единицы на один нуль больше, чем перед ней?

694. Вычислите с точностью до тысячных:

а) $0{,}5+\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{3}+\sqrt{10}$; в) $\pi+\sqrt{2}$;

г) $\sqrt{10}-0{,}4$; д) $\pi-\sqrt{10}$; е) $\sqrt{2}\cdot\pi$;

ё) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}$; ж) $1:\pi$; з) $\pi:\sqrt{10}$.

695. Пользуясь калькулятором, вычислите:

а) $3\sqrt{20}$; б) $\sqrt{37}-1{,}5$; в) $5{,}74-\sqrt{74}$;

г) $\sqrt{50}-\sqrt{30}$; д) $2\sqrt{13}+\sqrt{3}$; е) $\pi-\sqrt{37}$.

696. Докажите, что сумма двух рациональных чисел — число рациональное.

697. Докажите, что произведение двух рациональных чисел — число рациональное.

698. Верно ли, что разность двух любых рациональных чисел — число рациональное? А частное?

699. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть числом рациональным? Приведите пример.

700. Приведите пример двух иррациональных чисел, произведение которых равно рациональному числу.

701. Докажите, что сумма рационального и иррационального чисел всегда число иррациональное.

702. Докажите, что иррациональным является число:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{6}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Упростите выражение (**703—704**):

703. а) $(x+4)(2x^4-x^3+3x^2)$; б) $(a^3+a^2+a+1)(a-1)$.

704. а) $(x^2-xy+y^2)(x+y)$; б) $(a^2+ab-b^2)(a+b)$.

705. На сколько порядков число 342 000 000 больше, чем 4 000 000?

706. Выразите:

а) $2{,}4\cdot10^3$ т в граммах; б) $6{,}23\cdot10^{12}$ кг в тоннах;

в) $5{,}4\cdot10^{-6}$ км в миллиметрах; г) $3{,}8\cdot10^{-10}$ см в метрах.

707. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:

а) $8\cdot10^9$ и $4\cdot10^9$; б) $4{,}8\cdot10^7$ и $4\cdot10^6$;

в) $6\cdot10^{-5}$ и $3\cdot10^{-5}$; г) $4{,}5\cdot10^{-6}$ и $1{,}5\cdot10^{-7}$.

708. Перенесите в тетрадь рисунок 44 и переставьте числа так, чтобы четыре суммы — в двух горизонтальных и двух вертикальных рядах — были равны. Найдите наименьшую из этих сумм.

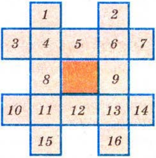


Рис. 44

§16. КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ДРОБИ, СТЕПЕНИ

Арифметический корень из a — неотрицательное значение квадратного корня из неотрицательного числа a. Поэтому для любого неотрицательного числа a выполняется тождество $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Примеры. $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$, $\left(\sqrt{0{,}3}\right)^2 = 0{,}3$, $\left(\sqrt{0}\right)^2 = 0$.

Верны и такие тождества:

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ — для неотрицательных значений a и b;

2) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — для неотрицательного a и положительного b;

3) $\sqrt{a^{2k}} = a^k$ — для неотрицательного a и натурального k.

Докажем эти тождества.

1. Если a и b — произвольные неотрицательные числа, то числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{ab}$ и $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ также неотрицательные. Кроме того,

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab.$$

Следовательно, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ — неотрицательное число, квадрат которого равен ab, то есть

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

2. Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ и $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ неотрицательные, а $\sqrt{b}$ — положительное. Кроме того,

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Следовательно, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ – неотрицательное число, квадрат которого равен $\dfrac{a}{b}$, то есть

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

3. Если число a — неотрицательное, а k — натуральное, то числа a^k, a^{2k} и $\sqrt{a^{2k}}$ — неотрицательные. Кроме того, $(a^k)^2 = a^{2k}$. Следовательно, a^k — неотрицательный квадратный корень из a^{2k}, то есть

$$\sqrt{a^{2k}} = a^k.$$

Доказанные три теоремы кратко можно сформулировать так.

1. Корень из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел (теорема о корне из произведения).

2. Корень из дроби, числитель которой неотрицательный, а знаменатель положительный, равен корню из числителя, делённому на корень из знаменателя (теорема о корне из дроби).

3. Корень из степени a^{2k}, в котором числа a — неотрицательное и k — натуральное, равен a^k (теорема о корне из степени)

Примечание. Здесь под «корнем» понимают только квадратный арифметический корень.

Теорему о корне из произведения можно распространить на три множителя и более. Действительно, если числа a, b и c — неотрицательные, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)\cdot c} = \sqrt{ab}\cdot\sqrt{c} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}.$$

Если в доказанных тождествах поменять местами их левые и правые части, то получим:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Эти тождества показывают, как можно умножать и делить корни. Например,

$$\sqrt{20}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{20\cdot 5} = \sqrt{100} = 10, \quad \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3.$$

Из теоремы о корне из степени следует, что $\sqrt{a^2}=a$, если $a \ge 0$. Если $a<0$, то равенство $\sqrt{a^2}=a$ неверное, поскольку число $\sqrt{a^2}$ неотрицательное и не может быть равным отрицательному числу a.

Равенство

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

верное при каждом значении a, поскольку число $|a|$ — неотрицательное и его квадрат равен a^2.

Примеры. $\sqrt{7^2}=7$, $\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$.

Хотите знать ещё больше?

В сформулированных выше теоремах представлены только простейшие случаи преобразования арифметических значений квадратных корней: если все числа под корнями положительные или неотрицательные. Но бывают и такие выражения, в которых под знаком корня — произведение либо частное двух отрицательных чисел. В этом случае можно использовать определения квадратного корня, арифметического значения квадратного корня и т. д. Например,

$$\sqrt{(-4)(-9)}=\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6;$$

$$\sqrt{\frac{-4}{-9}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3};$$

$$\sqrt{(-2)^4}=\sqrt{16}=4.$$

Из теоремы 3 несложно получить такое следствие.

Если натуральное число k — чётное, то для любых значений a выполняется тождество

$$\sqrt{a^{2k}}=a^k.$$

Ведь обе части этого равенства — числа неотрицательные, их квадраты — равны.

Проверьте себя

1. Сформулируйте теорему о корне из произведения.
2. Сформулируйте теорему о корне из дроби.
3. Сформулируйте теорему о корне из степени.
4. При каких значениях переменной верны тождества

$$\sqrt{a^2}=a;\ \sqrt{a^2}=-a;\ \sqrt{a^2}=|a|;\ \left(\sqrt{a}\right)^2=a?$$

Выполним вместе!

Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{49\cdot 25}$; б) $\sqrt{9\cdot 0{,}16}$; в) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$.

Решение.

а) $\sqrt{49\cdot 25}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{25}=7\cdot 5=35$;

б) $\sqrt{9\cdot 0{,}16}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{0{,}16}=3\cdot 0{,}4=1{,}2$;

в) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$;

г) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{3}{12}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

Ответ. а) 35; б) 1,2; в) 6; г) $\frac{1}{2}$.

Выполните устно

Найдите значение выражения (709—712).

709. а) $\sqrt{25\cdot 36}$; б) $\sqrt{18\cdot 2}$; в) $\sqrt{10\cdot 0{,}1}$.

710. а) $\sqrt{3\cdot 0{,}03}$; б) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$; в) $\sqrt{0{,}2\cdot 0{,}2}$.

711. а) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; в) $\sqrt{\frac{64}{81}}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$.

712. а) $\sqrt{2^2}$; б) $\sqrt{3^4}$; в) $\sqrt{(-3)^2}$; г) $\sqrt{0}$.

713. Найдите произведение чисел:

а) $\sqrt{30}$ и $\sqrt{30}$; б) $\sqrt{18}$ и $\sqrt{2}$.

714. Найдите значение x, если:

а) $x\cdot\sqrt{2}=2$; б) $x\cdot\sqrt{7}=7$; в) $x\cdot\sqrt{2}=4$.

Уровень А

Вычислите значение выражения (715—722).

715. а) $\sqrt{64\cdot 100}$; б) $\sqrt{49\cdot 144}$; в) $\sqrt{25\cdot 121}$;

г) $\sqrt{36 \cdot 900}$; д) $\sqrt{121 \cdot 64}$; е) $\sqrt{900 \cdot 81}$.

716. а) $\sqrt{0{,}01 \cdot 25}$; б) $\sqrt{0{,}04 \cdot 144}$; в) $\sqrt{0{,}25 \cdot 0{,}01}$;
г) $\sqrt{0{,}16 \cdot 49}$; д) $\sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}04}$; е) $\sqrt{0{,}16 \cdot 0{,}09}$.

717. а) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{144}}$; в) $\sqrt{\frac{121}{144}}$; г) $\sqrt{\frac{0{,}04}{0{,}49}}$.

718. а) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; в) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$; г) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$.

719. а) $\sqrt{8 \cdot 50}$; б) $\sqrt{40 \cdot 90}$; в) $\sqrt{20 \cdot 45}$; г) $\sqrt{7 \cdot 63}$;
д) $\sqrt{72 \cdot 72}$; е) $\sqrt{18 \cdot 98}$; ё) $\sqrt{2{,}5 \cdot 6{,}4}$; ж) $\sqrt{9{,}8 \cdot 7{,}2}$.

720. а) $\sqrt{10 \cdot 490}$; б) $\sqrt{360 \cdot 40}$; в) $\sqrt{7 \cdot 700}$; г) $\sqrt{12 \cdot 48}$;
д) $\sqrt{72 \cdot 32}$; е) $\sqrt{80 \cdot 45}$; ё) $\sqrt{1{,}6 \cdot 90}$; ж) $\sqrt{6{,}4 \cdot 250}$.

721. а) $\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 25}$; б) $\sqrt{36 \cdot 225 \cdot 144}$; в) $\sqrt{144 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 9}$;
г) $\sqrt{64 \cdot 100 \cdot 9}$; д) $\sqrt{25 \cdot 16 \cdot 81}$; е) $\sqrt{1{,}69 \cdot 0{,}0001 \cdot 0{,}16}$.

722. а) $\sqrt{2\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{5\frac{1}{16} \cdot 9}$; в) $\sqrt{12\frac{1}{4} \cdot 10\frac{6}{25}}$;
г) $\sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{25}{49} \cdot \frac{81}{121}}$; д) $\sqrt{\frac{8 \cdot 50 \cdot 49}{27 \cdot 81 \cdot 3}}$; е) $\sqrt{\frac{16}{25} \cdot \frac{49}{36} \cdot \frac{64}{81}}$.

Вычислите значение произведения (723—727).

723. а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; б) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}$; в) $\sqrt{75} \cdot \sqrt{3}$;
г) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{44}$; д) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{60}$; е) $\sqrt{135} \cdot \sqrt{15}$;
ё) $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0{,}18}$; ж) $\sqrt{12{,}5} \cdot \sqrt{24{,}5}$; з) $\sqrt{3{,}2} \cdot \sqrt{80}$.

724. а) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{8}$; б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; в) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{242}$;
г) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{99}$; д) $\sqrt{37} \cdot \sqrt{3700}$; е) $\sqrt{444} \cdot \sqrt{111}$;
ё) $\sqrt{1{,}2} \cdot \sqrt{120}$; ж) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{62{,}5}$; з) $\sqrt{1{,}44} \cdot \sqrt{0{,}49}$.

725. а) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{5}{9}} \cdot \sqrt{5}$; в) $\sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{6}$.

726. а) $\sqrt{41}\cdot\sqrt{\frac{1}{41}}$; б) $\sqrt{3\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1\frac{1}{5}}$; в) $\sqrt{3\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{8}{7}}$.

727. а) $\sqrt{1\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{1\frac{3}{13}}$; б) $\sqrt{1\frac{1}{16}}\cdot\sqrt{1\frac{8}{7}}$; в) $\sqrt{1\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{1\frac{3}{13}}$.

728. Пользуясь таблицей квадратов, вычислите:

а) $\sqrt{202\,500}$; б) $\sqrt{4\,840\,000}$; в) $\sqrt{33{,}64}$;

г) $-\sqrt{152\,100}$; д) $2\sqrt{230\,400}$; е) $\frac{1}{2}\sqrt{7\,290\,000}$.

Найдите значение частного (729—730).

729. а) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{50}}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{112}}$; в) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{108}}$; г) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}$.

730. а) $\frac{\sqrt{2{,}5}}{\sqrt{90}}$; б) $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{1{,}5}}$; в) $\frac{\sqrt{4{,}8}}{\sqrt{0{,}3}}$; г) $\frac{\sqrt{2{,}7}}{\sqrt{4{,}8}}$.

Вычислите значение выражения (731—734).

731. а) $\sqrt{3^4}$; б) $\sqrt{975^2}$; в) $\sqrt{0{,}2^6}$; г) $\sqrt{1{,}2^4}$;

д) $5\cdot\sqrt{12^2}$; е) $3\cdot\sqrt{(-2)^8}$; ё) $-0{,}4\cdot\sqrt{(-10)^6}$; ж) $-0{,}1\cdot\sqrt{3^6}$.

732. а) $3\cdot\sqrt{5^2}$; б) $-\sqrt{4^4}$; в) $4\sqrt{0{,}1^4}$; г) $-8\sqrt{0{,}2^4}$;

д) $\sqrt{(-5)^2}$; е) $\sqrt{(-3)^2}$; ё) $-\sqrt{(-7)^2}$; ж) $-2\sqrt{(-4)^2}$.

733. а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}$; б) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{135}-\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}$.

734. а) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{2}{27}}$; б) $\sqrt{2{,}5}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{4}$.

Вычислите наиболее рациональным способом (735—737).

735. а) $\sqrt{20^2-16^2}$; б) $\sqrt{29^2-20^2}$; в) $\sqrt{17^2-8^2}$;

г) $\sqrt{25^2-24^2}$; д) $\sqrt{41^2-40^2}$; е) $\sqrt{50{,}5^2-49{,}5^2}$.

736. а) $\sqrt{100^2-96^2}$; б) $\sqrt{61^2-60^2}$; в) $\sqrt{37^2-12^2}$;

г) $\sqrt{6{,}8^2-3{,}2^2}$; д) $\sqrt{13^2-6{,}6^2}$; е) $\sqrt{3{,}73^2-2{,}52^2}$.

737. а) $\sqrt{660^2+880^2}$; б) $\sqrt{333^2+444^2}$; в) $\sqrt{666^2+888^2}$.

738. Гипотенуза и катет прямоугольного треугольника равны c и a. Найдите второй катет, если:
а) $c = 13$ см, $a = 12$ см; б) $c = 8{,}2$ м, $a = 1{,}8$ м;
в) $c = 21{,}8$ дм, $a = 18{,}2$ дм; г) $c = 45{,}8$ км, $a = 44{,}2$ км.

Уровень Б

739. Вычислите, разложив подкоренное выражение на множители:

а) $\sqrt{640\,000}$; б) $\sqrt{6\,250\,000}$; в) $\sqrt{20\,736}$; г) $\sqrt{50\,625}$;

д) $\sqrt{30\,976}$; е) $\sqrt{86\,436}$; ё) $\sqrt{213\,444}$; ж) $\sqrt{104\,976}$.

Вычислите значение выражения (**740—741**).

740. а) $\sqrt{12\cdot 27}$; б) $\sqrt{80\cdot 45}$; в) $\sqrt{297\cdot 33}$; г) $\sqrt{48\cdot 768}$;

д) $\sqrt{250\cdot 160}$; е) $\sqrt{600\cdot 150}$; ё) $\sqrt{243\cdot 108}$; ж) $\sqrt{125\cdot 245}$.

741. а) $\sqrt{5\frac{2}{5}}\cdot\sqrt{6\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{4\frac{9}{24}}\cdot\sqrt{1\frac{23}{40}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{1\frac{1}{5}}$;

г) $\sqrt{3\frac{5}{7}}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{\frac{9}{14}}$; д) $\sqrt{\frac{4}{15}}\cdot\sqrt{1\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{2\frac{13}{18}}$;

е) $\sqrt{10\frac{5}{7}}\cdot\sqrt{\frac{8}{11}}\cdot\sqrt{1\frac{1}{21}}$.

742. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $\sqrt{a^4} = a^2$; б) $\sqrt{a^6} = a^3$; в) $\sqrt{a^4} = a\sqrt{a^2}$?

743. Замените выражение тождественно равным ему, пользуясь знаком модуля:

а) $(\sqrt{x})^2$; б) $5\sqrt{a^2}$; в) $b\sqrt{b^2}$; г) $-\sqrt{m^2}$.

744. При каких значениях переменной справедливо равенство:

а) $\sqrt{x^2} = x$; б) $(\sqrt{a})^2 = a$; в) $m\sqrt{m^2} = m^2$?

$m|m|$

745. Упростите выражение:

а) $\sqrt{9n^2}$, если $n < 0$; б) $x\sqrt{x^2}$, если $x < 0$.

746. Замените выражение тождественно равным:

а) $\left(\sqrt{a-1}\right)^2$; б) $\sqrt{(a-1)^2}$; в) $-\sqrt{(a-1)^2}$.

$|a-1|$ $a>1$ $-|a-1|$

747. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(-x)^2}$, если $x>0$; б) $\sqrt{(x-1)^2}$, если $x<1$;

в) $\sqrt{(a-b)^2}$, если $a<b$; г) $\sqrt{(a-b)^2}$, если $a>b$.

748. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{4m^2}$, если $m=-3$; б) $\sqrt{(-4m)^2}$, если $m=-3$;

в) $\sqrt{\left(\dfrac{a}{a-1}\right)^4}$, если $a=2$; г) $\sqrt{\left(\dfrac{a}{1-a}\right)^4}$, если $a=2$.

749. Найдите значение выражения $\sqrt{b^2-4ac}$:

а) если $a=3$, $b=5$, $c=-2$; $9+40$

б) если $a=100$, $b=160$, $c=63$.

750. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{c^2}$, если $c=3$, $c=-6$, $c=-12$;

б) $x\sqrt{x^2}$, если $x=5$, $x=-5$, $x=-7$.

751. Упростите выражение, если a, b, c — положительные числа:

а) $\sqrt{9a^4b^2c^6}$; б) $\sqrt{0{,}25a^2b^6c^{10}}$;

в) $-\sqrt{16a^4b^4c^6}$; г) $-\sqrt{2{,}25a^2b^2c^8}$.

752. Упростите выражение, если x, y, z — отрицательные числа:

а) $\sqrt{x^2y^2z^2}$; б) $\sqrt{x^2y^2z^4}$;

в) $-\sqrt{4x^2y^2z^2}$; г) $-\sqrt{0{,}81x^4y^4z^2}$.

753. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$; б) $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$;

в) $\sqrt{(a+1)^2(a^2+1)^2}$; г) $\sqrt{(2n-1)^2(n^4+1)^2}$.

754. Вычислите:

а) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{5}+3\right)^2}$;

в) $\sqrt{\left(\sqrt{17}-3\right)^2}+\sqrt{\left(12-\sqrt{17}\right)^2}$;

г) $\sqrt{\left(\sqrt{11}-4\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{11}\right)^2}$.

755*. Упростите выражение:

а) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$; в) $\sqrt{21-8\sqrt{5}}$;

г) $\sqrt{31+12\sqrt{3}}$; д) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$; е) $\sqrt{67+12\sqrt{7}}$?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

756. Замените «звёздочки» одночленом, чтобы получить тождество:

а) $(* + 2a)^2 = * + 8ab + 4b^2$; б) $(3x - *)^2 = 25y^2 + * - 30xy$;

в) $(4a^2 + *)^2 = * + * + b^6$; г) $(* - 6b)^2 = * - 60a^4b + *$.

757. Разложите на множители:

а) $-1 + 4a - 4a^2$; б) $0{,}36x^2 + 25y^2 - 6xy$;

в) $2xy - 0{,}01x^2y^2 - 100$; г) $2ab - 25a^2b^2 - 0{,}04$.

758. Представьте в виде произведения:

а) $x^{2n} - 1$; б) $a^{4p} - 4$; в) $9x^{2n+2} - y^{6n}$; г) $a^{4m-2} - 49b^{2m-4}$.

759. В таблице представлены результаты выполнения учениками контрольной работы из 10 заданий. Сколько учеников получили более 7 баллов? Сколько это составляет процентов от всех учеников класса?

Количество баллов	Подсчёт	Количество учеников
4	/	1
5	///	3
6	~~////~~ /	6
7	//	2
8	////	4
9	///	3
10	/	1

§17. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ С КОРНЯМИ

Выражения с квадратными корнями можно складывать, вычитать, умножать, возводить в степень и делить (на делитель, отличный от нуля).

Примеры.

$$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3};\qquad 12\sqrt{6}:3\sqrt{6}=\frac{12\sqrt{6}}{3\sqrt{6}}=4;$$

$$4\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}=12\sqrt{10};\qquad \left(3\sqrt{2}\right)^2=3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=18.$$

Рассмотрим и другие преобразования выражений с корнями.

$$\sqrt{200}=\sqrt{100\cdot 2}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{2}=10\sqrt{2}.$$

Подобное преобразование называют ***вынесением множителя за знак корня.*** В последнем примере за знак корня вынесен множитель 10.

Преобразование, обратное вынесению множителя за знак корня, называют ***внесением множителя под знак корня.***

$$0{,}3\sqrt{10}=\sqrt{0{,}09}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{0{,}09\cdot 10}=\sqrt{0{,}9}.$$

В этом примере под знак корня вносим множитель 0,3. Рассмотренные преобразования осуществляются на основании теоремы о корне из произведения.

Если знак корня находится в знаменателе дроби, то такую дробь можно заменить тождественной, знаменатель которой не имеет корней. Достаточно умножить члены дроби на соответствующее выражение. Например,

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}.$$

Такие преобразования называют ***освобождением дроби от иррациональности в знаменателе.***

Эти преобразования можно выполнять также с выражениями, содержащими переменные. Например,

$$a\sqrt{2}\cdot x\sqrt{3}=ax\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}ax;$$

$$\sqrt{9a}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{a}=3\sqrt{a};$$

$$2\sqrt{\frac{x}{2}}=\sqrt{4\cdot\frac{x}{2}}=\sqrt{2x};$$

$$\frac{x}{a-\sqrt{x}}=\frac{x(a+\sqrt{x})}{(a-\sqrt{x})(a+\sqrt{x})}=\frac{x(a+\sqrt{x})}{a^2-x}.$$

Примечание. При вынесении переменной за знак корня необходимо помнить, что равенство $\sqrt{a^2c}=a\sqrt{c}$ верно только при неотрицательных значениях a и c. Если $a<0$, $c\geq 0$, то $\sqrt{a^2c}=-a\sqrt{c}$. При любых действительных значениях a и неотрицательных c верно тождество:

$$\sqrt{a^2c}=|a|\cdot\sqrt{c}.$$

Пример. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{16a^2c^4d^3}$, $a>0$, $d>0$; б) $\sqrt{50x^6y}$, $x<0$, $y>0$.

Решение.

а) $\sqrt{16a^2c^4d^3}=4|a|\cdot c^2\cdot|d|\cdot\sqrt{d}=4ac^2d\sqrt{d}$;

б) $\sqrt{50x^6y}=5|x^3|\sqrt{2y}=-5x^3\sqrt{2y}$.

Ответ. а) $4ac^2d\sqrt{d}$; б) $-5x^3\sqrt{2y}$.

При внесении переменной под знак корня следует помнить, что под корень можно вносить лишь положительные числа.

Пример. Внесите множитель под знак корня:

а) $2a\sqrt{3ab^2}$, $a\geq 0$; б) $mn^2\sqrt{5mn}$, $m<0$, $n<0$.

Решение.

а) $2a\sqrt{3ab^2}=\sqrt{(2a)^2 3ab^2}=\sqrt{12a^3b^2}$;

б) $mn^2\sqrt{5mn}=-(-m)\cdot n^2\sqrt{5mn}=-\sqrt{((-m)\cdot n^2)^2\cdot 5mn}=$
$=-\sqrt{m^2n^4\cdot 5mn}=-\sqrt{5m^3n^5}$.

Ответ. а) $\sqrt{12a^3b^2}$; б) $-\sqrt{5m^3n^5}$.

Хотите знать ещё больше?

Используя словосочетание «выражения с корнями», в этой главе мы будем говорить только о «выражениях с арифметическими квадратными корнями». Но в математике выражения с корнями имеют более широкий смысл, поскольку корни бывают не только квадратные, но и кубические, четвёртой, пятой, ..., n-й степеней. Корни из числа a таких степеней обозначают символами:

$$\sqrt{a},\ \sqrt[3]{a},\ \sqrt[4]{a},\ \ldots,\ \sqrt[n]{a}.$$

Выражения, содержащие любые из таких корней, называют выражениями с корнями, или иррациональными выражениями. Выражения с арифметическими квадратными корнями — это только часть иррациональных выражений (рис. 45).

Рис. 45

Раньше знаки корней $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, ..., $\sqrt[n]{a}$ называли *радикалами*, поэтому в некоторых публикациях иррациональные выражения до сих пор называют выражениями с радикалами.

Проверьте себя

1. Какие действия можно выполнять с выражениями, содержащими корни?
2. Можно ли преобразовывать выражения с корнями по формулам сокращённого умножения?
3. Приведите примеры вынесения множителя за знак корня.
4. Покажите на примерах, как можно вносить множитель под знак корня.
5. Как можно освободиться от иррациональности в знаменателе дроби?

Выполним вместе!

1. Упростите выражение:

а) $\sqrt{50}-\sqrt{18}$; б) $(\sqrt{17}-1)(\sqrt{17}+1)$; в) $(\sqrt{5}+2)^2-4\sqrt{5}$.

✔ Решение.

а) $\sqrt{50}-\sqrt{18}=\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{9\cdot 2}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

б) $(\sqrt{17}-1)(\sqrt{17}+1)=(\sqrt{17})^2-1=17-1=16$;

в) $(\sqrt{5}+2)^2-4\sqrt{5}=(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\cdot 2+4-4\sqrt{5}=9.$

Ответ. а) $2\sqrt{2}$; б) 16; в) 9.

2. Разложите на множители выражение:

а) $\sqrt{28}-\sqrt{2}$; б) $n+\sqrt{n}$; в) $a-1$, если $a>1$.

✔ Решение.

а) $\sqrt{28}-\sqrt{2}=\sqrt{2\cdot 14}-\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}-\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{14}-1\right)$;

б) $n+\sqrt{n}=\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}+\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+1\right)$;

в) если a — число положительное, то $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$. Поэтому $a-1=\left(\sqrt{a}\right)^2-1=\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)$.

Ответ. а) $\sqrt{2}(\sqrt{14}-1)$; б) $\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)$; в) $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)$.

3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{4}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

✔ Решение.

а) $\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{4\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$;

б) $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$.

Ответ. а) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$.

Выполните устно

760. Упростите выражение:

а) $2\sqrt{5}+7\sqrt{5}$; б) $8\sqrt{3}-4\sqrt{3}$; в) $13-3\sqrt{13}$.

761. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:

а) $6\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$; б) $-10\sqrt{3}$ и $5\sqrt{3}$.

762. Найдите квадрат числа: а) $\sqrt{23}$; б) $3\sqrt{2}$; в) $-\sqrt{0{,}4}$.

763. Возведите в квадрат выражение:

а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{8}$; в) $-\sqrt{31}$; г) $-0{,}1\sqrt{0{,}1}$.

764. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{18}$; в) $\sqrt{32}$; г) $\sqrt{98}$; д) $\sqrt{500}$.

765. Внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt{3}$; б) $6\sqrt{6}$; в) $-3\sqrt{2}$; г) $7\sqrt{10}$.

Уровень A

Вынесите множитель за знак корня (**766—768**).

766. а) $\sqrt{250}$; б) $\sqrt{490}$; в) $\sqrt{5000}$; г) $\sqrt{1600}$;

д) $\sqrt{6000}$; е) $-\sqrt{7200}$; ё) $-\sqrt{7500}$; ж) $\sqrt{17500}$.

767. а) $\sqrt{242}$; б) $\sqrt{363}$; в) $\sqrt{484}$; г) $\sqrt{847}$;

д) $\sqrt{605}$; е) $\sqrt{882}$; ё) $\sqrt{720}$; ж) $\sqrt{2178}$.

768. а) $\sqrt{2{,}5}$; б) $\sqrt{12{,}1}$; в) $\sqrt{6{,}75}$; г) $\sqrt{28{,}88}$.

Внесите множитель под знак корня (**769—773**).

769. а) $2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{10}$; в) $12\sqrt{2}$; г) $2\sqrt{21}$;

д) $0{,}1\sqrt{10}$; е) $0{,}2\sqrt{5}$; ё) $1{,}2\sqrt{0{,}1}$.

770. а) $11\sqrt{11}$; б) $5\sqrt{3}$; в) $10\sqrt{7}$;

г) $0{,}1\sqrt{0{,}1}$; д) $1{,}5\sqrt{2}$; е) $2{,}5\sqrt{10}$.

771. а) $0{,}3\sqrt{10}$; б) $0{,}2\sqrt{35}$; в) $0{,}04\sqrt{65}$;

г) $0{,}5\sqrt{0{,}2}$; д) $0{,}2\sqrt{0{,}5}$; е) $\sqrt{1{,}2}\cdot 1{,}5$.

772. а) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $1\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{33}}$;

г) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; д) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$; е) $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

773. а) $1\frac{1}{5}\sqrt{2\frac{1}{2}}$; б) $2\frac{1}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$; в) $3\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{17}}$.

774. Ответьте на вопросы (рис. 46). Попытайтесь сделать обобщение.

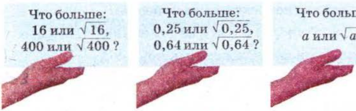


Рис. 46

Сравните значения выражений (775—777).

775. а) $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{15}$; б) $3\sqrt{2}$ и $\sqrt{17}$; в) $\sqrt{26}$ и $3\sqrt{3}$.

776. а) $3\sqrt{5}$ и $5\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{10}$ и $10\sqrt{2}$;
в) $1,5\sqrt{1,1}$ и $1,3\sqrt{1,2}$; г) $3\sqrt{7}$ и $6\sqrt{2}$.

777. а) $\frac{2}{3}\sqrt{27}$ и $7\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $0,2\sqrt{150}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{54}$.

Выполните действия (778—783).

778. а) $(\sqrt{12}+\sqrt{75})\cdot\sqrt{3}$; б) $(\sqrt{18}-\sqrt{50})\cdot\sqrt{2}$;
в) $(4\sqrt{3}-\sqrt{24})\cdot\sqrt{12}$; г) $(2\sqrt{18}+\sqrt{12})\cdot\sqrt{8}$.

779. а) $(\sqrt{20}+\sqrt{45})\cdot\sqrt{5}$; б) $(\sqrt{63}-\sqrt{28})\cdot\sqrt{7}$;
в) $(7\sqrt{3}+5\sqrt{2})\cdot\sqrt{6}$; г) $(5\sqrt{12}-3\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}$.

780. а) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+3)$; б) $(2-\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})$;
в) $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$; г) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)$.

781. а) $(2-\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})$; б) $(6-3\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$;
в) $(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)$; г) $(4+3\sqrt{7})(3\sqrt{7}-4)$.

782. а) $(1+\sqrt{3})^2$; б) $(3-\sqrt{5})^2$;
в) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}$; г) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2+2\sqrt{10}$.

783. а) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$; б) $(3\sqrt{2}+5\sqrt{3})^2$;
в) $(\sqrt{5}-1)^2+\sqrt{20}$; г) $(1+\sqrt{3})^2-\sqrt{12}$.

784. Вынесите множитель за знак корня, если $a > 0$:

а) $\sqrt{2a^2}$; б) $\sqrt{12a^2}$; в) $3\sqrt{a^3}$; г) $\sqrt{8a^4}$.

785. Вынесите множитель за знак корня, если $x > 0$, $y > 0$:

а) $\sqrt{3x^2}$; б) $\sqrt{7y^4}$; в) $\sqrt{2x^3}$; г) $\sqrt{9x^5}$.

786. Внесите множитель под знак корня, если $x > 0$:

а) $2x\sqrt{3}$; б) $x\sqrt{2x}$; в) $x^2\sqrt{5}$; г) $3x^3\sqrt{x}$.

787. Внесите множитель под знак корня, если $x > 0$, $y > 0$:

а) $x\sqrt{2}$; б) $y\sqrt{3}$; в) $2x^2\sqrt{x}$; г) $3y\sqrt{x}$.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби (**788—791**).

788. а) $\frac{x}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{a}}$; в) $\frac{7}{3\sqrt{2}}$; г) $\frac{6}{5\sqrt{12}}$.

789. а) $\frac{a}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; г) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

790. а) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; б) $\frac{c}{1-\sqrt{3}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}+x}$; г) $\frac{x}{1-\sqrt{x}}$.

791. а) $\frac{m}{1-\sqrt{5}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; в) $\frac{a}{1+\sqrt{c}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Уровень Б

Сравните значения выражений (**792—793**).

792. а) $-3\sqrt{10}$ и $-2\sqrt{22}$; б) $-1{,}5\sqrt{10}$ и $-2\sqrt{5}$.

793. а) $-1{,}5\sqrt{2}$ и $-2\sqrt{1{,}1}$; б) $-0{,}2\sqrt{0{,}1}$ и $-0{,}1\sqrt{0{,}2}$.

794. Что больше:

а) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{235}\cdot\sqrt{6}$ или $\sqrt{3}\cdot\sqrt{237}\cdot\sqrt{10}$;

б) $\sqrt{0{,}2}\cdot\sqrt{0{,}03}\cdot\sqrt{0{,}006}$ или $\sqrt{0{,}3}\cdot\sqrt{0{,}06}\cdot\sqrt{0{,}002}$?

795. Что больше: сумма десяти слагаемых $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{2}$ или произведение десяти множителей $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{2}$?

Выполните действия (796 —799).

796. а) $\sqrt{48}-\sqrt{300}+\sqrt{75}$; б) $\sqrt{72}\cdot\sqrt{50}+2\sqrt{18}$;

в) $\sqrt{200}+\sqrt{8}-\sqrt{32}$; г) $3\sqrt{8}+\sqrt{98}-\sqrt{2}$.

797. а) $\sqrt{12}-\sqrt{75}+\sqrt{48}$; б) $\sqrt{150}-\sqrt{54}+\sqrt{24}$;

в) $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{50}+\sqrt{32}\right)$; г) $2\sqrt{10}\cdot\left(\sqrt{45}-\sqrt{80}\right)$.

798. а) $\left(\sqrt{30}+\sqrt{24}\right)\cdot\sqrt{6}$; б) $\left(\sqrt{60}-\sqrt{15}\right)\cdot\sqrt{15}$;

в) $\left(\sqrt{125}-2\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{10}+\sqrt{32}$; г) $\left(7\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{6}-\sqrt{800}$.

799. а) $\left(\sqrt{45}-\sqrt{20}\right):\sqrt{5}$; б) $\left(\sqrt{28}+\sqrt{63}\right):\sqrt{7}$;

в) $\dfrac{3\sqrt{28}+2\sqrt{175}}{2\sqrt{112}}$; г) $\dfrac{7\sqrt{108}-\sqrt{12}}{2\sqrt{75}}$.

Вычислите (800—801).

800. а) $\left(3\sqrt{32}+\sqrt{162}-2\sqrt{288}\right)\cdot\sqrt{2}+15$;

б) $\left(4\sqrt{12}-6\sqrt{48}+5\sqrt{27}\right)\cdot\sqrt{3}-12$.

801. а) $\left(2\sqrt{320}-7\sqrt{20}-\sqrt{45}\right)^2+20$;

б) $\left(4\sqrt{150}-6\sqrt{54}+2\sqrt{96}\right)^2-20$.

802. Площадь поверхности куба равна 37,5 дм^2 (рис. 47). Найдите длину его ребра.

803. Площадь поверхности тела, состоящего из семи равных кубов (рис. 48), равна 480 см^2. Найдите длину ребра куба.

Рис. 47

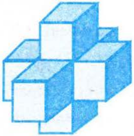


Рис. 48

804. Вынесите множитель за знак корня, если $x < 0$:

а) $\sqrt{2x^2}$; б) $\sqrt{20x^4}$; в) $\frac{2}{x}\sqrt{x^2c}$; г) $\sqrt{x^6m}$.

805. Вынесите множитель за знак корня, если $a < 0$, $c < 0$:

а) $\sqrt{12a^4}$; б) $\sqrt{3c^{10}}$; в) $-\sqrt{-18a^7}$; г) $-\sqrt{32c^8}$;

д) $\sqrt{-48a^{11}c^2}$; е) $\sqrt{60a^7c^9}$; ё) $\sqrt{\frac{20a^4}{-9c}}$; ж) $\sqrt{\frac{27a^{16}}{16c^6}}$.

806. Внесите множитель под знак корня, если $c < 0$:

а) $c\sqrt{a}$; б) $c^2\sqrt{a}$; в) $c^3\sqrt{x}$; г) $c^4\sqrt{p}$.

807. Внесите множитель под знак корня, если $m < 0$:

а) $m\sqrt{m^2}$; б) $2m\sqrt{\frac{1}{m^2}}$; в) $m^2\sqrt{\frac{3}{m^4}}$; г) $m^3\sqrt{\frac{1}{m^8}}$.

Упростите выражение **(808—816)**.

808. а) $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}-4\sqrt{a}$; б) $2\sqrt{x}+y\sqrt{x}-\sqrt{4x}$.

809. а) $\sqrt{25a}-\sqrt{64a}+\sqrt{9a}$; б) $9\sqrt{p}-\sqrt{9p}+\sqrt{16p}$.

810. а) $2\sqrt{20x}-\sqrt{5x}-\sqrt{45x}$; б) $\sqrt{18p}-\sqrt{8p}+\sqrt{81}$.

811. а) $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)$; б) $(\sqrt{x}+2)(3+\sqrt{x})$.

812. а) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)+2\sqrt{a}$; б) $(3-2\sqrt{x})\sqrt{x}-3\sqrt{x}$.

813. а) $(-b+\sqrt{x})(-b-\sqrt{x})$; б) $\left(b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)$.

814. а) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})+\sqrt{ax}$; б) $\sqrt{xy}-\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

815. а) $(a-b):(\sqrt{a}-\sqrt{b})$; б) $(x-y):(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

816. а) $(4a^2-x):(2a-\sqrt{x})$; б) $(x^4-9z):(x^2+3\sqrt{z})$.

Разложите на множители выражение **(817—819)**.

817. а) $\sqrt{35}-\sqrt{5}$; б) $\sqrt{35}-\sqrt{7}$; в) $7-\sqrt{7}$.

818. а) $a+\sqrt{a}$; б) $x\sqrt{y}-\sqrt{x}$; в) $a\sqrt{c}-c\sqrt{a}$.

819. а) a^2-c; б) $a-c$; в) $x-2$.

Сократите дробь (820—822).

820. а) $\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$; б) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{x-z}$; в) $\frac{a+\sqrt{2}}{a^2-2}$.

821. а) $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+a}$; б) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+x\sqrt{a}}$; в) $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$.

822. а) $\frac{x-6\sqrt{x}+9}{x-9}$; б) $\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2+\sqrt{3}}$; в) $\frac{(\sqrt{7}-1)^2}{\sqrt{7}-4}$.

Освободите от иррациональности знаменатель дроби (823—825).

823. а) $\frac{2a}{\sqrt{2ax}}$; б) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; в) $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{c}}$; г) $\frac{3}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$.

824. а) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; б) $\frac{a+1}{\sqrt{a+3}-2}$; в) $\frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$; г) $\frac{10}{\sqrt{6}+1}$.

825. а) $\frac{5}{\sqrt{x+3}}$; б) $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$; в) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; г) $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

826. Докажите, что:

а) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^2=12$;

б) $\left(\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}\right)^2=4$.

827. Сравните числа:

а) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{19}$; б) $6-\sqrt{15}$ и $\sqrt{37}-\sqrt{14}$;

в) $\sqrt{3}+\sqrt{19}$ и $\sqrt{7}+\sqrt{10}$; г) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ и $\sqrt{17}-\sqrt{15}$.

828. Что больше: $\sqrt{2003}-\sqrt{2001}$ или $\sqrt{2004}-\sqrt{2002}$?

829. Найдите сумму, разность, произведение и частное выражений:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ и } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

830. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{(b-a)^2}{\sqrt{ab}}$;

б) $\left(\frac{1}{x+x\sqrt{y}}+\frac{1}{x-x\sqrt{y}}\right):\frac{2}{y-1}$.

831*. Докажите равенства ***индийского математика А. Бхаскара*** (1114—1185):

а) $\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

б) $\frac{\sqrt{9}+\sqrt{54}+\sqrt{450}+\sqrt{75}}{5+\sqrt{3}}=3\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

в) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

832*. Задача ***французского математика Ж. Л. Ф. Бертрана*** (1822—1900). Докажите, что

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

833. Найдите квадрат и куб числа: а) $2{,}1\cdot10^6$; б) $8{,}3\cdot10^{-5}$.

834. Постройте график уравнения $x^2-y=0$.

835. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\frac{x+y}{3}+x=15,\\ y-\frac{y-x}{5}=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{x-y}{2}+y=4,\\ x-\frac{y-x}{3}=9;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+y=7,\\ |x-y|=5.\end{cases}$

836. Один из углов треугольника равен 50°, а разность двух других — 50°. Найдите меры этих углов.

§18. ФУНКЦИЯ $y=\sqrt{x}$

Вы уже знаете, что площадь квадрата является функцией длины его стороны: $S=a^2$. А как зависит длина стороны квадрата от изменения его площади? Решим уравнение $a^2=S$ ($S>0$, $a>0$). Используя определение арифметического корня, имеем: $a=\sqrt{S}$.

На основании этой формулы каждому значению S соответствует единственное значение a, то есть a является функцией S.

Существуют и другие задачи, решение которых приводит к функциям, где аргумент находится под знаком квадратного корня. Приведём примеры.

Площадь круга (S) находят по формуле $S = \pi R^2$, где R — радиус круга, $\pi \approx 3{,}14$. Отсюда $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

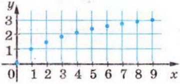
Путь, пройденный телом при свободном падении, определяем по формуле $h = \frac{1}{2}gt^2$, где t — время, g — постоянное число. Отсюда $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Рассмотрим свойства функции $y = \sqrt{x}$.

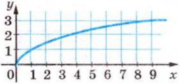
Область её определения — множество неотрицательных действительных чисел, поскольку только из неотрицательного числа можно извлечь квадратный корень. Составим таблицу значений функции для нескольких значений аргумента x:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3

Дробные значения здесь приближённые. Точки с координатами, указанными в этой таблице, нанесём на рисунке 49, *а*. Если на координатной плоскости отметить точки с координатами x и y при условии, что переменная x принимает все неотрицательные действительные значения, то получим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 49, *б*). Этот график — одна ветвь параболы. Она выходит из начала координат и располагается в первом координатном углу. Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на всей области определения.



а



б

Рис. 49

Свойства функции $y=\sqrt{x}$ можно установить по графику, изображённому, например, на рисунке 49, *б*. Представляем их в виде таблицы.

Свойства функции	Вид функции $y=\sqrt{x}$
Область определения	Все неотрицательные числа ($x \geq 0$)
Область значений	Все неотрицательные числа ($y \geq 0$)
Положительные значения	Все числа, кроме $x=0$
Отрицательные значения	—
Промежутки убывания	—
Промежутки возрастания	$x>0$

В современной математике графики функций используют довольно часто. Остановимся на ***графическом решении уравнений.***

Пусть надо решить уравнение $\frac{8}{x}-\sqrt{x}=0$.

Заменим данное уравнение равносильным $\frac{8}{x}=\sqrt{x}$ и построим в одной системе координат графики функций $y=\frac{8}{x}$ и $y=\sqrt{x}$ (рис. 50).

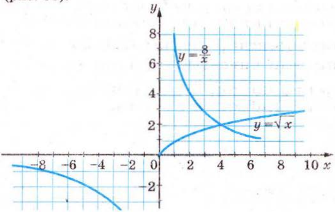


Рис. 50

Эти графики пересекаются в точке с абсциссой $x \approx 4$.

При таком значении x выражения $\frac{8}{x}$ и $\sqrt{x}$ принимают равные значения, то есть число 4 — корень (возможно, приближённый) уравнения $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$. Подставляем $x = 4$ в данное уравнение и убеждаемся, что 4 — точный корень.

Построенные графики других общих точек не имеют, следовательно, данное уравнение имеет только один корень: $x = 4$.

Хотите знать ещё больше?

График функции $y = \sqrt{x}$ не обязательно строить по точкам. Этот график для $x > 0$ симметричен графику функции $y = x^2$ относительно биссектрисы первого координатного угла. Ведь равенства $y = \sqrt{x}$ и $y^2 = x$ при положительном x выражают одну и ту же зависимость между переменными x и y. Если во втором из этих равенств поменять x на y, а y — на x, то это равнозначно замене оси x осью y и наоборот. Такие функции, как $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, называются *обратными*. Постройте их графики в одной системе координат и убедитесь, что они симметричны относительно прямой $y = x$.

Проверьте себя

1. Какова область определения функции $y = \sqrt{x}$?
2. Какие значения может иметь функция $y = \sqrt{x}$?
3. Имеет ли наименьшее значение функция $y = \sqrt{x}$?
4. Имеет ли наибольшее значение функция $y = \sqrt{x}$?
5. Какой график имеет функция $y = \sqrt{x}$?

Выполним вместе!

1. В одной системе координат постройте графики функций

$$y = \sqrt{x}, \ y = 2\sqrt{x} \ \text{ и } \ y = -2\sqrt{x}.$$

✔ Решение.

Составим таблицу соответствующих значений x и y.

x	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{x}$	0	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
$2\sqrt{x}$	0	1,4	2	2,8	3,4	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
$-2\sqrt{x}$	0	-1,4	-2	-2,8	-3,4	-4	-4,4	-4,8	-5,2	-5,6	-6

Дробные значения здесь приближённые.

Построим в системе координат точки, координаты которых приведены в таблице. Получим графики соответствующих функций (рис. 51).

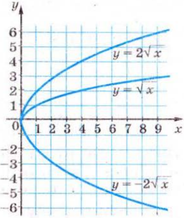


Рис. 51

Выполните устно

837. Вычислите:

а) $\sqrt{1}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{49}$;

б) $\sqrt{1{,}21}$; $\sqrt{1{,}44}$; $\sqrt{1{,}69}$; $\sqrt{1{,}96}$; $\sqrt{2{,}25}$.

838. Возрастающей или убывающей является функция:

а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=-\sqrt{x}$?

839. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}=0$; б) $\sqrt{x}=-1$; в) $\sqrt{x}=2$.

840. Сколько общих точек имеют графики функций:

а) $y=1$ и $y=\sqrt{x}$; б) $y=-5$ и $y=-\sqrt{x}$;

в) $y=1$ и $y=-\sqrt{x}$; г) $y=\sqrt{x}$ и $y=-5$?

Уровень A

841. Заполните таблицу для функции $y=\sqrt{x}$:

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	7,84	9	12,25	14,44	16
y											

Постройте график.

842. Пользуясь графиком функции $y=\sqrt{x}$ (рис. 52), найдите:
а) значение функции, если значение аргумента равно 0,8; 1,2; 2; 2,3; 5;
б) значение аргумента, которому соответствует значение функции, равной: 0,5; 1,3; 1,7; 2; 2,2.

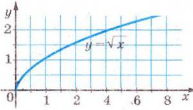


Рис. 52

843. Какие из данных точек относятся к графику функции $y=\sqrt{x}$:

$A(0{,}01;\ 0{,}1)$; $B(0{,}16;\ -0{,}4)$; $C(0{,}4;\ 0{,}2)$;

$D(0{,}09;\ 0{,}3)$; $E\left(2\frac{7}{9};1\frac{2}{3}\right)$; $F\left(-\frac{4}{9};-\frac{2}{3}\right)$?

844. Постройте график функции $y=\sqrt{x}$, если $0\le x\le 10$.

845. Проходит ли график функции $y=\sqrt{x}$ через точки $A(16;\ 4)$, $B(16;\ -4)$, $C(-5;\ 25)$, $K(10;\ \sqrt{10})$?

846. Пользуясь графиком функции $y=\sqrt{x}$ (см. рис. 52), найдите:
а) значения функции, если значения x равны 0,5; 2; 3; 4; 5;
б) значения x, при которых значения y равны: 0,5; 1; 2;
в) целые значения x, при которых значения функции меньше 3.

Решите графически уравнения (847—848).

847. а) $\sqrt{x}=3$; б) $\sqrt{x}-1=0$; в) $\sqrt{x}+2=0$.

848. а) $\sqrt{x}=0$; б) $\sqrt{x}+3=0$; в) $\sqrt{x}-2=0$.

Уровень Б

849. В одной системе координат постройте графики функци:

а) $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$; б) $y=2\sqrt{x}$ и $y=-2\sqrt{x}$;

в) $y=\sqrt{x}$ и $y=2\sqrt{x}$; г) $y=2\sqrt{x}$ и $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

850. Постройте графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$, если $x\geq 0$, в одной системе координат. Симметричны ли эти графики? Относительно какой прямой?

851. Дано график функции: 1) $y=x^2$; 2) $y=\sqrt{x}$.
Пересекает ли его прямая:
а) $y=1$; б) $y=-1$; в) $y=4$;
г) $y=-4$; д) $y=100$; е) $y=-100$?
Если пересекает, то в какой точке?

852. На рисунке 53 построены графики функций $y=x$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$. Пользуясь графиками, сравните:

а) $0{,}7^2$ и $0{,}7$; б) $0{,}2^2$ и $\sqrt{0{,}2}$; в) 2 и $\sqrt{2}$; г) $1{,}3$ и $\sqrt{1{,}3}$;

д) $0{,}26$ и $\sqrt{0{,}26}$; е) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ и $\sqrt{\frac{4}{5}}$; ё) $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ и $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

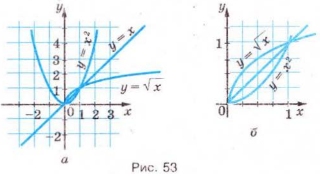


Рис. 53

853. Разместите в порядке возрастания числа:

а) $0{,}32$; $0{,}32^2$; $\sqrt{0{,}32}$; б) $1{,}74$; $1{,}74^2$; $\sqrt{1{,}74}$.

854. Решите графическим способом уравнение:

а) $\sqrt{x}+\frac{1}{x}=0$; б) $x^2-\sqrt{x}=0$; в) $\sqrt{x}-\frac{1}{x}=0$;

г) $\sqrt{x}+2=x$; д) $x+\sqrt{x}=6$; е) $x^2+\sqrt{x}=0$.

855. Имеет ли решение уравнение:

а) $\sqrt{x}=x+3$; б) $x+\sqrt{x}+1=0$; в) $\sqrt{x}=0{,}5x-4$?

856*. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt{x+3}$; б) $y=\sqrt{x}+3$; в) $y=\sqrt{x}-3$.

857. Сколько корней имеет уравнение:

а) $\sqrt{x}=0{,}5x+2$; б) $\sqrt{x}=\frac{1}{3}(x+2)$; в) $\sqrt{x}=x^2-2$?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Упростите выражение (858—859).

858. а) $0{,}2x^{-2}y\cdot 5x^2y^{-1}$; б) $(a^{-1}+b^{-1})\cdot(a+b)^{-1}$;

в) $\left(\frac{m^4n^{-2}}{9p}\right)^2\left(\frac{m^2n^{-3}}{3p}\right)^{-3}$; г) $\left(\frac{a^4b^{-3}}{c^5}\right)^{-3}\left(\frac{c^8}{ab^3}\right)^2$.

859. а) $\frac{x}{x^2-4}-\frac{2}{3x+6}$; б) $\frac{1}{3x-1}-\frac{2x}{6x^2-5}$; в) $1-a+\frac{2a^2}{a+1}$.

860. Сплав меди и цинка массой 16 кг содержит 55 % меди. Сколько меди нужно добавить в сплав, чтобы в новом сплаве было 60 % меди?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант I

1°. Вычислите: а) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}$; б) $\sqrt{562^2-462^2}$.

2•. Упростите выражение:

а) $(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$; б) $(1+\sqrt{5})^2-\sqrt{20}$;

в) $(2+\sqrt{9x})(2-3\sqrt{x})$; г) $(a+\sqrt{a}):(\sqrt{a}+1)$.

3•. Решите графически уравнение $\sqrt{x}=0{,}5x$.

Вариант II

1°. Вычислите: а) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{28}$; б) $\sqrt{628^2-528^2}$.

2•. Упростите выражение:

а) $(6+\sqrt{5})(6-\sqrt{5})$; б) $(x-\sqrt{x}):(\sqrt{x}-1)$;

в) $(3-\sqrt{4a})(3+2\sqrt{a})$; г) $(3-\sqrt{2})^2+\sqrt{72}$.

3•. Решите графически уравнение $\sqrt{x}=x-6$.

Вариант III

1°. Вычислите: а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$; б) $\sqrt{698^2-598^2}$.

2•. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{44}-6)(\sqrt{44}+6)$; б) $(2+\sqrt{3})^2-\sqrt{48}$;

в) $(5+\sqrt{4x})(5-2\sqrt{x})$; г) $(n+2\sqrt{n}+1):(\sqrt{n}+1)$.

3•. Решите графически уравнение $x^2=2x$.

Вариант IV

1°. Вычислите: а) $\sqrt{22}\cdot\sqrt{88}$; б) $\sqrt{922^2-522^2}$.

2•. Упростите выражение:

а) $(2\sqrt{3}-1)(\sqrt{12}+1)$; б) $(2-\sqrt{5})^2+\sqrt{80}$;

в) $(4-\sqrt{9c})(4+3\sqrt{c})$; г) $(x^2-3):(x-\sqrt{3})$.

3•. Решите графически уравнение $x^2=x+2$.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Квадратные корни из чисел вавилонские математики умели вычислять ещё 4 тыс. лет тому назад. Находили даже приближённые значения квадратных корней, пользуясь правилом, которое теперь можно записать (при небольших значениях c) в виде приближённого равенства:

$$\sqrt{b^2+c} \approx b + \frac{c}{2b}.$$

В XIII в. европейские математики предложили сокращённое обозначение корня. Вместо нынешнего $\sqrt{12}$ писали $R12$ (от латинского *Radix* — корень). Позднее вместо R стали писать знак V, например V7, V$(a+b)$. Затем над многочленом за корнем добавили черту: V$\overline{a+b}$. Р. Декарт (1596—1650) соединил знак корня с чертой, после чего запись приобрела современный вид: $\sqrt{a+b}$.

Действительные числа входили в математику непросто. Учёные античного мира не предполагали, что кроме целых и дробных могут быть и другие числа. Хотя Пифагор (VI в. до н. э.) и его ученики доказали: если длина стороны квадрата равна 1, то длину его диагонали нельзя выразить ни одним рациональным числом. Таким образом, они выяснили, что существуют отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами, но при этом иррациональных чисел не ввели.

Математики Индии и Среднего Востока пользовались иррациональными числами, но считали их ненастоящими, неправильными, «глухими». И только когда Р. Декарт предложил каждой точке координатной прямой поставить в соответствие число, иррациональные числа объединили с рациональными во множество действительных чисел. Строгая теория действительных чисел появилась лишь в XIX в.

В 8 классе изучают не все действительные числа. Кроме квадратных существуют корни третьей, четвёртой и высших степеней, например $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[5]{0{,}6}$. С такими действительными числами вы ознакомитесь в старших классах.

ОСНОВНОЕ В ГЛАВЕ

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a. Например, число 16 имеет два квадратных корня: 4 и −4. Неотрицательное значение квадратного корня из числа a называют *арифметическим значением корня* и обозначают символом $\sqrt{a}$.

Свойства квадратных корней. Если $a > 0$ и $b > 0$, то

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; \ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a; \ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \ \sqrt{a^{2k}} = a^k.$$

Для любого действительного a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Значения многих квадратных корней — числа не рациональные, а иррациональные.

Числа целые и дробные, положительные, отрицательные и нуль вместе составляют множество *рациональных чисел*. Каждое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — число целое, а n — натуральное.

Любое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. А любая бесконечная периодическая десятичная дробь изображает некоторое рациональное число.

Примеры: $\frac{2}{3} = 0{,}6666...$, $-\frac{13}{11} = -1{,}181818...$.

Числа, которые можно представить в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, называют *иррациональными*. Примеры иррациональных чисел: $\sqrt{2} = 1{,}4142136...$, $\pi = 3{,}1415927...$.

Иррациональные числа вместе с рациональными образуют множество *действительных чисел*. Множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел обозначают соответственно буквами N, Z, Q, R (см. рис. 41).

Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать, возводить в степень и делить (на числа, отличные от нуля). Для сложения и умножения произвольных действительных чисел верны переместительный, сочетательный и распределительный законы: $a + b = b + a$, $ab = ba$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$, $(a + b)c = ac + bc$.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ ОЦЕНИВАНИЮ

Тестовые заданияя № 3

1. Сколько корней имеет уравнение $x^2 = 4$:
а) один; б) два; в) бесконечное множество; г) ни одного?

2. Число $\sqrt{51}$ находится между числами:
а) 5 и 6; б) 6 и 7; в) 7 и 8; г) 8 и 9.

3. Укажите, какое из данных чисел иррациональное:
а) $\sqrt{25}$; б) $-1,7$; в) 3,14; г) $\sqrt{5}$.

4. Значение выражения $2\sqrt{25} - 4$ равно:
а) 5; б) 6; в) 4; г) 2.

5. Равенство $(\sqrt{x})^2 = -x$ выполняется, если:
а) $x > 0$; б) $x = 0$; в) $x < 0$; г) x — любое.

6. Графиком какой функции является парабола:
а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = \frac{5}{x}$; г) $y = \frac{x}{5}$?

7. Найдите корни уравнения $\sqrt{x} = 3$:
а) 5; б) 3; в) 9; г) 10.

8. Значение $\sqrt{11\frac{1}{9}}$ равно:
а) $1\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{10}$; в) $\frac{10}{3}$; г) $11\frac{1}{3}$.

9. Число 0,27777777... можно записать так:
а) 0,27; б) 0,(27); в) 0,2(7); г) 0,28.

10. График функции $y = \sqrt{x}$ проходит через точку:
а) (2; 4); б) (1; 2); в) (4; 2); г) (4; –2).

Типовые задания для контрольной работы № 3

1. Вычислите:

а°) $\sqrt{625}-2\sqrt{144}$; б•) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$.

2. Внесите множитель под знак корня:

а°) $5\sqrt{3}$; б•) $2x^2\sqrt{x}$.

3. Вынесите множитель за знак корня:

а°) $\sqrt{980}$; б•) $\sqrt{49x^4y^5}$.

4. Решите графически уравнение:

а°) $x^2=5$; б•) $\sqrt{x}=1{,}5$.

5. Выполните действия:

а°) $\sqrt{2}(\sqrt{18}-\sqrt{2})$; б•) $\sqrt{10}(\sqrt{20}-2\sqrt{45}+\sqrt{125})+5\sqrt{2}$.

6. Рациональным или иррациональным является число:

а°) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$; б•) $\sqrt{9-6\sqrt{2}}+\sqrt{9+6\sqrt{2}}$?

7. Упростите выражение:

а•) $ab\sqrt{a^3b}-5a^2\sqrt{ab^3}$;

б••) $ab^2\sqrt{9a^6b^3}-5a^2b\sqrt{a^4b^5}$,

если $a\le 0, b\ge 0$.

8. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а°) $\frac{15}{\sqrt{5}}$; б•) $\frac{8}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$; в•) $\frac{1}{2\sqrt{7}-1}-\frac{1}{2\sqrt{7}+1}$.

9••. Упростите выражение:

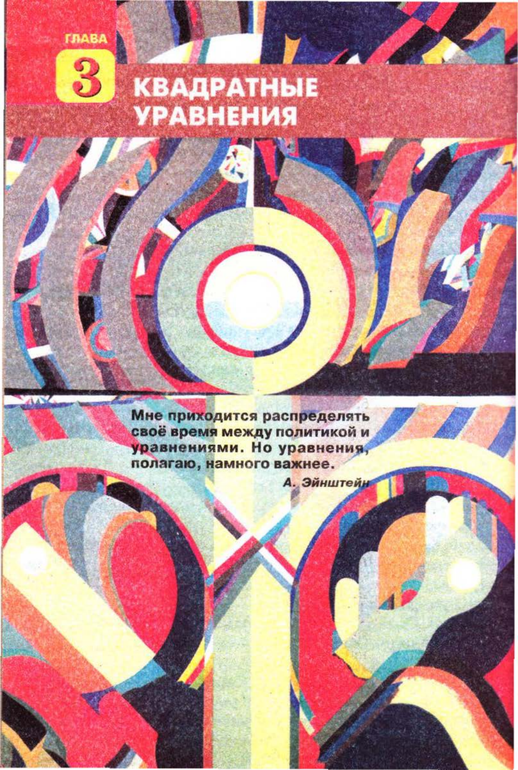
$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right).$$

10••. Решите уравнение:

$$\sqrt{5+\sqrt{4+\sqrt{x}}}=3.$$

ГЛАВА 3

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ



Мне приходится распределять своё время между политикой и уравнениями. Но уравнения, полагаю, намного важнее.

А. Эйнштейн

В предыдущих классах вы уже научились составлять и решать уравнения, но лишь простейшие, к которым сводятся относительно несложные задачи. Для решения более сложных задач используют квадратные уравнения. Изучив эту тему, вы сможете решать прикладные задачи из разных отраслей знаний.

В этой главе вы узнаете, что такое:
- **неполные квадратные уравнения;**
- **формула корней квадратного уравнения;**
- **теорема Виета;**
- **разложение квадратного трёхчлена на множители.**

§19. НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задача. Одно из двух чисел больше другого на 6, а их произведение равно 112. Найдите эти числа.

Решение. Обозначим меньшее искомое число буквой x. Тогда большее число равно $x + 6$. Их произведение — 112. Следовательно,

$$x(x + 6) = 112, \text{ или } x^2 + 6x - 112 = 0.$$

Это ***уравнение второй степени с одной переменной***. Такие уравнения называют также квадратными. Как их решать, вы узнаете в § 20.

> ***Квадратным*** **называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — данные числа, причём $a \neq 0$.**

Числа a, b, c — ***коэффициенты квадратного уравнения***: a — первый коэффициент, b — второй, c — свободный член.

По определению, первый коэффициент квадратного уравнения не может быть равен нулю. Если хотя бы один коэффициент (b или c) равен нулю, то квадратное уравнение называют ***неполным***. Неполные квадратные уравнения бывают трёх видов:

1) $ax^2 = 0$; 2) $ax^2 + bx = 0$; 3) $ax^2 + c = 0$.

1. Уравнение вида $ax^2 = 0$ равносильно уравнению $x^2 = 0$, и поэтому всегда имеет только один корень $x = 0$.

2. Уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ равносильно уравнению $x(ax + b) = 0$ и всегда имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Пример. Решите уравнение $5x^2 + 4x = 0$.

Решение. Вынесем переменную x за скобки:

$$x(5x + 4) = 0.$$

Следовательно, $x = 0$, или $5x + 4 = 0$,отсюда $x = -0{,}8$.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}8$.

3. Квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$ равносильно уравнению $x^2 = -\frac{c}{a}$. Если $-\frac{c}{a} > 0$, то оно имеет два решения; если $-\frac{c}{a} < 0$ — ни одного решения.

Пример. Решите уравнение $4x^2 - 3 = 0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение: $4x^2 = 3$, $x^2 = \frac{3}{4}$, x — число, квадрат которого равен $\frac{3}{4}$, то есть квадратный корень из числа $\frac{3}{4}$. Таких корней два: $\sqrt{\frac{3}{4}}$ и $-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Ответ. $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Если знаки коэффициентов a и c разные, то число $-\frac{c}{a}$ положительное, и уравнение имеет два корня. Если знаки коэффициентов a и c одинаковы, то число $-\frac{c}{a}$ отрицательное. Следовательно, уравнение $ax^2 + c = 0$ не имеет корней.

Хотите знать ещё больше?

Некоторые квадратные уравнения (полные) можно решать приведением их к неполным квадратным уравнениям. Например, по формуле квадрата двучлена, уравнение

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

можно представить в виде $(x - 1)^2 = 0$ и решить так: $(x - 1)^2$ равно нулю лишь в том случае, если $x - 1 = 0$, то есть $x = 1$.

Таким способом можно решить любое квадратное уравнение, выразив его левую часть в виде квадрата двучлена.

Например,

$4y^2 + 4y + 1 = 0$, $(2y + 1)^2 = 0$, $2y + 1 = 0$, $y = -0{,}5$.

$c^2 - 2\sqrt{2}c + 2 = 0$, $(c - \sqrt{2})^2 = 0$, $c - \sqrt{2} = 0$, $c = \sqrt{2}$.

Проверьте себя

1. Какие уравнения называют квадратными?
2. Как иначе называют уравнения второй степени с одной переменной?
3. Какие уравнения называют неполными квадратными?
4. Назовите три вида неполных квадратных уравнений. Как решить уравнение вида:
   а) $ax^2 = 0$; б) $ax^2 + bx = 0$; в) $ax^2 + c = 0$?
5. Сколько решений может иметь неполное квадратное уравнение?

Выполним вместе!

1. Решите квадратное уравнение:
   а) $3x^2 - 6x = 0$; б) $2y^2 - 72 = 0$.

✔ Решение.

а) $3x^2 - 6x = 0$;
$3x(x - 2) = 0$;
$x_1 = 0$;
$x - 2 = 0$;
$x_2 = 2$.

б) $2y^2 - 72 = 0$;
$2(y^2 - 36) = 0$;
$y^2 - 36 = 0$;
$y_1 = 6$;
$y_2 = -6$.

Ответ. а) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; б) $y_1 = 6$, $y_2 = -6$.

2. Решите уравнение $\dfrac{9}{x+25} + \dfrac{16}{x} = 1$.

✔ Решение. $\dfrac{9}{x+25} + \dfrac{16}{x} - 1 = 0$,

$$\frac{9x + 16x + 400 - x^2 - 25x}{x(x+25)} = 0,\ \frac{400 - x^2}{x(x+25)} = 0,\ 400 - x^2 = 0,$$

отсюда $x_1 = -20$, $x_2 = 20$.

При этих значениях x знаменатель не равен нулю. Следовательно, $x_1 = -20$, $x_2 = 20$ — корни уравнения.

Ответ. $x_1 = -20$, $x_2 = 20$.

Выполните устно

861. Какое из данных уравнений квадратное:

а) $x^2 = \frac{1}{x} + 3$; б) $2x^2 - 3x = 0$; в) $-x^2 + 5x + \sqrt{8} = 0$;

г) $2x^2 + x^3 = 0$; д) $5x^2 = 4 - 3x$; е) $2z(z + 5) = 7$?

862. Какое из данных уравнений неполное квадратное:

а) $x^2 + 8 = 0$; б) $\sqrt{2}x^2 = 0$; в) $x^2 + 3x = 1$;

г) $x^2 + \frac{2}{x} = 0$; д) $\sqrt{5}x^2 + \pi x = 0$; е) $2x^2 - \sqrt{x} = 0$?

Решите уравнения (863–866).

863. а) $3x^2 = 0$; б) $\sqrt{7}y^2 = 0$; в) $-z^2 = 0$.

864. а) $x^2 - 2x = 0$; б) $3z^2 - 6z = 0$; в) $2c = c^2$.

865. а) $y^2 - 9 = 0$; б) $2x^2 - 8 = 0$; в) $-x^2 + 1 = 0$.

866. а) $(x - 3)(x - 5) = 0$; б) $3(x + 7)(x - 2) = 0$;
в) $(2x - 1)(x + 3) = 0$; г) $(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$.

Уровень А

867. Из данных уравнений выпишите: а) квадратные уравнения; б) неполные квадратные уравнения. Для каждого из них укажите, чему равны его первый и второй коэффициенты и свободный член.

а) $3x - 7 = x^2$; б) $-2x^2 + \sqrt{3}x = 4$; в) $6x^2 - x^3 = 0$;

г) $(x + 4)^2 = 8x$; д) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$; е) $x + \frac{1}{x} + 4 = 0$;

ё) $9x^2 = 0$; ж) $x^2 - 25 = x$.

868. Замените данное уравнение равносильным квадратным уравнением:

а) $2x(x - 3) = 50$; б) $(x - y)y = 5y^2 - 4$;
в) $4z^2 = 2z(3z + 5)$; г) $(1 - x)(3x - 2) = 2x + x^2$;

д) $(x-1)(x-2)=4x$; е) $3(x+5)-8=-5x(x+2)$.

Решите уравнение (869—881).

869. а) $3x^2+27=0$; б) $3x^2-27=0$; в) $0{,}5y^2+y=0$;
г) $z-2z^2=0$; д) $\frac{1}{3}x^2=0$; е) $(5-0{,}5)x^2=0$.

870. а) $16x^2=0$; б) $-4y^2=0$; в) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)x^2=0$.

871. а) $2x^2-8x=0$; б) $x^2+3x=0$; в) $7x^2=\frac{1}{2}x$;
г) $12x=0{,}24x^2$; д) $x-x^2=0$; е) $0{,}5x+9x^2=0$.

872. а) $x^2-144=0$; б) $9x^2=64$;
в) $-2x^2+50=0$; г) $0{,}16x^2+100=0$;
д) $100x^2-225=0$; е) $x^2+16^2=65^2$.

873. а) $(x-1)x+x=0$; б) $2y(y+3)=6y$;
в) $(z+2)(z-2)=0$; г) $(x+2)(x-2)=4$.

874. а) $2x(x+5)=7x$; б) $-x(2x+3)=8x$;
в) $4x^2-2x=x(x-2)$; г) $8-6z=2z(z-3)$.

875. а) $5x^2+3x+7=7(x+1)$; б) $15-2y=8y^2+3(y+5)$.

876. а) $-2x^2+6=3(x^2+x+2)$; б) $3(x^2+5)=4x^2+x(1-x)$.

877. а) $2(x^2-1)=(x-1)(x+1)$; б) $(x+3)^2=(x-3)(x+3)$.

878. а) $\frac{5-x^2}{3}=\frac{3x^2-2}{4}$; б) $\frac{2z^2}{5}=\frac{3z^2+1}{4}$.

879. а) $\frac{x^2-1}{7}=\frac{3}{4}$; б) $\frac{2x^2+3}{5}=\frac{4}{7}$.

880. а) $\frac{z+1}{8}=\frac{1}{z-1}$; б) $\frac{y-2}{4}=\frac{-1}{y+2}$.

881. а) $(2x+1):13=3:(2x-1)$; б) $(3x^2-4):5=3x^2:20$.

882. Найдите периметр квадрата, площадь которого:

а) 289 см^2; б) 0,81 м^2; в) S.

883. а) Найдите сторону квадрата, если его площадь 484 м^2;
б) найдите сторону квадрата, если его площадь S.

Уровень Б

Решите уравнение (884—887).

884. а) $3x(x-1)=12-3x$; б) $5x(x+2)=10(1+x)$;

в) $x\left(x+\sqrt{2}\right)=4+\sqrt{2}x$; г) $2x(3-x)=6x-8$.

885. а) $\frac{1}{3}(x^2+2x)=\frac{1}{4}(2x^2-3x)$; б) $\frac{1}{5}(x^2+3x)=\frac{1}{2}(5x-x^2)$;

в) $5x^2+3x=x(3+x)+32$; г) $(7x-2)(x+1)=5(x+4)-1$.

886. а) $(x+3)(x-3)=16$; б) $(2x+4)^2=16x+20$;

в) $6x-(x+2)^2=3x^2-4$; г) $(2x+3)(3-2x)=24x+9$.

887. а) $1{,}5(x^2-2x)=0{,}9(2x-x^2)$;

б) $3{,}7(x^2-5x)=2(5x-x^2)$.

888. Без построения найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y=x^2$ и $y=121$; б) $y=x^2$ и $y=25{,}6$.

Решите уравнение (889—892).

889. а) $3(x-5)^2=0$; б) $0{,}7(2-z)^2=0$;

в) $(x-3)^2=1$; г) $(5-y)^2=1$.

890. а) $23(3x-2)^2=0$; б) $78(5z-4)^2=0$;

в) $2(x-7)^2=8$; г) $3(5-z)^2=12$.

891. а) $(x+15)^2+(x+15)=0$; б) $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-x-\frac{2}{3}=0$.

892. а) $5(3-2x)^2+20(3-2x)=0$;

б) $6\left(3x-\frac{1}{3}\right)^2+5\left(\frac{1}{3}-3x\right)=0$.

893. Составьте неполное квадратное уравнение, корни которого:

а) -3 и 3; б) $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$; в) 0 и 7; г) 0 и -4.

894. Дополните выражение $2x^2+x-8$ так, чтобы получить уравнение, корни которого:

а) 0 и -2; б) -2 и 2.

895. Дополните выражение $x^2 - 3x$ так, чтобы получить уравнение, корни которого:
а) -3 и 3; б) 0 и 3.

Решите уравнение (**896—900**).

896. а) $\dfrac{2x+5}{x-2} = \dfrac{9(x+2)}{8x-20}$; б) $\dfrac{4x+12}{x-3} = \dfrac{x-3}{x+3}$.

897. а) $\dfrac{x}{x+5} + \dfrac{x}{x-5} = 2\dfrac{2}{3}$; б) $\dfrac{x+2}{x-2} + \dfrac{x-2}{x+2} = 3\dfrac{1}{3}$.

898. а) $\dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{5}{2}$; б) $\dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{x+3}{3-x} = 4$.

899. а) $\dfrac{4}{3+x} = \dfrac{3-4x^2}{x^2-9} - \dfrac{5}{x-3}$; б) $\dfrac{5(x+2)}{x^2+6x+9} + \dfrac{1}{x+3} = 1$.

900. а) $(x^2-2)^2 - 2(x^2-2) = 0$; б) $(x^2+3)^2 - 5(x^2+3) = 0$.

901. Какие значения переменных удовлетворяют пропорцию:
а) $(x+1) : 2 = 4 : (x-1)$; б) $(x-4) : 3 = 3 : (x+4)$;
в) $(3x-6) : x = 5x : (3x+6)$;
г) $(0{,}2 - x) : 4 = (0{,}01 + x) : (0{,}2 + x)$?

902. Найдите длины катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, площадь которого равна $0{,}72$ дм^2.

903. Площадь круга радиуса r вычисляют по формуле $S = \pi r^2$. Найдите радиус круга, площадь которого:
а) 314 см^2; б) S.

904. Площадь кольца равна 942 см^2, радиус его внешнего круга — 20 см (рис. 54). Найдите радиус внутреннего круга.

905. Найдите радиус круга r, если площадь окрашенной фигуры (рис. 55) равна S, а сторона квадрата — a.

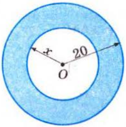


Рис. 54

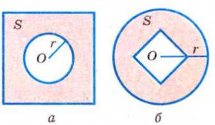


Рис. 55

906. Произведение двух последовательных натуральных чисел на 324 больше, чем меньшее из них. Найдите эти числа.

907. Произведение двух последовательных натуральных чисел на 224 больше, чем большее из них. Найдите эти числа.

908. Сумма квадратов трёх последовательных натуральных чисел равна 365. Найдите эти числа. Как их обозначить, чтобы решение задачи свести к неполному квадратному уравнению?

909. При каком условии равняется нулю:

а) один корень квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$;

б) сумма корней уравнения $(x - a)(x + a - b) = 0$?

910. Найдите число, которое меньше квадратного корня из этого числа в 2,5 раза.

911. Произведение двух последовательных натуральных чисел в 1,5 раза больше квадрата меньшего из них. Найдите эти числа.

912. Найдите площадь прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза равна 10 м, а катеты относятся, как 3 : 4.

913. Периметр одного квадрата на 8 см меньше периметра второго, а их площади относятся, как 1 : 4. Найдите длины сторон квадратов.

914. Сторона одного квадрата на 3 дм длиннее стороны другого квадрата, а их площади относятся, как 9 : 4. Найдите их периметры.

915. С помощью калькулятора решите уравнение:

а) $2{,}324x^2 = 74{,}825$; б) $4{,}027y^2 - 12{,}449 = 0$;

в) $4{,}574z^2 = 48{,}226z$; г) $7{,}467x^2 = 15{,}227x$.

916*. Решите уравнение:

а) $x^2 - 7|x| = 0$; б) $x^2 + 3|x| - x = 0$;

в) $2x^2 - \dfrac{8x}{|x|} = 0$; г) $x^2 + \dfrac{5x^2}{|x|} = 0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вычислите:

917. а) $-12\frac{3}{80}+\left(-\frac{1}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right):(-0{,}8)\right):(-2)$;

б) $(3{,}56-(-7{,}92:11)+(-2{,}54+1{,}26)):(-1{,}25)$;

в) $5\cdot\left(14{,}7:\left(-0{,}75-0{,}7:2\frac{1}{3}\right)-0{,}15\right)-101{,}21$;

г) $-5{,}33:\left(5\frac{5}{28}-1\frac{8}{9}\cdot1{,}25+1\frac{16}{63}\right)+101{,}26$.

918. Найдите последнюю цифру числа:

а) 5^{100}; б) 6^{66}; в) 4^{1000}; г) 9^{999};

д) 2^{100}; е) 2^{99}; ё) 3^{101}; ж) 3^{102}.

919. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $(x^2+3xy+2y^2)(x-3y)+6y^2(x+y)$, если $x=6$, $y=5$;

б) $(a+5b)(a^2-5ab+6b^2)-10b^2(3b-2a)$,
если $a=-8$, $b=6$.

920. Опишите свойства функции, заданной графиком (рис. 56, 57).

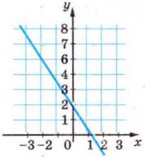


Рис. 56

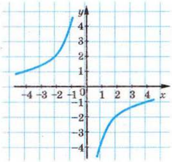


Рис. 57

§20. ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Решим уравнение

$$x^2 + 6x - 112 = 0,$$

которое мы составили по условию задачи (с. 185).

Решение. Если к выражению $x^2 + 6x$ прибавить 9, то получим квадрат двучлена $x + 3$. Поэтому данное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 + 6x + 9 - 9 - 112 = 0, \text{ или } (x+3)^2 = 121.$$

Следовательно, $x + 3 = 11$, отсюда $x = 8$;
или $x + 3 = -11$, отсюда $x = -14$.

Ответ. $x_1 = 8$, $x_2 = -14$.

Такой способ решения квадратного уравнения называют ***способом выделения квадрата двучлена.***

Решим этим способом уравнение

$$5x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Чтобы первый его член стал квадратом одночлена с целым коэффициентом, умножим обе части данного уравнения на 5:

$$25x^2 - 10x - 15 = 0,$$

$$25x^2 - 2 \cdot 5x + 1 - 1 - 15 = 0, \quad (5x-1)^2 = 16.$$

Следовательно, $5x - 1 = 4$, отсюда $5x = 5$, $x = 1$;
или $5x - 1 = -4$, отсюда $5x = -3$, $x = -0{,}6$.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = -0{,}6$.

Решим таким способом уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Умножим обе части уравнения на $4a$ (помним, что $a \neq 0$):

$$4a^2x^2 + 4ax \cdot b + 4ac = 0,$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* (от латинского *discriminans* — различающий) **данного квадратного уравнения и обозначают буквой D.**

Если $D < 0$, то данное уравнение не имеет корней: не существует такого значения x, при котором значение выражения $(2ax + b)^2$ было бы отрицательным.

Если $D = 0$, то $2ax + b = 0$, отсюда $x = -\dfrac{b}{2a}$ — единственный корень.

Если $D > 0$, то данное квадратное уравнение равносильно уравнению $(2ax+b)^2 = (\sqrt{D})^2$, отсюда

$$2ax+b=\sqrt{D}\,,\quad x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

или

$$2ax+b=-\sqrt{D}\,,\quad x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

В этом случае уравнение имеет два корня, они отличаются только знаками перед $\sqrt{D}$. Кратко их записывают так:

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}\,,\ \text{где } \boldsymbol{D=b^2-4ac}.$$

Это ***формула корней квадратного уравнения*** $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$. Пользуясь ею, можно решить любое квадратное уравнение.

Пример 1. Решите уравнение:

а) $3x^2-5x+2=0$; б) $x^2+6x+9=0$; в) $5x^2-x+1=0$.

Решение. а) $D=25-24=1$, $D>0$,

$$x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{5\pm1}{6};\ x_1=1,\ x_2=\frac{2}{3};$$

б) $D=36-36=0$,

$$x=\frac{-6\pm0}{2}=-3;\ x_1=-3;$$

в) $D=1-20=-19$, $D<0$. Уравнение корней не имеет.

Ответ. а) $x_1=1$, $x_2=\dfrac{2}{3}$; б) $x=-3$; в) уравнение корней не имеет.

Формулу корней квадратного уравнения применяют при решении многих уравнений, которые сводятся к квадратным.

Пример 2. Решите уравнение:

а) $4x^4-9x^2+5=0$; б) $(3x^2-x-3)(3x^2-x+5)=9$.

Решение. Такие уравнения удобно решать путём введения вспомогательной переменной.

а) $4x^4 - 9x^2 + 5 = 0$. Пусть $x^2 = t$, тогда $x^4 = t^2$, получим уравнение относительно переменной t:

$4t^2 - 9t + 5 = 0$, $D = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 81 - 80 = 1$, $D > 0$,

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{9 \pm 1}{8},\ t_1 = \frac{9+1}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4},\ t_2 = \frac{9-1}{8} = 1.$$

Вернёмся к переменной x:

1) $x^2 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;

2) $x^2 = \frac{5}{4}$, $x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называют *биквадратным*.

б) $(3x^2 - x - 3)(3x^2 - x + 5) = 9$. Пусть $3x^2 - x = t$, тогда относительно переменной t получим уравнение:

$(t-3)(t+5) = 9$, $t^2 + 2t - 15 = 9$, $t^2 + 2t - 24 = 0$,

$D = 4 - 4 \cdot (-24) = 4 + 96 = 100$, $D > 0$,

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2},\ t_1 = 4,\ t_2 = -6.$$

1) $3x^2 - x = -6$, $3x^2 - x + 6 = 0$, $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -71$, $D < 0$, следовательно, это уравнение корней не имеет.

2) $3x^2 - x = 4$, $3x^2 - x - 4 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$.

Ответ. а) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

б) $x_1 = -1$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$.

Хотите знать ещё больше?

Формулу корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ можно записать и в таком виде:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если второй коэффициент уравнения — чётное число, то есть уравнение имеет вид $ax^2 + 2kx + c = 0$, то

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Если первый коэффициент квадратного уравнения равен 1, то такое уравнение называют *приведённым*. Приведённое квадратное уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0$. Формула его корней:

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Выведите эти формулы из основной формулы корней квадратного уравнения.

Проверьте себя

1. Как называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$?
2. Что такое дискриминант квадратного уравнения?
3. Сколько корней имеет квадратное уравнение в зависимости от его дискриминанта?
4. Какой вид имеет формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?
5. Какое квадратное уравнение называют приведённым?

Выполним вместе!

1. Приведите уравнение $(x - 4)(2x + 1) = 3x(x - 1)$ к квадратному и найдите его корни.

✔ Решение. $(x - 4)(2x + 1) = 3x(x - 1)$. Раскроем скобки и сведём подобные слагаемые:

$$2x^2 - 8x + x - 4 = 3x^2 - 3x,$$

$$3x^2 - 2x^2 - 3x + 8x - x + 4 = 0,\ x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Решим полученное уравнение, принимая во внимание, что в его левой части — квадрат двучлена: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$.

Следовательно, $(x + 2)^2 = 0$, отсюда $x + 2 = 0$, $x = -2$.

Ответ. $x = -2$.

2. Решите дробное рациональное уравнение:

$$\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-3}.$$

✔ Решение. $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{2}{x-3} = 0,$

$$\frac{x(x-3) + 2 - 2(x-2)}{(x-2)(x-3)} = 0,\quad \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(x-3)} = 0.$$

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. $x^2 - 5x + 6 = 0$;

$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Данное уравнение эти значения не удовлетворяют, поскольку при $x = 2$ знаменатель первой дроби равен 0, а при $x = 3$ знаменатель второй дроби равен 0.

Ответ. Уравнение корней не имеет.

Выполните устно

921. Вычислите дискриминант уравнения:

а) $x^2 - 2x + 1 = 0$; б) $x^2 + 2x + 1 = 0$;
в) $y^2 - 6y + 1 = 0$; г) $z^2 + 6z - 1 = 0$;
д) $2x^2 - x - 1 = 0$; е) $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

922. Сколько корней имеет уравнение:

а) $x^2 - 2x + 2 = 0$; б) $x^2 + 2x + 2 = 0$;
в) $x^2 - 5x + 6 = 0$; г) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
д) $x^2 - 6x + 9 = 0$; е) $x^2 + 6x + 9 = 0$?

923. Почему не имеет корней уравнение:

а) $x^2 + (x - 1)^2 = 0$; б) $x^2 + |x| + 1 = 0$;
в) $3x^2 + \sqrt{2} = 0$; г) $(2x - 5)^2 + 3 = 0$?

Уровень А

Способом выделения квадрата двучлена решите уравнение (924—926).

924. а) $x^2 - 6x + 8 = 0$; б) $x^2 - 12x + 35 = 0$;
в) $x^2 - 4x - 12 = 0$; г) $z^2 + 4z - 12 = 0$.

925. а) $x^2 - 11x + 18 = 0$; б) $y^2 - 5y - 24 = 0$;
в) $m^2 - 12m + 36 = 0$; г) $x^2 + 14x + 49 = 0$.

926. а) $x^2 + 6x - 27 = 0$; б) $x^2 - 10x + 9 = 0$;
в) $x^2 + 3x - 4 = 0$; г) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

927. Найдите дискриминанты квадратных уравнений в заданиях 924—926.

928. Какое из этих уравнений не имеет корней:

а) $x^2 + x + 1 = 0$; б) $2y^2 - 3y + 2 = 0$;
в) $0,5x^2 + 2x + 2 = 0$; г) $8z^2 - z + 4 = 0$?

Пользуясь формулой корней, решите уравнение (929—936).

929. а) $x^2 - 7x - 18 = 0$; б) $x^2 + 7x - 18 = 0$;
в) $x^2 + x - 6 = 0$; г) $x^2 - x - 42 = 0$.

930. а) $x^2 + 3x - 130 = 0$; б) $x^2 - 7x - 120 = 0$;
в) $4x^2 - 4x - 3 = 0$; г) $4x^2 - 4x - 15 = 0$.

931. а) $9x^2 - 12x - 5 = 0$; б) $9z^2 - 24z - 20 = 0$;
в) $2y^2 - 7y + 3 = 0$; г) $5z^2 - 8z + 3 = 0$.

932. а) $2x^2 - 7x - 30 = 0$; б) $4x^2 + 3x - 10 = 0$;
в) $9y^2 - 13y + 4 = 0$; г) $5x^2 + 31x - 28 = 0$.

933. а) $16x^2 - 24x + 27 = 0$; б) $25c^2 + 15c - 4 = 0$;
в) $6x^2 - 5x - 6 = 0$; г) $4x^2 - 19x + 12 = 0$.

934. а) $2p^2 - 7p + 6 = 0$; б) $10m^2 - 53m + 15 = 0$;
в) $6x^2 - 12{,}5x + 6 = 0$; г) $8x^2 - 8{,}8x + 2{,}1 = 0$.

935. а) $10y^2 - 0{,}8y = 1{,}92$; б) $4n^2 + 11n + 7{,}36 = 0$;
в) $6x^2 - \frac{19x}{6} - 1 = 0$; г) $6x^2 - 25\frac{1}{2}x + 26\frac{1}{4} = 0$.

936. а) $5x^2 - 7\frac{1}{6}x + 2\frac{1}{2} = 0$; б) $\frac{x^2}{2} - 2\frac{1}{2}x - 7 = 0$;
в) $2y^2 + 3\frac{1}{3}y = 18\frac{2}{3}$; г) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{9} = 1\frac{2}{9}$.

Решите уравнение, которое приводится к квадратному (937—950).

937. а) $4x(x - 1) = 3$; б) $4z(z - 1) = 15$;
в) $3x(3x - 8) = 20$; г) $3y(3y - 4) = 5$.

938. а) $(2x - 3)^2 = 8x$; б) $(2x + 1)^2 = 3x + 4$;
в) $2(3z + 9) = (2z + 5)^2$; г) $12(3 - x) = (3x - 1)^2$.

939. а) $x(7 - x) = 5x - 8$; б) $2x(3x + 4) = 4x^2 + 5x + 27$.

940. а) $3x(2x - 5) = 2(x^2 + 2)$; б) $3x(5x + 3) = 2x(6x + 5) + 2$.

941. а) $(x - 5)^2 = 3x + 25$; б) $(x + 4)^2 = 3x^2 - 8$;
в) $(p - 3)^2 = 2(p + 1)$; г) $(3c - 5)^2 = 10c + 9$.

942. а) $(2x + 4)^2 = 11x^2 + 1$; б) $(9 - 4x)^2 = 5(4x + 1)$;
в) $x^2 + 1 = 625 - 2x$; г) $y^2 + 4 = 961 + 4y$.

943. а) $(x + 4)(2x - 3) - (5x - 6)(x - 3) = 10$;
б) $(2x - 8)(3x + 1) = (4x - 12)(x - 2) + 8$.

944. а) $x+3=\frac{x+3}{x}$; б) $\frac{2c^2}{c-1}=c-2$.

945. а) $\frac{16}{x+2}=x$; б) $y=\frac{18}{y-3}$.

946. а) $\frac{z+2}{z}=\frac{5z+1}{z+1}$; б) $\frac{5}{5-m}=\frac{m^2-6m}{m-5}$.

947. а) $\frac{x-5}{x+3}=\frac{3+2x}{2x-1}$; б) $\frac{2x-1}{3-2x}=\frac{x-1}{2x+3}$.

948. а) $x^4-5x^2+4=0$; б) $x^4+5x^2+4=0$;
в) $x^4-x^2-6=0$; г) $x^4+x^2-6=0$.

949. а) $x^4-8x^2-9=0$; б) $x^4+8x^2-9=0$;
в) $x^4-6x^2+5=0$; г) $x^4+6x^2+5=0$.

950. а) $4x^4-3x^2-1=0$; б) $4x^4+3x^2-1=0$;
в) $9x^4-10x^2+1=0$; г) $9x^4+10x^2+1=0$.

951. Составьте уравнение вида $(x-a)(x-b)=0$, корни которого:
а) 2 и 3; б) 1 и 5; в) 3 и −2; г) −2 и −6.

952. Составьте квадратное уравнение, корни которого:
а) 2 и 5; б) 3 и −7; в) 0,5 и 4; г) −0,2 и −8.

953. Один корень квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равен 1. Чему равно $a+b+c$?

Уровень Б

Решите уравнение способом выделения квадрата двучлена (954—955).

954. а) $4x^2+4x-15=0$; б) $9y^2+18y+8=0$;
в) $6x^2-13x+6=0$; г) $5x^2+31x-28=0$.

955. а) $2z^2=9z-10$; б) $8=3y+5y^2$;
в) $3x^2+4x-7=0$; г) $5x^2+3x+2=0$.

956. Решите уравнение, разложив его левую часть на множители:
а) $x^2+5x+4=0$; б) $x^2+5x+6=0$;
в) $x^2-8x+15=0$; г) $x^2-x-6=0$.

957. При каких значениях переменной x верно равенство:

а) $(3x+1)^2=3x+1$; б) $(3x+1)^2=3(x+1)$;

в) $4(3x+1)^2=(6x+2)^2$; г) $(3x+1)^2=3x^2+x$?

Решите уравнение (958—973).

958. а) $(2{,}5x-7)(2x+3)+3x+4=(4x-9)(1{,}5x+1)$;

б) $(3z-5)(4z+1)+(2z+3)(5z-4)=6z(3+2z)-11$.

959. а) $(2t-3)(5t+2)+(3t-1)(4t+2)=10t^2-5$;

б) $(3n-2)(3n+2)-(2n-3)^2=3n(n+7)-17$.

960. а) $\frac{1+3x}{2+x}+\frac{x-1}{2-x}=1$; б) $\frac{2y-2}{y+3}-\frac{3y-y}{3-y}=6$.

961. а) $\frac{c-6}{c+5}-2=\frac{c-4}{5-c}$; б) $\frac{7}{2x-3}+\frac{5}{x-1}=12$.

962. а) $\frac{7}{x+2}-\frac{3}{2-x}=\frac{16}{x}$; б) $\frac{5}{z-2}-\frac{4}{z-3}=\frac{1}{z}$.

963. а) $\frac{3}{2x-1}-\frac{39}{2x+1}+\frac{45}{4x^2-1}=5$;

б) $\frac{2(x+7)}{x+1}-\frac{x+11}{x^2-1}+\frac{x-1}{x+1}=4$.

964. а) $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}-\frac{7+18x}{x^3-1}=0$;

б) $\frac{x+6}{x-1}-\frac{x^2-x+16}{x^2+x+1}=\frac{x+36}{x^3-1}$.

965. а) $\frac{x+1}{4x}-\frac{8-x}{3x^2-6x}=\frac{5x-1}{2x-4}$; б) $\frac{3-2x}{5-x}+\frac{3}{3-x}-\frac{x+3}{x+1}=1$.

966. а) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{2x-7}{x^2-9x+14}$;

б) $\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^2+9x+18}=\frac{2x+7}{x^2+5x-6}$.

967. а) $\frac{5x-7}{9}+\frac{14}{2x-3}=x-1$; б) $\frac{x-4}{12}+\frac{2x-22}{x-6}=\frac{16-x}{4}$.

968. а) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{6}{x^2-7x+10}=\dfrac{2}{x-5}$;

б) $\dfrac{2}{x-7}=\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{10}{(x-2)(x-7)}$.

969. а) $\dfrac{2z-3}{z-2}+\dfrac{z+1}{z-1}=\dfrac{3z+11}{z+1}$; б) $\dfrac{3c+1}{c-3}+\dfrac{2c-1}{c-2}=\dfrac{5c-14}{c-4}$.

970. а) $(x+1)^2=7918-2x$; б) $(x+2)^2=3131-2x$.

971. а) $x^2+2\sqrt{2}x+1=0$; б) $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$.

972. а) $\sqrt{2}b^2-3b+\sqrt{2}=0$; б) $c^2-\sqrt{6}c+2{,}5=0$.

973. а) $\dfrac{1}{x+x^2}+\dfrac{8}{x-8x^2+x^3}=\dfrac{6}{1-7x-7x^2+x^3}$;

б) $\dfrac{1}{x^4-1}+\dfrac{x-1}{x^3+3x^2+x+3}=\dfrac{x+2}{x^3+3x^2-x-3}$.

974. Решите ребусы, изображённые на рисунках 58 и 59.

Решите уравнение (975—978).

975. а) $x^4-5x^2+4=0$; б) $x^4-8x^2-9=0$;

в) $x-4\sqrt{x}+3=0$; г) $x-7\sqrt{x}+12=0$.

976. а) $x^2-5\left(\sqrt{x}\right)^2-6=0$; б) $x^2+\left(\sqrt{x}\right)^2-12=0$;

в) $x^2-4\sqrt{x^2}-21=0$; г) $x^2+2\sqrt{x^2}-3=0$.

977. а) $x+4\sqrt{x}-12=0$; б) $x-8\sqrt{x}+15=0$;

в) $3x-8\sqrt{x}+5=0$; г) $2x+3\sqrt{x}+1=0$.

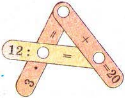


Рис. 58

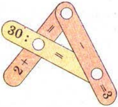


Рис. 59

978. а) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$; б) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;
в) $(x+3)^4 - (x+3)^2 - 2 = 0$;
г) $(2x-1)^4 - 10(2x-1)^2 + 9 = 0$.

Найдите корни уравнения (979—980).

979. а) $(x-3)^2 - 6(x-3) + 8 = 0$; б) $(x+2)^2 - (x+2) - 6 = 0$;
в) $x^2 + 2x + 2(x+1) - 23 = 0$;
г) $4x^2 - 12x + 2(2x-3) - 6 = 0$.

980. а) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$; б) $x^3 + 7 - 7x^2 = x$;
в) $(x^2+x)(x^2+x-7) = 60$; г) $x^2 + 5 = 3\sqrt{x^2+5}$.

981. Покажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ даже при условии, что $a = 0$, можно решить по формуле

$$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Найдите корни уравнения (982—987).

982. а) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 4) = 10$;
б) $(2x^2 - 5x - 4)(2x^2 - 5x) = 21$.

983. а) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$;
б) $(x-2)(x+1)(x+2)(x+5) + 20 = 0$.

984. а) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$;
б) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) - 28 = 0$.

985. а) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{x+1}{x}\right) = -5$; б) $\left(\frac{x}{x-2}\right)^2 - \frac{x}{x-2} = 42$.

986. а) $\left(\frac{\sqrt{x}-1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2} = 12$; б) $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{x}\right)^2 + \frac{\sqrt{x}+1}{x} = 2$.

987. а) $(x-1)^2(x^2-2x) = 12$; б) $(x-2)^2(x^2-4x) = -3$.

988*. Решите уравнение с параметром m. При каких значениях m данное уравнение имеет два равных корня? При каких — не имеет решений?
а) $x^2 + 4x + m = 0$; б) $x^2 + mx + 4 = 0$;
в) $mx^2 + 8x + 1 = 0$; г) $mx^2 + 20x + m = 0$.

989*. При каких значениях m уравнение имеет один корень:

а) $5x^2 - 2x + m = 0$; б) $\frac{1}{2}x^2 + mx + 4 = 0$;

в) $mx^2 + (m+1)x + 1 = 0$; г) $x^2 + (m+2)x + 2m + 1 = 0$?

990*. При каких значениях m уравнение имеет три корня:

а) $(5x^2 - 2x - 3)(x^2 - mx + 4) = 0$;

б) $(x^2 + 3x - 10)(mx^2 - 6x + 1) = 0$?

991. Решите уравнение с модулем:

а) $x^2 - 7|x| + 6 = 0$; б) $x^2 - 4|x| - 21 = 0$.

Решите систему уравнений (992—994).

992. а) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ 3x - y = -7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x = 0, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$

993. а) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+5} + \dfrac{2}{y-3} = 2, \\ \dfrac{4}{x-2} - \dfrac{1}{y-6} = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{y^2+y+1} = 3, \\ x + y = 6. \end{cases}$

994. а) $\begin{cases} \dfrac{y+3}{(3x-y)(3y-x)} = 0{,}5, \\ x - y = 0{,}4(x+y); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{x-2} + \dfrac{2y-3}{y-1} = 2, \\ 3x - 4y = 1. \end{cases}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

995. Сравните числа $7{,}8 \cdot 10^5$ и $2{,}4 \cdot 10^6$. Найдите разность их квадратов.

996. Докажите, что:

а) $4^{20} - 1$ делится на 5; б) $9^{60} + 5$ делится на 2;

в) $17^{16} + 9$ делится на 10; г) $33^{25} - 3$ делится на 6;

д) $8^{10} - 10^8$ делится на 8; е) $23^{24} + 24^{23}$ делится на 5.

997. Упростите выражение:

а) $(-x - 5)(2x + 3)$; б) $(3a - 2)(a - 4)$;

в) $(2y + 8)\left(3 - \frac{1}{2}y\right)$; г) $\left(5 - \frac{1}{3}a\right)(6a + 9)$.

998. Проходит ли график функции $y = x^2 + 1$, изображённый на рисунке 60, через точку $A(3{,}5; 13{,}25)$? При каких значениях x значение этой функции равно 7,25?

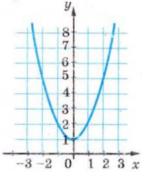


Рис. 60

§21. ТЕОРЕМА ВИЕТА

Квадратное уравнение называют ***приведённым***, если первый его коэффициент равен единице. В таблице — примеры трёх приведённых квадратных уравнений, их корни, а также суммы и произведения корней:

Уравнение	x_1 и x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	2 и 3	5	6
$x^2 - 3x - 4 = 0$	−1 и 4	3	−4
$x^2 + 8x + 15 = 0$	−5 и −3	−8	15

Сравните сумму корней каждого приведённого квадратного уравнения с его вторым коэффициентом, а произведение корней — со свободным членом.

Теорема Виета.

Если приведённое квадратное уравнение имеет два корня, то их сумма равна второму коэффициенту уравнения, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену.

Доказательство. Если уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то их можно найти по формулам:

$$x_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}, \qquad (*)$$

где $D = p^2 - 4q$ — дискриминант уравнения.

Сложим и перемножим эти корни:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} + \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-p)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = q.$$

Итак, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, что и требовалось доказать.

Примечание. Если $p^2 - 4q = 0$, то уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет один корень $x = -\frac{p}{2}$. Формулы (*) в этом случае дают $x_1 = -\frac{p}{2}$ и $x_2 = -\frac{p}{2}$. Поэтому часто считают, что данное уравнение имеет два равных корня. Теорема Виета верна и для этого случая, поскольку

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)\left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Каждое квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ равносильно **приведённому квадратному уравнению** $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Если такое уравнение имеет корни x_1 и x_2, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема (обратная теореме Виета).

Если сумма и произведение чисел m и n равны соответственно $-p$ и q, то m и n — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство. Пусть $m + n = -p$ и $m \cdot n = q$.

При данных условиях уравнение $x^2 + px + q = 0$ равносильно уравнению $x^2 - (m + n)x + mn = 0$.

Подставим в это уравнение вместо переменной x числа m и n:

$$m^2-(m+n)m+mn=m^2-m^2-nm+mn=0,$$

$$n^2-(m+n)n+mn=n^2-mn-n^2+mn=0.$$

Итак, m и n — корни данного уравнения, что и требовалось доказать.

Из теоремы Виета следует: если p и q — целые числа, то целые решения уравнения $x^2+px+q=0$ — это делители числа q. Пользуясь обратной теоремой, можно проверить, является та или другая пара чисел корнями приведённого квадратного уравнения. Это даёт возможность устно решать такие уравнения.

Пример. Решите уравнение $x^2+12x+11=0$.

Решение (устно). Если уравнение имеет целые корни, то их произведение равно 11. Это могут быть числа 1 и 11 либо -1 и -11. Второй коэффициент уравнения положительный, поэтому корни отрицательные.

Ответ. $x_1=-1$, $x_2=-11$.

Хотите знать ещё больше?

Теорема Виета верна не только для приведённого квадратного уравнения, но и для уравнений высших степеней. Например, если уравнение третьей степени $x^3+ax^2+bx+c=0$ имеет корни x_1, x_2 и x_3, то

$$x_1+x_2+x_3=-a,$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b,$$

$$x_1x_2x_3=-c.$$

Если такое уравнение с целыми коэффициентами имеет целые решения, то они являются делителями свободного члена.

Проверьте себя

1. Какие квадратные уравнения называют приведёнными?
2. Сформулируйте теорему Виета для приведённого квадратного уравнения.
3. Сформулируйте теорему, обратную теореме Виета.
4. Как найти целые решения квадратного уравнения с целыми коэффициентами?

Выполним вместе!

1. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

а) $x^2 + x - 6 = 0$; б) $x^2 + 2x + 3 = 0$.

Решение. а) $D = 1 + 24 > 0$. Корни существуют, поэтому

$$x_1 + x_2 = -1; \qquad x_1 \cdot x_2 = -6;$$

б) $D = 4 - 12 < 0$. Корней не существует.

Ответ. а) $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 \cdot x_2 = -6$; б) корней не существует.

2. При каких значениях m произведение корней уравнения $x^2 + 8x + m - 7 = 0$ равно 3?

Решение. $m - 7 = 3$, $m = 10$.

Ответ. $m = 10$.

3. Не решая уравнение $x^2 - 4x + 1 = 0$, найдите сумму квадратов его корней.

Решение. $D = 16 - 4 > 0$. Корни существуют.

$$x_1 + x_2 = 4; \qquad x_1 \cdot x_2 = 1;$$

$$(x_1 + x_2)^2 = 16; \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 16;$$

$$x_1^2 + 2 \cdot 1 + x_2^2 = 16; \quad x_1^2 + x_2^2 = 16 - 2, \quad x_1^2 + x_2^2 = 14.$$

Ответ. $x_1^2 + x_2^2 = 14$.

Выполните устно

999. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

а) $x^2 - 7x + 10 = 0$; б) $x^2 - 9x + 14 = 0$;

в) $x^2 - 0{,}5x - 1{,}5 = 0$; г) $x^2 - 4x + 2 = 0$.

1000. Проверьте, являются ли данные числа корнями уравнения:

а) $x^2 - 8x + 7 = 0$, 1 и 7; б) $x^2 + 8x + 15 = 0$, 3 и 5;

в) $z^2 - 12z - 13 = 0$, -1 и 13; г) $t^2 - 6t + 6 = 0$, 3 и 3.

1001. Найдите знаки корней уравнения (если они имеются) без решения уравнения:

а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; б) $x^2 - 7x + 10 = 0$;

в) $x^2 - 6x + 8 = 0$; г) $x^2 + 10x + 21 = 0$;

д) $y^2 - 15y + 44 = 0$; е) $z^2 - 8z - 48 = 0$.

Решите уравнение (1002—1005).

1002. а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 - 4x - 5 = 0$.

1003. а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; б) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

в) $y^2 - y - 12 = 0$; г) $y^2 + y - 12 = 0$.

1004. а) $z^2 - 13z + 40 = 0$; б) $z^2 - 3z - 40 = 0$;

в) $x^2 + 5x + 6 = 0$; г) $x^2 + x - 20 = 0$.

1005. а) $y^2 + 5y - 14 = 0$; б) $z^2 - 2z - 15 = 0$;

в) $c^2 + 2c - 8 = 0$; г) $t^2 + 9t - 10 = 0$.

1006. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни 0,7 и 10. Найдите его коэффициенты p и q.

Уровень A

Проверьте, являются ли данные числа m и n корнями уравнения (1007—1008).

1007. а) $6x^2 - 5x + 1 = 0,\ m = \frac{1}{2},\ n = \frac{1}{3}$;

б) $4x^2 - 4x - 3 = 0,\ m = -\frac{1}{2},\ n = 1\frac{1}{2}$.

1008. а) $3x^2 - 8x + 5 = 0,\ m = -1,\ n = -1\frac{2}{3}$;

б) $3x^2 + 4x + 1 = 0,\ m = -1,\ n = -\frac{1}{3}$.

1009. Найдите значение q, при котором уравнение имеет равные корни:

а) $x^2 - 14x + q = 0$; б) $x^2 + 12x + q = 0$;

в) $x^2 + qx + 25 = 0$; г) $x^2 + qx + 121 = 0$.

1010. Найдите p и x_1, если:

а) $x^2 + px + 25 = 0$ и $x_2 = 7$;

б) $x^2 + px + 21 = 0$ и $x_2 = -3$.

1011. Найдите q и x_1, если:

а) $x^2 - 11x + q = 0$ и $x_2 = 6$; б) $x^2 + 6x + q = 0$ и $x_2 = 3$.

1012. Найдите k и x_1, если:

а) $kx^2 + 9x - 2 = 0$ и $x_2 = -2$;

б) $kx^2 - 4x - 39 = 0$ и $x_2 = -3$.

1013. Уравнение $x^2 + kx + t = 0$ имеет корни -3 и $\frac{1}{3}$. Найдите $5t$.

1014. Составьте приведённое квадратное уравнение, корни которого равны: а) 2 и 4; б) -3 и 5; в) 0,5 и 4; г) $\frac{1}{7}$ и 7; д) $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$.

1015. Один из корней уравнения $x^2 - 5x + c = 0$ равен 3. Найдите c.

1016. Один из корней уравнения $x^2 + mx + 3 = 0$ равен 5. Найдите m.

1017. Один из корней уравнения $ax^2 + 7x + 8 = 0$ равен -2. Найдите a.

1018. Один из корней уравнения $x^2 + 14x + c = 0$ равен 7. Найдите второй корень и число c.

1019. Один из корней уравнения $x^2 + px + 8 = 0$ равен $\frac{1}{2}$. Найдите второй корень и коэффициент p.

1020. Дано уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. При каком условии равна 0:

а) сумма его корней;

б) произведение его корней;

в) разность его корней;

г) сумма квадратов его корней?

1021. Найдите корни уравнения $x^2 - 8x + c = 0$, если один из них:

а) в 3 раза больше другого;

б) на 5 меньше другого;

в) составляет 20 % другого.

Уровень Б

1022. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) $\frac{2}{3}$ и $1\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{5}$ и $-1\frac{2}{3}$;

в) $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$; г) $\frac{-2-\sqrt{5}}{3}$ и $\frac{-2+\sqrt{5}}{3}$.

1023. Составьте все возможные квадратные уравнения, имеющие по одному общему корню с данными уравнениями:
а) $x^2-3x-28=0$ и $2x^2+x-10=0$;
б) $2x^2+5x-3=0$ и $x^2-4x+4=0$.

1024. Не решая данное уравнение, составьте новое квадратное уравнение, корни которого меньше, чем соответствующие корни данного уравнения на единицу:
а) $3x^2+11x-4=0$; б) $2x^2-6x-3=0$.

1025. Не решая данное уравнение, составьте новое квадратное уравнение, корни которого в 3 раза больше, чем соответствующие корни данного уравнения:
а) $3x^2+2x-85=0$; б) $2x^2-6x+3=0$.

1026. Найдите корни уравнения x_1 и x_2 $(x_2>x_1)$ и свободный член q, если:
а) $x^2-10x+q=0$ и $x_2-x_1=14$;
б) $x^2+5x+q=0$ и $x_2-x_1=9$.

1027. Найдите корни уравнения x_1 и x_2 $(x_2>x_1)$ и значение k, если:
а) $x^2+kx+10=0$ и $x_1:x_2=0{,}4$;
б) $x^2-8x+k=0$ и $x_1:x_2=-0{,}2$.

1028. Разность корней уравнения $x^2+6x+q=0$ равна 8. Найдите его корни и число q.

1029. Разность корней уравнения $2x^2+3x+c=0$ равна 2,5. Найдите число c.

1030. Найдите корни уравнения $x^2-81x+q=0$, если один из них: а) в 2 раза больше другого; б) составляет $\frac{4}{5}$ другого.

1031. При каких значениях параметра c уравнение x^2-4x+ $+c=0$ имеет два корня, из которых один:
а) в 3 раза больше другого;
б) на 1 больше другого?

1032. Не находя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2-8x+6=0$, вычислите:

а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2+x_2^2$; в) $x_1^3+x_2^3$.

1033. Не решая данное уравнение $x^2-2mx+2m^2-2=0$, найдите сумму квадратов его корней.

1034. Докажите, что если $p^2-4q=0$, то x^2+px+q — квадрат двучлена. Какого?

1035. Не решая данное уравнение, составьте новое квадратное уравнение, корни которого были бы обратны соответствующим корням данного уравнения:

а) $8x^2-14x+5=0$; б) $2x^2-7x+6=0$.

1036. Не решая данное уравнение $3x^2-2x+6=0$, вычислите:

а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; б) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$,

где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

1037. Не решая данное уравнение $x^2-2x-9=0$, вычислите:

а) $x_1^2+x_2^2$; б) $x_1^3+x_2^3$,

где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1038. Запишите в стандартном виде число:

а) 375 000 000 000; б) 0,000000038.

1039. Найдите разность и отношение чисел:

а) $8{,}27\cdot10^7$ и $4{,}135\cdot10^7$; б) $2{,}3\cdot10^{-5}$ и $4{,}6\cdot10^{-6}$.

1040. Представьте в виде многочлена:

а) $(a+b^2)(a^2+b)$; б) $(x^2-3y)(2x^2+y)$;

в) $(5a^2+b^2)(2a^2-3b^2)$; г) $(2m^2-n)(2n^2-m)$;

д) $(x^3-4)(3x^3+5)$; е) $(x^3-2x^2)(3x^3+x^2)$.

1041. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}0{,}5x+0{,}3y=8,\\1{,}2x-0{,}5y=7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}1{,}4x-2{,}5y=39,\\0{,}8x-1{,}3y=21.\end{cases}$

1042. На рисунке 61 изображены графики движения двух велосипедистов. Как долго каждый из них ехал, с какой скоростью?

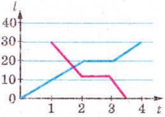
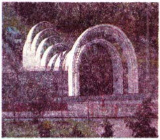


Рис. 61

1043. Замените буквы цифрами таким образом, чтобы выполнялось равенство

ДИСК + РИМИ = НАНТ.

§22. КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН



Квадратным трёхчленом **называют многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b, c — данные числа, причём $a \neq 0$.**

Переменную квадратного трёхчлена можно обозначить любой буквой. Примеры квадратных трёхчленов:

$$4x^2 - 5x + 6,\ -y^2 + 4y + 7,\ \frac{1}{2}z^2 + z - 1.$$

Если квадратный трёхчлен приравнять к нулю, то получим квадратное уравнение. Его корни и дискриминант называют соответственно корнями и дискриминантом данного квадратного трёхчлена. Например, дискриминант и корни квадратного трёхчлена $5x^2 - 7x - 6$ равны соответственно 169, 2 и $-\frac{3}{5}$, поскольку это дискриминант и корни уравнения $5x^2 - 7x - 6 = 0$.

Из теоремы Виета следует правило разложения квадратных трёхчленов на множители.

Если m и n — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$x^2 + px + q = (x - m)(x - n).$$

Поскольку $x^2 + px + q = x^2 - (m + n)x + mn =$
$= x^2 - mx - nx + mn = (x - m)(x - n)$.

Пример. Разложите на множители трёхчлен: $x^2 + 4x - 21$.

Решение. а) Корни уравнения $x^2 + 4x - 21 = 0$ равны 3 и −7. Поэтому

$$x^2 + 4x - 21 = (x - 3)(x + 7).$$

Ответ. $(x - 3)(x + 7)$.

Верна и такая теорема.

Если корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ равны m и n, то его можно разложить на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)(x - n).$$

Доказательство. $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$, $a \neq 0$. Следовательно, корни m и n трёхчлена $ax^2 + bx + c$ также являются корнями уравнения $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. По теореме Виета,

$$\frac{b}{a} = -(m + n), \quad \frac{c}{a} = mn.$$

Поэтому

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - (m + n)\,x + mn) =$$

$$= a\,(x^2 - mx - nx + mn) =$$

$$= a\,(x\,(x - m) - n\,(x - m)) = a\,(x - m)(x - n).$$

Например, если нужно разложить на множители трёхчлен $3x^2 + 5x - 2$, то решаем уравнение $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Его дискриминант $D = 25 + 24 = 49$, поэтому

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{-5 - 7}{6} = -2.$$

Следовательно,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2).$$

Ответ можно записать и так:

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2).$$

Разложение квадратных трёхчленов на множители применяется при сокращении дробей, приведении их к общему знаменателю и т. д. Например, чтобы сократить дробь $\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2}$, сначала следует разложить её числитель и знаменатель на множители. Поскольку

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2), \quad x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2),$$

то

$$\frac{3x^2+5x-2}{x^2+x-2}=\frac{(3x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=\frac{3x-1}{x-1}.$$

Каждый квадратный трёхчлен ax^2+bx+c можно представить в виде $a(x-k)^2+p$, где k и p — некоторые числа. Такое преобразование называют ***выделением квадрата двучлена***. Как выполнить подобное преобразование, покажем на примере. Чтобы выделить из квадратного трёхчлена $2x^2-12x+25$ квадрат двучлена, сначала вынесем за скобки множитель 2:

$$2x^2-12x+25=2\left(x^2-6x+\frac{25}{2}\right).$$

Одночлен $6x$ представим в виде произведения $2\cdot 3x$, прибавим к нему 9 и отнимем 9:

$$x^2-2\cdot 3x+9-9+\frac{25}{2}=(x-3)^2+\frac{7}{2}.$$

В результате имеем: $2x^2-12x+25=2(x-3)^2+7$.

Выделение квадрата двучлена даёт возможность решать задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения квадратного трёхчлена. Например, чтобы найти, при каком значении x значение выражения $2x^2-12x+25$ наименьшее, выделим из него квадрат двучлена:

$$2x^2-12x+25=2(x-3)^2+7.$$

Второе слагаемое полученной суммы — число 7, а первое имеет наименьшее значение, если равно 0, то есть $x=3$. Следовательно, трёхчлен $2x^2-12x+25$ имеет наименьшее значение 7, если $x=3$.

Хотите знать ещё больше?

Если квадратный трёхчлен имеет дробные корни, то при разложении его на линейные множители желательно первый коэффициент этого трёхчлена «внести в скобки». Например:

$$3x^2-5x+2=3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)=(x-1)(3x-2).$$

$$10x^2-17x+3=10\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)=(2x-3)(5x-1).$$

Проверьте себя

1. Что называют квадратным трёхчленом?
2. Сколько корней может иметь квадратный трёхчлен?
3. Как разложить на линейные множители трёхчлен вида
$$x^2 + px + q?$$
4. Как разложить на линейные множители трёхчлен вида
$$ax^2 + bx + c?$$
5. Как выделить квадрат двучлена из квадратного трёхчлена:
а) $x^2 + px + q$; б) $ax^2 + bx + c$?

Выполним вместе!

Найдите значение функции $y = \frac{2x^2 + x - 3}{2x + 3}$ при $x = 2008$.

Решение. Числитель формулы разложим на множители:

$$y = \frac{2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2x+3} = \frac{(x-1)(2x+3)}{2x+3} = x - 1.$$

Если $x = 2008$, то $y = 2008 - 1 = 2007$.

Ответ. $y = 2007$.

Выполните устно

1044. Найдите корни квадратного трёхчлена:

а) $x^2 + 2x + 1$; б) $x^2 + 6x + 9$; в) $x^2 + 4 + 4x$;
г) $x^2 - 4x + 4$; д) $x^2 - 10x + 25$; е) $1 + x^2 - 2x$.
ё) $x^2 + 2x + 3$; ж) $x^2 + 6x + 5$; з) $x^2 - 4x + 1$.

Уровень А

Найдите корни квадратного трёхчлена (1045—1046).

1045. а) $x^2 + 8x - 9$; б) $2x^2 - 5x - 7$; в) $5x^2 + 2x - 3$;
г) $y^2 - y - 6$; д) $4z^2 - 5z + 1$; е) $3n^2 - n - 2$.

1046. а) $4x^2+3x-1$; б) $6x^2+7x-5$;
в) $-x^2-4x+5$; г) $9x^2+6x+1$;
д) $-4x^2+5x-2$; е) $0{,}4x^2+0{,}7x-3$.

Разложите на множители квадратный трёхчлен (1047—1049).

1047. а) $x^2-10x+21$; б) $a^2+2a-15$; в) $2x^2+5x-3$;
г) $c^2-11c-26$; д) $9a^2+3a-2$; е) $4c^2+25c+25$.

1048. а) $9x^2-12x+4$; б) $0{,}5x^2-2x+4$; в) $-x^2+5x-6$;
г) x^2-5x+6, д) x^2-3x+5; е) y^2+2y-8.

1049. а) $5+4z-z^2$; б) $x^2+10x+25$; в) $2x^2-12x+16$;
г) $2x^2-13x+6$; д) $6a^2-5a+1$; е) $0{,}2c^2-c+1{,}2$.

Сократите дробь (1050—1051).

1050. а) $\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$; б) $\dfrac{x-4}{x^2-x-12}$; в) $\dfrac{2x-10}{x^2-3x-10}$.

1051. а) $\dfrac{x+5}{x^2+7x+10}$; б) $\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$; в) $\dfrac{12+3x}{x^2+5x+4}$.

Выделите квадрат двучлена из квадратного трёхчлена (1052—1053).

1052. а) x^2+6x-4; б) x^2-4x+5; в) $x^2-8x+15$;

1053. а) $x^2+4x-18$; б) x^2-6x+8; в) x^2+8x+7.

Уровень Б

1054. Найдите корни квадратного трёхчлена:

а) $2x^2-5x+2$; б) $-x^2-7x+8$; в) $1{,}5y^2-3y+\dfrac{4}{3}$;

г) $z^2-\sqrt{2}z+0{,}5$; д) $\dfrac{4}{49}x^2+1\dfrac{5}{7}x+9$; е) $1\dfrac{2}{7}x^2-3x+1\dfrac{17}{28}$.

1055. Разложите на множители трёхчлен:

а) $6a^2+a-2$; б) $c^2-\sqrt{2}c-4$;

в) $0{,}2n^2+0{,}8n-12$; г) $m^2-\sqrt{2}m-1$.

Сократите дробь (1056—1058).

1056. а) $\dfrac{x^2+2x}{x^2+7x+10}$; б) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$; в) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$;

г) $\frac{2a^2-5a+2}{3a^2-3,5a+1}$; д) $\frac{x^2-3}{x^2-2\sqrt{3}+3}$; е) $\frac{c^2+\sqrt{5}c-10}{c^2-3\sqrt{5}c+10}$.

1057. а) $\frac{3x-9}{2x^2-5x-3}$; б) $\frac{a^2-9}{2a^2+7a+3}$; в) $\frac{c^2-8c-20}{c^2-11c+10}$;

г) $\frac{x^2+2x-15}{x^2+4x-5}$; д) $\frac{a^2+9a+14}{a^2+10a+21}$; е) $\frac{2c^2-5c-3}{2c^2+7c+3}$.

1058. а) $\frac{a^2-8a+7}{a^2-9a+14}$; б) $\frac{2-3c+c^2}{c^2-4c+4}$; в) $\frac{2x^2-3x+1}{3x^2-4x+1}$;

г) $\frac{3c^2-5c+2}{3c^2-c-2}$; д) $\frac{x^2+2x-15}{35+2x-x^2}$; е) $\frac{-3x^2+5x-2}{x^2-1}$.

1059. Найдите сумму и разность дробей:

а) $\frac{1}{2x^2+5x-3}$ и $\frac{1}{2x^2-7x+3}$;

б) $\frac{1}{6a^2-13a+6}$ и $\frac{1}{3a^2-11a+6}$.

1060. Докажите: если $a+b+c=0$, то корни трёхчлена $ax^2+bx+c=0$ равны 1 и $\frac{c}{a}$.

1061. Докажите: если $a+c=b$, то корни трёхчлена $ax^2+bx+c=0$ равны -1, $-\frac{c}{a}$.

Из данного трёхчлена выделите квадрат двучлена **(1062—1063)**.

1062. а) x^2-2x+5; б) $a^2-6a+10$; в) $2x^2+x-3$;

г) $c^2-\frac{2}{3}c+1$; д) $n^2-\sqrt{2}n+3,5$; е) $-x^2+4x+5$.

1063. а) $2a^2-12a-9$; б) $3c^2+30c+5$; в) $3a^2-6a-9$;
г) $10+6x-x^2$; д) $5+4x-x^2$; е) $-4n^2+4n-3$.

1064. Докажите, что при любом значении x значения выражений x^2-4x+5, $3x^2-12x+7$, $\frac{1}{3}x^2-2x+4$ положительные.

1065. Вычислите значение дроби $\frac{2x^2-6x+4}{2x^2-2x-4}$ при $x=-1,1$; $x=9$; $x=11$; $x=99$.

1066. Чем отличаются графики функций $y = x + 3$ и $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$?

1067. При каком значении x значение данного трёхчлена наименьшее:

а) $x^2 - 6x + 10$; б) $2x^2 + 16x + 13$; в) $\sqrt{3}x^2 - 6x + 9$?

1068. Найдите наибольшее значение трёхчлена:

а) $4 - 2x - x^2$; б) $1 - 4z - 4z^2$; в) $3 + 12c - c^2$.

1069*. При каких значениях x значение выражения $f(x)$ наименьшее? Вычислите это наименьшее значение $f(x)$, если:

а) $f(x) = x^2 - 2x + 2$; б) $f(x) = x^2 - 6x + 11$;

в) $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$; г) $f(x) = 1{,}5x^2 - 3x + 2$.

1070*. Найдите расстояние между ближайшими точками оси x и графика функции $y = x^2 - 2x + 7$.

1071*. При каких значениях x значение выражения $f(x)$ наибольшее? Вычислите это значение, если:

а) $f(x) = 8 + 6x - x^2$; б) $f(x) = x - x^2$.

1072*. Найдите область значений функции:

а) $y = -x^4 - 6x^2 + 5$; б) $y = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1073. Сократите дробь с натуральными показателями степеней:

а) $\frac{3^n}{3^{n+1}}$; б) $\frac{2^{3n}}{8^n}$; в) $\frac{a^{n+2}}{a^n}$; г) $\frac{x^{n+3}}{x^3}$;

д) $\frac{a^{2n}+1}{a^n+1}$; е) $\frac{a^{2n}-2a^n+1}{a^n-1}$; ё) $\frac{x^{3n}-1}{x^n-1}$.

1074. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2+2}{x+3} = \frac{x^2+4x}{x+3}$; б) $\frac{x^2+2x}{x-4} = \frac{x^2-8}{x-4}$.

1075. Квадрат целого числа не может оканчиваться одной из цифр — 2, 3, 7 или 8. Докажите. Всегда ли является целым числом квадратный корень из числа, которое оканчивается цифрой 5?

§23. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СОСТАВЛЕНИЕМ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

С помощью квадратных уравнений можно упростить решение многих задач.

Задача 1. Найдите два числа, произведение и среднее арифметическое которых равны соответственно 108 и 10,5.

Решение. Если среднее арифметическое двух чисел равно 10,5, то их сумма в 2 раза больше, то есть 21. Пусть одно из искомых чисел x, тогда другое равно $21 - x$. Имеем уравнение:

$$x(21 - x) = 108, \text{ или } x^2 - 21x + 108 = 0.$$

Решим это уравнение: $D = 21^2 - 4 \cdot 108 = 9$,

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{9}}{2}, \ x_1 = 9, \ x_2 = 12.$$

Если $x = 9$, то $21 - x = 12$; если $x = 12$, то $21 - x = 9$.

Ответ. 9 и 12.

Задача 2. Собственная скорость моторной лодки — 18 км/ч. Расстояние 12 км по течению реки она проходит на 9 мин быстрее, чем против течения. Найдите скорость течения реки.

Решение. 9 мин = 0,15 ч. Если скорость течения реки равна x км/ч, то скорость лодки по течению составляет $(18 + x)$ км/ч, а против течения — $(18 - x)$ км/ч. Расстояние 12 км по течению она проходит за $\frac{12}{18+x}$ ч, а против течения — за $\frac{12}{18-x}$ ч. Имеем уравнение:

$$\frac{12}{18-x} - \frac{12}{18+x} = 0{,}15, \text{ или } \frac{4}{18-x} - \frac{4}{18+x} = 0{,}05,$$

отсюда

$$4(18 + x) - 4(18 - x) - 0{,}05(18 - x)(18 + x) = 0,$$

$$x^2 + 160x - 324 = 0, \ D = 160^2 + 4 \cdot 324 = 26\,896.$$

$$x_{1,2} = \frac{-160 \pm \sqrt{26\,896}}{2} = \frac{-160 \pm 164}{2}, \ x_1 = 2, \ x_2 = -162.$$

Задачу удовлетворяет только положительный корень.

Ответ. 2 км/ч.

Задача 3. На плоскости n точек расположены таким образом, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Если любую из этих точек соединить отрезком со всеми другими, то получим 351 отрезок. Найдите число n.

Решение. Из одной точки выходит $n-1$ отрезков, из всех n данных точек — $n(n-1)$ отрезков. При этом каждый отрезок повторяется дважды, поскольку имеет два конца.

Следовательно, всего отрезков $\frac{n(n-1)}{2}$.

Имеем уравнение:

$$\frac{n(n-1)}{2}=351, \quad \text{или} \quad n^2-n-702=0.$$

Решим это уравнение: $D=1+4\cdot 702=2809$,

$$n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{2809}}{2}=\frac{1\pm 53}{2},$$

отсюда $n_1=27$, $n_2=-26$. Отрицательный корень задачу не удовлетворяет.

Ответ. $n=27$.

Хотите знать ещё больше?

В задачах кроме числовых данных иногда бывают и параметры. В этом случае решение желательно дополнить соответствующими исследованиями — указать, какие значения могут принимать параметры. Например, решим такую задачу.

Задача. Найдите стороны равнобедренного треугольника, если известно, что две его неравные высоты равны a и b.

Решение. Обозначим стороны треугольника буквами: $AC=AB=x$, $CB=y$ (рис. 62). Воспользуемся теоремой Пифагора и формулой для вычисления площади треугольника и составим систему:

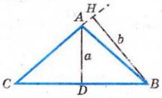


Рис. 62

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{y^2}{4}+a^2, \\ bx=ay. \end{cases}$$

Вычислим из второго уравнения y, подставим его в первое и получим: $x^2 = \frac{b^2}{4a^2}x^2 + a^2$, $x = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$.

Тогда $y = \frac{b}{a}x = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2-b^2}}$.

Следовательно,

$$x = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}, \quad y = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2-b^2}}.$$

Исследование. В полученных значениях x и y под знаком корня имеем разность $4a^2 - b^2$, которая должна быть положительной, что возможно только при $b < 2a$.

Следовательно, данное решение задачи верно не при любых положительных a и b, а лишь при $b < 2a$.

Далее. Мы рассмотрели случай, когда на основание y опущена высота a. Но для этих же значений a и b возможен иной вариант (рис. 63). Имеем:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{y^2}{4} + b^2, \\ ax = by, \end{cases} \quad \text{отсюда } x^2 = \frac{a^2}{4b^2}x^2 + b^2.$$

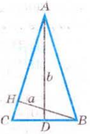


Рис. 63

В этом случае $a < 2b$.

Ответ. Если $a < 2b < 4a$, то задача имеет два решения:

1) $x_1 = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$, $y_1 = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2-b^2}}$;

2) $x_2 = \frac{2b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$, $y_2 = \frac{2ab}{\sqrt{4b^2-a^2}}$.

Если $2a \le b$, то задача имеет одно решение:

$$x = \frac{2b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}, \quad y = \frac{2ab}{\sqrt{4b^2-a^2}}.$$

Если $2b \le a$, то задача также имеет одно решение:

$$x = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}, \quad y = \frac{2ab}{\sqrt{4a^2-b^2}}.$$

Проверьте себя

1. Какие задачи можно решать с помощью квадратных уравнений?
2. Что такое математическая модель задачи?
3. Как найти скорость тела по течению реки?
4. Как найти скорость тела против течения?

Выполним вместе!

Задача 1. Найдите три последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 509.

Решение. Пусть искомые числа: $x-1, x, x+1$. Тогда имеем уравнение: $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=509$. Решим его. Раскроем скобки и сведём подобные слагаемые:

$$x^2-2x+1+x^2+x^2+2x+1-509=0,$$

$$3x^2-507=0, \text{ отсюда } x^2=169,\ x_1=13,\ x_2=-13.$$

Следовательно, два других числа: 12, 14 или −12, −14.

Ответ. 12, 13, 14 или −12, −13, −14.

Выполните устно

1076. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна 100 см^2.

1077. Площадь квадрата равна S. Найдите его:
а) сторону;
б) периметр;
в) диагональ.

1078. Площадь поверхности куба равна Q. Найдите:
а) площадь грани куба;
б) ребро куба;
в) диагональ грани куба.

Уровень А

1079. Найдите два числа, сумма которых равна 61, а произведение — 900.

1080. Найдите два числа, разность которых равна 11, а произведение — 312.

1081. Найдите длину и ширину участка прямоугольной формы, если его площадь равна 800 м^2, а длина на 20 м больше, чем ширина (рис. 64).

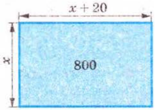


Рис. 64

1082. Периметр поля прямоугольной формы равен 6 км, а его площадь — 200 га. Найдите длину и ширину поля.

1083. Произведение двух последовательных целых чисел больше их суммы на 239. Найдите эти числа.

1084. *Задача Л. Магницкого.* Найдите число, если известно: прибавив к его квадрату 108, получим число в 24 раза больше искомого.

1085. Найдите число, которое на:

а) 132 меньше его квадрата;

б) 0,16 больше его квадрата;

в) 435 меньше его удвоенного квадрата;

г) 240 больше квадратного корня из этого числа.

1086. Найдите два числа, если:

а) их сумма равна 20, а произведение — 91;

б) их разность равна 7, а произведение — 198;

в) их сумма равна 23, а сумма квадратов — 265;

г) их разность равна 16, а сумма квадратов — 257.

1087. Найдите две смежные стороны прямоугольника, если:

а) их сумма равна 13 м, а площадь прямоугольника — 40 м^2;

б) их разность равна 5 м, а площадь прямоугольника — 66 м^2;

в) периметр прямоугольника равен 60 м, а площадь — 221 м^2;

г) их сумма равна 28 см, а длина диагонали — 20 см.

1088. Найдите два последовательных натуральных числа, сумма квадратов которых равна 545.

1089. Произведение двух последовательных чётных чисел на 41 больше их среднего арифметического. Найдите эти числа.

1090. Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел больше суммы их квадратов на 264. Найдите числа.

1091. Найдите три последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 434.

1092. Периметр прямоугольника равен 26 см, а сумма площадей квадратов, построенных на двух смежных сторонах прямоугольника, равна 89 см^2. Найдите стороны этого прямоугольника (рис. 65).

1093. Периметр прямоугольника равен 32 см, а сумма площадей четырёх квадратов, построенных на его сторонах, — 260 см^2. Найдите стороны прямоугольника (рис. 66).

1094. В кинотеатре было 320 мест. Если количество мест в каждом ряду увеличить на 4 и прибавить ещё один ряд, то в зале станет 420 мест. Сколько теперь рядов в кинотеатре?

1095. Теплоход прошёл по течению реки 48 км и столько же — против течения, затратив на весь путь 5 ч. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки составляет 4 км/ч.

1096. Лодка прошла против течения 22,5 км и по течению — 28,5 км, затратив на весь путь 8 ч. Скорость течения реки — 2,5 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

1097. Электропоезд задержался в пути на 4 мин и ликвидировал опоздание на перегоне 20 км, пройдя его со скоростью на 10 км/ч больше, чем по расписанию. Какова скорость поезда на этом перегоне?

1098. Из пункта A отправили по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин из пункта A вслед за плотом вышла моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Найдите скорость течения реки, если лодка проходила каждый час на 12 км больше, чем плот.

1099. На середине пути между A и B поезд задержали на 10 мин. Чтобы прибыть в B по расписанию, начальную скорость поезда увеличили на 12 км/ч. Найдите

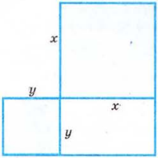


Рис. 65

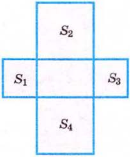


Рис. 66

начальную скорость поезда, если расстояние между A и B составляет 120 км.

1100. Теплоход прошёл вниз по реке 150 км и вернулся назад, затратив на весь путь 5,5 ч. Найдите скорость течения реки, если скорость теплохода в стоячей воде составляет 55 км/ч.

1101. Турист проплыл на моторной лодке вверх по реке 25 км, а назад спустился на плоту. На лодке он плыл на 10 ч меньше, чем на плоту. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде — 12 км/ч.

Уровень Б

1102. Велосипедист преодолел 96 км на 1,6 ч быстрее, чем предполагалось. При этом в течение каждого часа он проезжал на 2 км больше, чем предполагал проезжать. С какой скоростью он ехал?

1103. Из A в B, расстояние между которыми 700 км, выехал автобус. Если бы он уменьшил скорость на 10 км/ч, то в пути был на $1\frac{2}{3}$ ч больше. Сколько часов едет автобус от A до B?

1104. Мотоциклист ехал из одного города в другой в течение 4 ч. Возвращаясь, он первые 100 км проехал с той же скоростью, а потом уменьшил её на 10 км/ч, поэтому на обратный путь затратил на 30 мин больше. Найдите расстояние между городами.

1105. Рыбак отправился на лодке из пункта A против течения реки. Проплыв 6 км, он бросил вёсла, и через 4,5 ч после выхода из A течение снова отнесло его в пункт A. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде — 90 м/мин.

1106. Отец и сын прошли 480 м, причём отец сделал на 200 шагов меньше, чем сын. Найдите длину шага каждого, если шаг отца длиннее, чем у сына, на 20 см.

1107. Мать с дочерью готовили к пасхе крашенки и писанки (рис. 67). Дочь подсчитала: жёлтых крашенок во столько раз больше, чем синих, во сколько синих больше, чем писанок. А если из одной жёлтой крашенки сделать ещё одну писанку, то писанок станет в 3 раза меньше, чем жёлтых крашенок. Сколько было и тех, и других?

Рис. 67

1108. Катер прошёл по течению реки 90 км за определённое время. За это же время против течения он прошёл бы 70 км. Какое расстояние за такое же время проплывёт плот?

1109. Две бригады, работая вместе, заасфальтировали дорогу за 4 дня. Сколько дней понадобилось бы на выполнение этой работы каждой бригаде, если бы одна из них могла закончить асфальтирование дороги на 6 дней раньше, чем другая?

1110. Два комбайнера собрали пшеницу с поля за 4 дня. Если бы один из них собрал половину всей пшеницы, а второй — остаток, то всю пшеницу они собрали бы за 9 дней. За сколько дней каждый комбайнер мог бы собрать всю пшеницу с поля?

1111. Бригада планировала засеять 200 га за определённое время, но ежедневно засевала на 5 га больше, чем было запланировано, поэтому закончила работу на 2 дня раньше. За сколько дней бригада завершила сев?

1112. Двое каменщиков, работая вместе, могли бы выполнить задание за 12 дней. Если сначала будет работать только один каменщик, а после выполнения половины всей работы его сменит второй рабочий, то на выполнение задания понадобится 25 дней. Сколько дней нужно каждому каменщику, чтобы выполнить всю работу?

1113. Двое рабочих, из которых второй начинает работу на 1,5 дня позднее, чем первый, могут её выполнить за 7 дней. За сколько дней каждый из них мог бы сделать всю работу, если второй рабочий может выполнить её на 3 дня раньше, чем первый?

1114. Водонапорный бак наполняется с помощью двух труб за 2 ч 55 мин. Первая труба может наполнить его на 2 ч быстрее, чем вторая. За какое время каждая труба в отдельности может наполнить бак?

1115. ***Старинная индийская задача*** (Бхаскара, 1114 г.).

Забавляясь, обезьяны
на две группы разделились:
часть восьмая их в квадрате
в роще весело резвилась,
а двенадцать хором пели,
на любимом сидя месте.
Сосчитайте, сколько в роще
обезьянок было вместе.

1116. Сумма двух чисел взаимно обратных
равна десяти.
Кто из понятливых сумму квадратов
их может найти?

1117. Несколько точек расположено на плоскости так, что ни одна из трёх не лежит на одной прямой. Если каждую из них соединить отрезками со всеми другими данными точками, то получим 153 отрезка. Сколько дано точек?

1118. В шахматном турнире было сыграно 66 партий. Найдите количество участников турнира, если известно, что каждый участник сыграл с каждым по одной партии.

1119. На первенстве района по футболу сыграно 56 матчей, причём каждая команда играла с каждой дважды. Сколько всего было команд?

1120. Решите математические кроссворды, изображённые на рисунке 68.

1121. Дно ящика — прямоугольник, длина которого в 1,5 раза больше, чем ширина. Высота ящика равна 0,5 м. Найдите объём ящика, если известно, что площадь его дна на 0,76 м^2 меньше, чем площадь боковых стенок.

1122. С первого участка собрали 4,8 т картофеля. Со второго участка, площадь которого на 0,03 га меньше пер-

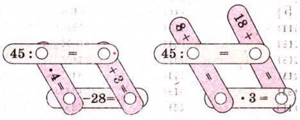


Рис. 68

вого, — 2 т картофеля, причём с одной сотки этого участка собрали на 200 кг меньше, чем с одной сотки первого участка. Найдите площадь каждого участка.

1123. По кольцевой дорожке длиной 2 км в одном направлении двигаются два конькобежца, которые встречаются каждые 20 мин (рис. 68). Найдите скорость каждого конькобежца, если первый пробегает круг на 1 мин быстрее, чем второй.

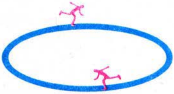


Рис. 69

1124. К раствору, содержащему 40 г соли, добавили 200 г воды, при этом его концентрация уменьшилась на 10 %. Сколько воды было в растворе и какова его концентрация?

1125. Масса одного куска металла равна 880 г, а второго — 858 г, причём объём первого куска на 10 $см^3$ меньше, чем второго. Найдите плотность каждого металла, если плотность первого на 1 $г/см^3$ больше, чем плотность второго.

1126. К 10-процентному раствору кислоты добавили 200 г воды, при этом его концентрация уменьшилась на 10 %. Какой стала концентрация раствора и сколько в нём воды?

1127. Сплав золота с серебром, содержащий 80 г золота, сплавили со 100 г чистого золота. В результате содержание золота в сплаве увеличилось на 20 %. Сколько в сплаве серебра?

1128. Сколько сторон у выпуклого многоугольника, если он имеет 135 диагоналей?

1129. П р а к т и ч е с к о е з а д а н и е. Масса M Земли в 81,5 раза больше, чем масса m Луны, а сила взаимного притяжения двух космических тел прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Найдите на прямой Земля – Луна точки, в которых силы притяжения Земли и Луны уравновешены.

Сравните своё решение с решением в статье «Алгебра лунного перелёта» в книге Я. И. Перельмана «Занимательная алгебра».

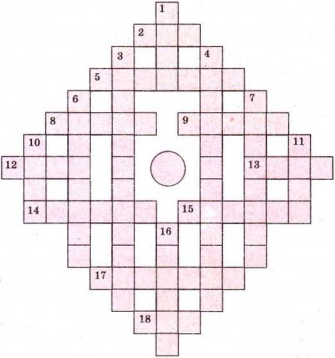


Рис. 70

1130. Решите кроссворд (рис. 70).

П о г о р и з о н т а л и: **2.** Единица измерения времени. **5.** Действие, обратное умножению. **8.** Персидский математик и поэт. **9.** Система штрихов и чисел на измерительном приборе. **12.** Физическая величина. **13.** Краска жёлтого или красного цвета. **14.** Три младенца, одновременно рождённые одной мамой. **15.** Долгосрочная аренда средств или сооружений производственного назначения. **17.** Европейская страна. **18.** Третья степень.

П о в е р т и к а л и: **1.** Древнегреческий математик и философ. **3.** Декада. **4.** Выражение $b^2 - 4ac$ уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. **6.** Кривая линия — график квадратичной функции. **7.** Совокупность действий, предпринимаемых по строго определённым правилам. **10.** Французский математик, «отец алгебры». **11.** Часть плоскости, ограниченная окружностью. **16.** Единица измерения углов.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант I

1°. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 27 = 0$; б) $4z^2 + z = 0$;

в) $y^2 - 9y + 14 = 0$; г) $\frac{15}{x} - 3x = 14$.

2•. Найдите стороны прямоугольника, если одна из них на 3,5 см длиннее, чем другая, а площадь прямоугольника равна 92 см^2.

Вариант II

1°. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 50 = 0$; б) $9z^2 - z = 0$;

в) $y^2 + 2y = 15$; г) $\frac{18}{x} - 5x = 27$.

2•. Найдите стороны прямоугольника, если одна из них на 2,6 см короче другой, а площадь прямоугольника равна 5,6 см^2.

Вариант III

1°. Решите уравнение:

а) $5z^2 - 20 = 0$; б) $9x^2 + 4x = 0$;

в) $y^2 + y = 12$; г) $\frac{16}{x} - 7x = 24$.

2•. Найдите два числа, сумма которых равна 8,5, а произведение — 15.

Вариант IV

1°. Решите уравнение:

а) $7c^2 - 28 = 0$; б) $4x^2 - 9x = 0$;

в) $y^2 - 3y = 10$; г) $\frac{12}{x} - 5x = 28$.

2•. Найдите два числа, сумма которых равна 47, а произведение — 510.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Квадратные уравнения простейших видов вавилонские математики умели решать ещё 4 тыс. лет тому назад. Со временем их решали также в Китае и Греции. Особое внимание квадратным уравнениям уделил Мухаммед аль-Хорезми (IX в.). Он показал, как решать (при положительных a и b) уравнения видов $x^2 + ax = b$, $x^2 + a = bx$, $ax + b = x^2$, не используя каких-либо выражений, даже числа записывал словами. Например, уравнение $x^2 + 21 = 10x$ учил решать так: «Раздели пополам корни, получится пять, и умножь это на равное ему — будет двадцать пять, и отними от этого двадцать один, то останется четыре, добудь из этого корень, будет два, и отними это от половины корней, то есть от пяти, — останется три; это и будет корень, который ты ищешь». Отрицательных корней тогда не вычисляли.

Индийские учёные в решении этого вопроса пошли дальше. Они находили также отрицательные корни квадратных уравнений. Например, Бхаскара (1114—1178), решая уравнение $x^2 - 45x = 250$, находит два корня: 50 и -5. И только после этого делает замечание: «Второе значение в данном случае не следует брать, люди ведь не воспринимают отрицательных абстрактных чисел».

Алгебраические задачи на составление уравнений индийские учёные записывали в стихотворной форме и рассматривали их как особый вид искусства. Они объясняли: «Как солнце затмевает звёзды своим светом, так и человек учёный способен затмить славу других на народных собраниях, предлагая алгебраические задачи и, тем более, решая их».

Формулы корней квадратного уравнения вывел Франсуа Виет (1540—1603). Теорему, впоследствии названную его именем, учёный сформулировал так: «Если $(B + D)A - A^2$ равно BD, то A равно B и равно D». Отрицательных корней он не рассматривал.

Современные способы решения квадратных уравнений появились благодаря научным трудам Рене Декарта (1596—1650) и Исаака Ньютона (1643—1727).

ОСНОВНОЕ В ГЛАВЕ

Уравнение — это равенство, которое содержит неизвестные числа, обозначенные буквами. Числа, удовлетворяющие уравнению, — его *решения* (или *корни*). *Решить уравнение* — означает найти все его решения либо показать, что их не существует.

Два уравнения называют *равносильными*, если каждое из них имеет те же решения, что и другое. Уравнения, не имеющие решений, также считают равносильными друг другу.

Квадратным называют уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — данные числа, причём $a \neq 0$. Выражение $D = b^2 - 4ac$ — его *дискриминант*. Если $D > 0$, то данное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то эти корни равны. Если $D < 0$, то такое квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Если необходимо, например, решить квадратное уравнение $2x^2 + 9x - 5 = 0$, то находим его дискриминант: $D = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 121$. Поэтому корни уравнения:

$$x_1 = \frac{-9 + 11}{4}, \quad x_2 = \frac{-9 - 11}{4}.$$

Квадратное уравнение называют *неполным*, если хотя бы один его коэффициент, кроме первого, равен нулю. Уравнение:

$ax^2 = 0$ имеет единственный корень: $x = 0$;

$ax^2 + bx = 0$ имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$;

$ax^2 + c = 0$ имеет два корня: $x_1 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$,

если $c : a < 0$, и ни одного, если $c : a > 0$.

Квадратное уравнение называют *приведённым*, если его первый коэффициент равен единице. Если уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня, то

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Теорема Виета. Если приведённое квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня, то их сумма равна p, а произведение — q.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ ОЦЕНИВАНИЮ

Тестовые задания № 4

1. Укажите квадратное уравнение:
а) $x^2+12=0$; б) $20-x=0$;
в) $3^x=9$; г) $x^{-2}=100$.

2. Уравнение $ax^2+c=0$ имеет корни, если:
а) $a>0$, $c>0$; б) $a>0$, $c<0$;
в) $a<0$, $c<0$; г) $a=0$, $c\neq 0$.

3. Сколько корней имеет уравнение $x^2+2x+1=0$:
а) один; б) два;
в) бесконечное множество; г) ни одного?

4. Дискриминант уравнения $x^2+7x+6=0$ равен:
а) 7; б) 6; в) 25; г) 5.

5. Первый коэффициент приведённого квадратного уравнения равен:
а) 1; б) 2; в) 3; г) 5.

6. Произведение корней уравнения $x^2+12x+20=0$ равно:
а) 1; б) 20; в) 3; г) 12.

7. Сумма корней уравнения $x^2+2x-15=0$ равна:
а) 5; б) 2; в) -2; г) -5.

8. Дискриминант уравнения $ax^2+bx+c=0$ — это выражение:
а) b^2-ac; б) $2b-4ac$; в) b^2-4ac; г) $-b^2-4ac$.

9. Уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня, если:
а) $D>0$; б) $D=0$; в) $D<0$; г) $D\leq 0$.

10. Уравнение $x^2+6x-7=0$ имеет корни:
а) 1 и 7; б) 1 и 6; в) 1 и -7; г) -1 и 7.

Типовые задания для контрольной работы № 4

1°. Решите уравнение:
а) $x^2 - 9x = 0$; б) $16x^2 = 49$.

2°. Найдите корни уравнения:
а) $x^2 - 6x - 280 = 0$; б) $3x^2 + 8x - 3 = 0$.

3°. Разложите квадратный трёхчлен на множители:
а) $x^2 - 5x + 4$; б) $3x^2 + 2x - 5$.

4°. В уравнении $x^2 + px + 35 = 0$ один из корней равен 7. Найдите другой корень и коэффициент p.

5•. Одно из двух натуральных чисел на 5 больше, чем второе. Найдите эти числа, если их произведение равно 266.

6•. Решите уравнение:
а) $(5x - 7)(8x + 1) = (8x + 1)^2$;
б) $(2x - 1)^4 - 5(2x - 1)^2 + 4 = 0$.

7•. Решите уравнение: $\frac{2x}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$.

8•. Фирма обещала изготовить за определённое время 1200 единиц продукции. Работа была выполнена на 4 дня раньше, поскольку план ежедневно перевыполняли на 10 единиц. За сколько дней фирма обещала выполнить работу?

9••. Не вычисляя корни x_1 и x_2 уравнения

$$x^2 - 4x - 10 = 0,$$

найдите: а) $\frac{9}{x_1^2 + x_2^2}$; б) $x_1^4 + x_2^4$.

10••. При каких значениях a уравнение

$$x^2 - (a + 2)x + a + 5 = 0$$

имеет только один корень?

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Выполните деление (**1131—1135**).

1131. а) $7a^3 : a^2$; б) $8c^4 : c^3$; в) $5x^8 : x^7$.

1132. а) $12a^5 : 3a^4$; б) $15x^{12} : 5x^7$; в) $4c^{13} : 2c^{10}$.

1133. а) $-8c^{10} : 4c^5$; б) $-25x^{12} : x^{12}$; в) $16n^{18} : 16$.

1134. а) $(-8c)^{10} : 8c^5$; б) $36x^{13} : (-3x)^2$; в) $2x^3 : (-2x)^3$.

1135. а) $1{,}5x^5 : 0{,}5x^4$; б) $2{,}4a^7 : 0{,}3a^5$; в) $2{,}1n^5 : 0{,}3n^3$.

Найдите, при каких значениях переменных не имеет значения дробь (1136—1140).

1136. а) $\frac{a}{x}$; б) $\frac{m}{n^2}$; в) $-\frac{a}{c^2}$.

1137. а) $\frac{1}{a-3}$; б) $\frac{5}{2a-6}$; в) $\frac{ac^2}{x(x-3)}$.

1138. а) $\frac{a+2}{a(3-a)}$; б) $\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}$; в) $\frac{x+7}{(x^2-4)(x^2-9)}$.

1139. Найдите значение выражения:

а) $(3-x)^4 : (3-x)^3$, если $x = 1{,}4$;

б) $(2a-b)^5 : (2a-b)^3$, если $a = 2{,}3$ и $b = 5$.

1140. Найдите значение дроби:

а) $\frac{a+1{,}25}{a^2-0{,}25}$, если $a = 2{,}5$;

б) $\frac{x-y}{x^2-y^2}$, если $x = 0{,}63$ и $y = 0{,}37$.

Сократите дробь (**1141—1145**).

1141. а) $\frac{5a}{10}$; б) $\frac{3x}{x}$; в) $\frac{8m}{2m}$; г) $\frac{7a}{14a}$.

1142. а) $\frac{ax}{2a}$; б) $\frac{mn}{3n^2}$; в) $\frac{cz^2}{2cz}$; г) $\frac{6a^2}{12a}$.

1143. а) $\frac{2a^2b}{6a^3c}$; б) $\frac{3cx^3}{9c^2x}$; в) $\frac{8a^3z}{6a^2z^2}$; г) $\frac{15am^3}{25a^2m}$.

1144. а) $\frac{-4ax^3}{12a^2x^5}$; б) $\frac{-5nz^5}{15n^2z^4}$; в) $\frac{8a^2c^3}{-12ac^3}$; г) $\frac{2a^5bc^2}{-a^2bc^3}$.

1145. а) $\frac{(a+x)^2}{(a+x)^3}$; б) $\frac{(2-x)^7}{(2-x)^6}$; в) $\frac{(3+c)^5}{(3+c)^4}$; г) $\frac{(a-1)^3}{(a-1)^5}$.

Упростите выражение (1146—1148).

1146. $\frac{2x^2+7xy-9y^2}{x^2-y^2}+\frac{11x^2-7xy-2y^2}{x^2-y^2}$.

1147. $\frac{x+2y}{2x-y}+\frac{2x-2y}{2x-y}+\frac{6x-8y}{2x-y}+\frac{x-2y}{2x-y}$.

1148. $\frac{5x^2+20xy+10y^2}{3x-15y}+\frac{6x^2-30xy}{3x-15y}-\frac{10x^2-xy+10y^2}{3x-15y}$.

1149. Докажите тождество:

а) $\frac{4a}{a-5}-\frac{20}{a-5}=4$; б) $\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{2x^2}{x^2+1}+\frac{3}{x^2+1}=3$.

1150. Докажите, что значение выражения

$$\frac{a^2}{a^2+1}-\frac{2a^2}{a^2+1}+\frac{1}{a^2+1}$$

не может быть отрицательным числом.

Приведите к общему знаменателю выражения (1151—1153).

1151. а) $\frac{1}{a}$ и $\frac{3}{2a}$; б) $\frac{x}{a+x}$ и $\frac{m}{3(a+x)}$; в) $\frac{1}{3c}$ и $\frac{5}{7c}$.

1152. а) $\frac{1}{3a^2x}$ и $\frac{1}{5ax^3}$; б) $\frac{c}{5b^3z}$ и $\frac{c^2}{2az^3}$; в) $\frac{4}{3ab^4z}$ и $\frac{5}{4a^2bz^3}$.

1153. а) $\frac{1}{a-x}$ и $\frac{1}{(a-x)^2}$; б) $\frac{m}{a-c}$ и $\frac{n}{a^2-c^2}$; в) $\frac{1}{x^3-1}$ и $\frac{1}{x-1}$.

1154. Сложите дроби:

а) $\frac{a}{3m}$ и $\frac{3}{4m}$; б) $\frac{a-x}{2ax}$ и $\frac{1-x}{4x}$; в) $\frac{1}{2n}$ и $\frac{3-n}{4n^2}$.

1155. Найдите разность дробей:

а) $\frac{x}{5a}$ и $\frac{1}{a}$; б) $\frac{2}{3c}$ и $\frac{c-2}{2c}$; в) $\frac{x^2+2}{3x}$ и $\frac{2}{3}$.

Упростите выражение (1156—1159).

1156. а) $\frac{1}{3a}+\frac{1}{9a}$; б) $\frac{c}{x}+\frac{5}{2x}$; в) $\frac{1}{5c}+\frac{4}{c}$.

1157. а) $\frac{1}{m}-\frac{5}{4m}$; б) $\frac{a}{2x}-\frac{4a}{x}$; в) $\frac{1}{0{,}5c}-\frac{2}{c}$.

1158. а) $\frac{1}{3ax^2}+\frac{2}{5az^2}$; б) $\frac{4m}{3p^2x}-\frac{1}{5m^2x}$; в) $\frac{4}{a}-\frac{3}{2ac^2x}$.

1159. а) $\frac{4a}{a-b}+\frac{2b}{a+b}-1$; б) $\frac{x}{x-z}+\frac{3x}{x+z}-\frac{2xz}{x^2-z^2}$.

1160. При каких значениях m и n является тождеством равенство

$$\frac{7}{(x-6)(x+1)}=\frac{m}{x-6}+\frac{n}{x+1}?$$

Выполните умножение дробей (1161—1165).

1161. а) $\frac{5ab^2}{3x}\cdot\frac{9x^2}{10a^2}$; б) $\frac{4an^3}{5c^2x}\cdot\frac{c^3x}{8an^4}$; в) $\frac{7xz^3}{9ac^2}\cdot\frac{3ac}{14xz}$.

1162. а) $\frac{-2x^2}{3ac}\cdot\frac{6a^2}{4x^3}$; б) $\frac{5an^3}{-4x}\cdot\frac{8x^3}{10an}$; в) $\frac{-ax^4}{3m^4}\cdot\frac{9m^3}{-2x^5}$.

1163. а) $\frac{a+1}{x}\cdot\frac{4x^2}{a^2-1}$; б) $\frac{1-a}{3x}\cdot\frac{x}{1-a^2}$; в) $\frac{a^2-1}{c}\cdot\frac{3c}{a+1}$.

1164. а) $\frac{2a}{3c}\cdot\frac{6ac^2}{5m}\cdot\frac{15m^2}{4a^2}$; б) $\frac{6n^2}{7c^2}\cdot\frac{14c^3}{15n^3}\cdot\frac{5n^2}{8c^2}$.

1165. а) $\frac{a^2-ax}{c^2-cx}\cdot\frac{cx-x^2}{a}$; б) $\frac{a^3+a^2}{c^3-c^2}\cdot\frac{ac-a}{ax+x}$.

Выполните деление дробей (1166—1168).

1166. а) $\frac{2ax}{3c^2}:\frac{4ax^2}{9c^3}$; б) $\frac{a^3c^2}{5xy}:\frac{2a^2c^3}{3x^2y}$; в) $\frac{12mn^3}{5ac^2}:\frac{3mn^2}{10a^2}$.

1167. а) $\frac{1{,}5a}{2x^2}:\frac{3a^2}{4x^3}$; б) $-\frac{2ac^2}{3mn}:\frac{4a^2}{15m^3}$; в) $-\frac{4nx}{3ac}:\left(-\frac{4x^2}{9c^2}\right)$.

1168. а) $\frac{a^2-x^2}{a^3-x^3}:\frac{a+x}{a^2-x^2}$; б) $\frac{2a+2n}{3a-3n}:\frac{6a+6n}{5a-5n}$.

Упростите выражение (**1169—1173**).

1169. а) $\frac{a^2b-4b^3}{3ab^2}\cdot\frac{a^2b}{a^2-2ab}$; б) $\frac{4p^2-9q^2}{p^2q^2}:\frac{2ap+3aq}{2pq}$.

1170. а) $\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\frac{a^4}{(a+b)^2}$; б) $\frac{a^2-25}{a^2-3a}:\frac{a^2+5a}{a^2-9}$.

1171. а) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{3a+3b}{4a-4b}$; б) $\frac{5-5a}{(1+a)^2}:\frac{10-10a^2}{3+3a}$.

1172. а) $\left(\frac{a}{4b}-\frac{b}{4a}\right)\cdot\left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}-1\right)$; б) $\left(\frac{a^2b^{-3}}{6c}\right)^{-3}:\left(\frac{a^3b^{-5}}{9c}\right)^{-2}$.

1173. $\frac{m^3-mn^2}{m^2+n^2}\cdot\left(\frac{n}{m^3-m^2n+mn^2}+\frac{m-2n}{m^3+n^3}\right)$.

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Вынесите множитель за знак корня (**1174—1175**).

1174. а) $\sqrt{50}$; б) $\sqrt{300}$; в) $\sqrt{405}$.

1175. а) $\sqrt{1960}$; б) $\sqrt{2890}$; в) $\sqrt{1083}$.

1176. Внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt{10}$; б) $8\sqrt{5}$; в) $10\sqrt{13}$; г) $30\sqrt{11}$.

Вычислите значение выражения (**1177—1181**).

1177. а) $\sqrt{64\cdot 900}$; б) $\sqrt{25\cdot 196}$; в) $\sqrt{49\cdot 676}$.

1178. а) $\sqrt{0{,}01\cdot 121}$; б) $\sqrt{0{,}04\cdot 169}$; в) $\sqrt{0{,}09\cdot 441}$.

1179. а) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$; б) $\sqrt{10\frac{6}{25}}$; в) $\sqrt{31\frac{93}{121}}$.

1180. а) $\sqrt{6\cdot 10\cdot 15}$; б) $\sqrt{15\cdot 21\cdot 35}$; в) $\sqrt{20\cdot 28\cdot 35}$.

1181. а) $\sqrt{\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{10}{49}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{36}\cdot\frac{35}{27}}$; в) $\sqrt{1\frac{1}{5}\cdot 2\frac{7}{10}}$.

Вычислите произведение (**1182—1184**).

1182. а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{150}$; б) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{60}$.

1183. а) $\sqrt{44{,}1}\cdot\sqrt{12{,}1}$; б) $\sqrt{28{,}9}\cdot\sqrt{32{,}4}$.

1184. а) $\sqrt{\frac{12}{25}}\cdot\sqrt{\frac{80}{135}}$; б) $\sqrt{8\frac{1}{9}}\cdot\sqrt{1\frac{8}{73}}$.

Упростите выражение (**1185—1190**).

1185. а) $\left(\sqrt{3}-2\right)^2+4\sqrt{3}$; б) $\left(3+\sqrt{5}\right)^2-6\sqrt{5}$.

1186. а) $\left(\sqrt{17}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{17}+\sqrt{2}\right)$; б) $\left(\sqrt{23}-\sqrt{19}\right)\left(\sqrt{19}+\sqrt{23}\right)$.

1187. а) $\left(2\sqrt{7}-1\right)\left(2\sqrt{7}+1\right)$; б) $\left(3\sqrt{11}-2\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{11}+2\sqrt{7}\right)$.

1188. а) $8-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$; б) $10-\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2$.

1189. а) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right):\sqrt{3}$; б) $\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}\right):\sqrt{5}$.

1190. а) $(7-5):\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$; б) $(13-7):\left(\sqrt{13}+\sqrt{7}\right)$.

1191. Сократите дробь:

а) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; б) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{10}-5}{\sqrt{5}}$.

1192. Освободите от иррациональности знаменатель дроби:

а) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; в) $\frac{a}{5-\sqrt{7}}$; г) $\frac{c}{2+\sqrt{15}}$.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1193. Решите уравнение:

а) $x^2-3x+2=0$; б) $x^2-8x-20=0$;
в) $4z^2+z-3=0$; г) $3y^2-2y-8=0$;
д) $0{,}25x^2-2x+3=0$; е) $2z^2-3z+0{,}75=0$.

1194. Разложите на множители трёхчлен:

а) $x^2-7x+10$; б) $x^2-9x+18$;
в) $y^2-2y-35$; г) $y^2-4y-60$;
д) a^2-a-56; е) $c^2-5c-24$.

1195. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$; б) $\frac{z^2+z-6}{z^2-2z-15}$; в) $\frac{a^2-5a+6}{a^2+3a-10}$.

1196. Составьте квадратное уравнение по его корням:

а) 1 и 3; б) −2 и 7; в) 3 и $\frac{2}{3}$; г) $\sqrt{2}-1$ и $\sqrt{2}+1$.

Решите уравнение (1197—1205).

1197. а) $\frac{x-1}{x+5}+\frac{x-1}{x-5}=2$; б) $\frac{2x-1}{x+2}=\frac{1-2x}{x-2}+4$;

в) $\frac{x-1}{x+4}-2=\frac{1-x}{x-4}$; г) $\frac{2x-1}{2x+4}=\frac{1-2x}{2x-4}+2$.

1198. а) $\frac{2x+2}{x^2-4}-\frac{x^2+2x+4}{x^3+2x^2+4x+8}=\frac{x^2-2x+4}{x^3-2x^2+4x-8}$;

б) $\frac{x+10}{x^2+x-10}-\frac{x+10}{x^2-x-10}=\frac{50}{x^4-21x^2+100}$.

1199. а) $x^4-5x^2+4=0$; б) $x^4-10x^2+9=0$.

1200. а) $3x^4-2x^2-40=0$; б) $5y^4+7y^2-12=0$.

1201. а) $x^6-9x^3+8=0$; б) $z^6-19z^3+216=0$.

1202. а) $x-6\sqrt{x}+5=0$; б) $2x-3\sqrt{x}-9=0$.

1203. а) $(x^2-x)^2-11(x^2-x)+18=0$;

б) $\left(\sqrt{x}-2\right)^2-6\left(\sqrt{x}-2\right)+8=0$.

1204. а) $x+2-13\sqrt{x+2}+42=0$;

б) $x-3+4\sqrt{x-3}-12=0$.

1205. а) $(2x-1)^4-(2x-1)^2-12=0$;

б) $(x+3)^2-13+\frac{36}{(x+3)^2}=0$.

Решите уравнение (1206—1207).

1206. а) $\sqrt{x}+9=11$; б) $12-\sqrt{x}=0$.

1207. а) $3+\sqrt{x-2}=7$; б) $\sqrt{x^2-2x+1}=3$.

1208. Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases}2x^2-y=2,\\ x-y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=8,\\ x^2+y^2=40;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2-y=14,\\ y+2=x.\end{cases}$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

1209. Сократите дробь:

а) $\dfrac{203203203}{405405405}$; б) $\dfrac{342+127\cdot 341}{342\cdot 127+215}$; в) $\dfrac{999999}{1002001}$.

1210. Какое число больше:

а) $\dfrac{35+17}{35+18}$ или $\dfrac{35^3+17^3}{35^3+18^3}$; б) $\dfrac{10^9+1}{10^{10}+1}$ или $\dfrac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$?

1211. Докажите тождество:

$$\frac{a+b}{a+(a-b)}=\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}.$$

1212. Вычислите сумму 999 дробей:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{999\cdot 1000}.$$

1213. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}$; б) $\dfrac{8x^4+x}{16x^6+4x^4+x^2}$; в) $\dfrac{a^4+4}{a^2+2a+2}$.

1214. Докажите, что сумма дробей $\dfrac{a-b}{1+ab}$, $\dfrac{b-c}{1+bc}$, $\dfrac{c-a}{1+ca}$ тождественно равна их произведению.

1215. Докажите тождество Эйлера:

$$a^3+b^3+\left(\frac{2a^3b+b^4}{a^3-b^3}\right)^3=\left(\frac{a^4+2ab}{a^3-b^3}\right)^3.$$

Существуют ли натуральные числа x, y, z и t, при которых $x^3+y^3+z^3=t^3$?

1216. Рациональным или иррациональным является число

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}\ ?$$

1217. Докажите, что число $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ — натуральное.

1218. Чему равны $\sqrt{1156}$, $\sqrt{111556}$, $\sqrt{11115556}$? Попытайтесь обобщить задачу.

1219. Что больше: $\sqrt{2009}-\sqrt{2008}$ или $\sqrt{2010}-\sqrt{2009}$?

1220. Вычислите:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10000}}.$$

1221. Докажите, что $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}<3$.

Решите уравнение (1222—1225).

1222. а) $2008x^2+2011x+3=0$;

б) $2010x^2+2008x-2=0$.

1223. а) $x^4-10x^2+9=0$; б) $(x-1)^4-5(x-1)^2+4=0$.

1224. а) $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8)=4$;

б) $(x^2-2x-1)^2+(3x^2-6x-13)=0$.

1225. а) $2-\sqrt{x}=\sqrt{2-x}$;

б) $x^2+\sqrt{5}=\sqrt{14+6\sqrt{5}}$.

1226. Докажите, что корни уравнения $ax^2+bx+a=0$ являются взаимно обратными.

1227. При каком значении m разность корней уравнения $x^2+mx+1=0$ равна 1?

1228. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2-5mx+4m^2=0$ равна 68?

1229. При каком значении m один из корней уравнения $x^2-12x+9m^2=0$ является квадратом второго корня?

1230. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2+mx+m-2=0$ наименьшая? Чему равна эта сумма?

1231. Докажите, что корни уравнения $x^2+px+q=0$ не могут быть рациональными числами, если p и q — целые нечётные числа.

1232. Катер, скорость которого в стоячей воде равна 15 км/ч, прошёл от пристани 36 км и догнал плот, который отправился от этой же пристани на 10 ч раньше катера. Найдите скорость течения реки.

1233. Расстояние между пристанями A и B лодка обычно преодолевает за 5 ч, от B до A — за 6 ч. Однажды одновременно с лодкой из A отправился плот. Достигнув B

и постояв там 1 ч, лодка вернулась назад и встретилась с плотом на расстоянии 22 км от A. Найдите расстояние от A до B.

1234. Юноша плыл против течения реки. Возле высокой ивы он потерял пустую флягу. Через 20 мин, заметив это, вернулся, чтобы догнать флягу. Он догнал её возле пристани. Найдите скорость течения реки, если расстояние от пристани до высокой ивы равно 2 км (рис. 71).

Рис. 71

1235. Задача с неожиданным ответом. Автомобиль ехал из пункта A в пункт B со скоростью 60 км/ч, а из B в A — со скоростью 70 км/ч. Найдите его среднюю скорость.

1236. Население города за два года увеличилось с 20 000 до 22 050 человек. Каков ежегодный средний процент прироста населения в этом городе?

1237. Старинная китайская задача. Два человека одновременно вышли из одного пункта: B — на восток, A, пройдя 10 бу на юг, повернул на северо-восток, в направлении B. Какое расстояние прошёл каждый из них, если за 1 ч A проходил 7 бу, B — только 3 бу?

1238. Задача Безу. Некто купил лошадь, но вскоре продал её за 24 пистоля. При этом он потерял столько процентов, сколько стоила ему лошадь. За сколько пистолей была куплена лошадь?

1239. Задача Эйлера. Найдите число, четвёртая степень которого при делении на половину искомого числа и увеличении на $14\frac{1}{4}$, равна 100.

1240. Решите уравнения из работ известных математиков:

а) $14\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x}=1\frac{1}{4}$ (*Омар Хайям*);

б) $x^4-2x^2-400x=9999$ (*Бхаскара*);

в) $y^3-9y^2+26y-24=0$ (*Рене Декарт*).

1241. Если между цифрами двузначного числа вписать число, которое на единицу меньше этого числа, то получим четырёхзначное число, которое в 91 раз больше его. Найдите двузначное число.

1242. Найдите двузначное число, отношение которого к числу, записанному такими же цифрами в обратном порядке, равно 0,375.

1243. Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 667, а частное от деления их наименьшего общего кратного на наибольший общий делитель равно 120.

1244. Найдите дробь с наименьшим знаменателем, которая меньше, чем $\frac{1}{2002}$, и больше, чем $\frac{1}{2003}$.

1245. Докажите, что дробь $\frac{21n+4}{14n+3}$ несократима при любом натуральном значении n.

1246. Задача Виета. Докажите, что числа a, b, c — корни уравнения $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x=abc$.

Пользуясь этим утверждением, решите уравнение $x^3-6x^2+11x-6=0$.

1247. Докажите, что если $ac \neq 0$, то

$$\left(a+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a}}\right):\left(c+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c}}\right)=a:c.$$

1248. Решите уравнение:

а) $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}=\frac{13}{9}$; б) $1+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}=\frac{29}{24}$.

1249. Три вторника месяца приходятся на чётные числа. Какой день недели будет 21-го числа данного месяца?

1250. Замените буквы цифрами, чтобы выполнялись равенства:

а) $алгебра = лев^в$; б) $алгебра = лиг^а$; в) $алгебра = бан^к$.

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

УРАВНЕНИЯ

Уравнение — это равенство, содержащее неизвестные числа, обозначенные буквами. Числа, удовлетворяющие уравнение, — его *решения* (или *корни*). *Решить уравнение* — это означает найти все его решения либо показать, что их не существует.

Два уравнения называют *равносильными*, если каждое из них имеет те же решения, что и другое. Уравнения, не имеющие решений, также считаются равносильными.

Основные свойства уравнений

1. В любой части уравнения можно свести подобные слагаемые или раскрыть скобки, если они имеются.

2. Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный.

3. Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — произвольные числа, называется *линейным уравнением* с переменной x. Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ называют *уравнением первой степени* с одной переменной. Каждое уравнение первой степени $ax = b$ имеет один корень $x = \frac{b}{a}$. Линейное уравнение может иметь один корень, бесконечное множество либо не иметь ни одного корня.

Например, уравнение:

$12x = 6$ имеет один корень,

$0x = 0$ имеет бесконечное множество корней,

$0x = 5$ не имеет ни одного корня.

ЦЕЛЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Произведение нескольких равных множителей называют *степенью*. Например, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ — пятая степень числа 2. Она равна 32. Следовательно, $2^5 = 32$. Здесь 2 — *основание степени*, 5 — *показатель степени*, 2^5, или 32, — *степень*. Вторую и третью степени называют также *квадратом* и *кубом числа*. Если натуральное число n больше 1, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Если $n = 1$, то $a^n = a$.

Основное свойство степени: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Перемножая степени одного и того же числа, показатели степеней складывают, а основание оставляют прежним.

Другие *свойства степеней:*

$$(a^n)^m = a^{mn}; \ (ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Числа, переменные, а также различные записи, составленные из чисел или переменных и знаков действий, вместе называют *выражениями*. Выражения бывают *числовые* (например, $3 - 0{,}5 : 6$) и с *переменными* (например, $3x$, $2ab$, $c^2 - 3$). Если выражение не содержит никаких действий, кроме сложения, вычитания, умножения, возведения в степень и деления, его называют *рациональным*. Рациональное выражение, не содержащее действия деления на выражение с переменной, называют *целым выражением*.

Простейшие выражения — это числа, переменные, их степени или произведения. Их называют *одночленами*. Примеры одночленов:

$$4x; \ \frac{2}{3}; \ -3x^2; \ -3\frac{1}{3}am^3; \ 2ax \cdot 3ax^2.$$

Если одночлен имеет только один числовой множитель и при этом стоит на первом месте, а каждая переменная входит только в один множитель, то такой одночлен называют *одночленом стандартного вида*. Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, — *коэффициент* этого одночлена.

Перемножая одночлены, между ними ставят знак умножения, и полученное произведение сводят к одночлену стандартного вида. Чтобы возвести одночлен в степень, необходимо возвести в эту степень каждый множитель одночлена и полученные степени перемножить. Например,

$$2ax \cdot (-3x^2) = 2 \cdot (-3) \cdot a \cdot x \cdot x^2 = -6ax^3;$$

$$(0{,}3nc^3)^2 = 0{,}3^2 \cdot n^2 \cdot (c^3)^2 = 0{,}09n^2c^6.$$

Сумму нескольких одночленов называют *многочленом*. Для удобства каждый одночлен также считают многочленом. Взаимосвязь разных видов целых выражений показана на схеме (рис. 72).

Рис. 72

Подобными членами многочлена называют такие, которые отличаются только коэффициентами либо совсем не отличаются. Многочлен записан в стандартном виде, если все его члены — одночлены стандартного вида и среди них нет подобных.

Складывая или вычитая многочлены, используют правило раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «+», то их не пишут, если перед скобками стоит знак «−», то скобки можно не писать, изменив знаки всех содержащихся в них слагаемых на противоположные. Например,

$$4x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 5) = 4x^2 + 5 - x^2 + 2x - 5 = 3x^2 + 2x.$$

Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на данный одночлен, а результаты сложить. Например,

$$(3a^2 + a - 8) \cdot 2ax = 3a^2 \cdot 2ax + a \cdot 2ax - 8 \cdot 2ax =$$
$$= 6a^3x + 2a^2x - 16ax.$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго и полученные произведения сложить. Например,

$$(x + 2z - 3) \cdot (4x - 7) = x \cdot 4x + 2z \cdot 4x - 3 \cdot 4x - x \cdot 7 -$$
$$- 2z \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 4x^2 + 8xz - 19x - 14z + 21.$$

Формулы сокращённого умножения

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ — квадрат двучлена,
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ — куб двучлена,
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов,
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ — разность кубов,
$a^3 + b^3 + (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ — сумма кубов.

Разложить многочлен на множители — это означает заменить его произведением нескольких многочленов, тождественным данному многочлену. Простейшие способы разложения многочленов на множители: вынесение общего множителя за скобки, способ группировки, использование формул сокращённого умножения.

ФУНКЦИИ

Если каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y, то переменную y называют *функцией от* x, переменную x называют *независимой переменной*, или *аргументом* функции. Например, площадь S квадрата — функция от длины его стороны a.

Функции можно задавать с помощью формул, таблиц, графиков и т. д. График функций часто строится в *декартовой системе координат*, состоящей из двух взаимно перпендикулярных координатных осей — горизонтальной оси *абсцисс*, или оси x, и вертикальной оси *ординат*, или оси y. Плоскость с системой координат называют *координатной плоскостью*, каждой её точке соответствует единственная пара чисел.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, ординаты — соответствующим значениям функции.

Все значения, которые может принимать аргумент функции, образуют её *область определения*, а все соответствующие значения функции — *область значений функции*.

Линейной называют функцию, которую можно задать формулой $y = kx + b$, где x — аргумент, k и b — данные числа. Если $b = 0$, то линейную функцию называют *прямой пропорциональностью*.

График каждой линейной функции — прямая. График прямой пропорциональности — это прямая, которая проходит через начало координат.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение вида $ax + by = c$, где a, b, c — данные числа, называют *линейным уравнением с двумя переменными* x и y. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то его называют *уравнением первой степени с двумя переменными*.

Каждую пару чисел, удовлетворяющую уравнение с двумя переменными, называют *решением* этого уравнения. Например, пара чисел (3; −2) — это решение уравнения $5x + 3y = 9$. Каждое уравнение первой степени с двумя переменными имеет бесконечное множество решений. В декартовой системе координат каждому уравнению первой степени с двумя переменными соответствует прямая — график данного уравнения.

Два уравнения с двумя переменными называют *равносильными*, если каждое из них имеет те же решения, что и другое. Равносильные уравнения с двумя переменными имеют одинаковые графики.

Если нужно найти общие решения двух или нескольких уравнений, то говорят, что эти уравнения образуют *систему уравнений*. *Решением системы уравнений* называют общее решение всех её уравнений.

Решать системы уравнений с двумя переменными можно, используя способы подстановки, сложения или графический.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ И УПРАЖНЕНИЯМ

7. а) 16; г) 3,75. **8.** а) 0,216; д) 10,89. **9.** а) -7; д) 13. **10.** а) x^5; в) n^4; д) x. **11.** а) $81x^4$; г) $10000m^8$. **12.** б) $6-2a$. **13.** а) $2a^3x$; г) $3a^2b^2$. **14.** а) $4x^3y$; г) $-6m^5n$. **15.** б) $2m^5$; г) $2a$. **16.** б) 16; д) 5. **17.** б) 1; в) -44. **20.** а) -1372. **21.** б) 0,4. **25.** а) $-5ax^2$; г) $-4n^4y^4$. **26.** а) $7(x-7)$; в) $ac(a-2c)^2$. **27.** б) -9; г) $8-a^3$. **28.** а) -1; г) 1. **29.** б) $36n^{10}$; в) $3a^4$. **30.** б) 22,5. **31.** а) a^3; в) x^5. **32.** а) $2xy^{2n}$; б) $12x^ny^n$. **33.** а) x^2+9x+5; г) x^3-3x^2+4x-2. **34.** б) a^2-10. **35.** в) $-x^2$. **36.** а) $(x-4)(x+4)$; д) $3(a-b)(a-b)$. **37.** б) 3,5. **38.** г) 5,5. **39.** а) 0,4. **40.** а) (4; 2). **41.** б) (3; 1). **43.** 20 и 51. **44.** 48 и 60. **45.** 45 и 80. **46.** 17 и 7. **54.** а) 125; г) 2. **55.** б) -7; г) 1. **56.** а) $n=0$; б) $a=3$; в) $x=-4$. **57.** а) $x=5$. **58.** б) $x=0$, $x=3$, $x=-3$. **60.** а) $x\neq 5$; г) $x\in R$. **61.** в) $x\neq -3$. **62.** а) -2. **64.** а) Да; б) нет. **65.** б) Нет. **68.** в) -1; д) $5x^4$. **69.** а) $-2c$; д) $0{,}3a^2c^3$. **70.** в) 0,25; г) 4,5. **73.** б) Нет. **76.** а) $x=0$, $x=-1$. **77.** а) $x\neq -2$, $x\neq 0$, $x\neq 1$. **78.** б) $x\neq 0{,}5$. **80.** а) $x=\dfrac{5}{a-2}$, $a\neq 2$; г) $x=\dfrac{5-2a}{9-a^2}$, $a\neq 3$, $a\neq -3$. **81.** в) $c=-7$. **82.** а) $x=0$. **83.** б) 33. **84.** б) -2. **85.** а) 90. **86.** в) -87. **87.** а) Нет. **88.** а) Нет.

102. а) $-\dfrac{1}{2}$; в) $\dfrac{5}{6}$. **104.** г) -1. **105.** в) $3x$. **106.** б) $\dfrac{c}{m}$. **108.** б) 1. **109.** в) $\dfrac{1}{3}$. **110.** б) a. **111.** в) $-m$. **112.** а) $\dfrac{p}{2x}$; г) $-(n+c)$. **113.** а) $\dfrac{6a^3}{3a^4}$. **119.** б) $6x$. **121.** б) 0,25. **122.** б) 5. **124.** б) $x^2+2xz+z^2$. **125.** б) $a-1$. **129.** $\dfrac{y+1}{y-1}$. **130.** а) $\dfrac{x-1}{x+1}$. **131.** а) $1-xy$. **139.** а) $\dfrac{c+x}{y+2x}$. **140.** а) $\dfrac{x-a}{x^2+a}$. **141.** а) $\dfrac{x^2-ax+c^2}{x^2+ax-c^2}$. **144.** б) $a^2-\pi x^2$. **145.** 20 км/ч. **151.** а) 1,25. **152.** а) 10,1. **153.** а) $x=0$. **154.** а) $x=-3$. **155.** в) $x=-1{,}5$. **157.** а) Нет. **160.** а) -3. **161.** б) 2; -2. **164.** а) 8. **165.** б) 10. **167.** а) 2, если $a>0$; 0, если $a<0$, выражение не имеет смысла, если $a=0$. **171.** $\dfrac{0{,}1m+0{,}15n}{m+n}$. **173.** в) $x=-3$. **174.** в) $x=0$, $x=4$. **178.** б) 5. **179.** а) 0. **180.** а) Уравнение решений не имеет. **181.** б) 1,5. **192.** а) 1. **193.** б) 0. **194.** б) 1. **195.** в) x. **196.** б) a. **198.** а) $a-3$. **199.** а) 3.

200. а) -4. **205.** в) $\frac{a+5x}{6x}$. **206.** а) $\frac{4a-5x}{ax^2}$. **207.** а) $\frac{2c-x}{3c^2x}$ и $\frac{1}{3c^2}$. **208.** б) $\frac{6+c}{3c(3-c)}$. **209.** а) $\frac{15y}{2x(4x-5y)}$. **210.** а) $\frac{a+b+c}{c}$. **211.** в) $\frac{ax^2}{a+x}$. **213.** б) -5. **214.** в) -2. **215.** б) $\frac{14a+15b}{24c}$. **216.** а) $\frac{-7x-51}{20x}$. **217.** а) $\frac{2}{x-1}$. **218.** а) $-\frac{1}{3(x+2)}$. **219.** б) $\frac{1}{6}$. **220.** б) $\frac{4-x}{6(x+1)}$. **221.** а) $\frac{20}{a^2-1}$. **222.** а) $\frac{2x^2+17x+11}{(x^2-1)(x+2)}$. **223.** а) $\frac{x^2+4x+39}{12(1-x^2)}$. **224.** а) $\frac{2x^2}{a(x^2-4a^2)}$. **225.** $\frac{44}{x^3+64}$. **226.** $\frac{18x^2}{8a^3-27x^3}$. **227.** $\frac{1}{(x-a)(x-c)}$. **228.** 0. **230.** а) $\frac{1}{6x}+\frac{3}{4x^2}$. **238.** б) 0. **240.** б) -6. **241.** а) 0. **242.** б) -1. **243.** а) 0. **269.** а) $a+3$; в) x. **271.** а) 2; б) 18. **278.** а) $27a^4$. **279.** а) $-27z^{12}$. **280.** а) $1-a$. **284.** б) 1,5. **289.** а) -3. **290.** б) 1. **291.** а) 3 и -1. **294.** а) $6(x-y)(x+y)$.

300. а) 6. **302.** а) $2a^2c^2$; в) $27x^5$. **303.** а) $x+y$. **305.** б) x. **306.** а) $2x(2c-x)$. **307.** г) $x^{12}-1$. **308.** а) -1. **311.** а) 1,2. **313.** а) 8. **314.** а) $x-y$. **315.** г) $x(x+2y)$. **316.** б) $y(xy+1)$. **318.** а) $0{,}5(3-x)(3+2x)$. **319.** б) 0,25. **323.** в) $(a-2)^2$. **326.** б) a^2. **329.** а) $a+b$. **331.** б) 0. **332.** б) 0. **333.** а) 25; б) 3. **334.** а) $a(a^2+1)$. **335.** б) c^2-c+1. **336.** а) $a+b$. **337.** а) $a-2$. **338.** б) $16a-5c$. **339.** в) $6c$. **340.** б) $3a^2$. **349.** а) a^2-a+1. **351.** б) $3y$. **352.** б) x. **353.** а) $x-y$. **355.** г) $-ab$. **357.** а) 1. **362.** а) 1,37. **366.** а) a^2-x^2. **368.** б) $(a+c)^2$. **371.** б) $-x$. **372.** а) $3-a^2$. **375.** а) $2a(a+2)$. **377.** а) 1. **382.** $x=13$. **384.** 2, 0, -2, -4. **386.** 4, 6, 10, 24. **392.** а) 5. **395.** а) 0; б) 1.

404. а) 3. **405.** а) -5. **406.** а) -1 и 1. **407.** б) -1. **408.** б) -2 и 2. **409.** а) 7. **410.** а) 16. **411.** а) 0. **412.** а) -5 и 5. **413.** 7. **416.** а) -1. **417.** а) -4. **418.** б) -3. **419.** а) -9. **421.** а) 8. **422.** а) 4. **423.** б) $-2{,}5$. **425.** а) 4. **426.** а) 8. **428.** а) $-8{,}5$. **430.** а) (2;4). **431.** а) (0,1; 4). **432.** а) (5; 3). **433.** а) (4; 5). **434.** а) (4,5; 1). **435.** 3. **436.** 4. **437.** 27 м. **438.** 27 и 21 год. **439.** 80 км/ч и 40 км/ч. **440.** 15 ч. **442.** 20 дней и 30 дней. **446.** 3,6 ч. **449.** 40, 60 и 80 км/ч; 360 км. **461.** б) 1. **462.** г) 250. **463.** а) a^{-2}. **465.** а) 25.

466. а) $9x^{-1}c^{-2}$. **467.** б) $15a^{-1}c^{-3}$. **468.** г) $8x^{-9}y^{6}$. **469.** а) $x^{-3}z^{6}$. **471.** а) 1. **474.** г) 1. **478.** б) –0,5. **487.** б) 1. **497.** а) 700 000. **498.** а) 0,00000009. **499.** а) $3{,}7 \cdot 10^{8}$.

500. а) $5{,}3 \cdot 10^{-8}$. **501.** а) $7{,}35 \cdot 10^{19}$ т. **502.** а) $\approx 5{,}91 \cdot 10^{21}$. **503.** а) $2{,}6 \cdot 10^{9}$ г. **504.** а) $1{,}2 \cdot 10^{6}$. **507.** а) $1{,}6 \cdot 10^{-23}$; $6{,}4 \cdot 10^{-35}$. **508.** а) 21,6 кг. **509.** а) $1{,}5 \cdot 10^{6}$ км. **511.** а) $7 \cdot 10^{-2}$. **512.** а) $2{,}4 \cdot 10^{4}$; $1{,}2 \cdot 10^{4}$; $1{,}08 \cdot 10^{8}$; 3. **514.** а) $1{,}43 \cdot 10^{3}$. **515.** а) $1{,}57 \cdot 10^{2}$. **517.** а) –9. **518.** а) $\approx 3{,}1 \cdot 10^{22}$. **520.** $\approx 2{,}8 \cdot 10^{7}$. **541.** 50; –2. **543.** *A*, *D*, *E*, *G*. **545.** а) $x \neq 0$. **547.** в) $x \neq 0$, $x \neq 5$. **550.** а) $k = 1$. **552.** Да. **555.** Да. **556.** За 36 ч. **562.** а) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. **563.** а) $k = 12$, $b = -32$. **566.** а) $x \neq 0$. **567.** а) $x \neq 0$ и $x \neq 3$. **572.** а) 48. **573.** 0,75 и 1,75. **574.** –7 и –5. **583.** Проходит через *A* и *B*. **588.** $S = 2x^2$. **591.** При $x = -1$ и $x = 3$.

621. а) 13. **622.** б) 0,3. **623.** а) 11. **624.** а) 0,1. **627.** а) –30. **628.** а) 12. **629.** а) 0,6. **630.** а) 30. **634.** а) –71. **635.** а) –220. **636.** а) 13. **638.** а) Нет. **644.** а) 5; 1; 13. **649.** а) 1. **650.** а) 71. **652.** а) 27. **656.** а) 2304; б) 1369. **658.** а) Да; в) нет. **659.** а) 49. **660.** а) 22. **662.** б) 4 и –4. **679.** б) 0,4. **688.** а) 0,(3).

715. а) 80. **716.** а) 0,5. **719.** а) 20. **720.** а) 70. **721.** а) 30. **723.** а) 8. **724.** а) 20. **726.** а) 1. **731.** а) 9. **733.** а) 16. **739.** а) 800. **740.** а) 18. **742.** б) $a \geq 0$. **745.** а) $-3n$. **751.** а) $3a^2bc^3$. **752.** а) $-xyz$. **753.** а) $|a + b|$. **754.** а) 1. **755.** а) $\sqrt{3} - 1$. **766.** а) $5\sqrt{10}$. **767.** а) $11\sqrt{2}$. **768.** а) $5\sqrt{0{,}1}$. **769.** а) $\sqrt{12}$. **771.** а) $\sqrt{0{,}9}$. **772.** г) $\sqrt{0{,}5}$. **778.** а) 21. **779.** а) 25. **780.** а) $1 + \sqrt{7}$. **781.** а) 2. **782.** а) $4 + 2\sqrt{3}$. **784.** а) $|a|\sqrt{2}$. **785.** а) $x\sqrt{3}$. **786.** а) $\sqrt{12x^2}$. **787.** а) $\sqrt{2x^2}$. **796.** а) $-\sqrt{3}$. **797.** а) $\sqrt{3}$. **798.** б) 15. **799.** а) 1.

804. а) $-x\sqrt{2}$. **806.** а) $-\sqrt{ac^2}$. **812.** а) *a*. **818.** а) $\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)$. **822.** б) 2. **825.** г) $10 - 4\sqrt{6}$. **857.** в) Один. **876.** 0 и –0,6. **887.** а) 0 и 2. **897.** а) 10 и –10.

909. а) $c = 0$. **916.** а) 0; 7 и –7. **932.** а) 6 и –2,5. **941.** а) 0 и 13. **946.** а) 1 и –0,5. **959.** а) 1 и –0,25. **963.** а) 1 и –4,6. **970.** а) 87 и –91. **973.** а) 3. **985.** а) 0,25. **992.** а) (–2; 1) и (0,25; 7,75). **993.** а) (–2; 5) и (–7,5; 3,625).

1015. $c = 6$. **1016.** $m = -5{,}6$. **1026.** а) $x_1 = -2$; $x_2 = 12$; $q = -24$. **1037.** а) 22. **1048.** а) $(3x - 2)(3x - 2)$. **1053.** а) $(x + 2)^2 - 22$. **1065.** –21; 0,8. **1067.** При $x = 3$. **1071.** При $x = 3$, $f(3) = 17$. **1079.** 25 и 36. **1080.** 24 и 13 или –13 и –24. **1081.** 40 м и 20 м. **1082.** 2 км и 1 км. **1083.** 16 и 17 или –14 и –15. **1084.** 6 или 18.

1085. а) 12 и −11. **1086.** а) 13 и 7. **1087.** а) 5 и 8 м. **1088.** 16 и 17. **1089.** 6 и 8. **1090.** 11 и 12. **1091.** 11, 12 и 13 или −11, −12 и −13. **1094.** 21 ряд. **1096.** 7 км/ч. **1097.** 60 км/ч. **1098.** 3 км/ч. **1099.** 60 км/ч.

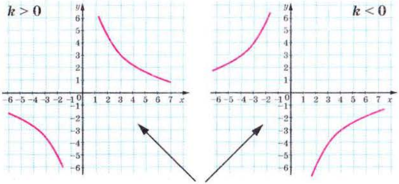
1101. 2 км/ч. **1102.** 12 км/ч. **1103.** 10 ч. **1104.** 200 км или 160 км. **1105.** 2,4 км/ч или 3 км/ч. **1106.** 80 см и 60 см. **1108.** 10 км. **1109.** 12 дней, 6 дней. **1110.** 12 дней, 6 дней. **1111.** 8 дней. **1112.** 30 дней, 20 дней. **1113.** 14 дней, 11 дней. **1114.** 5 ч, 7 ч. **1115.** 48 или 16. **1116.** 25 веток, 8 пчёл. **1117.** 18 точек. **1118.** 12. **1123.** 30 км/ч и 24 км/ч. **1124.** 160 г, 20 %. **1125.** 8,8 г/см^3, 7,8 г/см^3. **1126.** 10 %, 360 г. **1127.** 120 г. **1128.** 18 сторон. **1133.** а) $-2c^5$. **1140.** а) 0,625. **1145.** б) $2 - x$. **1162.** б) $-n^2x^2$. **1164.** а) $3cm$. **1169.** а) $a + 2b$. **1172.** б) $\frac{8c}{3b}$. **1173.** $\frac{m-n}{m^2+n^2}$. **1175.** а) $14\sqrt{10}$. **1183.** а) 23,1. **1188.** а) $2\sqrt{15}$. **1191.** а) $\sqrt{2}$. **1197.** а) 25. **1198.** Корней нет. **1199.** а) $\pm 4, \pm 1$.

1207. а) 18. **1208.** а) (1; 0), (−0,5; −1,5). **1209.** а) $\frac{203}{405}$; в) $\frac{999}{1001}$. **1210.** а) Эти числа равны. **1212.** 0,999. **1213.** а) Разложите на множители числитель: $x^4 + a^2x^2 + a^4 = x^4 + 2a^2x^2 + a^4 - a^2x^2 = (x^2 + a^2)^2 - (ax)^2 = (x^2 - ax + a^2)(x^2 + ax + a^2)$. **1215.** Существуют. **1216.** Рациональное. **1217.** Покажите, что $4 \pm 2\sqrt{3} = (1 \pm \sqrt{3})^2$. **1218.** 34, 334, 3334. **1219.** Первая разность больше. **1220.** 99. **1222.** а) Разложите на множители левую часть уравнения. **1224.** а) Сделайте замену $x + 6 = y$; б) сделайте замену $x^2 - 2x - 1 = y$. **1227.** $\pm\sqrt{5}$. **1228.** ± 2. **1229.** $\pm\sqrt{3}$. **1230.** 1; 3. **1231.** Чтобы корни данного уравнения были рациональными, должно выполняться равенство $p^2 - 4q = m^2$, где m — целое нечётное число. Покажите, что такого m не существует. **1232.** 3 км/ч. **1233.** 121 км. **1234.** 3 км/ч. **1235.** ≈64,4 км/ч. **1236.** 5 %. **1237.** 10,5 бу и 24,5 бу. **1238.** 40 или 60 пистолей. **1239.** 3,5. **1240.** а) Сделайте замену $\frac{1}{x} = y$; б) данное уравнение равносильно уравнению $(x - 11)(x + 9)(x^2 + 2x + 101) = 0$. **1242.** 27. **1244.** $\frac{2}{2005}$. **1245.** Обратите внимание, что $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$. **1248.** а) 1; б) 4 или −1,2. **1250.** а) 193^3.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

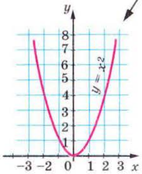
Функции

$y = \frac{k}{x}$ — обратная пропорциональность, $x \neq 0$



Гипербола

Парабола



Квадраты натуральных чисел

Десятки	Единицы									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Степени чисел 2 и 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049