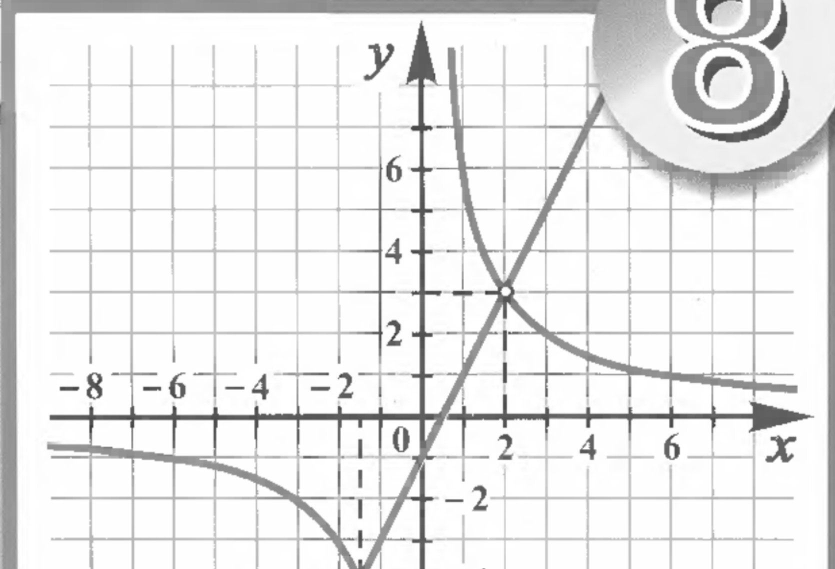
Василий Кравчук
Мария Пидручная
Галина Янченко

АЛГЕБРА

8



СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Степень с целым показателем

$a^n = \underbrace{aa...a}_{n}$; $\quad a^0 = 1 \ (a \neq 0)$; $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \ (a \neq 0)$, n — натуральное число.

Свойства степени с целым показателем

$a^m a^n = a^{m+n}$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$;

$(a^m)^n = a^{mn}$;

$(ab)^n = a^n b^n$;

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

($a \neq 0$, $b \neq 0$, m и n — целые числа.)

Формулы сокращенного умножения

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2;$$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $\quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $\quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; $\quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Свойства арифметического квадратного корня

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \ (a \geq 0, b \geq 0)$; $\quad \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ (a \geq 0, b > 0)$;

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \ (a \geq 0)$; $\quad \sqrt{a^2} = |a|$.

Формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Сабенф Н. Е. Богатко Н. Е.

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ

НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОТ 10 ДО 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Василий Кравчук, Мария Пидручная, Галина Янченко

АЛГЕБРА

Учебник для 8 класса

Под редакцией Зинаиды Слепкань

Утвержден Министерством образования и науки Украины

Тернополь
«Підручники і посібники»
2005

УДК 371.671
ББК 22.1я721
К 77

Редакторы: *Ярослав Гапюк*, кандидат педагогических наук
Ярослав Гринчишин, кандидат физико-математических наук
Сергей Мартынюк, кандидат физико-математических наук

Литературный редактор *Оксана Давыдова*

Обложка *Светланы Демчак*

Утвержден Министерством образования и науки Украины
(протокол № 1/11–2550 от 29.07.2002 г.)

Кравчук Василий, Пидручная Мария, Янченко Галина

К 77 Алгебра. Пробный учебник для 8 класса / *Под редакцией З. И. Слепкань.* — Тернополь: Підручники і посібники, 2005. — 232 с.

ISBN 966-07-0247-7

УДК 371.671

ЮНЫЙ ДРУГ!

Несколько слов об особенностях учебника.

Он содержит четыре параграфа, которые разделены на пункты.

Каждый пункт начинается изложением теоретического материала. Некоторые пункты содержат дополнительный материал под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше».

Далее следует рубрика «Примеры решения упражнений». Это подсказка. Она поможет тебе ознакомиться с основными видами упражнений, способами их решения и научит правильно записывать решение.

Прочитав теоретический материал и поразмыслив над образцами решенных задач, ты сначала решишь устные упражнения и более простые задачи (уровень А), а потом перейдешь к более сложным (уровень Б). Задачи уровня В — для самых смекалистых, тех, кто хочет уметь и знать больше и получать самые высокие оценки. Для некоторых задач этого уровня приведены решения.

Для самостоятельной работы дома рекомендуются задачи, номера которых подчеркнуты (например, <u>344</u>).

Рубрика «Упражнения для повторения» поможет периодически повторять основные виды упражнений.

После изучения параграфа ты сможешь повторить и систематизировать материал, дав ответы на вопросы и решив задачи в конце параграфа.

Свои знания ты сможешь проверить, решив задачи для самопроверки, размещенные в конце каждого параграфа.

Искренне желаем тебе успеха!

§ 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

1. Деление степеней и одночленов

1. Степени с натуральным показателем мы изучали в 7 классе. Напомним, что степенью числа a с натуральным показателем n, большим, чем 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a. Например:

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64.$$

В выражении 4^3 число 4 называется *основанием степени*, число 3 — *показателем степени*, а все выражение — *степенью*. Степенью числа a с показателем 1 называется само число a: $a^1 = a$.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют без изменений, а показатели степеней складывают:

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Это тождество выражает *основное свойство степени*. Кроме того, были доказаны такие свойства степени с натуральным показателем:

$$(a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^n = a^n b^n;$$

если $a \neq 0$ и $m > n$, то

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Остановимся более детально на делении степеней. Напомним правило: *при делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют без изменений, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.*

Например, $5^7 : 5^3 = 5^{7-3} = 5^4$; $x^5 : x = x^5 : x^1 = x^{5-1} = x^4$.

Если бы мы распространили это правило на случай $m = n$, то получили бы:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

С другой стороны, частное равных чисел равно 1: $a^n : a^n = 1$. Итак, чтобы распространить правило деления степеней с натуральными показателями m и n на случай $m = n$, целесообразно считать, что $a^0 = 1$, где $a \neq 0$.

Определение | Степень числа a, не равного 0, с нулевым показателем равна 1.

$$a^0 = 1 \ (a \neq 0).$$

Например, $3^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$. Степень числа 0 с нулевым показателем не определена, то есть запись 0^0 не имеет смысла.

2. Рассмотрим частные случаи деления одночленов, когда результатом деления является тоже одночлен.

- Начнем с примеров.

$8x^7 : 2x^2 = 4x^5$, так как $4x^5 \cdot 2x^2 = 8x^7$. Откуда $8x^7 : 2x^2 = (8 : 2)\cdot(x^7 : x^2)$.

$18a^3b : 6a^2b = 3a$, так как $3a \cdot 6a^2b = 18a^3b$. Откуда $18a^3b : 6a^2b = (18 : 6)\cdot(a^3 : a^2)\cdot(b : b)$.

Итак, чтобы разделить одночлен на одночлен, нужно:

1) разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя;

2) полученное частное умножить на каждую переменную делимого с показателем, который равен разности показателей этой переменной в делимом и делителе.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Выполнить деление:

а) $0{,}3^9 : 0{,}3^6$; **б)** $14a^5b^2 : 2a^4b^2$.

● **а)** $0{,}3^9 : 0{,}3^6 = 0{,}3^{9-6} = 0{,}3^3 = 0{,}027$.

б) $14a^5b^2 : 2a^4b^2 = (14 : 2)\cdot(a^5 : a^4)\cdot(b^2 : b^2) = 7ab^0 = 7a$.

Сокращенно: $14a^5b^2 : 2a^4b^2 = 7a$. ●

Устно

1. Вычислите:

а) $5^3 : 5^2$; **б)** $4^4 : 4^2$; **в)** $2^6 : 2^6$; **г)** $1^{10} : 1^5$.

2. Выполните деление:

а) $b^7 : b$; **б)** $x^8 : x^4$; **в)** $4y^3 : y^3$; **г)** $10a^3 : 5a^2$.

Уровень А

Представьте в виде степени частное:

3. **а)** $a^{11} : a^4$; **б)** $y^{18} : y^6$;

в) $3^{20} : 3^{20}$; **г)** $0{,}2^{15} : 0{,}2^{10}$.

<u>4.</u> **а)** $b^8 : b$; **б)** $a^7 : a^7$; **в)** $7^{11} : 7^{10}$; **г)** $0{,}5^{16} : 0{,}5^{10}$.

Найдите значение выражения:

5. **а)** $2^7 : 2^7 + 2^3 \cdot 2$; **б)** $(-3)^4 : 3^2 + 3^3$; **в)** $0{,}1^3 : (-0{,}1) + 0{,}1^2$.

<u>6.</u> **а)** $(-2)^5 : 2^3 + (-2)^4$; **б)** $(10^2)^2 - 5^4 : 5^4$; **в)** $0{,}2^4 : 0{,}2^2 + 2^4$.

Выполните деление:

7. **а)** $8a^3 : 4a$; **б)** $3a^3b^2 : 3b^2$; **в)** $10a^4c : 5a^2$; **г)** $5a^3 : 2a^2$.

<u>8.</u> **а)** $6b^4 : 3b^2$; **б)** $4x^2y^2 : 2y^2$; **в)** $9x^5y : 3x^4$; **г)** $7x^2y^3 : 2y^2$.

9. **а)** $-5a^4b^2 : 2ab$; **б)** $3{,}4x^4y : 1{,}7xy$; **в)** $-0{,}6x^5 : 0{,}2x^4$; **г)** $3{,}2xy^3 : (-0{,}8xy^2)$.

Уровень Б

Представьте в виде степени:

10. а) $2^{10} : 16$; б) $128 : 2^4$; в) $0{,}1^7 : 0{,}001$; г) $3^8 : 81$.

11. а) $5^8 : 125$; б) $0{,}1^4 : 0{,}01$; в) $3^{10} : 27$; г) $64 : 8$.

Найдите значение выражения:

12. а) $2^6 \cdot 5^6 \cdot (-7)^0$; б) $2^8 : 4^4$; в) $4^4 : 64 : 2$; г) $27^2 : 9^2 \cdot 3$.

13. а) $25^2 \cdot 2^4$; б) $5^6 : 25^3$; в) $25^4 : 5^6 : 25$; г) $9^4 : 3^6 \cdot 3^2$.

Выполните деление:

14. а) $3a^5b^2c : \frac{1}{3}a^4c$; б) $-4x^5y^2 : 3x^5y$; в) $0{,}6x^3yz : 0{,}2x^2$;

г) $-5x^7y^6 : \left(-\frac{2}{3}x^5y\right)$; д) $(5x-3)^8 : (5x-3)^3$; е) $-7a^3b : 2\frac{1}{3}a^2$.

15. а) $8x^4y : (-2x^3)$; б) $9a^3bc^2 : 0{,}5ac^2$;

в) $-6x^7y^6 : (-4xy)$; г) $(x-9)^{11} : (x-9)$.

Уровень В

16. Представьте в виде степени с основанием x:

а) $\left(x^{2m+1} : x^m\right)^n$; б) $\left(x^3\right)^{k+1} : \left(x^2\right)^{k-1}$.

17. Выполните деление:

а) $4\frac{2}{3}a^mb^{n+1} : \left(-\frac{7}{9}a^{m-2}b^{n-3}\right)$; б) $0{,}54a^{m+4}b^n : \frac{9}{11}a^{m-1}b^n$.

Упражнения для повторения

18. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $5a^2 - 3b - a(4a - b)$; б) $(5x + y)(3x - y) + 4y^2$;

в) $(3x - y)(3x + y) + (2x + y)^2$; г) $(a - 1)^2 - (2a - 3)(2a + 3)$.

19. Решите уравнение:

а) $4x - 7(2x - 1) = 5x - 3$; б) $(x - 5)(x + 5) + 3x = x^2 - 5x$;

в) $\frac{x-2}{3} - 1 = 0$; г) $\frac{2x-3}{4} + \frac{x+1}{3} = 1$.

20. Две пчелы, работая с одинаковой производительностью, одновременно начали собирать нектар со 100 цветков. Одна из них прекратила работу через 18 мин. Другой пчеле, чтобы закончить эту работу, нужно еще 20 мин. Сколько времени нужно каждой пчеле, чтобы собрать нектар со 100 цветков?

2. Понятие рационального выражения

1. В 7 классе мы изучали целые выражения. Примерами таких выражений являются:

$$a+b;\ 3a^2;\ 2x(x-y)^2;\ \ \frac{c}{3};\ a:4;\ b;\ 3.$$

Целые выражения могут содержать действия сложения, вычитания, умножения, возведения в натуральную степень. Они могут содержать также действие деления, но только на число, отличное от нуля.

Каждое целое выражение можно записать в виде многочлена. Например,

$$2x(x-y)^2 = 2x(x^2-2xy+y^2) = 2x^3-4x^2y+2xy^2.$$

Выражения

$$\frac{5y}{y+1}+1;\quad \frac{17ab}{a^2-b^2};\quad 3a:b;\quad (x-y)^2-\frac{x}{x+y}$$

отличаются от целых выражений тем, что содержат действие деления на выражение с переменными. Такие выражения называют *дробными выражениями.*

Целые и дробные выражения называют *рациональными выражениями.*

$\frac{b}{4}+a^3$ целое выражение	$\frac{4}{b}+a^3$ дробное выражение

рациональные выражения

Рациональное выражение вида $\frac{A}{B}$, где A и B — некоторые числовые или выражения с переменными, называют *дробью.* При этом выражение A называют числителем дроби, а выражение B — знаменателем. Например, $\frac{5ab}{7}$, $\frac{2,3}{5x}$, $\frac{a(b-1)}{a+b}$, $\frac{\frac{1}{2}x}{x+1}$ — дроби.

Дробь $\frac{A}{B}$, в которой A и B — многочлены, называют *рациональной дробью.* Примерами рациональных дробей являются выражения: $\frac{4}{x+3}$; $\frac{a+b}{a-b}$; $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$; $\frac{x}{a}$; $\frac{b}{3}$.

2. Рассмотрим дробное выражение $\frac{5}{a-2}$. При $a=3$ значения этого выражения равно $\frac{5}{3-2}=\frac{5}{1}=5$; при $a=-6$ значения выражения равно $\frac{5}{-6-2}=-\frac{5}{8}$.

Вообще, значение этого выражения можно найти для любого значения a, кроме $a = 2$. Если $a = 2$, то знаменатель $a - 2$ равен нулю, а на нуль делить нельзя. Говорят, что при $a \neq 2$ выражение $\frac{5}{a-2}$ имеет смысл, а при $a = 2$ оно не имеет смысла.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями* переменных. Так, для выражения $\frac{5}{a-2}$ допустимыми значениями переменной являются все значения a, кроме $a = 2$.

3. $x^2 + x(1 - x)$ — целое выражение. Такое выражение имеет смысл при всех значениях переменной x. Преобразуем это выражение: $x^2 + x(1 - x) = x^2 + x - x^2 = x$. При всех значениях переменной x соответствующие значения выражений $x^2 + x(1 - x)$ и x равны между собой. Такие целые выражения мы называли тождественно равными.

А теперь рассмотрим дробное выражение $\frac{x^2 + x(1-x)}{x-1}$. Оно не имеет смысла при $x = 1$. Упростим данное выражение, заменив числитель тождественно равным ему выражением, получим: $\frac{x^2 + x(1-x)}{x-1} = \frac{x}{x-1}$. Допустимыми значениями выражений $\frac{x^2 + x(1-x)}{x-1}$ и $\frac{x}{x-1}$ являются все значения x, кроме $x = 1$. Эти выражения имеют одинаковые знаменатели и тождественно равные числители. Потому при каждом допустимом значении x соответствующие значения выражений равны между собой. Такие дробные выражения называют *тождественно равными*.

Определение | Два выражения называются тождественно равными, если при всех допустимых для них значениях переменных их соответствующие значения равны.

Если два тождественно равных выражения $\frac{x^2 + x(1-x)}{x-1}$ и $\frac{x}{x-1}$ соединить знаком «=», то получим равенство $\frac{x^2 + x(1-x)}{x-1} = \frac{x}{x-1}$, которое является верным при любом допустимом значении x. Такое равенство называют *тождеством*.

Определение | Равенство, являющегося верным при всех допустимых значениях переменных, входящих в него, называется тождеством.

Например, $\frac{2ab\cdot a}{3a\cdot 3b}=\frac{2a^2b}{9ab}$, $\frac{xy}{x^2-y^2}=\frac{xy}{(x-y)(x+y)}$ — тождества.

*Замена одного выражения тождественно равным ему выражением называется **тождественным преобразованием выражения**.*

Примеры решения упражнений

Пример 1. Найти значение выражения $x+\frac{28}{x+3}$ при $x=4$; $x=\frac{1}{3}$.

● Если $x=4$, то $x+\frac{28}{x+3}=4+\frac{28}{4+3}=4+4=8$.

Если $x=\frac{1}{3}$, то $x+\frac{28}{x+3}=\frac{1}{3}+\frac{28}{\frac{1}{3}+3}=\frac{1}{3}+\frac{28}{\frac{10}{3}}=\frac{1}{3}+28\cdot\frac{3}{10}=$

$$=\frac{1}{3}+\frac{42}{5}=\frac{1}{3}+8\frac{2}{5}=8\frac{11}{15}.$$ ●

Пример 2. Найти значение выражения $\frac{(a-b)(a+b)+b^2}{a+b}$ **при:**

а) $a=8$; $b=32$; **б)** $a=0{,}6$; $b=-0{,}6$.

● Упростим данное выражение: $\frac{(a-b)(a+b)+b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2+b^2}{a+b}=\frac{a^2}{a+b}$.

а) Если $a=8$, $b=32$, то $\frac{a^2}{a+b}=\frac{8^2}{8+32}=\frac{64}{40}=1{,}6$.

б) Если $a=0{,}6$; $b=-0{,}6$, то $\frac{a^2}{a+b}=\frac{0{,}6^2}{0{,}6-0{,}6}=\frac{0{,}36}{0}$ — не имеет смысла. При данных значениях переменных выражение не имеет смысла. ●

Пример 3. Указать допустимые значения переменной в выражении:

а) $y+\frac{y+4}{y-3}$; **б)** $\frac{2a-1}{a^2+a}$; **в)** $\frac{x+4}{x^2+8}$.

● **а)** Допустимыми являются все значения y, кроме $y=3$.

б) Найдем значения a, при которых знаменатель дроби равен нулю: $a^2+a=0$; $a(a+1)=0$; $a=0$ или $a+1=0$; $a=0$ или $a=-1$.

Допустимыми являются все значения a, кроме $a = 0$ и $a = -1$.

в) При каждом значении x знаменатель $x^2 + 8$ не равен нулю, поэтому допустимыми являются все значения x. ●

Устно

21. Какие из выражений являются целыми; дробными? Какие из выражений являются дробями; рациональными дробями?

а) $\frac{a+b}{a-b}$; б) $\frac{x}{3} + x^2$; в) $\frac{4}{x} - x^2$;

г) $\left(\frac{1}{2} + b^2\right) \cdot a$; д) $\frac{5}{x(y+1)}$; е) $\frac{xy+x}{5}$.

22. При каких значениях переменной выражение не имеет смысла? Назовите допустимые значения переменной в выражении:

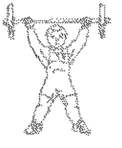
а) $\frac{8}{c}$; б) $\frac{9-x}{x-1}$; в) $\frac{b+4}{b(b-2)}$.

23. Найдите значение выражения $\frac{10}{a}$ при: $a = 10$; $a = -1$; $a = 2$.

24. Какие из равенств являются тождествами:

а) $\frac{a+3a}{a-1} = \frac{4a}{a-1}$; б) $\frac{a \cdot 3a}{a-1} = \frac{3a}{a-1}$; в) $\frac{b}{a(a+b)} = \frac{b}{a^2+ab}$?

Уровень А



Найдите значение выражения:

25. а) $\frac{-x^2}{x+5}$ при $x = 0$; $x = 5$; $x = -3$;

б) $\frac{2ab}{a-b}$ при $a = 4$, $b = 2$; $a = -4$, $b = 6$.

26. а) $\frac{(-y)^2}{y-4}$ при $y = 0$; $y = 6$; $y = -1$; б) $\frac{2b+c}{2b-c}$ при $b = 3$, $c = 4$.

Заполните таблицу:

27.

x	-2	-1	0	1	$1{,}5$	2
$\frac{x}{x+1}$						

28.

a	-4	-1	0	1	2	$2{,}5$
$\frac{3}{a-2}$						

Укажите допустимые значения переменной в выражении:

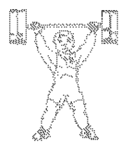
29. а) $\frac{6x^2+1}{x-2}$; б) $\frac{6a+1}{a(a-3)}$; в) $\frac{b}{b+1}+\frac{1}{b}$; г) $\frac{11x}{x^2+2}$.

30. а) $\frac{1-y^3}{y+3}$; б) $\frac{5x+1}{2x}-\frac{1}{x-2}$; в) $\frac{m}{(m-1)(m+1)}$; г) $\frac{a+1}{a^2+1}$.

31. Автомобиль проехал 195 км за t ч. Запишите в виде выражения скорость автомобиля. Найдите значение этого выражения при $t = 3$.

32. Рабочий изготовил 45 деталей за k ч. Запишите в виде выражения количество деталей, изготовленных рабочим за 1 ч. Найдите значение этого выражения при $k = 3$.

33. Масса малой детали a г, а большой — b г. В комплект входят малые детали общей массой 150 г и большие детали общей массой 250 г. Запишите в виде выражения количество всех деталей одного комплекта. Найдите значение этого выражения при $a = 10$, $b = 5$.



Уровень Б

При каких значениях переменной не имеет смысла выражение:

34. а) $\frac{4x+1}{x^2-4}$; б) $\frac{8a}{a^2-5a}$; в) $\frac{y-5}{(y-6)^2}$?

35. а) $\frac{3x}{x^2-7x}$; б) $\frac{2z+7}{9-z^2}$; в) $\frac{1-2b}{b(b^2+2)}$?

Найдите допустимые значения переменной в выражении:

36. а) $\frac{7b}{4b^2-1}+b$; б) $\frac{3k}{4-(k+2)^2}$; в) $\frac{6m}{m^2+2m}+\frac{m}{m-1}$.

37. а) $\frac{5c}{4-9c^2}$; б) $\frac{3n-2}{(9+n)^2-1}$; в) $\frac{5a}{a^2-4}+\frac{a+1}{a}$.

Найдите значение выражения:

38. $\dfrac{2a-3}{3a+1}$ при $a=-0{,}2$; $a=\dfrac{2}{3}$; $a=3\dfrac{1}{6}$.

39. $\dfrac{2-x}{5x-3}$ при $x=0{,}7$; $x=\dfrac{3}{7}$; $x=1\dfrac{1}{5}$.

40. Найдите значение выражения $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{y}$ при:

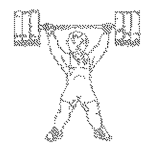
а) $x=44$; $y=4$; б) $x=46$; $y=46$; в) $x=1{,}25$; $y=0{,}25$.

41. Найдите значение выражения $\dfrac{m(1-n)+n(1+m)}{4n}$ при:

а) $m=67$; $n=-67$; б) $m=16{,}75$; $n=0{,}25$.

42. Катер проплыл 25 км по течению реки и 20 км против течения. Найдите время движения катера, если его скорость в стоячей воде v км/ч, а скорость течения реки u км/ч.

43. Первый рабочий изготовил 48 деталей за n ч, а второй — 64 детали за m ч. Сколько деталей изготавливали за 1 ч оба рабочих вместе?



Уровень B

44. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\dfrac{11x-1}{|x|-3}$; б) $\dfrac{3y}{|y|-y}$;

в) $\dfrac{m}{m^2-2|m|}$; г) $\dfrac{a+3}{|a-1|+1}$.

45. Найдите значение выражения $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ при $n=10$.

46. Поезд за определенное время должен был преодолеть расстояние 250 км, двигаясь со скоростью a км/ч. Но через 2 ч после начала движения он был задержан и, чтобы прибыть к месту назначения вовремя, увеличил скорость на 25 км/ч. На какое время был задержан поезд?

47. Разложите на множители:

а) $ab^2 - ac^2$; б) $xy + 8x + 9y + 72$;

в) $a^2 - 4b^2 + a + 2b$; г) $x^3 + 8$;

д) $n^2 - m^4$; е) $a^2 + ac + c^2 + a^3 - c^3$.

48. Сравните дроби: $\frac{7}{9}$ и $\frac{20}{27}$; $\frac{11}{18}$ и $\frac{17}{24}$; $\frac{7}{15}$ и $\frac{9}{25}$.

49. Сократите дроби: $\frac{18}{48}$; $\frac{56}{98}$; $\frac{96}{123}$; $\frac{175}{325}$; $\frac{77}{121}$.

50. *Задача из «Арифметики» Л. П. Магницкого.* Хозяин нанял рабочего на год и обещал дать ему 12 рублей и кафтан. Но рабочий, проработав только 7 месяцев, захотел уйти. При расчете он получил кафтан и 5 рублей. Сколько стоит кафтан?

3. Основное свойство дроби

1. Напомним основное свойство обыкновенных дробей: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получим дробь, равную данной. Итак, при любых натуральных значениях a, b и c являются верными равенства $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ и $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Аналогичное свойство справедливо для любых дробей. Докажем сначала, что когда числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$, где $b \neq 0$, умножить на одно и то же число $c \neq 0$, то получим дробь, равную данной, то есть **для любых значений a, b и c, где $b \neq 0$ и $c \neq 0$, выполняется равенство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.**

Дробь $\frac{a}{b}$ будем рассматривать как частное. Пусть $\frac{a}{b} = a : b = m$. Тогда по определению частного $a = bm$. Умножив обе части этого равенства на c, получим: $ac = (bm)c$. Используя свойства умножения рациональных чисел, выражение $(bm)c$ можно переписать так: $(bm)c = b(mc) = b(cm) = (bc)m$. Из равенства $ac = (bc)m$ по определению частного имеем:

$$m = ac : bc = \frac{ac}{bc}, \text{ то есть } \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}. \bullet$$

Равенство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ является тождеством и называется *основным свойством дроби.*

2. Поменяем в этом тождестве местами правую и левую части, получим:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

С помощью полученного тождества дробь $\frac{ac}{bc}$ можно заменить дробью $\frac{a}{b}$, то есть сократить дробь $\frac{ac}{bc}$ на общий множитель c числителя и знаменателя.

3. Если нужно изменить знак числителя или знаменателя дроби, то используют такие тождества:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \qquad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Если изменить знак в числителе или в знаменателе и знак перед дробью, то получим дробь, тождественно равную данной.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Выделить общий множитель числителя и знаменателя дроби и сократить дробь: а) $\frac{12a}{8ab}$; б) $\frac{-18xy^3}{-6x^2y^2}$.

● а) $\frac{12a}{8ab} = \frac{4a \cdot 3}{4a \cdot 2b} = \frac{3}{2b}$. б) $\frac{-18xy^3}{-6x^2y^2} = \frac{-6xy^2 \cdot 3y}{-6xy^2 \cdot x} = \frac{3y}{x}$. ●

Пример 2. Разложить на множители числитель и знаменатель дроби и сократить дробь: а) $\frac{10b-5a}{a^2-4b^2}$; б) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3}$.

● а) $\frac{10b-5a}{a^2-4b^2} = \frac{-5(a-2b)}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{-5}{a+2b} = -\frac{5}{a+2b}$.

б) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3} = \frac{x^2+xy+y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{1}{x-y}$. ●

Пример 3. Привести дробь $\frac{3a}{7b}$ к знаменателю $42a^2b$.

● Поскольку $42a^2b = 7b \cdot 6a^2$, то, умножив числитель и знаменатель данной дроби на $6a^2$, получим: $\frac{3a}{7b} = \frac{3a \cdot 6a^2}{7b \cdot 6a^2} = \frac{18a^3}{42a^2b}$. ●

Устно

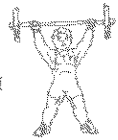
51. Какие из дробей $\frac{4}{2m}$, $\frac{6}{12m}$, $\frac{2m}{m^2}$ тождественно равны дроби $\frac{2}{m}$?

52. Сократите дробь:

а) $\frac{5x}{15y}$; б) $\frac{ab}{4b}$; в) $\frac{m(n-2)}{n(n-2)}$; г) $\frac{18a^2}{a^3}$.

53. Приведите дробь:

а) $\frac{11}{b}$ к знаменателю b^2; б) $\frac{3x}{2y}$ к знаменателю $4xy$.



Уровень А

54. Выделите общий множитель числителя и знаменателя дроби и сократите дробь:

а) $\frac{4a}{6a}$; б) $\frac{9ab}{6b}$; в) $\frac{-10x^2y}{15xy^2}$.

Сократите дробь:

55. а) $\frac{28x^2y^2}{35x^2y^3}$; б) $\frac{24b^2c^2}{36bc}$; в) $\frac{-15mn^2}{40m^2n^2}$; г) $\frac{8k^2m^4}{-12k^4m^3}$.

<u>56.</u> а) $\frac{18c^2n^2}{12n^3}$; б) $\frac{36xy^2}{28xy}$; в) $\frac{40ab^2}{-24a^2b^3}$; г) $\frac{-14ac^3}{-42bc^3}$.

57. а) $\frac{a(m-n)}{m-n}$; б) $\frac{b(c+d)}{3b(c+d)}$; в) $\frac{5k}{15k+20}$; г) $\frac{m^2-mn}{mn}$.

<u>58.</u> а) $\frac{ab(a+b)}{c(a+b)}$; б) $\frac{m(x-2y)}{m(x-y)}$; в) $\frac{3x-9}{x-3}$; г) $\frac{7xy}{xy-5y}$.

59. Представьте частное в виде дроби и сократите дробь:

а) $10a^2b^2 : (5a^3b)$; б) $24m^2n : (-6mn)$; в) $(-28ab^3) : (-21b^4)$.

Найдите значение выражения:

60. а) $\frac{20a^3b}{4a^2b^2}$ при $a = 48; b = 16;$ $a = -4{,}2; b = 11.$

б) $15x^2y^3 : (30xy^2)$ при $x = 300;$ $y = 0{,}06.$

61. $\frac{18bc^3}{2b^2c^2}$ при $b = 3; c = 4{,}5;$ $b = -1{,}4, c = 2{,}8.$

Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите ее:

62. а) $\frac{6a-3b}{8a-4b}$; б) $\frac{12a^2-16a}{3a^2-4a}$; в) $\frac{a^2-b^2}{a-b}$; г) $\frac{xy+x^2y}{xy-xy^2}$;

д) $\frac{a^2-9}{7a+21}$; е) $\frac{7x^2-28}{10x-20}$; ж) $\frac{4y-8}{y^2-4y+4}$; з) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$.

63. а) $\frac{9x-6y}{15x-10y}$; б) $\frac{c^2+2c}{c^2-2c}$; в) $\frac{m^2-n^2}{n+m}$; г) $\frac{ab+a^2}{ab+b^2}$.

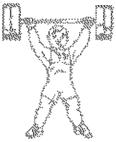
д) $\frac{x^2-y^2}{5x+5y}$; е) $\frac{10a-10b}{ab-b^2}$; ж) $\frac{3m-6}{m^2-4m+4}$; з) $\frac{a^2-25}{a^2-10a+25}$.

64. Приведите дробь:

а) $\frac{k}{4p}$ к знаменателю: $12p;$ $4pq;$ $16p^2;$

б) $\frac{5}{2a^2}$ к знаменателю: $4a^4;$ $10a^2b.$

65. Приведите дробь $\frac{4}{3xy}$ к знаменателю: $15xy;$ $3xy^2;$ $9x^3y.$



Уровень Б

Сократите дробь:

66. а) $\frac{6ab-9b^2}{4a^2-9b^2}$; б) $\frac{4c^2-25x^2}{4c^2+20cx+25x^2}$; в) $\frac{2x^3y-8xy^3}{2xy^2-x^2y}$.

67. а) $\frac{x^3+8}{x+2}$; б) $\frac{z^2+3z+9}{27-z^3}$; в) $\frac{y^6-1}{1-y^2}$.

68. а) $\frac{ax+cx-ay-cy}{cx-cy}$; б) $\frac{b^2+2ab+a^2}{a^2+ab-ax-bx}$; в) $\frac{8a+4b}{2ab+b^2-2ad-bd}$.

69. а) $\frac{14b-63c}{4b^2-81c^2}$; б) $\frac{3kn-12n}{k^2-8k+16}$; в) $\frac{6mn+2m^2}{9mn^2-m^3}$;

г) $\dfrac{15-5c}{c^3-27}$; д) $\dfrac{x^2-y^2}{xy-x+y-y^2}$; е) $\dfrac{a^2+ac+bc+ab}{a^2b+abc}$.

Найдите значение выражения:

70. $\dfrac{3a^2+9a}{a^2-9}$ при $a=4$; $a=-\dfrac{1}{3}$.

71. $\dfrac{x^2-4}{5x+10}$ при $x=-1$; $x=\dfrac{2}{9}$.

72. Приведите дробь:

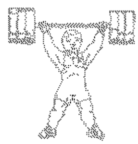
а) $\dfrac{7}{x+y}$ к знаменателю x^2+xy; б) $\dfrac{2}{x+y}$ к знаменателю $x^2+2xy+y^2$;

в) $\dfrac{c}{a-b}$ к знаменателю a^2-b^2; г) $\dfrac{n}{m-n}$ к знаменателю m^3-n^3.

73. Приведите дробь:

а) $\dfrac{2a}{x+y}$ к знаменателю x^2-y^2; б) $\dfrac{1}{a+c}$ к знаменателю a^3+c^3.

Уровень В



74. Сократите дробь (n — натуральное число):

а) $\dfrac{13824x^{n+2}}{15552x^n}$; б) $\dfrac{2045x^n}{1755x^{2n}}$;

в) $\dfrac{x^2+3xy+2y^2}{x^2-xy-2y^2}$; г) $\dfrac{y^3+2y^2-y-2}{y^2+y-2}$.

75. Докажите, что дробь является несократимой при любом натуральном значении n:

а) $\dfrac{n+2}{n+1}$; б) $\dfrac{2n+5}{n+2}$; в) $\dfrac{2n+3}{5n+7}$.

б) *Решение.* Предположим, что существует натуральное значение n, при котором дробь $\dfrac{2n+5}{n+2}$ является сократимой. Пусть ее можно сократить на натуральное число d, где $d \ge 2$. Выделим в числителе дроби выражение, которое стоит в знаменателе: $\dfrac{2n+5}{n+2} = \dfrac{2(n+2)+1}{n+2}$. Поскольку знаменатель $n+2$ и числитель $2(n+2)+1$ делятся на d, то 1 должна делиться на d. Получили противоречие, поскольку 1 не делится (нацело) на натуральное число d, где $d \ge 2$. Итак, не существует натурального значения n, при котором дробь $\dfrac{2n+5}{n+2}$ была бы сократимой.

76. Докажите тождество:

а) $\frac{ab+3a+5b+15}{ab+3a+3b+b^2}=\frac{a^2+10a+25}{a^2+ab+5a+5b}$;

б) $\frac{2xy+3y+2x+3}{2xz+3z+4x+6}=\frac{3xy+2y+3x+2}{3xz+2z+6x+4}$.

Упражнения для повторения

77. Решите уравнение:

а) $2(x+3)-5=7$; б) $2{,}5y-0{,}44=0{,}4(y+1)$;

в) $(x-2)(x+3)-(x+2)^2=2$; г) $\frac{5}{7}x-\frac{1}{9}=\frac{3}{7}x+\frac{5}{9}$.

78. Один трактор может вспахать поле за 10 ч, а другой — за 15 ч. За какое время вспашут поле оба трактора, работая вместе?

79. В магазин привезли 5 ящиков яблок и 6 ящиков груш общей массой 120 кг. Ящик груш на 2 кг легче ящика яблок. Найдите массу ящика яблок и массу ящика груш.

80. Есть два сплава меди и цинка. В один сплав медь и цинк входят в отношении 5 : 2, а во второй — в отношении 3 : 4. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 28 кг нового сплава с одинаковым содержанием меди и цинка?

4. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

1. Дроби с одинаковыми знаменателями складывают так же, как и обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями, то есть складывают их числители, а знаменатель оставляют без изменений:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}. \qquad (1)$$

Докажем, что равенство (1) является тождеством, то есть что оно верно при любых значениях a, b и c, где $b \neq 0$.

Дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ будем рассматривать как частные. Пусть $\frac{a}{b}=a:b=m$ и $\frac{c}{b}=c:b=n$. Тогда по определению частного $a=bm$, $c=bn$. Найдем сумму $a+c$: $a+c=bm+bn=b(m+n)$. Из равенства $a+c=b(m+n)$ по определению частного имеем: $m+n=(a+c):b=\frac{a+c}{b}$, то есть $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$.

Из тождества (1) следует *правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями*: ***чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же.***

2. Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями выполняют на основании тождества

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}, \qquad (2)$$

доказательство которого аналогично доказательству тождества (1).

Из тождества (2) следует *правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями*: ***чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого, а знаменатель оставить тем же.***

3. В тождестве (1) поменяем местами левую и правую части:

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}. \qquad (3)$$

Из равенства (3) следует: чтобы сумму чисел разделить на некоторое число, можно каждое слагаемое разделить на это число и полученные частные сложить.

Поменяв местами левую и правую части в тождестве (2), получим:

$$\frac{a-c}{b}=\frac{a}{b}-\frac{c}{b}. \qquad (4)$$

Из равенства (4) следует: чтобы разность чисел разделить на некоторое число, можно разделить на это число уменьшаемое и вычитаемое и из первого частного вычесть второе.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Сложить дроби:

а) $\frac{7}{a}+\frac{5}{a}$; **б)** $\frac{2a+1}{ab}+\frac{b-1}{ab}+\frac{3}{ab}$; **в)** $\frac{5x-2y}{2x-y}+\frac{x-y}{2x-y}$.

● **а)** $\frac{7}{a}+\frac{5}{a}=\frac{7+5}{a}=\frac{12}{a}$.

б) $\frac{2a+1}{ab}+\frac{b-1}{ab}+\frac{3}{ab}=\frac{2a+1+b-1+3}{ab}=\frac{2a+b+3}{ab}$.

в) $\frac{5x-2y}{2x-y}+\frac{x-y}{2x-y}=\frac{5x-2y+x-y}{2x-y}=\frac{6x-3y}{2x-y}=\frac{3(2x-y)}{2x-y}=3$. ●

Пример 2. Вычесть дроби:

а) $\frac{4n}{2n^2-3n}-\frac{2n+3}{2n^2-3n}$; **б)** $\frac{2a}{x-y}-\frac{3a}{y-x}$.

● а) $\frac{4n}{2n^2-3n}-\frac{2n+3}{2n^2-3n}=\frac{4n-(2n+3)}{2n^2-3n}=\frac{2n-3}{n(2n-3)}=\frac{1}{n}$.

б) В соответствии с тождеством $-\frac{a}{b}=\frac{a}{-b}$ имеем: $\frac{3a}{y-x}=\frac{3a}{-(y-x)}=\frac{3a}{x-y}$.

Поэтому: $\frac{2a}{x-y}-\frac{3a}{y-x}=\frac{2a}{x-y}+\frac{3a}{x-y}=\frac{2a+3a}{x-y}=\frac{5a}{x-y}$. ●

Пример 3. Записать дробь в виде суммы или разности целого числа и дроби:

а) $\frac{3a+5}{a}$; б) $\frac{2a+2b+1}{a+b}$; в) $\frac{3n+1}{n+1}$.

● а) $\frac{3a+5}{a}=\frac{3a}{a}+\frac{5}{a}=3+\frac{5}{a}$.

б) $\frac{2a+2b+1}{a+b}=\frac{2(a+b)}{a+b}+\frac{1}{a+b}=2+\frac{1}{a+b}$.

в) $\frac{3n+1}{n+1}=\frac{3n+3-2}{n+1}=\frac{3(n+1)-2}{n+1}=\frac{3(n+1)}{n+1}-\frac{2}{n+1}=3-\frac{2}{n+1}$. ●

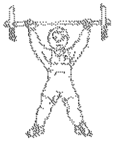
Устно

81. Найдите сумму дробей:

а) $\frac{a}{4}+\frac{b}{4}$; б) $\frac{9b}{11}+\frac{3b}{11}$; в) $\frac{3a}{x}+\frac{a}{x}$; г) $\frac{x+a}{d}+\frac{a}{d}$.

82. Найдите разность дробей:

а) $\frac{x}{7}-\frac{y}{7}$; б) $\frac{8n}{9}-\frac{3n}{9}$; в) $\frac{a+y}{x}-\frac{y}{x}$; г) $\frac{x+2y}{c}-\frac{x}{c}$.



Уровень А

Выполните сложение (вычитание) дробей:

83. а) $\frac{2b}{a}+\frac{3b}{a}$; б) $\frac{5n+3}{3n+1}+\frac{7n-1}{3n+1}$; в) $\frac{2a-3}{xy}+\frac{4a}{xy}+\frac{3}{xy}$;

г) $\frac{6a}{5p}-\frac{3a}{5p}$; д) $\frac{3+a}{9a}-\frac{3-a}{9a}$; е) $\frac{9}{7-b}-\frac{b+2}{7-b}$.

84. а) $\frac{3n+5}{5n}+\frac{2n-7}{5n}$; б) $\frac{4a-1}{2a}-\frac{3+3a}{2a}$; в) $\frac{7b-3}{4b-1}-\frac{3b-2}{4b-1}$.

Упростите выражение:

85. а) $\frac{7x-2}{4x+1}+\frac{5x+2}{4x+1}$; б) $\frac{a-3b}{a+b}-\frac{3a-b}{a+b}$;

в) $\frac{a-3}{3a-1}+\frac{5a+1}{3a-1}$; г) $\frac{6p}{p-2}-\frac{12}{p-2}$;

д) $\frac{5+a}{a-b}+\frac{5+b}{b-a}$; е) $\frac{x+4}{x-2y}-\frac{3x-4}{2y-x}$.

86. а) $\frac{6m-1}{m-1}-\frac{m+4}{m-1}$; б) $\frac{x+3y}{x+y}+\frac{7x+5y}{x+y}$;

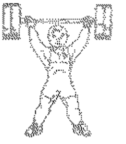
в) $\frac{8m}{m-n}+\frac{8n}{n-m}$; г) $\frac{7c-9}{c-3}-\frac{c-15}{3-c}$.

Найдите значение выражения:

87. а) $\frac{b-3}{4b}+\frac{3b-1}{4b}$ при $b=-3$; б) $\frac{7a^2-1}{3a}-\frac{a^2-1}{3a}$ при $a=0{,}28$.

88. а) $\frac{a-3}{a^2}+\frac{3+a}{a^2}$ при $a=5$; б) $\frac{4c+5}{2c}-\frac{2c-1}{2c}$ при $c=0{,}4$.

Уровень Б



Упростите выражение:

89. а) $\frac{c^2-2c}{c-1}-\frac{1}{1-c}$; б) $\frac{a^5}{a-1}-\frac{a^3}{a-1}$;

в) $\frac{b^2+9}{b^2-9}+\frac{6b}{b^2-9}$; г) $\frac{12a^4}{3a^2b-b^4}-\frac{4a^2b^3}{3a^2b-b^4}$.

90. а) $\frac{5y^2-14}{y-2}-\frac{y^2-10}{2-y}$; б) $\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}-\frac{2xy}{(x-y)^3}$;

в) $\frac{a^2+1}{a^3-1}+\frac{a}{a^3-1}$; г) $\frac{18a^2}{3a-b^2}-\frac{2b^4}{3a-b^2}$.

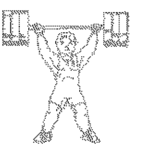
91. а) $\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}$; б) $\frac{x^3}{(x-2)^2}-\frac{4x^2}{(x-2)^2}+\frac{4x}{(x-2)^2}$.

Представьте дробь в виде суммы или разности целого числа и дроби:

92. а) $\frac{3+8x}{2x}$; б) $\frac{5m-5n+2}{m-n}$; в) $\frac{4y+5}{y+2}$; г) $\frac{2x-y}{x+y}$.

93. а) $\frac{14b+5}{7}$; б) $\frac{3b+3c-a}{b+c}$; в) $\frac{6c+1}{2c+1}$; г) $\frac{4x-3y}{x-y}$.

Уровень В



94. Упростите выражение:

а) $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{x^4}{x^2+x+1}$; б) $\frac{a^4+x^4}{a^3+x^3}+\frac{a^2x^2}{a^3+x^3}$.

Указание. а) Многочлен $x^4 + x^2 + 1$ можно разложить на множители, записав его в виде $(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$.

Упражнения для повторения

95. Вычислите:

а) $\frac{5}{6} + \frac{3}{8}$; б) $\frac{3}{14} - \frac{4}{21}$; в) $\frac{2}{9} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12}$;

г) $\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{14} - \frac{1}{6}$; д) $3\frac{1}{3} : \frac{5}{9} - \frac{2}{15}$; е) $7\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{11} - 4\frac{5}{6}$.

96. Представьте одночлен $24a^7b^8$ в виде произведения двух одночленов, одним из которых является:

а) $6a^4b^7$; б) $4a^2b^5$; в) $24a^7b$; г) $8ab^7$.

97. Из двух городов, расстояние между которыми 80 км, одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и автомобиль и встретились через 40 мин. Найдите скорость автомобиля, если она в $1\frac{2}{3}$ раза больше скорости мотоциклиста.

98. Через первую трубу бассейн можно наполнить за 18 ч, через вторую — за 15 ч, а через третью трубу из полного бассейна можно выпустить воду за 30 ч. За какое время наполнится бассейн, если открыть все три трубы?

Сложение и вычитания дробей с разными знаменателями можно привести к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.

1. Рассмотрим разные случаи приведения дробей к одинаковому знаменателю.

а) Пусть имеются дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ с разными знаменателями. Эти дроби можно привести к одному и тому же знаменателю bd (говорят: привести дроби к *общему знаменателю*). Для этого числитель и знаменатель первой дроби умножим на d, а второй дроби — на b. Получим:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}; \qquad \frac{c}{d} = \frac{cb}{bd}.$$

б) Приведем к общему знаменателю дроби $\frac{5}{8a^3b}$ и $\frac{7}{12a^2c^2}$.

Общий знаменатель этих дробей будем искать в виде одночлена. За коэффициент этого одночлена примем наименьшее общее кратное коэффициентов знаменателей данных дробей, то есть 24, а каждую переменную возьмем с наибольшим показателем, с которым она входит в знаменатели дробей, то есть возьмем a^3, b и c^2. Тогда общим знаменателем будет $24a^3bc^2$. Дополнительным множителем для первой дроби является $3c^2$, так как $24a^3bc^2 = 8a^3b \cdot 3c^2$; для второй — $2ab$, так как $24a^3bc^2 = 12a^2c^2 \cdot 2ab$. Получим:

$$\frac{5}{8a^3b} = \frac{5 \cdot 3c^2}{24a^3bc^2} = \frac{15c^2}{24a^3bc^2}; \qquad \frac{7}{12a^2c^2} = \frac{7 \cdot 2ab}{24a^3bc^2} = \frac{14ab}{24a^3bc^2}.$$

Итак, чтобы привести к более простому общему знаменателю дроби, знаменателями которых являются одночлены, нужно образовать произведение наименьшего общего кратного коэффициентов знаменателей и степеней переменных с наибольшим показателем, с которым они входят в знаменатели дробей. Чтобы найти дополнительный множитель для дроби, нужно записать общий знаменатель в виде произведения двух одночленов, одним из которых является знаменатель данной дроби. Тогда второй одночлен будет дополнительным множителем.

в) Приведем к общему знаменателю дроби $\frac{3}{a^2 - ab}$ и $\frac{2}{a^2 + ab}$.

Разложим на множители каждый из знаменателей:

$$\frac{3}{a^2 - ab} = \frac{3}{a(a-b)}; \quad \frac{2}{a^2 + ab} = \frac{2}{a(a+b)}.$$

Общим знаменателем дробей является произведение $a(a-b)(a+b) = a(a^2 - b^2)$. Дополнительным множителем для первой дроби является $a + b$, для второй — $a - b$. Получим:

$$\frac{3}{a^2 - ab} = \frac{3(a+b)}{a(a^2 - b^2)}; \qquad \frac{2}{a^2 + ab} = \frac{2(a-b)}{a(a^2 - b^2)}.$$

2. Зная, как привести дроби к одинаковому знаменателю и как сложить дроби с одинаковыми знаменателями, сложим дроби с разными знаменателями:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Итак,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Вычитают дроби с разными знаменателями аналогично, а именно:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Пример 1. Привести к общему знаменателю дроби

$$\frac{3}{m^2-n^2} \text{ и } \frac{9}{n-m}.$$

• $\frac{3}{m^2-n^2}=\frac{3}{(m-n)(m+n)}$; $\frac{9}{n-m}=-\frac{9}{m-n}$. Общим знаменателем дробей является произведение $(m-n)(m+n)$. Дополнительным множителем для первой дроби является 1, для второй — $m+n$. Поэтому первую дробь оставляем без изменения, а вторая: $\frac{9}{n-m}=-\frac{9(m+n)}{(m-n)(m+n)}=-\frac{9(m+n)}{m^2-n^2}$. •

Пример 2. Выполнить сложение (вычитание) дробей:

а) $\frac{5b}{ac}+\frac{4c}{b}$; **б)** $\frac{4}{9x^2y^2}+\frac{7}{12xy^3}$;

в) $\frac{2}{xy-y^2}-\frac{2}{x^2-xy}$; **г)** $m-3+\frac{2+m^2}{1-m}$.

• **а)** В данном случае общим знаменателем является произведение знаменателей данных дробей. Дополнительный множитель для первой дроби — b, а для второй — ac.

$$\frac{\overset{\frown b}{5b}}{ac}+\frac{\overset{\frown ac}{4c}}{b}=\frac{5b^2+4ac^2}{abc}.$$

б) Общим знаменателем дробей является $36x^2y^3$. Дополнительным множителем для первой дроби будет $4y$, для второй — $3x$.

$$\frac{\overset{\frown 4y}{4}}{9x^2y^2}+\frac{\overset{\frown 3x}{7}}{12xy^3}=\frac{16y+21x}{36x^2y^3}.$$

в) Разложив на множители каждый из знаменателей данных дробей, получим:

$$\frac{2}{xy-y^2}-\frac{2}{x^2-xy}=\frac{\overset{\frown x}{2}}{y(x-y)}-\frac{\overset{\frown y}{2}}{x(x-y)}=\frac{2x-2y}{xy(x-y)}=\frac{2(x-y)}{xy(x-y)}=\frac{2}{xy}.$$

г) Записав выражение $m-3$ в виде дроби со знаменателем 1, получим:

$$m-3+\frac{2+m^2}{1-m}=\frac{m-3}{1}^{\backslash 1-m}+\frac{2+m^2}{1-m}=\frac{(m-3)(1-m)+2+m^2}{1-m}=$$

$$=\frac{m-m^2-3+3m+2+m^2}{1-m}=\frac{4m-1}{1-m}. \bullet$$

Пример 3. Доказать тождество $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a}-1=\frac{b^2}{a(a+b)}$.

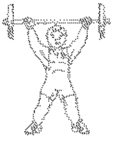
• Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a}-1=\frac{a}{a+b}^{\backslash a}+\frac{b}{a}^{\backslash a+b}-\frac{1}{1}^{\backslash a(a+b)}=\frac{a^2+b(a+b)-a(a+b)}{a(a+b)}=$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2-a^2-ab}{a(a+b)}=\frac{b^2}{a(a+b)}.$$

Путем тождественных преобразований левую часть равенства привели к правой части. Поэтому это равенство является тождеством. •

Напомним, что при доказательстве тождеств или одну часть тождества приводят ко второй части, или обе части приводят к одинаковому выражению, или записывают разность левой и правой частей и доказывают, что она равна нулю.



Уровень А

Приведите к общему знаменателю дроби:

99. **а)** $\frac{m}{ab}$ и $\frac{4}{b}$; **б)** $\frac{d}{a^2}$ и $\frac{1}{a^3}$; **в)** $\frac{3}{2c}$ и $\frac{9}{c^2}$;

г) $\frac{1}{3c}$ и $\frac{2}{5c}$; **д)** $\frac{3}{8a}$ и $\frac{1}{12a}$; **е)** $\frac{x}{2y^2}$ и $\frac{5}{6y^3}$;

ж) $\frac{x}{18a^2}$ и $\frac{y}{27a^4}$; **з)** $\frac{5}{6ab}$ и $\frac{5}{4b}$; **и)** $\frac{p}{3a^2}$ и $\frac{q}{6ab}$.

100. **а)** $\frac{7}{8a}$ и $\frac{5}{a}$; **б)** $\frac{3}{2a^3}$ и $\frac{2}{a^2}$; **в)** $\frac{k}{2b}$ и $\frac{n}{3b}$;

г) $\frac{8}{15ab}$ и $\frac{7}{20ab}$; **д)** $\frac{5}{6a^2}$ и $\frac{7}{18a}$; **е)** $\frac{3}{4y^3}$ и $\frac{7}{20y^2}$.

101. **а)** $\frac{5}{a+1}$ и $\frac{4}{a+2}$; **б)** $\frac{3}{2(a-1)}$ и $\frac{2}{3(a-1)}$; **в)** $\frac{1}{ab+b}$ и $\frac{1}{a+1}$.

102. а) $\frac{1}{c+3}$ и $\frac{2}{c-1}$; б) $\frac{3}{8(b+2)}$ и $\frac{1}{4(b+2)}$; в) $\frac{8}{xy-x}$ и $\frac{7}{y-1}$.

Представьте в виде дроби:

103. а) $\frac{a}{c}-\frac{m}{n}$; б) $\frac{a}{3}+\frac{b}{12}$; в) $\frac{5a}{4x}-\frac{3b}{5x}$;

г) $\frac{7c}{9y}-\frac{c}{6y}$; д) $\frac{5b}{12x}+\frac{7b}{18x}$; е) $\frac{4b}{15a}-\frac{6a}{25b}$.

104. а) $\frac{c}{6}+\frac{ad}{18}$; б) $\frac{3k}{5a}+\frac{2k}{3a}$; в) $\frac{n}{24x}-\frac{5n}{36x}$.

Выполните сложение (вычитание) дробей:

105. а) $\frac{7+3x}{x}+\frac{10-3y}{y}$; б) $\frac{a+2b}{b}-\frac{2a-b}{a}$; в) $\frac{a}{a+c}-\frac{a}{c}$;

г) $\frac{2}{z-1}+\frac{2}{z+1}$; д) $\frac{2a}{2a+1}-\frac{3a}{3a+2}$; е) $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}$.

106. а) $\frac{4-2a}{a}+\frac{3+2b}{b}$; б) $\frac{2x-y}{x}-\frac{2y-x}{y}$; в) $\frac{y-1}{y-2}-\frac{y+2}{y+1}$.

107. а) $2+\frac{2}{2n-1}$; б) $3-\frac{3x-2y}{x}$; в) $\frac{y^2}{y-2}-y$.

108. а) $\frac{5-2y}{y+1}+2$; б) $1-\frac{2x}{2x+3}$; в) $\frac{2+3c^2}{c-1}-3c$.

109. а) $\frac{1}{c}-\frac{c-5}{c^2}$; б) $\frac{a+2b}{a}+\frac{a-2b^2}{ab}$; в) $\frac{4x-1}{8x}+\frac{5-6x}{12x}$;

г) $\frac{6-a}{6a}-\frac{a+9}{9a}$; д) $\frac{1-y}{3xy}+\frac{2x+3}{6x^2}$; е) $\frac{5a}{2(a+b)}-\frac{4a}{3(a+b)}$;

ж) $\frac{7}{x}-\frac{7y}{x(x+y)}$; з) $\frac{4}{a+5}-\frac{4a+15}{a(a+5)}$; и) $\frac{3}{a+b}+\frac{3a}{b(a+b)}$.

110. а) $\frac{a+2}{a^2}-\frac{1}{a}$; б) $\frac{3x+y}{3xy}+\frac{x-1}{3x}$; в) $\frac{3b-1}{6b}-\frac{2b-1}{4b}$;

г) $\frac{a+b}{3ab}+\frac{a-2}{6a}$; д) $\frac{2m+1}{m(m-1)}-\frac{2}{m-1}$; е) $\frac{b+4c}{5(b-c)}+\frac{b-4c}{3(b-c)}$.

Упростите выражение:

111. а) $\frac{a-3b}{2a-2b}+\frac{a+2b}{3a-3b}$; б) $\frac{m+4n}{m^2-n^2}+\frac{4}{m+n}$; в) $\frac{k}{k-2}-\frac{k^2}{k^2-4}$.

112. а) $\frac{x-y}{xy}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$; б) $\frac{2-x^2}{x-1}+x+1$; в) $\frac{5a+6}{8a}+\frac{a-1}{4a}-\frac{a+1}{2a}$.

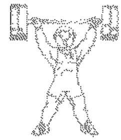
113. а) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m+3n}{2m-2n}$; б) $\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{1}{x-y}$; в) $\frac{a-3}{3a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{3}$.

Докажите тождество:

114. а) $\frac{3}{a-3}-\frac{3}{a}=\frac{9}{a^2-3a}$; б) $\frac{b}{(a-b)^2}=\frac{a}{(a-b)^2}-\frac{1}{a-b}$.

115. а) $\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}=\frac{2m}{m^2-n^2}$; б) $\frac{1}{b^2-1}=\frac{b}{b^2-1}-\frac{1}{b+1}$.

Уровень Б



Приведите к общему знаменателю дроби:

116. а) $\frac{9}{14a^3b}$ и $\frac{5}{21ab^2}$; б) $\frac{1}{18x^3y^3}$ и $\frac{1}{27xy^4}$; в) $\frac{a}{9x^2y}$ и $\frac{b}{15xy^3}$.

117. а) $\frac{8}{9x^3y^3}$ и $\frac{5}{24xy^5}$; б) $\frac{a}{16m^3n^3}$ и $\frac{b}{24m^4n}$; в) $\frac{a}{15xy^6}$ и $\frac{b}{25x^5y}$.

118. а) $\frac{3}{x^2+xy}$ и $\frac{2}{xy+y^2}$; б) $\frac{x}{x^2-y^2}$ и $\frac{y}{x+y}$; в) $\frac{m}{m^2+2mn+n^2}$ и $\frac{n}{m+n}$;

г) $\frac{c}{4c^2-1}$ и $\frac{c^2}{1-2c}$; д) $\frac{1}{1-x^3}$ и $\frac{2}{x-1}$; е) $\frac{y}{y^3-8}$ и $\frac{2}{y^2+2y+4}$.

119. а) $\frac{x}{x^2+x^2y}$ и $\frac{y}{y^2+y}$; б) $\frac{n}{m^2-4mn+4}$ и $\frac{m}{2-m}$; в) $\frac{a}{4a^2-b^2}$ и $\frac{b}{b-2a}$.

Преобразуйте в дробь выражение:

120. а) $\frac{1+a}{a^2bc}+\frac{1-bc}{ab^2c^2}$; б) $\frac{4x+1}{12x^4y^2}-\frac{3y-1}{9x^3y^3}$;

в) $\frac{c+1}{cm+cn}-\frac{d+1}{dm+dn}$; г) $\frac{x}{12(x-y)}+\frac{x}{18(x+y)}$.

д) $\frac{b+1}{ab-b^2}+\frac{a+1}{ab-a^2}$; е) $\frac{1}{(b-a)^2}-\frac{1}{a^2-b^2}$.

121. а) $\frac{2a+1}{16a^3b^2}-\frac{3b+1}{24a^2b^3}$; б) $\frac{7}{ax-ay}-\frac{5}{by-bx}$;

в) $\frac{b}{a^2-b^2}-\frac{b}{a^2+ab}$; г) $\frac{x-y}{(x+y)^2}+\frac{1}{2x+2y}$.

122. а) $\frac{2m-n}{mn}-\frac{2}{n}+\frac{5}{m^2}$;   б) $\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$;

в) $\frac{a+b}{a^2}-\frac{a+b}{ab}-\frac{a-b}{b^2}$;   г) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+1}+1$.

123. а) $k-\frac{1}{k}-\frac{1-n^2}{kn^2}$;   б) $\frac{1}{a^2b}-\frac{1}{ab^2}-\frac{a+b}{a^2b^2}$.

Упростите выражение:

124. а) $\frac{x-1}{3x-12}-\frac{x-3}{2x-8}$;   б) $\frac{8x}{x^2-16}-\frac{4}{x+4}$;

в) $\frac{3}{a+1}+\frac{a+4}{a^2+a}$;   г) $\frac{a-b}{4a+4b}+\frac{a+b}{4b-4a}$;

д) $\frac{b^2}{by-y^2}+\frac{b}{y-b}$;   е) $\frac{b}{2a^2-ab}-\frac{4a}{2ab-b^2}$;

ж) $x+y-\frac{x^2+y^2}{x+y}$;   з) $a^2-\frac{a^4+1}{a^2-1}+1$.

125. а) $\frac{2a}{3a+3}-\frac{3a}{5a+5}$;   б) $\frac{5}{4b-32}+\frac{20}{64-b^2}$;

в) $m-\frac{(m-n)^2}{m+n}+n$;   г) $\frac{a-1}{a}-\frac{a+10}{a^2-10a}$;

д) $\frac{5a}{a-9}+\frac{45a}{a^2-18a+81}$;   е) $\frac{9}{2x+6}-\frac{9x}{x^2-9}$.

126. а) $\frac{2}{5a-25}-\frac{4}{a^2-25}-\frac{1}{5a+25}$;   б) $\frac{2}{x+2}-\frac{x+3}{4-x^2}+\frac{3x+1}{x^2-4x+4}$;

в) $\frac{9}{a^3+27}-\frac{a+3}{a^2-3a+9}$;   г) $\frac{1-b}{b^2-b+1}+\frac{b^2}{b^3+1}$.

127. а) $\frac{a}{a-5}-\frac{4}{a+5}-\frac{a^2}{a^2-25}$;   б) $\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{2b-a}-\frac{3a}{a^2-4b^2}$.

Докажите тождество:

128. а) $\frac{n}{n^2-2mn+m^2}=\frac{m+n}{n^2-mn}+\frac{m^2}{n(n-m)^2}$;

б) $\frac{1}{a+3}-\frac{3}{3-a}-\frac{4a-15}{a^2-9}=\frac{21}{a^2-9}$.

129. а) $\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{x+2}{x^2-1}-\frac{2(2x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$;

б) $\frac{3b-1}{b^2-1}+\frac{5}{2b^2+2b}-\frac{3}{b}=\frac{3b+1}{2b(b^2-1)}$.

Найдите значение выражения:

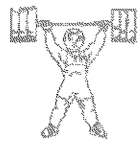
130. а) $\frac{1}{x+2}-\frac{x-1}{(x+2)^2}-\frac{x+1}{x^2+2x}$ при $x=4$;

б) $\frac{2a}{a-b}-\frac{3a}{a+b}-\frac{5b}{a}$ при $a=-2$; $b=3$.

131. $\frac{9x^2+4y^2}{3x-2y}+\frac{12xy}{2y-3x}$ при $x=4$; $y=-5$.

132. Представьте дробь в виде суммы или разности дробей:

а) $\frac{a-10}{2a}$; б) $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$; в) $\frac{5x^2-1}{x^4}$; г) $\frac{x^2+8y^2}{2xy}$.



Уровень В

133. Найдите числа a и b, при которых равенство выполняется при всех допустимых значениях x:

а) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$; б) $\frac{2x-1}{(x-3)(x+4)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+4}$.

134. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$;

б) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}$;

в) $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{2x}{1+x^2}-\frac{4x^3}{1+x^4}-\frac{8x^7}{1+x^8}$;

г) $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}$;

д) $\frac{b}{b^2-1}+\frac{b^2+b-1}{b^3-b^2+b-1}+\frac{b^2-b-1}{b^3+b^2+b+1}+\frac{2b^3}{1-b^4}$.

135. Докажите тождество:

а) $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}=0$;

б) $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$.

Упражнения для повторения

136. Вычислите:

а) $\frac{9}{16}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{5}{27}$; б) $\frac{4}{9}:\frac{2}{27}-\frac{16}{17}:\frac{8}{51}$;

в) $0,4+8\cdot\left(5-0,8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}$; г) $\left(1\frac{7}{8}\cdot8-\left(8,9-2,6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot34\frac{2}{5}$.

137. Решите уравнение:

а) $7(x-1)-2x=8$; б) $x(10x+9)-(5x-1)(2x+3)=8$;

в) $0,5(x+8)-(7x+1)=-3,5x$; г) $2x(x-9)-(x+5)(2x-7)=0$.

138. Известно, что после вычитания из некоторого числа его шестой части и прибавления к полученной разности его пятой части получили 9,3. Найдите это число.

139. Смешали 30%-й раствор сульфатной кислоты с 10%-м и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько грамм каждого раствора при этом использовали?

140*. В двух сосудах вместимостью по 10 л было вместе 10 л концентрированной кислоты. Первый сосуд долили доверху водой и полученной смесью дополнили другой сосуд. После этого во втором сосуде стало кислоты на 5 л больше, чем в первом. Сколько кислоты было в каждом сосуде сначала?

Задания для самопроверки №1

I уровень

1. Чему равно значение выражения $\frac{2x-1}{x-5}$ при $x=-4$?

а) 1; б) -1; в) $\frac{7}{9}$; г) не существует.

2. При каких значениях переменной не имеет смысла выражение $\frac{8}{2x-5}+x$?

а) $x=0$; б) $x=2$; в) $x=2,5$; г) $x=5$.

3. Сократите дробь $\frac{18a^2}{3a^3}$.

а) $\frac{18}{a}$; б) $\frac{1}{6a^3}$; в) $\frac{6}{a}$; г) $\frac{6}{a^3}$.

4. Сложите дроби: $\frac{3y-1}{y^2}+\frac{5-8y}{y^2}$.

а) $\frac{4+11y}{y^2}$; б) $\frac{4-5y}{2y^2}$; в) $4-5y$; г) $\frac{4-5y}{y^2}$.

5. Упростите выражение $\frac{9a-2b}{2a}-\frac{2a-b}{a}$.

а) $\frac{5a-4b}{2a}$; б) $\frac{7a-3b}{2a}$; в) 2,5; г) $\frac{11a-4b}{2a}$.

II уровень

1. При каких значениях переменной не имеет смысла выражение $\frac{11x}{2x^2-10x}$?

2. Сократите дробь:

а) $\frac{27a^3b^2}{36a^4b}$; б) $\frac{5a-10b}{3a-6b}$.

3. Найдите значение выражения $\frac{2a^2-6a}{a-3}$ при $a=7$.

4. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{5x}{a^3b}-\frac{3y}{ab^2}$; б) $\frac{a}{4x+4y}+\frac{b}{7x+7y}$.

5. Упростите выражение:

а) $2+\frac{x+2y}{x-y}$; б) $\frac{8}{m-n}-\frac{16n}{m^2-n^2}$.

III уровень

1. Найдите допустимые значения переменной в выражении $\frac{14k}{(k-2)^2-4}$.

2. Сократите дробь:

а) $\frac{49x^2y^5}{35x^3y}$; б) $\frac{3a^3-a^2}{ab^2-9a^3b^2}$.

3. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{a+1}{a^2-a}-\frac{a-1}{a^2+a}$; б) $\frac{1}{(m+n)^2}+\frac{n}{m-n}+\frac{n}{m+n}$.

4. Найдите значение выражения $\frac{mn}{m^2-mn}-\frac{1}{mn-n^2}$ при $m=0{,}7$; $n=\frac{1}{3}$.

5. Упростите выражение:

а) $a+b-\frac{2ab}{a+b}$; б) $\frac{b}{a^2-2ab+b^2}-\frac{a+b}{b^2-ab}$.

IV уровень

1. При каких значениях переменной не имеет смысла выражение:

а) $\frac{15}{a^2+2a-15}$; б) $\frac{3}{|x-7|+|x|}$?

2. Сократите дробь:

а) $\frac{x^3-10x^2-4x+40}{10-x}$; б) $\frac{x^2-16x-a^2+64}{x+a-8}$.

3. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{1}{5x+5}-\frac{x-1}{6x^2+12x+6}$; б) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{a^2+2ab+b^2}$.

4. Упростите выражение $\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a+2}-\frac{a}{a^2-4}+\frac{a^2+4}{8a-2a^3}$.

5. Докажите тождество $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{8}{1-x^8}$.

6. Умножение дробей. Возведение дроби в степень

При умножении обыкновенных дробей отдельно умножают их числители и знаменатели и первое произведение записывают числителем, а второе — знаменателем дроби. Например, $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot5}{4\cdot7}=\frac{15}{28}$.

Так же перемножают любые дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \qquad (1)$$

Докажем, что равенство (1) является тождеством, то есть что оно верно при всех значениях a, b, c и d, где $b\neq0$ и $d\neq0$.

Пусть $\frac{a}{b}=a:b=m$, $\frac{c}{d}=c:d=n$. Тогда, по определению частного, $a=bm$, $c=dn$. Найдем произведение ac:

$$ac=(bm)\cdot(dn)=(bd)\cdot(mn).$$

Пример 3. Возвести в квадрат дробь $-\frac{2a^3b}{5m^2n}$.

• $\left(-\frac{2a^3b}{5m^2n}\right)^2 = \frac{(2a^3b)^2}{(5m^2n)^2} = \frac{2^2\cdot(a^3)^2\cdot b^2}{5^2\cdot(m^2)^2\cdot n^2} = \frac{4a^6b^2}{25m^4n^2}$.

Сокращенно: $\left(-\frac{2a^3b}{5m^2n}\right)^2 = \frac{4a^6b^2}{25m^4n^2}$. •

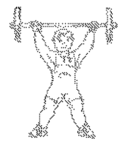
Устно

141. Выполните умножение:

а) $\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}$; б) $\frac{5}{3a}\cdot\frac{2b}{5}$; в) $\frac{2}{k}\cdot m$; г) $\frac{3x}{4}\cdot\frac{1}{x}$.

142. Возведите в степень:

а) $\left(\frac{a}{c}\right)^2$; б) $\left(\frac{2a}{3c}\right)^2$; в) $\left(\frac{a^2}{c}\right)^4$; г) $\left(-\frac{3a^2}{b^3}\right)^3$.



Уровень А

Выполните умножение:

143. а) $\frac{4}{3a}\cdot\frac{5b}{16}$; б) $\frac{3k}{5}\cdot\frac{2}{9k}$; в) $\frac{8b^2}{11}\cdot\frac{1}{b}$; г) $\frac{y^4}{7}\cdot\left(-\frac{14}{y^2}\right)$;

д) $\frac{c}{5d^2}\cdot\frac{25d}{c^4}$; е) $\frac{12x^3}{5y}\cdot\frac{10y}{x^2}$; ж) $4x\cdot\frac{3a}{2x^3}$; з) $\left(-\frac{5m}{6n}\right)\cdot 3n^2m$.

<u>144.</u> а) $\frac{3}{4b^2}\cdot\frac{2b^4}{9}$; б) $\frac{6k}{7}\cdot\frac{21}{k^5}$; в) $\frac{6x^3}{a}\cdot\left(-\frac{a^2}{9x}\right)$; г) $\frac{5a}{4y^2}\cdot 2ay$.

Представьте в виде дроби:

145. а) $\frac{25a^2}{4b^3}\cdot\frac{10b^2}{15a^5}$; б) $-\frac{5a}{9b^4}\cdot 3ab^3$; в) $-17x^2y\cdot\left(-\frac{y}{34x^5}\right)$.

<u>146.</u> а) $\frac{2x^2}{9y^2}\cdot\frac{27y^2}{4x^3}$; б) $\frac{2a}{5b^3}\cdot(-10ab^2)$; в) $12m^2\cdot\left(-\frac{3}{16mn^3}\right)$.

Выполните умножение:

147. а) $\frac{x-y}{a^2}\cdot\frac{a^3b}{(x-y)^2}$; б) $\frac{x^3}{m+n}\cdot\frac{(m+n)^3}{x}$; в) $\frac{3x+3y}{b^3}\cdot\frac{b^2}{x+y}$;

г) $\frac{2x-1}{x^2-7x}\cdot\frac{x-7}{2x-1}$; д) $\frac{m^2-9}{m+2}\cdot\frac{m+2}{m-3}$; е) $\frac{a^2-4a+4}{a+4}\cdot\frac{a+4}{a^2-4}$.

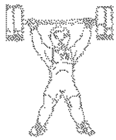
148. а) $\frac{a+b}{y^2}\cdot\frac{y^4}{a+b}$; б) $\frac{x+y}{a^3}\cdot\frac{a^4}{(x+y)^2}$; в) $\frac{ab+ac}{k^2}\cdot\frac{k}{b+c}$;

г) $\frac{b^2-2b+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{b-1}$; д) $\frac{y^2-16}{ab}\cdot\frac{b^2}{y-4}$; е) $\frac{c^2+2c+1}{c^3}\cdot\frac{c^5}{c^2-1}$.

Возведите в степень:

149. а) $\left(\frac{2x^2}{y}\right)^2$; б) $\left(-\frac{2a^3}{3b}\right)^4$; в) $\left(-\frac{n^2k^3}{5m}\right)^3$; г) $\left(\frac{3a^2b^4}{4c^3}\right)^3$.

150. а) $\left(\frac{3m}{n^2}\right)^2$; б) $\left(\frac{2x^2}{y^2z}\right)^3$; в) $\left(-\frac{3a^3b}{5c^2}\right)^3$; г) $\left(-\frac{9x^3y^4}{5a^3}\right)^2$.



Уровень Б

Выполните умножение:

151. а) $\frac{12a^3}{x^3}\cdot\frac{5x^2y}{18a^2}\cdot\frac{b}{a^2}$; б) $\frac{3m^2}{4n}\cdot\left(-\frac{2n}{3m^3}\right)\cdot\frac{4n}{3m^2}$; в) $\frac{5ab}{xy+y^2}\cdot\frac{bx+by}{10a^3}$;

г) $\frac{xy}{a^2+a^3}\cdot\frac{a+a^2}{x^2y^3}$; д) $\frac{18a^2}{2x-x^2}\cdot\frac{4-2x}{27ax}$; е) $\frac{3a+2b}{ab+b^2}\cdot\frac{ab+a^2}{9a+6b}$.

152. а) $\frac{ab^2}{3mn}\cdot\frac{m^3}{4a^3}\cdot\frac{6mn^2}{ab^2}$; б) $\frac{5x+5y}{x+x^2}\cdot\frac{x^2+x^3}{15x+15y}$; в) $\frac{16mn}{2y+y^2}\cdot\frac{6+3y}{20m^3n}$.

Упростите выражение:

153. а) $\frac{3a-1}{a^2-1}\cdot\frac{a+1}{9a^2-1}$; б) $\frac{b^2-a^2}{9x-9y}\cdot\frac{x^2-xy}{a-b}$;

в) $\frac{4xy}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^2+xy}{32x^2}$; г) $\left(\frac{5y}{a-y}\right)^2\cdot\frac{a^2-y^2}{10y}$;

д) $\frac{(2x+1)^2}{7b-7a}\cdot\frac{a^2-b^2}{4x+2}$;

е) $\frac{4m-4n}{(m+n)^3}\cdot\frac{m^2+2mn+n^2}{2m^2-2n^2}$;

ж) $\frac{m^3-n^3}{2y-2x}\cdot\frac{x^2-y^2}{m^2+mn+n^2}$;

з) $\frac{c^2-4a^2}{a^3+b^3}\cdot\frac{3a+3b}{2a+c}$.

154. а) $\frac{5a-5b}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x-y}{a-b}$;

б) $\frac{3a-3b}{5a+5b}\cdot\frac{(a+b)^2}{b^2-a^2}$;

в) $\frac{(4-x)^2}{xy+y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{12-3x}$;

г) $\frac{1-y^2}{2a^3+2b^3}\cdot\frac{a^2-ab+b^3}{3-3y}$;

д) $\frac{15a}{2ab+2b^2}\cdot\left(\frac{a+b}{5a}\right)^2$;

е) $\frac{a^2-1}{x^3-1}\cdot\frac{x^2+x+1}{a^2+2a+1}$.

Найдите значение выражения:

155. $\frac{x^2+8x+16}{15x^2+3x}\cdot\frac{25x^2-1}{16-x^2}$ при $x=-1$; $x=5$; $x=\frac{2}{3}$.

156. $\frac{a^3+27}{0,2a^3}\cdot\frac{4a^3}{a^2-3a+9}$ при $a=-4$; $a=5$; $a=-\frac{1}{4}$.

Уровень В

157. Упростите выражение:

а) $\frac{x^2+xy+xz+yz}{x^2-xy+xz-yz}\cdot\frac{x^2-xy-2x+2y}{x^2+xy-2x-2y}$;

б) $\left(\frac{a^4-2a^2b+b^2}{a^2-2ab+b^2}\right)^3\cdot\left(\left(\frac{a-b}{a^2-b}\right)^3\right)^2$.

158. Найдите значение выражения $16^n\cdot\left(\frac{16^{n+1}+4\cdot16^n}{64^{n+1}-4\cdot64^n}\right)^2$ при $n=74$; $n=1000$.

Упражнения для повторения

159. Разложите на множители:

а) $(b+3)^2-4$; б) $8a^3-125$; в) $4a^2+4a+1-b^2$.

160. Найдите числа, обратные данным: $\frac{2}{7}$; 4; $1\frac{5}{6}$; 0,2; 1,6.

161. Вычислите:

а) $\frac{18}{25}:\frac{4}{15}$; б) $4\frac{2}{3}:42-\frac{1}{6}$; в) $0{,}125:3\frac{1}{8}-1\frac{2}{5}:7$.

162. В первом резервуаре было 480 л воды, а во втором — 282 л. Из первого резервуара берут ежедневно 25 л воды, а со второго — 16 л. Через сколько дней в первом резервуаре будет в два раза больше воды, чем во втором?

163*. От пристани A к пристани B по течению реки одновременно отплыли катер и плот. Когда через 1,5 ч катер прибыл к пристани B, плоту оставалось проплыть до B еще 27 км. Не задерживаясь у пристани B, катер отправился в обратный путь. Через какое время после отправления от пристани B катер встретит плот? Какова скорость катера в стоячей воде?

7. Деление дробей

При делении обыкновенных дробей первую дробь умножают на дробь, обратную второй. Например, $\frac{2}{7}:\frac{3}{5}=\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{21}$.

Найдем правило деления произвольных дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Пусть $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=x$. Тогда $x\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$. Умножим обе части последнего равенства на дробь, обратную дроби $\frac{c}{d}$, то есть на $\frac{d}{c}$: $x\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$, откуда $x=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

Итак,

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

Последнее равенство является тождеством, то есть оно верно при всех значениях a, b, c и d, где $b\neq0$, $c\neq0$ и $d\neq0$. Из этого тождества следует *правило деления дробей*: ***чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.***

Например, $\frac{2a}{b^2}:\frac{a}{2b}=\frac{2a}{b^2}\cdot\frac{2b}{a}=\frac{2a\cdot2b}{b^2\cdot a}=\frac{4}{b}$.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Выполнить деление:

а) $\frac{15a^2}{14c^3}:\frac{a^3}{7c}$; б) $\frac{ab}{a^2-1}:\frac{3b}{a^2-a}$; в) $\frac{4x^2-y^2}{2x}:(2x-y)$.

• а) $\frac{15a^2}{14c^3}:\frac{a^3}{7c}=\frac{15a^2}{14c^3}\cdot\frac{7c}{a^3}=\frac{15a^2\cdot 7c}{14c^3\cdot a^3}=\frac{15}{2c^2a}$.

б) $\frac{ab}{a^2-1}:\frac{3b}{a^2-a}=\frac{ab}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{a(a-1)}{3b}=\frac{ab\cdot a(a-1)}{(a-1)(a+1)\cdot 3b}=\frac{a^2}{3(a+1)}$.

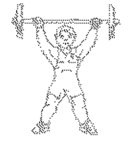
в) $\frac{4x^2-y^2}{2x}:(2x-y)=\frac{(2x-y)(2x+y)}{2x}\cdot\frac{1}{2x-y}=\frac{(2x-y)(2x+y)}{2x(2x-y)}=\frac{2x+y}{2x}$. •

Устно

164. Выполните деление:

а) $\frac{x}{y}:\frac{m}{n}$; б) $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$; в) $\frac{a}{4}:2$; г) $3:\frac{3}{x}$.

Уровень А



Выполните деление:

165. а) $\frac{a}{9}:\frac{2a}{3}$; б) $\frac{6ab}{5c}:\frac{2b}{15}$; в) $x^2:\frac{1}{x}$; г) $\frac{9}{d}:3$;

д) $19n^3:\frac{38n}{5p^2}$; е) $\frac{33c^3}{12m}:11c$; ж) $\frac{c^3}{2a^5}:\frac{c}{4a^3}$; з) $\frac{12ab^2}{25x^3}:\frac{3b^3}{5x^4}$.

<u>166.</u> а) $\frac{3x}{10y^4}:\frac{1}{5y^3}$; б) $27a^4:\frac{18a^3}{7b^2}$; в) $\frac{6x^2}{5y^2}:\frac{3x}{y^3}$; г) $\frac{5mn^2}{7k^3}:10n^2$.

167. а) $\frac{18a^3}{-5b^4}:\frac{-6a^4}{15b}$; б) $-\frac{9b^3}{20n^2}:\frac{36b^4}{5n^3}$; в) $14xy^2:\left(-\frac{28x^2y^3}{5z}\right)$.

<u>168.</u> а) $\frac{-8x^2}{9y^2}:\frac{4x^2}{3y^3}$; б) $-\frac{15m^3}{2n^2}:\frac{9m^4}{8n}$; в) $-\frac{6xy^3}{5}:\left(-\frac{3x^2y^4}{10}\right)$.

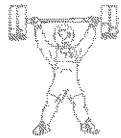
Упростите выражение:

169. а) $\frac{6a+6b}{c^4}:\frac{a+b}{c^2}$; б) $\frac{mn-n^2}{a^3}:\frac{m-n}{a}$; в) $\frac{c^2-d^2}{k^2}:\frac{c+d}{k^3}$;

г) $\frac{x^6}{x^2-16}:\frac{x^4}{x-4}$; д) $\frac{b^3}{b^2-6b+9}:\frac{b}{b-3}$; е) $\frac{y^2-4y+4}{y+1}:\frac{y^2-4}{y+1}$.

170. а) $\frac{x^2}{ab+ac}:\frac{x}{b+c}$; б) $\frac{4-a^2}{c^4}:\frac{2-a}{c^3}$; в) $\frac{m^2n+mn}{y^5}:\frac{m+1}{y}$;

г) $\frac{k^2-25}{k}:\frac{k+5}{k^2}$; д) $\frac{x^2-2xy+y^2}{10}:\frac{x-y}{25}$; е) $\frac{a-2}{a^2+2a+1}:\frac{a-2}{a^2-1}$.



Уровень Б

Выполните деление:

171. а) $\frac{5x-x^2}{4a^3}:\frac{x^2}{8a^4}$; б) $\frac{1-b^2}{ac^3}:\frac{b+b^2}{a^2c^2}$; в) $\frac{5a^2-a}{(a-b)^2}:\frac{10a-2}{a-b}$;

г) $\frac{3x^2-3}{x^2+1}:(2x+2)$; д) $\frac{18ab^2}{1-x^2}:\frac{24a^2b}{(1-x)^2}$; е) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}:\frac{a+b}{ac-bc}$.

172. а) $\frac{7c^3-c^2}{11ab^3}:\frac{c^2}{22a^3b}$; б) $\frac{4-x^2}{x+x^2}:\frac{2x-x^2}{x+1}$; в) $\frac{(m-n)^2}{m^2+m}:\frac{6m-6n}{m^2-1}$.

Упростите выражение:

173. а) $\frac{3a+6b}{a^2-b^2}:\frac{7a+14b}{a^2-2ab+b^2}$; б) $\frac{4c^2+4c+1}{3x-3y}:\frac{1-4c^2}{x^2-y^2}$;

в) $\frac{mn^2}{m^3+n^3}:\frac{4m^2n}{m^2-mn+n^2}$; г) $\left(\frac{3a}{a-b}\right)^2:\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$;

д) $\frac{2x-2y}{(x+y)^3}:\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$; е) $\frac{a^3-27}{a-2a^2}:\frac{a^2+3a+9}{4a^2-1}$.

174. а) $\frac{2c+4d}{1+b+b^2}:\frac{ac+2ad}{1-b^3}$; б) $\frac{x+2y}{3x-3y}:\frac{2(x+2y)^2}{x^2-y^2}$;

в) $\frac{(a-b)^2}{ab+b^2}:\frac{a^2-b^2}{ab^2+b^3}$; г) $\frac{ab-ac}{4-2a+a^2}:\frac{c^2-b^2}{a^3+8}$.

Докажите тождество:

175. а) $\frac{a^2-b^2}{4ab}:\frac{5a+5b}{8ab^2}=\frac{2b(a-b)}{5}$;

б) $\left(1-\frac{m}{n}:\left(1+\frac{m}{n}\right)+\frac{m}{n}:\left(1-\frac{m}{n}\right)\right):\frac{m-n}{m+n}=-\frac{m^2+n^2}{(m-n)^2}$.

176. а) $(3x-12y):\frac{x^2-16y^2}{2x}=\frac{6x}{x+4y}$;

б) $a:\frac{a-1}{2}-\frac{a^3-1}{2a^2+2a}:\frac{a^2+1-2a}{4a}=\frac{2}{1-a^2}$.

Уровень В

177. Упростите выражение:

а) $\frac{x^2-0,25}{x^6-x^4-x^2+1}:\left(\frac{x-0,5}{x^2-1}\right)^2$;

б) $\frac{a^2+6a+5}{a^2-ab+a-b}:\frac{a^2+4a-5}{a^2-ab-a+b}$.

178. Докажите, что выражение $\frac{x+3y}{x^2+xy-2y^2}:\frac{x^2+2xy-3y^2}{x+2y}$ принимает только положительные значения.

Упражнения для повторения

179. Решите уравнение:

а) $3(x+4)=4(x+3)$;

б) $2x(x-1)+x(x-2)=3x^2-2$.

180. Вычислите:

а) $4,8\cdot(2,74-1,85+0,89)$;

б) $0,32\cdot15,48-2,32\cdot15,48$;

в) $12\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)$;

г) $1\frac{3}{7}:1\frac{4}{21}-2\frac{2}{3}:4$.

181. Сплав меди с оловом массой 12 кг содержит 45% меди. Сколько олова нужно прибавить к этому сплаву, чтобы получить новый сплав, который содержал бы 40% меди?

182. Есть сталь двух сортов с содержанием никеля 10% и 40%. Сколько стали одного и другого сорта нужно взять, чтобы после переплавки получить 12 т стали, которая содержала бы 30% никеля?

8. Преобразование рациональных выражений

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Упростить выражение: $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$.

• Сначала представим выражение в каждой скобке в виде дробей, а потом найдем их частное:

1) $\frac{a}{a+1}+1=\frac{a+a+1}{a+1}=\frac{2a+1}{a+1}$;

2) $1-\frac{3a^2}{1-a^2}=\frac{1-a^2-3a^2}{1-a^2}=\frac{1-4a^2}{1-a^2}$;

3) $\frac{2a+1}{a+1}:\frac{1-4a^2}{1-a^2}=\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{(1-a)(1+a)}{(1-2a)(1+2a)}=\frac{1-a}{1-2a}$.

Преобразования можно записывать в строку:

$$\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)=\frac{a+a+1}{a+1}:\frac{1-a^2-3a^2}{1-a^2}=\frac{2a+1}{a+1}:\frac{1-4a^2}{1-a^2}=$$

$$=\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{(1-a)(1+a)}{(1-2a)(1+2a)}=\frac{1-a}{1-2a}.$$ •

Данное в примере 1 рациональное выражение мы преобразовали в рациональную дробь $\frac{1-a}{1-2a}$. Вообще, любое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби.

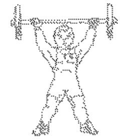
Пример 2. Доказать тождество: $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{b+a}{b-a}$.

• Упростим левую часть равенства:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b+a}{ab}:\frac{b-a}{ab}=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{ab}{b-a}=\frac{b+a}{b-a}.$$

Путем тождественных преобразований левую часть равенства привели к правой части. Поэтому это равенство является тождеством. •

Уровень А



Упростите выражение:

183. а) $\left(1+\frac{1}{a}\right):\frac{a^2-1}{3}$; б) $\left(\frac{1}{a+5}-\frac{1}{a-5}\right):\frac{5}{a+5}$;

в) $\frac{a^2-49}{a^2}\cdot\frac{1}{a+7}-\frac{1}{a}$; г) $\left(\frac{2}{b-2}-\frac{1}{2b-1}\right):\frac{6b}{b-2}$;

д) $\frac{a^4}{a^2-8a+16}:\frac{a}{2a-8}-\frac{a^3}{a-4}$; е) $\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}\right)\cdot\frac{x+y}{xy}$.

184. а) $\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{4}{b^2-2b+1}$; б) $\frac{a-5}{a}-\frac{a^2-100}{a-5}\cdot\frac{1}{a-10}$;

в) $\frac{x^2+2x}{3}\cdot\frac{9}{x+2}-\frac{3x^2}{x-4}$; г) $\left(\frac{4}{c+2}-\frac{2}{c+1}\right):\frac{8c}{c+2}$.

Докажите тождество:

185. а) $\frac{a}{a^2+18a+81}:\frac{a}{9a+81}+\frac{a}{a+9}=1$;

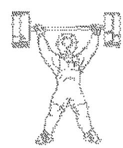
б) $\frac{a^6}{a^2-2a+1}:\frac{a^4}{3a-3}-\frac{2a^2+1}{a-1}=a+1$.

186. а) $\frac{4x}{x+y}:\left(\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}\right)=2x-2y$; б) $\frac{5a+10}{a^2}\cdot\frac{a^2+3a}{a+2}-\frac{15}{a}=5$.

187. Упростите выражение $\frac{x^2+x}{2}\cdot\frac{12}{x+1}-\frac{6x^2}{x+3}$ и найдите его значение при $x=6$.

188. Упростите выражение $\left(\frac{x}{x-9}-\frac{x}{x+9}\right):\frac{9x}{x+9}$ и найдите его значение при $x=4$.

Уровень Б



Упростите выражение:

189. а) $\frac{m}{n-m}-\frac{m^3-mn^2}{m^2+n^2}\cdot\left(\frac{m}{(m-n)^2}-\frac{n}{m^2-n^2}\right)$;

б) $\frac{a}{3-a}+\frac{a^2+3a}{2a+3}\cdot\left(\frac{a+3}{a^2-3a}-\frac{a}{a^2-9}\right)$;

в) $\left(\dfrac{2a}{2a+b}-\dfrac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\dfrac{2a}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{b-2a}\right)$;

г) $\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{a+b}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right):\dfrac{(a+b)^2}{ab}$;

д) $\left(\dfrac{2x^2+x}{x^3-1}-\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+5}{x+1}\right)$.

190. а) $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}-\dfrac{xy-y^2}{x^2-y^2}:\left(1-\dfrac{x}{x+y}\right)$;

б) $\left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{x+3}{x^2-4}+\dfrac{3x+1}{x^2-4x+4}\right):\dfrac{3x^2+2}{x^2-4}$;

в) $\left(\dfrac{x-2}{x^2-2x+4}-\dfrac{6x-13}{x^3+8}\right):\dfrac{15-5x}{2x^3+16}$;

г) $\left(\dfrac{49}{a^3+27}-\dfrac{a+3}{a^2-3a+9}\right)\cdot\dfrac{a^4+27a}{16-a^2}+\dfrac{40-a^2}{a+4}$.

191. а) $\dfrac{a+\dfrac{1}{b}}{1+\dfrac{1}{ab}}$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{m+n}+\dfrac{1}{m-n}}{\dfrac{1}{m+n}-\dfrac{1}{m-n}}$.

192. а) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{c-1}-\dfrac{1}{c+1}}{\dfrac{1}{c-1}+\dfrac{1}{c+1}}$.

Докажите тождество:

193. а) $\left(\dfrac{m^2-n^2}{mn}-\dfrac{1}{m+n}\left(\dfrac{m^2}{n}-\dfrac{n^2}{m}\right)\right):\dfrac{m-n}{m}=\dfrac{m}{m+n}$;

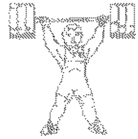
б) $\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-3a}\cdot\left(\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right)=\dfrac{a-1}{a^2}$;

в) $\left(\dfrac{b}{a^2+ab}-\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{a}{b^2+ab}\right):\left(\dfrac{b}{a}-2+\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{1}{a+b}$.

194. а) $\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{3}{a^3+1}+\dfrac{3}{a^2-a+1}\right)\cdot\left(a-\dfrac{2a-1}{a+1}\right)=1$;

б) $\left(\dfrac{a}{a+n}-\dfrac{a}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\dfrac{a}{a-n}-\dfrac{a}{a^2-n^2}\right)=\dfrac{a-n}{a+n}$.

Уровень В



195. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{1}{a^2-9}:\dfrac{b-a}{3a^2+9a}-\dfrac{3a}{9-3b-3a+ab}\right):\dfrac{3a}{b^3-27}$;

б) $\left(1+2\cdot\dfrac{10y^2-3xy}{x^2-3xy}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x-5y}+\dfrac{2y}{(x-5y)^2}\right)$;

в) $\dfrac{1}{m^2+2mn+2n^2}-\dfrac{1}{m^2-2mn+2n^2}-\dfrac{m}{n(m^2+2n^2)}+\dfrac{m}{n(m^2-2n^2)}$.

196. Докажите тождество:

а) $\left(\dfrac{x-3}{x+1}+\dfrac{4}{x^2+2x+1}\right)\cdot\left(\dfrac{x(x+3)}{1-3x+3x^2-x^3}+\dfrac{1}{x^2-2x+1}\right)=\dfrac{1}{1-x}$;

б) $\dfrac{a+2}{12-4a-3a^2+a^3}-\dfrac{1-a}{6-5a+a^2}=\dfrac{a^2-3a}{a-2}\cdot\left(1-\dfrac{a-2}{a-3}\right)^2$.

197. Представьте в виде рациональной дроби: $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$.

Упражнения для повторения

198. Решите уравнение:

а) $(x-1)(x^2+x+1)-x^3-x^2=2x$; б) $(x+2)^2-4=0$;

в) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x+4}{3}=1$; г) $\dfrac{y-3}{5}+\dfrac{y+3}{4}=6$.

199. При каких значениях x значение выражения $\dfrac{2x-1}{4}$ равно $\dfrac{1}{2}$?

200. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 360 км, вышел товарный поезд со скоростью 50 км/ч. Через 40 мин навстречу ему из пункта B вышел пассажирский поезд со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от пункта A поезда встретятся?

201. В первом мешке было муки в три раза больше, чем во втором. После того как из первого мешка взяли 15 кг муки, а со второго — 5 кг, в первом мешке стало на 20 кг муки больше, чем во втором. Сколько муки было в каждом мешке сначала?

202*. По круговой дорожке велотрека едут два велосипедиста с постоянными скоростями. Когда они едут в противоположных направлениях, то встречаются через каждые 10 с; когда же они едут в одном направлении, то один догоняет другого через каждые 100 с. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина дорожки 200 м?

9. Рациональные уравнения

1. Рассмотрим уравнения:

$$2(x-7)=3x-9; \qquad \frac{6x}{x-9}=4; \qquad \frac{7}{x+7}=\frac{5}{x+1}.$$

Левая и правая части каждого из этих уравнений являются рациональными выражениями. Поэтому такие уравнения называют *рациональными уравнениями*.

Рациональные уравнения делятся на целые и дробные. Если обе части рационального уравнения являются целыми выражениями, то такое уравнение называют *целым рациональным уравнением*. Рациональное уравнение, у которого хотя бы одна часть является дробным выражением, называют *дробным рациональным уравнением*.

$2(x-7)=3x-9$ — целое рациональное уравнение;

$\dfrac{3(y-2)}{5}=\dfrac{2(y+1)}{3}$ — целое рациональное уравнение;

$\dfrac{6x}{x-9}=4$ — дробное рациональное уравнение;

$\dfrac{7}{x+7}=\dfrac{5}{x+1}$ — дробное рациональное уравнение.

Целые рациональные уравнения, которые сводятся к линейным, мы решали с помощью равносильных преобразований. Дробные рациональные уравнения будем решать с помощью равносильных преобразований и свойств дробей.

2. Рассмотрим дроби: $\dfrac{0}{2}$; $\dfrac{0}{5}$; $\dfrac{0}{a}$, где $a \neq 0$. Все эти дроби равны нулю. Вообще, если числитель дроби равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, то дробь равна нулю. Верно и обратное: если дробь равна нулю, то ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.

Итак, *дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.*

$$\frac{a}{b} = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } a = 0 \text{ и } b \neq 0.$$

3. Решим уравнение $\frac{6x}{x-9} = 4$.

Приведем данное уравнение к уравнению, левая часть которого является дробью, а правая — нулем:

$$\frac{6x}{x-9} = 4; \qquad \frac{6x}{x-9} - 4 = 0; \qquad \frac{6x-4(x-9)}{x-9} = 0; \qquad \frac{2x+36}{x-9} = 0.$$

Далее используем условие, при котором дробь равна нулю. Приравняем числитель дроби $\frac{2x+36}{x-9}$ к нулю:

$$2x + 36 = 0; \quad 2x = -36; \quad x = -18.$$

При $x = -18$ знаменатель дроби отличен от нуля:

$$x - 9 = -18 - 9 = -27 \neq 0.$$

Итак, $x = -18$ — корень уравнения $\frac{6x}{x-9} = 4$.

Ответ. -18.

При решении дробного рационального уравнения рассмотренным способом нужно:

1) привести его к виду $\frac{A}{B} = 0$, где A и B — целые рациональные выражения;

2) приравнять к нулю числитель дроби и решить полученное целое рациональное уравнение;

3) исключить из его корней те, при которых знаменатель дроби равен нулю.

4. Рассмотрим другие способы решения дробных рациональных уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{x}{2} = \frac{2x-2}{x}$.

• Приведем дроби к общему знаменателю $2x$: $\frac{x^2}{2x} = \frac{4x-4}{2x}$. Поскольку дроби имеют одинаковые знаменатели, то приравняем числители дробей и решим полученное целое рациональное уравнение:

$x^2 = 4x - 4$; $x^2 - 4x + 4 = 0$; $(x-2)^2 = 0$; $x - 2 = 0$; $x = 2$.

Общий знаменатель $2x$ при $x = 2$ отличен от нуля. Поэтому $x = 2$ является корнем уравнения.

Ответ. 2. •

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{x+1}{x-5} = \dfrac{x-3}{x+6}$.

• Согласно свойству пропорции имеем: $(x+1)(x+6) = (x-5)(x-3)$ при $x - 5 \neq 0$ и $x + 6 \neq 0$.

Решим полученное целое рациональное уравнение:

$x^2 + 6x + x + 6 = x^2 - 3x - 5x + 15$; $15x = 9$; $x = 0{,}6$.

При $x = 0{,}6$ имеем: $x - 5 = 0{,}6 - 5 = -4{,}4 \neq 0$; $x + 6 = 0{,}6 + 6 = 6{,}6 \neq 0$. Поэтому $x = 0{,}6$ — корень уравнения.

Ответ. 0,6. •

Пример 3. Решить уравнение $\dfrac{x^2-2}{x} = \dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{4x}$.

• Общим знаменателем всех дробей, которые входят в уравнение, является $4x$. Заменим данное уравнение целым, умножив обе его части на общий знаменатель:

$$\left.\frac{x^2-2}{x} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4x}\ \right| \cdot 4x; \qquad 4x^2 - 8 = 3x^2 + 1.$$

Решим полученное целое рациональное уравнение:

$4x^2 - 3x^2 - 8 - 1 = 0$; $x^2 - 9 = 0$; $(x-3)(x+3) = 0$; $x = 3$ или $x = -3$.

Общий знаменатель $4x$ при $x = 3$ и $x = -3$ отличен от нуля. Поэтому числа 3 и –3 являются корнями уравнения.

Ответ.–3; 3. •

Пример 4. Решить уравнение $\dfrac{2x-9}{x+3} + 4 = \dfrac{x}{x+3}$.

• Приведем данное уравнение к уравнению, левая часть котрого является дробью, а правая — нулем:

$$\frac{2x-9}{x+3} + 4 - \frac{x}{x+3} = 0; \quad \frac{2x-9+4x+12-x}{x+3} = 0; \quad \frac{5x+3}{x+3} = 0.$$

Используем условие равенства дроби нулю и запишем его в виде системы:

$$\begin{cases} 5x+3=0; \\ x+3\neq 0; \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} x=-0,6; \\ x\neq -3. \end{cases}$$

Итак, $x = -0,6$ — корень данного уравнения.

Ответ. $-0,6$. •

Примеры решения упражнений

Пример 1. Решить уравнение $\dfrac{y+3}{y-4}-\dfrac{3}{y+3}=\dfrac{21}{(y+3)(y-4)}$.

• $\dfrac{y+3}{y-4}-\dfrac{3}{y+3}-\dfrac{21}{(y+3)(y-4)}=0;\quad \dfrac{(y+3)^2-3(y-4)-21}{(y+3)(y-4)}=0;$

$\dfrac{y^2+6y+9-3y+12-21}{(y+3)(y-4)}=0;\quad \dfrac{y^2+3y}{(y+3)(y-4)}=0.$

$y^2+3y=0;\quad y(y+3)=0;\quad y=0$ или $y=-3$.

Если $y = 0$, то $(y + 3)(y - 4) = 3 \cdot (-4) \neq 0$. Поэтому $y = 0$ — корень уравнения.

Если $y = -3$, то $(y + 3)(y - 4) = (-3 + 3)(-3 - 4) = 0 \cdot (-7) = 0$. Поэтому $y = -3$ не является корнем уравнения.

Ответ. 0. •

Пример 2. Из города A в город B, расстояние между которыми 21 км, выехал велосипедист, а через 20 мин следом за ним выехал мотоциклист, скорость которого в три раза больше скорости велосипедиста. Найти скорость велосипедиста, если известно, что мотоциклист приехал в город B на 40 мин раньше велосипедиста.

• Пусть скорость велосипедиста x км/ч, тогда скорость мотоциклиста $3x$ км/ч. Расстояние 21 км велосипедист преодолел за $\dfrac{21}{x}$ ч, а мотоциклист — за $\dfrac{21}{3x}=\dfrac{7}{x}$ (ч). При этом мотоциклист был в дороге на 20 мин + 40 мин = 60 мин = 1 ч меньше, чем велосипедист. Получим уравнение $\dfrac{21}{x}=\dfrac{7}{x}+1$.

Решим это уравнение:

$\frac{21}{x} = \frac{7}{x} + 1$; $\frac{21}{x} - \frac{7}{x} - 1 = 0$; $\frac{21-7-x}{x} = 0$; $\frac{14-x}{x} = 0$; $14 - x = 0$; $x = 14$.

Знаменатель x при $x = 14$ отличен от нуля. Поэтому $x = 14$ — корень уравнения.

Ответ. 14 км/ч. •

При выполнении финансовых расчетов используют такие понятия и обозначения:

P — основная сумма, или капитал (начальная сумма денег, одолженная либо инвестированная (вложенная куда-либо);

r — годичная процентная ставка;

t — время (продолжительность кредита или срок вклада в годах);

I — величина прибыли с капитала в денежных единицах (простые проценты);

S — общая сумма (основная сумма + прибыль).

Простые проценты определяются по формуле $I = Prt$, а общая сумма — по формуле $S = P + I$.

Задача. Инвестор одолжил предпринимателю 20000 грн. при процентной ставке r%. Определить процентную ставку, если общая сумма через 6 месяцев составила 20700 грн.

• Поскольку $S = P + I$, где $I = Prt$, то $S = P + Prt$. Подставим известные значения в полученную формулу: $20700 = 20000 + 20000r \cdot 0{,}5$ (6 месяцев = 0,5 года). Из полученного уравнения найдем r: $20700 - 20000 = 20000 \cdot r \cdot 0{,}5$; $700 = 10000r$; $r = 0{,}07$. Итак, процентная ставка равна 7%.

Ответ. 7%. •

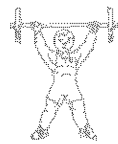
Устно

203. Назовите целые рациональные уравнения; дробные:

а) $\frac{5}{x-7} = 1$; **б)** $3(x - 11) = 0$; **в)** $\frac{1}{3} - x = 3$; **г)** $\frac{2}{x^2} = 0$.

204. Решите уравнение:

а) $\frac{x-2}{x+5} = 0$; **б)** $\frac{x-4}{4x} = 0$; **в)** $\frac{2x}{x+1} = \frac{4}{x+1}$; **г)** $\frac{x-1}{x^2-1} = 0$.



Решите уравнение:

205. а) $\frac{x+8}{x-1}=0$; б) $\frac{x-1}{x+8}=0$; в) $\frac{2x-8}{x^2-16}=0$.

206. а) $\frac{2x}{x-3}+\frac{x-6}{x-3}=0$; б) $\frac{3x+1}{x+1}=\frac{2x-2}{x+1}$; в) $\frac{x-5}{x-6}=\frac{2x}{x-6}$.

207. а) $\frac{x+2}{x}+1=0$; б) $\frac{x}{x+1}=2$; в) $\frac{x-10}{x}=3$.

208. а) $\frac{1}{3x}+\frac{1}{4x}=1$; б) $\frac{1}{5x}+\frac{3}{4x}=2$; в) $\frac{4}{3x}-\frac{1}{2x}=1$.

209. а) $\frac{2x+4}{4+x}=0$; б) $\frac{2x+4}{4-x^2}=0$; в) $\frac{4x}{x-2}=\frac{12}{x-2}$;

г) $\frac{3x-4}{2x}=\frac{x-6}{2x}$; д) $\frac{x-1}{x+5}+2=0$; е) $\frac{5x-10}{x}=4$;

ж) $\frac{x-5}{2x-1}=-4$; з) $\frac{2}{x}+\frac{1}{2x}=5$; и) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}=1$.

210. а) $\frac{2x^2-4x}{x-2}=0$; б) $\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x-2}=0$; в) $\frac{x+3}{x-1}=\frac{2x}{2x+3}$.

211. а) $\frac{x^2-3x}{2x+1}=0$; б) $\frac{x^2}{x+2}+x=0$; в) $\frac{x-5}{x+2}=\frac{3x}{3x-1}$.

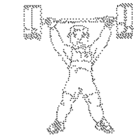
212. Какое число нужно прибавить к знаменателю дроби $\frac{19}{41}$, чтобы получить дробь $\frac{1}{3}$?

213. Какое число нужно вычесть из знаменателя дроби $\frac{3}{47}$, чтобы получить дробь $\frac{1}{4}$?

214. Какое одно и то же число нужно прибавить к числителю дроби $\frac{1}{2}$ и умножить на него знаменатель этой дроби, чтобы получить дробь $\frac{2}{3}$?

215. Какое одно и то же число нужно умножить на числитель дроби $\frac{1}{5}$ и прибавить его к знаменателю этой дроби, чтобы получить дробь $\frac{1}{2}$?

Уровень Б



Решите уравнение:

216. а) $\frac{x+1}{2x-2}+\frac{x+4}{2x+3}=1$;   б) $\frac{5x+4}{x-2}-\frac{4x+1}{x+3}=1$;

в) $\frac{x+5}{x-2}-\frac{x+3}{x+2}=\frac{2}{x^2-4}$;   г) $\frac{3y-1}{2y+5}+\frac{4-3y}{5-2y}=\frac{15}{25-4y^2}$;

д) $\frac{7}{(x-2)^2}-\frac{3}{(x+2)^2}=\frac{4}{x^2-4}$;   е) $\frac{2x}{(2x+3)^2}-\frac{1}{2x-3}+\frac{4}{4x^2-9}=0$.

<u>217.</u> а) $\frac{x+6}{x-1}+\frac{x-6}{x+1}=2$;   б) $\frac{6x-5}{3x+1}-\frac{x-2}{x-3}=1$;

в) $\frac{2x-9}{1-x}+\frac{2x+1}{x+1}=\frac{1}{1-x^2}$;   г) $\frac{2z+3}{2z-3}-\frac{2z-3}{2z+3}=\frac{3}{4z^2-9}$.

218. Инвестор одолжил предпринимателю 30000 грн. с процентной ставкой 8%. Определите, на сколько месяцев одолжены деньги, если предприниматель должен возвратить 31800 грн.

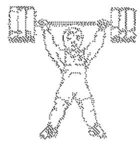
<u>219.</u> Предприниматель должен возвратить инвестору 40700 грн. через 3 месяца, одолжив деньги с процентной ставкой 7%. Сколько денег взял в долг предприниматель?

220. Расстояние между городами *A* и *B* равно 720 км. Из города *A* в город *B* выехал автомобиль и одновременно с ним вылетел самолет. Автомобиль прибыл в город *B* на 10 ч позже самолета. Найдите скорости самолета и автомобиля, если скорость самолета в 6 раз больше скорости автомобиля.

221. К бассейну подведены две трубы. Через первую трубу бассейн можно наполнить водой в два раза быстрее, чем через вторую. Если открыть обе трубы одновременно, то бассейн наполнится за 4 ч. За какое время можно наполнить бассейн через каждую трубу отдельно?

<u>222.</u> Два трактора вспахали поле за 5 ч. За какое время может вспахать поле каждый трактор, работая отдельно, если первый может это сделать в два раза быстрее, чем второй?

Уровень В



223. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2-25}{|x-3|-2|x-6|}=0$; б) $\dfrac{|x-3|-4}{x^3-2x^2-2x+1}=0$;

в) $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+3x+2}=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+3x+4}$; г) $\dfrac{2}{x^2-2x-1}+\dfrac{2}{x^2-2x+2}=-1$.

Указания. в) Обозначьте выражение x^2+3x через y, запишите уравнение с неизвестным y и решите его. г) Обозначьте выражение x^2-2x через y.

224. Решите уравнение с параметром a:

а) $(a-2)x=a^2-2a$; б) $a^2x-a=x+1$;

в) $\dfrac{x-2a}{x-4}=0$; г) $\dfrac{x-a+1}{(x-3)(2x+3)}=0$.

Решение. в) Приравняем числитель к нулю: $x-2a=0$; $x=2a$. Находим знаменатель дроби при $x=2a: x-4=2a-4$. Знаменатель равен 0, если $a=2$. Итак, при $a=2$ уравнение корней не имеет. Если $a\neq 2$, то знаменатель отличен от нуля и число $x=2a$ является корнем уравнения.

Ответ. Если $a\neq 2$, то $x=2a$; если $a=2$, то уравнение корней не имеет.

225. При каких значениях a уравнение $\dfrac{x+2a-1}{(x-1)(x+3)}=0$ не имеет корней?

226. При каких значениях a уравнение $\dfrac{(x-a)(x-2a-7)}{x-5}=0$ имеет один корень?

Упражнения для повторения

Упростите выражение:

227. а) $(a^2b^4)^3\cdot(2a^2b)^2$; б) $3x^{17}y^{14}\cdot(4xy^3)^3$;

в) $y^2(4x+3y^2-5)-(4xy^2+3y^4)$;

г) $(5a^2-3ab+b^3)\cdot b^3-(b^4-3ab^2-5a^2)\cdot b^2$.

228. а) $\dfrac{4xy^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x+y}{2xy}$; б) $\left(1-\dfrac{2a}{a^2+1}\right):\dfrac{a-1}{a^2+1}+1$.

229. Разложите на множители:

а) $(a+b)^2-b^2$; б) $a^4-2a^2b+b^2$; в) $2a^2+cd-ad-2ac$.

230. Можно ли разместить 120 деталей в трех ящиках так, чтобы в первом ящике было на 5 деталей больше, чем во втором, и на 8 деталей меньше, чем в третьем?

231. Бассейн наполнили водой за 6 ч, открыв две трубы. Если открыть только первую трубу, то бассейн наполнится за 15 ч. За какое время наполнится бассейн, если открыть только вторую трубу?

Вычислите:

232. а) $2{,}5^7 : 2{,}5^5 - 3^3 \cdot 0{,}3$; б) $16^3 : (4^{12} : 8^4)$;

в) $(0{,}5^{18} : 0{,}5^6) \cdot (2^{16} : 2^4)$; г) $(-1{,}7)^{30} : (-1{,}7)^{25} + 1{,}7^5$.

233*. а) $7^{64} - (7^{32} + 1)(7^{16} + 1)(7^8 + 1)(7^4 + 1)(7^2 + 1)(7 + 1)(7 - 1)$;

б) $2^{128} - (2^{64} + 1)(2^{32} + 1)(2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)$.

Задания для самопроверки №2

I уровень

1. Выполните умножение: $\dfrac{4m^2}{n-2} \cdot \dfrac{n-2}{m^3}$.

а) $\dfrac{4m^2}{m^3}$; б) $\dfrac{4}{m^2}$; в) $\dfrac{4}{m}$; г) $4m$.

2. Выполните деление: $\dfrac{a+b}{a} : \dfrac{a^2-b^2}{a^4}$.

а) $\dfrac{(a+b)(a^2-b^2)}{a^5}$; б) $\dfrac{a^4}{a-b}$; в) $\dfrac{a^3}{a-b}$; г) $\dfrac{a^3}{a+b}$.

3. Возведите в степень: $\left(\dfrac{2x^3}{a^2b}\right)^3$.

а) $\dfrac{6x^6}{a^5b^4}$; б) $\dfrac{8x^9}{a^6b^3}$; в) $\dfrac{2x^9}{a^6b^3}$; г) $\dfrac{8x^6}{a^6b^3}$.

4. Упростите выражение $\dfrac{1+a}{a-2} - \dfrac{a+2}{a} \cdot \dfrac{a^2}{a^2-4}$ и найдите его значение при $a = 3$.

а) -3; б) 1; в) 4; г) 3.

5. Решите уравнение: $\dfrac{x}{2x+3} = 1$.

а) -3; б) 1; в) 4; г) 3.

II уровень

1. Возведите в степень:

а) $\left(\dfrac{0{,}1a^3}{b^2}\right)^3$; б) $\left(-\dfrac{4xy^2}{3z^4}\right)^3$.

2. Упростите выражение:

а) $\dfrac{27a^3b^2}{4c^4}\cdot\dfrac{8ac^3}{9b^4}$; б) $\dfrac{18xy^2}{25z^4}:\dfrac{24x^2y^2}{5z}$.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x+3}{x^2+9}\cdot\left(\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x+3}\right)$; б) $\dfrac{a-3}{a-2}:\left(a-\dfrac{a}{a-2}\right)$.

4. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{y}{y+1}+1\right)\cdot\dfrac{3y+3}{2y-1}$ при $y=3$.

5. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2+2x}{x-1}=0$; б) $\dfrac{x}{x+3}=3$.

III уровень

1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{4ab^3}{9c^2}\cdot\left(\dfrac{3ac^2}{4b^2}\right)^3$; б) $\left(-\dfrac{6x^3y^2}{5z}\right)^2:\left(-\dfrac{9x^7y^2}{35z^3}\right)$.

2. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$; б) $\dfrac{2}{a+b}\cdot\left(\dfrac{a+b}{3a}-a-b\right)$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{x+2}{x^2-2x+1}\cdot\dfrac{3x-3}{x^2-4}-\dfrac{3}{x-2}$ при $x=5$.

4. Решите уравнение:

а) $\dfrac{3}{4x}+\dfrac{1}{6x}=2$; б) $\dfrac{3x^2+10x-25}{x+5}=x-5$.

5. Партию деталей рабочий может изготовить в 1,5 раза быстрее, чем его ученик. За какое время эту партию деталей изготовит ученик, если вместе с рабочим они могут ее изготовить за 4 ч?

IV уровень

1. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{49}{a^3+27}-\frac{a+3}{a^2-3a+9}\right)\cdot\frac{a^4+27a}{16-a^2}$;

б) $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right):\frac{a+1}{a^2-a+1}$.

2. Докажите тождество $\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2-y^2}\right)=\frac{y-x}{y+x}$.

3. Докажите, что значения выражения $\left(\frac{x-2}{x^2-2x+4}-\frac{6x-13}{x^3+8}\right):\frac{(x-3)^2}{2x^3+16}$ не зависят от значений x.

4. Решите уравнение:

а) $\frac{|2x-5|-1}{x-3}=0$; б) $\frac{4-5y}{y+5}-\frac{1+5y}{5-y}=\frac{7}{y^2-25}$.

5. Моторная лодка проплыла 36 км по течению реки и возвратилась в начальный пункт. На путь против течения реки ушло на 1 ч больше, чем на путь по течению. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 3 км/ч.

10. Степень с целым отрицательным показателем

Мы рассматривали степени с натуральным и нулевым показателем. Напомним, что

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}\text{ при } n>1;\quad a^1=a;\quad a^0=1\text{ при } a\neq 0.$$

1. Расширим действие возведения в степень, а именно рассмотрим, что означает возведение в степень с целым отрицательным показателем.

Вы знаете, что когда m и n — натуральные числа и $m>n$, то $a^m:a^n=a^{m-n}$ $(a\neq 0)$.

Чтобы ввести степень с целым отрицательным показателем, распространим правило деления степеней на случай $m<n$. Запишем число n в виде $n=m+k$, где k — натуральное число. Тогда получим:

$$a^m:a^n=a^m:a^{m+k}=a^{m-(m+k)}=a^{-k}.$$

Выполним деление, рассматривая частное $a^m:a^n$ как дробь:

$$a^m:a^n=a^m:a^{m+k}=\frac{a^m}{a^{m+k}}=\frac{a^m}{a^m\cdot a^k}=\frac{1}{a^k}.$$

Итак, целесообразно принять по определению, что

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}, \text{ где } a \neq 0, k \text{ — натуральное число.}$$

Определение | Если $a \neq 0$ и n — натуральное число, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Например, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $\quad 6^{-1} = \frac{1}{6^1} = \frac{1}{6}$. Степень числа 0 с целым отрицательным показателем не определена. Итак, запись 0^{-2} не имеет смысла.

2. При возведении дроби в отрицательный степень можно пользоваться формулой

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \ (a \neq 0, b \neq 0, n \text{ — натуральное}),$$

которая следует из таких преобразований:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1:\left(\frac{a}{b}\right)^n = 1:\frac{a^n}{b^n} = 1\cdot\frac{b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Например: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 16.$

Примеры решения упражнений

Пример 1. Вычислить:

а) $100 \cdot 5^{-3}$; **б)** $27 \cdot (-3)^{-5}$; **в)** $0{,}2^{-2} + 2^{-2}$.

● **а)** $100 \cdot 5^{-3} = 100 \cdot \frac{1}{5^3} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5} = 0{,}8;$

б) $27 \cdot (-3)^{-5} = 27 \cdot \frac{1}{(-3)^5} = \frac{3^3}{-3^5} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9};$

в) $0{,}2^{-2} + 2^{-2} = \frac{1}{0{,}2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{0{,}04} + \frac{1}{4} = 25 + 0{,}25 = 25{,}25.$ ●

Пример 2. Используя отрицательный показатель, представить дробь $\frac{3}{ab^3}$ в виде произведения.

● $\frac{3}{ab^3} = 3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b^3} = 3a^{-1}b^{-3}.$ ●

Пример 3. Упростить выражение $\left(x^{-1}+y^{-1}\right)\cdot(x+y)^{-1}$.

● $\left(x^{-1}+y^{-1}\right)\cdot(x+y)^{-1}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{y+x}{xy}\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{1}{xy}$. ●

Пример 4. Представить в виде рациональной дроби выражение $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$.

● $$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{b+a}{ab}:\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{(b-a)(b+a)}=\frac{ab}{b-a}.$$ ●

Устно

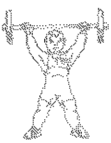
234. Вычислите: 2^4; $(-3)^3$; $(0{,}1)^3$; $(-1)^6$; $(-15)^0$; $0{,}3^0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^0$; 0^0.

235. Замените степень с целым отрицательным показателем дробью: 5^{-2}; 4^{-1}; 3^{-3}; 2^{-4}.

236. Вычислите: 5^{-1}; 3^{-2}; 4^{-3}; 2^{-4}; 1^{-6}.

237. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем: $\frac{1}{3^2}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{4^3}$; $\frac{1}{2^9}$.

Уровень А



238. Представьте числа 4, 8, 16, 32, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ в виде степени с основанием 2.

239. Представьте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$ в виде степени с основанием 3.

Вычислите:

240. 9^{-2}; 15^{-1}; 3^{-3}; 5^{-4}; 12^0; $(-2)^{-4}$; $(-3)^{-3}$; $0{,}5^{-2}$.

241. 7^{-2}; 2^{-5}; 4^{-1}; $(-5)^{-2}$; $(-6)^{-1}$; $0{,}7^0$.

Найдите значение выражения:

242. **а)** $5\cdot10^{-2}$; **б)** $16\cdot2^{-5}$; **в)** $5^{-3}:25^0$; **г)** $3:2^{-3}$;
д) $2^{-4}+2^{-2}$; **е)** $2^{-3}-2^{-4}$; **ж)** $6^{-1}+3\cdot3^{-2}$; **з)** $4^{-1}-3^{-2}$.

243. **а)** $14\cdot7^{-2}$; **б)** $4:2^{-4}$; **в)** $5^{-1}+2\cdot6^{-1}$; **г)** $2^{-3}-4^{-2}$.

Представьте в виде рациональной дроби выражение:

244. **а)** $4a^{-2}b^{-1}$; **б)** $7^{-1}ab^{-5}$; **в)** $x^{-2}y^{-3}$; **г)** $(a+b)^{-2}$.

245. **а)** $10x^{-1}y^{-4}$; **б)** $m^{-3}n^{-4}$; **в)** $4^{-1}a^{-3}b^3$; **г)** $5(x-1)^{-1}$.

Используя отрицательный показатель, представьте в виде произведения дробь:

246. а) $\dfrac{a}{b^3}$; б) $\dfrac{4}{xy^2}$; в) $\dfrac{1}{2ab}$; г) $\dfrac{a+b}{(a-b)^2}$.

247. а) $\dfrac{2}{a^2}$; б) $\dfrac{1}{ab}$; в) $\dfrac{a^4}{2b^3}$; г) $\dfrac{x}{x+y}$.

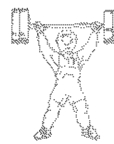
248. Найдите значение выражения:

а) b^{-2}; $(-b)^{-2}$; $-b^{-2}$ при $b = 4$; б) a^{-3}; $(-a)^{-3}$; $-a^{-3}$ при $a = 5$.

249. Найдите значение выражения:

а) $8a^{-3} + 1$ при $a = -2$; $a = 2$; б) $(b + 1)^{-2}$ при $b = -2$; $b = 0$; $b = 2$.

Уровень Б



Найдите значение выражения:

250. а) $256 \cdot 2^{-8}$; б) $0{,}1^{-2} + (-1)^{-24}$;

в) $1{,}5^{-3} : 2{,}5^{-2}$; г) $3^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$;

д) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{-2} - \left(\dfrac{2}{9}\right)^{-2}$; е) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-4} + \left(-1\dfrac{3}{5}\right)^{-2}$.

251. а) $1^{-1} + 2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1}$; б) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3} + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2} + \left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-1}$;

в) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-9} : \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3} - \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-1}$; г) $\left(2+2^{-1}\right)^{-2} - \left(2+2^{-2}\right)^{-1}$.

252. а) $243 \cdot 3^{-4}$; б) $0{,}2^{-3} - (-0{,}5)^{-2}$; в) $(-1{,}6)^{-1} : 2{,}5^{-2}$;

г) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} - \left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$; д) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{3}{10}\right)^{-2}$; е) $\left(1-2^{-1}\right)^{-4} + (-1)^{-25}$.

Упростите выражение:

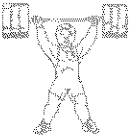
253. а) $(a+5)^{-2}(3a+15)$; б) $\left(a^{-2} - b^{-2}\right):(a+b)$;

в) $(b-4)^{-1} - (b+4)^{-1}$; г) $\left(x^{-3} - y^{-3}\right):\left(x^2 + xy + y^2\right)$;

д) $\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{y-1}\right)(y-x)^{-1}$; е) $\left(1 - \dfrac{x^{-2}}{x^{-2}+1}\right):\dfrac{1}{1-x^4}$.

254. а) $(a-b)^{-2}\left(a^2 - b^2\right)$; б) $\left((a-7)^{-1} + (a+7)^{-1}\right):\dfrac{a}{a-7}$;

в) $\left(m^{-1}-n^{-1}\right):\dfrac{m^2-n^2}{m^3n^3}$; г) $\dfrac{1}{x^{-3}-y^{-3}}-\dfrac{1}{x^{-3}+y^{-3}}$.



Уровень В

255. Докажите, что выражение $\left(2^m\cdot 11^{n-1}-2^{m-1}\cdot 11^n\right)\cdot 2^{-m}\cdot 11^{-n}$ при всех натуральных значениях m и n принимает одно и то же значение.

256. Может ли значение выражения $\dfrac{x^{-2}}{x^{-2}+1}$ равняться 1?

257. Существуют ли значения x, при которых является верным равенство $\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{-1}=0$?

258. Решите уравнение:

а) $x+x^{-1}=2$; б) $\dfrac{x+1}{x-1}+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{-1}=2$.

Упражнения для повторения

259. Запишите в виде одночлена стандартного вида выражение:

а) $-5x^3y^2\cdot 2xy^3$; б) $(-3a^2b^4)^2$; в) $(-2xy^5)^3$; г) $(m^4n^3)^2\cdot(-mn)^3$.

260. Найдите значение выражения:

а) $5^3\cdot 2^3$; б) $4^4\cdot 1{,}25^4\cdot 2^4$; в) $0{,}5^9\cdot(23)^3$; г) $2{,}5^5\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}4^5$.

261. Три рабочих изготовили 45 деталей. Второй рабочий изготовил деталей в два раза меньше, чем первый, и на 5 меньше, чем третий. Сколько деталей изготовил каждый рабочий отдельно?

262. Периметр прямоугольника равен 240 см. Найдите стороны прямоугольника, если одна из них на 40% длиннее другой.

263*. *Задача Л. Н. Толстого.* Косари нанялись выкосить два участка луга. Начав утром косить больший участок, они после полудня разделились: одна половина осталась на первом и до вечера его выкосила, а другая половина перешла косить на второй участок, площадь которого в два раза меньше площади первого. Сколько было косарей, если известно, что на следующий день один косарь докосил на протяжении дня второй участок?

11. Свойства степени с целым показателем

Степени с целым показателем имеют все свойства, установленные для степеней с натуральным показателем, а именно:

для любого $a \neq 0$ и произвольных целых m и n выполняются равенства:

$$a^m a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и произвольного целого n выполняются равенства:

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

При доказательстве этих свойств используют определение степени с целым показателем и свойства степени с натуральным показателем.

Покажем, например, что равенство $a^m a^n = a^{m+n}$ является верным, если показатели степеней являются целыми отрицательными числами. Пусть $m = -p$, $n = -q$, где p и q — натуральные числа. Докажем, что $a^{-p} \cdot a^{-q} = a^{-p-q}$ $(a \neq 0)$.

Поскольку $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$, $a^{-q} = \dfrac{1}{a^q}$, $a^{-(p+q)} = \dfrac{1}{a^{p+q}}$, то:

$$a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p \cdot a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{-p-q}.$$

Примеры решения упражнений

Пример 1. Вычислить:

а) $3^{-5} \cdot 3^2 : 3^{-4}$; **б)** $(5^{-2})^3 \cdot 5^4$; **в)** $(2^3)^{-4} : 4^{-5}$.

● **а)** $3^{-5} \cdot 3^2 : 3^{-4} = 3^{-5+2-(-4)} = 3^1 = 3$;

б) $(5^{-2})^3 \cdot 5^4 = 5^{-6} \cdot 5^4 = 5^{-6+4} = 5^{-2} = \dfrac{1}{25}$;

в) $(2^3)^{-4} : 4^{-5} = 2^{-12} : (2^2)^{-5} = 2^{-12} : 2^{-10} = 2^{-12-(-10)} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$. ●

Пример 2. Представить выражение в виде степени с основанием a:

а) $a^{-14} \cdot a^{12} : a^{-4}$; **б)** $(a^5)^{-2} : a^{-7}$.

● **а)** $a^{-14} \cdot a^{12} : a^{-4} = a^{-14+12-(-4)} = a^2$;

б) $(a^5)^{-2} : a^{-7} = a^{-10} : a^{-7} = a^{-10-(-7)} = a^{-3}$. ●

Пример 3. Представить в виде выражения, которое не содержит степени с отрицательным показателем: **а)** $\left(x^{-2}y^{-3}\right)^{-2}$; **б)** $\left(\frac{2}{3}m^{-4}n^{2}\right)^{-3}$.

● **а)** $\left(x^{-2}y^{-3}\right)^{-2}=x^{4}y^{6}$;

б) $\left(\frac{2}{3}m^{-4}n^{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}m^{12}n^{-6}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}m^{12}n^{-6}=\frac{27m^{12}}{8n^{6}}$. ●

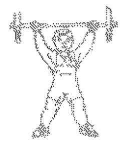
Устно

264. Вычислите:

а) $2^{-3}\cdot 2^{2}$; **б)** $3^{-4}:3^{-3}$; **в)** $5^{-8}\cdot 5^{8}$; **г)** $4^{3}:4^{5}$;

д) $\left(8^{-1}\right)^{-1}$; **е)** $\left(7^{-1}\right)^{2}$; **ж)** $2^{-2}\cdot 5^{-2}$; **з)** $\frac{8^{-2}}{4^{-2}}$.

Уровень А



Вычислите:

265. **а)** $2^{11}\cdot 2^{-7}$; **б)** $4^{15}:4^{17}$; **в)** $\left(3^{-1}\right)^{-2}\cdot 3^{-4}$;

г) $5^{3}:\left(5^{-1}\right)^{-4}$; **д)** $10^{-6}:10^{-7}\cdot 10^{2}$; **е)** $4^{-2}:4^{-5}+\left(10^{-1}\right)^{-2}$.

266. **а)** $3^{-5}:3^{-7}$; **б)** $2^{-7}\cdot 2^{5}$; **в)** $\left(5^{-1}\right)^{-3}\cdot 5^{-3}$;

г) $4^{-6}:4^{-4}\cdot 4^{5}$; **д)** $\left(6^{-3}\right)^{2}:6^{-5}$; **е)** $\left(11^{-2}\right)^{-1}-\left(9^{-1}\right)^{-2}$.

267. Представьте выражение в виде степени с основанием a:

а) $a^{3}:a^{-7}\cdot a^{5}$; **б)** $a^{-4}\cdot a^{6}:a^{9}$; **в)** $\left(a^{-2}\right)^{5}:a^{-3}$; **г)** $a^{17}\cdot\left(a^{8}\right)^{-2}$.

268. Представьте выражение в виде степени с основанием b:

а) $b^{8}:b^{-2}\cdot b^{10}$; **б)** $b^{4}\cdot b^{-12}:b^{3}$; **в)** $\left(b^{7}\right)^{-2}\cdot b^{10}$; **г)** $\left(b^{-9}\right)^{-2}:b^{14}$.

269. Представьте выражение $\left(x^{-8}\right)^{2}:x^{-14}$ в виде степени с основанием x и найдите его значение при $x=0,1$.

270. Представьте выражение $\left(y^{3}\right)^{-4}\cdot y^{15}$ в виде степени с основанием y и найдите его значение при $y=0,5$.

Поскольку $bd \neq 0$, то по определению частного,

$$mn = ac : bd = \frac{ac}{bd}, \text{ то есть } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Из тождества (1) следует *правило умножения дробей*: ***чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить их числители и знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем дроби.***

Это правило распространяется на случай умножения трех и более дробей.

С помощью правила умножения дробей можно обосновать правило возведения дроби в n-ю степень.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ раз}} = \frac{\overbrace{aa\ldots a}^{n \text{ раз}}}{\underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ раз}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Итак,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (2)$$

Из тождества (2) следует *правило возведения дроби в степень*: ***чтобы возвести дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записать числителем, а второй — знаменателем дроби.***

Примеры решения упражнений

Пример 1. Выполнить умножение:

а) $\frac{a^4b}{8c^2} \cdot \frac{6c^3}{a^3}$; б) $\frac{ab+b^2}{a^2} \cdot \frac{b}{a^2-b^2}$.

• а) $\frac{a^4b}{8c^2} \cdot \frac{6c^3}{a^3} = \frac{a^4b \cdot 6c^3}{8c^2 \cdot a^3} = \frac{3abc}{4}$;

б) $\frac{ab+b^2}{a^2} \cdot \frac{b}{a^2-b^2} = \frac{b(a+b) \cdot b}{a^2 \cdot (a-b)(a+b)} = \frac{b^2}{a^2(a-b)}$. •

Пример 2. Умножить дробь $\frac{x+3}{x-3}$ на многочлен $x-3$.

• $\frac{x+3}{x-3} \cdot (x-3) = \frac{x+3}{x-3} \cdot \frac{x-3}{1} = \frac{(x+3) \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot 1} = x+3$. •

321. Выполните деление:

а) $\frac{5x^3}{4a^3}:\frac{15x^2}{8a^4}$; б) $\frac{4-b^2}{1-b}:\frac{2b+b^2}{1-b^2}$; в) $\frac{x^2-2xy+y^2}{2x+2y}:\frac{2x-2y}{x^2+xy}$.

322. Найдите значение выражения $\frac{x^2-y^2}{2x^2y^2}:\frac{x-y}{20xy^2}$ при $x=\frac{1}{3}$; $y=2\frac{2}{3}$.

323. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right)$;

б) $\left(a-\frac{2a-1}{a+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)$;

в) $\left(\frac{2a}{a+2}+\frac{2a}{6-3a}+\frac{8a}{a^2-4}\right):\frac{a-4}{a-2}$.

324. Докажите тождество:

а) $\left(x-\frac{4xy}{x+y}+y\right):\left(\frac{x}{y+x}-\frac{y}{y-x}-\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)=x-y$;

б) $\left(\frac{1}{m-2n}+\frac{6m}{4n^2-m^2}+\frac{1}{m+2n}\right):\left(\frac{m^2+4n^2}{m^2-4n^2}+1\right)=-\frac{2}{m}$.

325. Упростите выражение $\frac{a+1}{a^2+1-2a}-\frac{1-a(1-a)}{1-a}\cdot\frac{a+1}{a^3+1}$ и найдите его значение при $a=2$.

326. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения $\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{xy-y^2}{x^4-y^4}:\left(1-\frac{x}{x+y}\right)$ равно 0.

327. Докажите, что выражение $\frac{1}{(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2}\cdot 4x^2$ при всех допустимых значениях переменных принимает одно и то же значение.

328*. Представьте в виде рациональной дроби выражение:

а) $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}}}$; б) $\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

329. Вычислите:

а) $81 \cdot 3^{-3}$; б) $0{,}01^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; в) $(-2{,}5)^{-1} : 1{,}5^{-2}$;

г) $3^{-4} \cdot 3^3 + 2^{-4} \cdot 2^5$; д) $(4^{-4})^{-4} : 2^{30}$; е) $\left(-\frac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(1\frac{3}{5}\right)^{-4} - \left(2\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

330. Преобразуйте выражение так, чтобы оно не содержало степеней с отрицательным показателем:

а) $\frac{ab^{-2}}{c}$; б) $\frac{(a-b)^{-1}}{a^{-1}(a+b)}$; в) $\left(\frac{x^{-2}}{2y^3}\right)^{-1}$; г) $\frac{(c+c^{-1})^{-2}}{c^{-1}}$.

331. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{4x^{-2}y}{3}\right)^{-3} \cdot 64x^6y^{-7}$; б) $\left(3a^{-5}c^{-2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{c^5}{9}\right)^{-1}$;

в) $(2x+3)^{-2}(4x+6)$; г) $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$;

д) $\left(\frac{1}{x^{-1}} - \frac{1}{y^{-1}}\right)(x-y)^{-1}$; е) $\frac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}+b^{-1}}$.

332. Представьте выражение в виде степени с основанием 2:

а) $32 \cdot 2^{n-3}$; б) $2^{n+1} \cdot 64$; в) $16 \cdot 2^{-n+3}$; г) $\frac{1}{32} \cdot 2^{n-3}$.

333. В выражении $x^{-7} + x^{-5}$ вынесите за скобки множитель: x^{-3}; x^{-5}; x.

334*. Докажите, что при всех **целых** значениях переменных выражение принимает одно и то же значения:

а) $\frac{3^m \cdot 7^{-n-1} + 3^{m-2} \cdot 7^{-n}}{3^m \cdot 7^{-n}}$; б) $\frac{5^{-n-1} \cdot 7^{-n} + 5^{-n} \cdot 7^{-n-1}}{35^{-n+1}}$.

335. Решите уравнение:

а) $\frac{x+1}{x-2} = 0$; б) $\frac{x^3+3x}{x+3} = 0$; в) $\frac{x+2}{x^2-4} = 0$; г) $\frac{3x}{x-1} = 2$;

д) $\frac{2x-3}{2x-1} = \frac{x+3}{x-1}$; е) $\frac{x-2}{2x+1} + \frac{x-4}{3x-2} = 0$;

ж) $\frac{x+7}{x} - \frac{x+5}{x+4} = \frac{2}{x^2+4x}$; з) $\frac{z-1}{z+5} + \frac{4-z}{5-z} = \frac{1-2z^2}{25-z^2}$.

336. Выразите время в секундах и запишите полученное число в стандартном виде: 1 ч; 1 сутки; 30 суток.

337. Выразите массу в граммах и запишите полученное число в стандартном виде: 5 ц 11 кг; 1 т 2 ц; 23 т.

Задания для самопроверки №3

I уровень

1. Укажите верные равенства:

а) $(-100)^0 = 1$; б) $4^{-2} = -16$; в) $(-3)^0 = -3$; г) $(-5)^{-2} = \frac{1}{25}$.

2. Вычислите: $7^{-2} \cdot 14^0$.

а) 49; б) $\frac{2}{7}$; в) $\frac{1}{49}$; г) $\frac{1}{7}$.

3. Найдите значение выражения $2^4 \cdot 2^{-3} + 2^{-1}$.

а) 2; б) 130; в) $2\frac{1}{2}$; г) $2\frac{1}{4}$.

4. Запишите в виде степени выражение $b^6 : b^{-2}$.

а) b^8; б) b^{-12}; в) b^{-3}; г) b^4.

5. Запишите в стандартном виде число 2570.

а) $25{,}7 \cdot 10^2$; б) $2{,}57 \cdot 10^{-3}$; в) $0{,}257 \cdot 10^4$; г) $2{,}57 \cdot 10^3$.

II уровень

1. Вычислите:

а) $(-2)^{-3} \cdot (-5)^0$; б) $(0{,}1)^{-2} \cdot \frac{20}{40^0}$.

2. Найдите значение выражения:

а) $2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$; б) $(-3)^{-2} + 12 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(2a^{-1}b^3\right) \cdot \left(6a^2b^{-3}\right)$; б) $(b-3)^{-2} \cdot \left(b^2 - 3b\right)$.

4. Представьте в виде выражения, которое не содержит степени с отрицательным показателем:

а) $\left(3a^{-5}b^2\right)^{-2}$; б) $\left(\frac{1}{3}m^4n^{-2}\right)^{-3}$.

5. Представьте выражение b^{-18} в виде степени:

а) с основанием b^{-2}; б) с основанеим b^3.

III уровень

1. Найдите значение выражения:

а) $8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}+(0,2)^{-2}$; б) $3^{-5}:\left(3^{-6}:9^{-2}\right)$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{a^2b^{-1}}{2c^{-2}}\cdot\frac{8a^{-1}c}{b^{-4}}$; б) $\left(\frac{1}{3}m^{-3}n^4\right)^2:\left(m^{-4}n^5\right)$.

3. Представьте в виде степени выражение:

а) $\frac{64a^{-3}}{b^6}$; б) $\frac{8x^3}{x^{-2}y^2}\cdot\frac{2y^6}{x^{-3}y^{-2}}$.

4. Упростите выражение:

а) $(a+2)^{-2}\cdot(5a+10)$; б) $\left(a^{-2}-b^{-2}\right):\frac{(a-b)}{ab}$.

5. Вычислите и запишите результат числом в стандартном виде:

а) $\left(2,3\cdot10^4\right)\cdot\left(6,1\cdot10^{-5}\right)$; б) $\left(1,7\cdot10^3\right):\left(5,1\cdot10^{-2}\right)$.

IV уровень

1. Представьте в виде степени выражение:

а) $\frac{a^3}{a^{m-4}a^m}$; б) $\frac{b^n}{b^{2-n}b^{2n}}:b^{-n+1}$.

2. Вычислите:

а) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-9}$; б) $\frac{27^{-3}\cdot16^{-6}}{8^{-9}\cdot81^{-2}}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{x^m}{y^k}\right)^{-2}\cdot x^{m-3}\cdot y^{-2k+1}$; б) $\left(\frac{2y}{b}\right)^{-n}:\left(\frac{2b^2}{y}\right)^{1-n}$

4. Упростите выражение:

а) $\left(x^{-2}+y^{-2}\right)\cdot\frac{(xy)^2}{x^4-y^4}$; б) $\left(a^{-n}-a^n\right)^2-a^{2n}\left(1+a^{-4n}\right)$.

5. Найдите число x, при котором выполняется указанное равенство, и запишите это число в стандартном виде:

а) 120 км/мин = x м/с; б) 3,6 м/мин^2 = x м/с^2.

§ 2. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

1. Рассмотрим задачу: найти сторону квадрата, площадь которого равна 9 см^2.

Пусть сторона квадрата равна x см. Тогда его площадь будет x^2 см^2, что по условию задачи равно 9 см^2. Итак, $x^2 = 9$. Решим полученное уравнение:

$x^2 = 9$; $\qquad x^2 - 9 = 0$; $\qquad (x - 3)(x + 3) = 0$;

$x - 3 = 0$ или $x + 3 = 0$; $\qquad x = 3$ или $x = -3$.

Длина стороны квадрата не может выражаться отрицательным числом. **Итак,** искомая сторона равна 3 см.

При решении задачи мы нашли числа 3 и -3, квадраты которых равны 9. Каждое из этих чисел называют *квадратным корнем* из числа 9.

Определение | Квадратным корнем из числа a называется такое число, квадрат которого равен a.

Квадратными корнями из числа 9, как мы уже показали, являются два числа: 3 и -3.

Квадратными корнями из числа 6,25 являются числа 2,5 и $-2,5$, так как $2,5^2 = 6,25$ и $(-2,5)^2 = 6,25$.

Квадратным корнем из числа 0 является только число 0, так как только квадрат нуля равен нулю.

Квадратных корней из числа -9 не существует, так как нет чисел, квадрат которых был бы равен отрицательному числу.

2. Числа 3 и -3 являются квадратными корнями из числа 9. Неотрицательный из этих корней, то есть число 3, называют *арифметическим квадратным корнем* из числа 9.

Определение | Арифметическим квадратным корнем из числа a называется такое неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$ ($\sqrt{\ }$ — знак арифметического квадратного корня). Выражение $\sqrt{a}$ читают: квадратный корень из a (верно было бы: арифметический квадратный корень из a, но при чтении слово арифметический опускают).

Итак, $\sqrt{9} = 3$ (читают: корень из девяти равен трем).

По определению арифметического квадратного корня:

$\sqrt{121} = 11$, так как число 11 неотрицательное ($11 \geq 0$) и $11^2 = 121$;

$\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$, так как $0{,}6 \geq 0$ и $0{,}6^2 = 0{,}36$;

$\sqrt{0} = 0$, так как $0 \geq 0$ и $0^2 = 0$.

Итак, ***равенство***

$$\sqrt{a} = b$$

***является верным, если выполняются два условия*: 1) $b \geq 0$; 2) $b^2 = a$.**

$\sqrt{-1}$ не существует, так как нет числа, квадрат которого был бы равен -1. Говорят, что выражение $\sqrt{-1}$ не имеет смысла.

Вообще, ***выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только при $a \geq 0$.***

3. Нахождение значения арифметического квадратного корня иногда называют извлечением квадратного корня. Извлекать квадратные корни из натуральных чисел, которое являются точными квадратами, можно по таблице квадратов (см. с. 221). Пусть нужно найти $\sqrt{5476}$. С помощью таблицы квадратов находим, что число 5476 является квадратом числа 74, поэтому $\sqrt{5476} = 74$. Понятно, что с помощью таблицы квадратов нельзя найти значение квадратного корня из натурального числа, которое не является точным квадратом или квадрат которого не помещен в таблицу.

Для извлечения квадратного корня из числа можно использовать микрокалькулятор. Для этого нужно ввести это число в микрокалькулятор, а потом нажать кнопку $\boxed{\sqrt{\ }}$. На экране микрокалькулятора появится значение корня.

Найдем $\sqrt{111{,}9}$. Введем в микрокалькулятор число 111,9 и нажмем кнопку $\boxed{\sqrt{\ }}$. На экране появится число 10,5782796 — приближенное значение $\sqrt{111{,}9}$. Полученный результат округляют до нужного числа знаков. Например, округлив результат до тысячных, получим: $\sqrt{111{,}9} \approx 10{,}578$.

Найдем $\sqrt{11943936}$. Введем в микрокалькулятор число 11943936 и нажмем кнопку $\boxed{\sqrt{\ }}$. На экране появится число 13456 — точное значение $\sqrt{11943936}$.

Для тех, кто хочет знать больше

Какой должна быть сторона квадрата, чтобы его площадь равнялась заданному числу m? Такая задача возникала и ее умели решать еще 4 тыс. лет тому вавилонские ученые. Чтобы дать ответ на вопрос задачи, нужно извлечь арифметический квадратный корень из числа m. Если число m было натуральным, но не было квадратом другого натурального числа, то вавилоняне искали приближенное значение $\sqrt{m}$. Для этого они записывали m в виде суммы $a^2 + b$, где b весьма малое по сравнению с a^2, а потом использовали такое правило:

$$\sqrt{m} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Например, при $m = 105$ $\sqrt{105} = \sqrt{10^2 + 5} \approx 10 + \frac{5}{2 \cdot 10} = 10,25$. Проверим: $10,25^2 = 105,0625$. Это правило нахождения приближенного значения квадратного корня использовали и в Древней Греции, его подробное описание дал древнегреческий ученый Герон (I в. н. э.).

Примеры решения упражнений

Пример 1. Доказать, что $\sqrt{0,04} = 0,2$.

● Число 0,2 неотрицательное, и его квадрат равен 0,04 ($0,2^2 = 0,04$). Поэтому $\sqrt{0,04} = 0,2$. ●

Пример 2. Найти значение выражения $\sqrt{49} \cdot \sqrt{0,25} - \sqrt{0,2 \cdot 0,8}$.

● $\sqrt{49} \cdot \sqrt{0,25} - \sqrt{0,2 \cdot 0,8} = 7 \cdot 0,5 - \sqrt{0,16} = 3,5 - 0,4 = 3,1$. ●

Устно

338. Найдите все квадратные корни из числа; арифметический квадратный корень из числа:

а) 49; б) 1; в) 0; г) –16.

339. Докажите, что:

а) $\sqrt{81} = 9$; б) $\sqrt{0,09} = 0,3$.

340. Верно ли равенство:

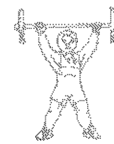
а) $\sqrt{36} = 8$; б) $\sqrt{36} = -6$; в) $\sqrt{36} = 6$?

341. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{256}$; б) $\sqrt{-16}$; в) $\sqrt{-2\cdot(-8)}$?

342. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{x}$; б) $\sqrt{x^2}$; в) $\left(\sqrt{x}\right)^2$?



Уровень А

Вычислите:

343. а) $\sqrt{25}$; б) $\sqrt{1}$; в) $\sqrt{144}$; г) $\sqrt{225}$;

д) $\sqrt{0,09}$; е) $\sqrt{0,64}$; ж) $\sqrt{1,21}$; з) $\sqrt{4,41}$.

344. а) $\sqrt{36}$; б) $\sqrt{81}$; в) $\sqrt{196}$; г) $\sqrt{400}$;

д) $\sqrt{0,01}$; е) $\sqrt{0,25}$; ж) $\sqrt{2,25}$; з) $\sqrt{3,24}$.

345. а) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{49}}$; в) $\sqrt{\frac{36}{81}}$; г) $\sqrt{\frac{16}{225}}$.

346. а) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{1}{81}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{121}}$; г) $\sqrt{\frac{100}{169}}$.

Докажите, что:

347. а) $\sqrt{3,61}=1,9$; б) $\sqrt{0,0121}=0,11$.

348. а) $\sqrt{20,25}=4,5$; б) $\sqrt{0,0081}=0,09$.

Найдите значение выражения:

349. а) $\sqrt{36}+\sqrt{64}$; б) $\sqrt{196}\cdot\sqrt{0,25}$;

в) $3\sqrt{1,69}-\sqrt{4}$; г) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{6,25}-1,5\sqrt{49}$;

д) $\sqrt{81}+\sqrt{225}-\sqrt{441}$; е) $\sqrt{1600}:\sqrt{6400}-5\sqrt{0,25}$;

ж) $\sqrt{0,7\cdot 0,8-0,2}$; з) $\sqrt{11,36+0,8\cdot 5,8}$.

350. а) $\sqrt{100}-\sqrt{49}$; б) $\sqrt{144}:\sqrt{36}$;

в) $\sqrt{1,96}+2\sqrt{1,44}$; г) $\sqrt{0,36}\cdot\sqrt{900}-17\sqrt{9}$;

д) $\sqrt{2,7\cdot 0,5+0,09}$; е) $\sqrt{1,09-0,4\cdot 2,7}$.

351. а) $\sqrt{2x+3}$ при $x=3$; $x=-1$; $x=0{,}12$;

б) $\sqrt{a-2b}$ при $a=8$, $b=2$; $a=-3$, $b=-14$.

352. $\sqrt{4a-3}$ при $a=1$; $a=7$; $a=31$; $a=0{,}76$.

Найдите с помощью таблицы квадратов значение квадратного корня:

353. а) $\sqrt{361}$; б) $\sqrt{1444}$; в) $\sqrt{4096}$; г) $\sqrt{8836}$.

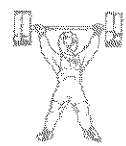
354. а) $\sqrt{576}$; б) $\sqrt{2116}$; в) $\sqrt{5929}$; г) $\sqrt{9216}$.

Найдите с помощью микрокалькулятора значение квадратного корня (результат округлите до сотых):

355. а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{50}$; в) $\sqrt{1,6}$; г) $\sqrt{4,38}$.

356. а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{12,5}$; г) $\sqrt{0,15}$.

Уровень Б



357. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{5x}$; б) $\sqrt{-5x}$; в) $\sqrt{5(-x)^2}$?

Имеет ли смысл выражение:

358. а) $\sqrt{15\cdot17-16^2}$; б) $\sqrt{(-0,3)\cdot(-1,8)-0,5}$; в) $\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2-\frac{1}{3}}$?

359. а) $\sqrt{21^2-24\cdot20}$; б) $\sqrt{-3,6-2:(-0,5)}$; в) $\sqrt{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}-\frac{2}{25}}$?

Найдите значение выражения:

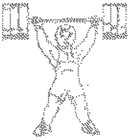
360. а) $10\sqrt{0,0049}+4\sqrt{0,49}$; б) $\sqrt{\frac{16}{81}}:\sqrt{\frac{64}{225}}+\sqrt{\frac{1}{9}}$;

в) $\frac{2}{9}\sqrt{81}+\sqrt{2,25}+2\sqrt{3,24}$; г) $\sqrt{0,09}\cdot\sqrt{2500}-0,7\sqrt{900}$;

д) $\frac{3}{7}\left(\sqrt{441}-\sqrt{196}\right)\left(\sqrt{1,69}-\sqrt{2,89}\right)$; е) $\left(\sqrt{0,0016}-\sqrt{16}\right):\left(\sqrt{18\frac{7}{9}}-\frac{1}{3}\right)$.

361. а) $3\sqrt{0,0009}+9\sqrt{\frac{1}{10000}}$; б) $\sqrt{2\frac{7}{9}}:\left(\sqrt{\frac{4}{81}}+\sqrt{\frac{16}{81}}\right)$;

в) $\sqrt{0,0144}+2\sqrt{0,0225}\cdot\sqrt{\dfrac{4}{9}}$; г) $\dfrac{5}{9}\left(\sqrt{40000}-\sqrt{22500}\right):\left(\sqrt{1}-\sqrt{\dfrac{16}{81}}\right)$.



Уровень B

362. Докажите, что выражение имеет смысл при любом значении x:

а) $\sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)+1}$; б) $\sqrt{x^2-8x+17}$.

363. При каких значениях x выполняется равенство:

а) $\sqrt{x}=-x$; б) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=0$; в) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0$?

Упражнения для повторения

364. Найдите значение выражения:

а) $25^2+(-25)^2$; б) $1,25^2-(-1,25)^2$; в) $\left(2\dfrac{2}{7}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{2}{7}\right)^2$.

365. Найдите значения выражений a^2, $(-a)^2$, $|a|^2$ при $a=-1,2$.

366. Найдите наименьшее значение выражения:

а) x^2+2; б) x^2-1; в) $(2x)^2+(3x)^2$.

367. На трех полках стоят книги. На нижней полке книг в два раза меньше, чем на двух других, на средней — в три раза меньше, чем на двух других, а на верхней полке стоит 30 книг. Сколько всего книг на полках?

368*. Пшеницей засеяли 65% первого поля и 45% второго поля. Известно, что на первом и втором полях вместе засеяли 53% общей площади обоих полей. Какую часть составляет площадь первого поля от общей площади обоих полей?

2. Тождества $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $a\ge 0$; $\sqrt{a^2}=|a|$. Уравнение $x^2=a$

1. Вы знаете, что $\sqrt{a}$ — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a, поэтому имеет место тождество:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad(a\ge 0).$$

Например, $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$, $\left(\sqrt{1,5}\right)^2 = 1,5$.

2. Докажем, что при любом значении a выполняется равенство:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

В самом деле, выражение $|a|$ принимает неотрицательные значения и квадрат этого выражения равен a^2 (если $a \ge 0$, то $|a| = a$ и $|a|^2 = a^2$; если $a < 0$, то $|a| = -a$ и $|a|^2 = (-a)^2 = a^2$;). Поэтому равенство $\sqrt{a^2} = |a|$ является верным.

3. Рассмотрим уравнение $x^2 = a$, где a — некоторое число.

Квадрат числа не может быть равен отрицательному числу. Поэтому при $a < 0$ уравнение корней не имеет.

При $a = 0$ получим уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственный корень $x = 0$.

При $a > 0$ корнями уравнения $x^2 = a$ являются числа, квадраты которых равны a, то есть в данном случае корнями уравнения являются квадратные корни из числа a: $x = -\sqrt{a}$ и $x = \sqrt{a}$.

Итак, уравнение $x^2 = a$:

1) не имеет корней при $a < 0$;

2) имеет единственный корень $x = 0$ при $a = 0$;

3) имеет два корня $x = -\sqrt{a}$ и $x = \sqrt{a}$ при $a > 0$.

Например, уравнение $x^2 = -3$ не имеет корней; уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня $x = -\sqrt{4} = -2$ и $x = \sqrt{4} = 2$; уравнение $x^2 = 3$ имеет два корня $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$.

Для тех, кто хочет знать больше

Рассмотрим уравнение $\sqrt{x} = a$, где a — некоторое число.

При $a < 0$ уравнение корней не имеет, поскольку арифметический квадратный корень не может быть равен отрицательному числу.

При $a \ge 0$ по определению арифметического квадратного корня равенство $\sqrt{x} = a$ будет верным только когда $x = a^2$. В данном случае уравнения имеет единственный корень $x = a^2$.

Итак, уравнение $\sqrt{x} = a$:

1) не имеет корней при $a < 0$;

2) имеет единственный корень $x = a^2$ при $a \ge 0$.

Например, уравнение $\sqrt{x} = -2$ не имеет корней, уравнение $\sqrt{x} = 5$ имеет единственный корень $x = 5^2 = 25$.

Уравнение $\sqrt{x} = a$ является примером иррационального уравнения (так называют всякое уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком корня). При $a \geq 0$ его можно решить путем возведения обеих частей уравнения в квадрат: $\left(\sqrt{x}\right)^2 = a^2$; $x = a^2$.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Найти значение выражения $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{3^2}$.

● $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{3^2} = |-5| + |3| = 5 + 3 = 8$. ●

Пример 2. Найти значение выражения $\sqrt{9a^2 + 6a + 1}$ при $a = -5$; $a = 0{,}7$.

● $\sqrt{9a^2 + 6a + 1} = \sqrt{(3a+1)^2} = |3a + 1|$.

При $a = -5$ $\quad |3a + 1| = |3 \cdot (-5) + 1| = |-14| = 14$.

При $a = 0{,}7$ $\quad |3a + 1| = |3 \cdot 0{,}7 + 1| = |3{,}1| = 3{,}1$. ●

Пример 3. Решить уравнение:

а) $2x^2 - 14 = 0$; **б)** $3 + 2x^2 = 0$; **в)** $(2x - 1)^2 = 9$.

● **а)** $2x^2 - 14 = 0$; $2x^2 = 14$; $x^2 = 7$; $x = -\sqrt{7}$ или $x = \sqrt{7}$.

Ответ. $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$.

б) $3 + 2x^2 = 0$; $2x^2 = -3$; $x^2 = -1{,}5$ — уравнение корней не имеет, поскольку $-1{,}5 < 0$.

Ответ. Уравнение корней не имеет.

в) $(2x - 1)^2 = 9$;

1) $2x - 1 = -3$; $\quad 2x = -2$; $\quad x = -1$;

2) $2x - 1 = 3$; $\quad 2x = 4$; $\quad x = 2$.

Ответ. -1; 2. ●

Пример 4. Решить уравнение:

а) $3\sqrt{x} - 12 = 0$; **б)** $2\sqrt{x} + 4 = 0$; **в)** $\sqrt{3x + 2} = 1$.

● **а)** $3\sqrt{x} - 12 = 0$; $3\sqrt{x} = 12$; $\sqrt{x} = 4$; $x = 16$.

Ответ. 16.

б) $2\sqrt{x}+4=0$; $2\sqrt{x}=-4$; $\sqrt{x}=-2$ — уравнение корней не имеет.

Ответ. Уравнение корней не имеет.

в) $\sqrt{3x+2}=1$; $3x+2=1$; $3x=-1$; $x=-\frac{1}{3}$.

Ответ. $-\frac{1}{3}$. ●

Устно

369. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{3}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{4,32}\right)^2$; в) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$.

370. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{5,1^2}$; б) $\sqrt{(-3)^2}$; в) $\sqrt{(-1,1)^2}$.

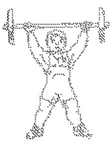
371. Решите уравнение:

а) $x^2=49$; б) $x^2=11$; в) $x^2=0$; г) $x^2=-11$.

372. Найдите значение x, при котором:

а) $\sqrt{x}=2$; б) $\sqrt{x}=-2$; в) $\sqrt{x}=0$.

Уровень А



Найдите значение выражения:

373. а) $\left(-\sqrt{7}\right)^2$; б) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; в) $\left(-3\sqrt{5}\right)^2$.

374. а) $\left(5\sqrt{2}\right)^2$; б) $\left(-2\sqrt{3}\right)^2$; в) $10\left(\sqrt{3,2}\right)^2$.

375. а) $\sqrt{89^2}-48$; б) $\sqrt{107^2}+\sqrt{(-107)^2}$; в) $2\cdot\sqrt{3,8^2}-\sqrt{(-3,8)^2}$.

376. а) $100-\sqrt{99^2}$; б) $\sqrt{67^2}-\sqrt{(-67)^2}$; в) $\sqrt{1,9^2}+\sqrt{(-1,9)^2}$.

Решите уравнение:

377. а) $x^2=121$; б) $x^2=0,16$; в) $x^2=5$; г) $x^2=0,3$;

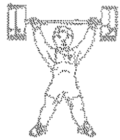
д) $x^2=\frac{1}{4}$; е) $x^2=\frac{1}{3}$; ж) $x^2=-1$; з) $x^2=1,44$.

378. а) $3x^2=48$; б) $x^2+8=57$; в) $44-x^2=8$; г) $-2x^2=18$;

д) $-0,4x^2=-8$; е) $\frac{1}{2}x^2=1$; ж) $12+3x^2=6$; з) $2(x^2+1)=10$.

379. а) $x^2 = 144$; б) $x^2 = 15$; в) $x^2 = 1{,}21$; г) $x^2 = \frac{2}{5}$;

д) $5x^2 = 20$; е) $2 - x^2 = 4$; ж) $4x^2 + 5 = 41$; з) $3(x^2 + 4) = 9$.



Уровень Б

Найдите значение выражения:

380. а) $\sqrt{(-8,4)^2} \cdot \sqrt{(-0,5)^2} - \left(\sqrt{4,5}\right)^2$; б) $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{(-6)^2}}$.

381. а) $\left(\sqrt{90}\right)^2 + \sqrt{(-135)^2} \cdot \left(\sqrt{0,6}\right)^2$; б) $\sqrt{\sqrt{(-7)^2} - \left(\sqrt{3}\right)^2}$.

382. а) $\sqrt{(2b-3)^2}$ при $b = -6$; $b = 1{,}6$; б) $\sqrt{a^2 - 2a + 1}$ при $a = -8$; $a = 2{,}7$.

383. а) $\sqrt{(b-7)^2}$ при $b = -1$; $b = 9{,}2$; б) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ при $x = -3$; $x = 1{,}4$.

Решите уравнение:

384. а) $2(x^2 - 3) + 3(2x^2 + 1) = 5$; б) $(2x - 5)^2 + (2x + 5)^2 = 62$;

в) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$; г) $(5x + 1)^2 - 2 = 10x$.

385. а) $3x^2 - 8 + 2(3 - x^2) = 1$; б) $(2x - 1)(2x + 1) = x^2 + 2$;

в) $(x - 3)^2 + (x + 3)^2 = 146$; г) $9 - (0{,}5x - 1)^2 = x$.

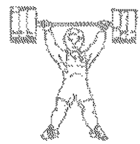
386. а) $\sqrt{x} = 8$; б) $\sqrt{x} = 1$; в) $\sqrt{x} = -4$;

г) $\sqrt{x-1} = 2$; д) $\sqrt{3x+2} = 4$; е) $\sqrt{x} + 9 = 7$;

ж) $\sqrt{x - 0{,}09} = 0{,}9$; з) $\sqrt{x^2 - 1} = 1$; и) $\sqrt{x^2 + 5} = 2$.

387. а) $\sqrt{x} = 10$; б) $\sqrt{x} = -2$; в) $\sqrt{x+3} = 2$;

г) $\sqrt{2x-5} = 0{,}2$; д) $\sqrt{x^2 + 2} = 1$; е) $\sqrt{x^2 + 3} = 2$.



Уровень В

388. Докажите тождество:

а) $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1} = a^2 + 1$; б) $\sqrt{x^2 + 2|x| + 1} = |x| + 1$.

389. Упростите выражение $\sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 6x^2 + 9}$.

390. При каких значениях a уравнение имеет один корень:

а) $x^2 = a^2 - 2a$; б) $\sqrt{x^2+1} = a$?

391. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $\sqrt{x} = 2x - x^2 - 2$; б) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 1$.

392. Решите уравнение:

а) $(x-2)\sqrt{x+2} = 0$; б) $(x+1)\sqrt{x-2} = 0$;

в) $\sqrt{x} + \sqrt{x^2+2x} = 0$; г) $\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x^4-16} = 0$.

Указание. в) Выражения $\sqrt{x}$ и $\sqrt{x^2+2x}$ принимают только неотрицательные значения. Поэтому сумма $\sqrt{x} + \sqrt{x^2+2x}$ может быть равна нулю только тогда, когда одновременно выполняются равенства $\sqrt{x} = 0$ и $\sqrt{x^2+2x} = 0$, т. е. $x = 0$ и $x^2 + 2x = 0$.

Упражнения для повторения

393. Решите уравнение:

а) $\dfrac{10x+20}{x^2-2x-8} = 0$; б) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x-2} = 0$.

394. Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений $x + 2y = 5$ и $3x - y = -6$.

395*. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + ay = 2 \end{cases}$ не имеет решений?

396. Трое рабочих изготовили партию деталей. Первый рабочий изготовил $\dfrac{2}{5}$ всех деталей, второй — 75% того количества, которое изготовил первый, а третий — на 6 деталей меньше, чем первый. Сколько всего деталей изготовили рабочие?

397*. Температуру можно измерять по шкалам Цельсия и Фаренгейта. Известно, что 0 градусам по Цельсию соответствует 32 градусам по Фаренгейту, а 100 градусам по Цельсию соответствует 212 градусов по Фаренгейту.

а) Какую температуру воздуха показывает термометр со шкалой Фаренгейта, если термометр со шкалой Цельсия показывает 20 градусов?

б) Найдите температуру, которая и по шкале Цельсия, и по шкале Фаренгейта выражается одним и тем же числом.

3. Иррациональные и действительные числа

1. В курсе математики мы изучали натуральные, целые и рациональные числа.

Натуральные числа

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

используют в основном при счете.

Целые числа

$$\ldots\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

— это натуральные числа, противоположные им числа и число 0.

Рациональные числа — это целые и дробные числа. Примерами рациональных чисел являются 1,2; –3,65; $\frac{2}{5}$; $-3\frac{4}{7}$; 2; 0; –3 и т. п.

Все натуральные числа образуют *множество натуральных чисел*, которое обозначают буквой N; все целые числа образуют *множество целых чисел*, которое обозначают буквой Z; все рациональные числа образуют множество *рациональных чисел*, которое обозначают буквой Q. Каждое натуральное число является целым. Поэтому множество натуральных чисел является частью (подмножеством) множества целых чисел. В свою очередь, множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел (см. рис. 1).

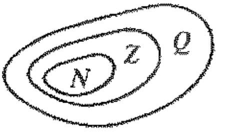


Рис. 1

2. Любое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное. Например,

$$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}; \quad -3{,}7 = \frac{-37}{10}; \quad 2 = \frac{2}{1}; \quad -3 = \frac{-3}{1}.$$

Поэтому говорят, что *рациональные числа — это числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное.*

3. Рациональные числа можно представить также в виде десятичных дробей. Например, чтобы представить рациональные числа $\frac{3}{8}$ и $\frac{18}{55}$ в виде десятичных дробей, нужно числители дробей разделить на их знаменатели.

$$\begin{array}{r|l} 3 & 8 \\ \hline -30 & 0{,}375 \\ \underline{24} & \\ -60 & \\ \underline{56} & \\ -40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 18 & 55 \\ \hline -180 & 0{,}32727\ldots \\ \underline{165} & \\ -150 & \\ \underline{110} & \\ -400 & \\ \underline{385} & \\ -150 & \\ \underline{110} & \\ -400 & \\ \underline{385} & \\ 15 & \end{array}$$

$$\frac{3}{8} = 0{,}375 \qquad\qquad \frac{18}{55} = 0{,}32727\ldots = 0{,}3(27)$$

Рациональное число $\frac{3}{8}$ представили в виде конечной десятичной дроби 0,375, а рациональное число $\frac{18}{55}$ — в виде десятичной дроби 0,32727..., в которой цифры 2 и 7 периодически повторяются. Напомним, что такую десятичную дробь называют бесконечной десятичной периодической дробью (с периодом 27), записывают 0,32727... = 0,3(27) и читают: 0 целых 3 десятых и 27 в периоде.

Конечную десятичную дробь 0,375 можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби, дописывая справа в виде десятичных знаков бесконечно много нулей: 0,375 = 0,375000... = 0,375(0).

Итак, оба рациональных числа $\frac{3}{8}$ и $\frac{18}{55}$ можно представить в виде бесконечных десятичных периодических дробей:

$$\frac{3}{8} = 0{,}375000\ldots = 0{,}375(0); \qquad \frac{18}{55} = 0{,}32727\ldots = 0{,}3(27).$$

Вообще, ***любое рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби.*** Например:

Число, которое нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное, называют *иррациональным*. Приставка «ир» означает отрицание: иррациональное — не рациональное.

Итак, $\sqrt{2}$ — иррациональное число. Если искать значение $\sqrt{2}$ с помощью микрокалькулятора, то получим приближенное значение

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356.$$

Точное же значение

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356...$$

представляется в виде бесконечной десятичной непериодической дроби (эта дробь не может быть периодической, поскольку значение $\sqrt{2}$ не является рациональным числом).

Любое иррациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной непериодической дроби.

Примерами иррациональных чисел являются: $\sqrt{3} = 1{,}732...$, $-\sqrt{10} = -3{,}162...$. Вообще, если натуральное число n не является точным квадратом, то числа $\sqrt{n}$ и $-\sqrt{n}$ являются иррациональными.

Иррациональными являются также числа:

$\pi = 3{,}1415926...$, которое выражает отношение длины окружности к его диаметру;

0,505005000500005... (количество нулей между пятерками последовательно увеличивается на 1).

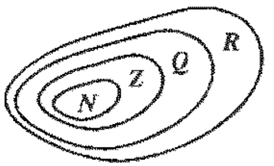


Рис. 3

Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{R}$. Каждое действительное число a можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. Если эта дробь периодическая, то действительное число a является рациональным; если же эта дробь непериодическая, то действительное число a является иррациональным. Множества натуральных, целых и рациональных чисел являются подмножествами множества действительных чисел (см. рис. 3).

5. Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать, делить (на отличные от нуля числа), возводить в степень. При этом выполняются свойства, верные для действий над рациональными числами. В частности, для действий сложения и умножения выполняются переместительное, сочетательное и распределительное свойства:

Число, которое нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное, называют *иррациональным*. Приставка «ир» означает отрицание: иррациональное — не рациональное.

Итак, $\sqrt{2}$ — иррациональное число. Если искать значение $\sqrt{2}$ с помощью микрокалькулятора, то получим приближенное значение

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356.$$

Точное же значение

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356...$$

представляется в виде бесконечной десятичной непериодической дроби (эта дробь не может быть периодической, поскольку значение $\sqrt{2}$ не является рациональным числом).

Любое иррациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной непериодической дроби.

Примерами иррациональных чисел являются: $\sqrt{3} = 1{,}732...$, $-\sqrt{10} = -3{,}162...$. Вообще, если натуральное число n не является точным квадратом, то числа $\sqrt{n}$ и $-\sqrt{n}$ являются иррациональными.

Иррациональными являются также числа:

$\pi = 3{,}1415926...$, которое выражает отношение длины окружности к его диаметру;

$0{,}5050050005000005...$ (количество нулей между пятерками последовательно увеличивается на 1).

Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел, которое обозначают буквой R. Каждое действительное число a можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. Если эта дробь периодическая, то действительное число a является рациональным; если же эта дробь непериодическая, то действительное число a является иррациональным. Множества натуральных, целых и рациональных чисел являются подмножествами множества действительных чисел (см. рис. 3).

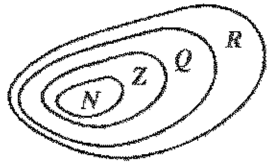


Рис. 3

5. Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать, делить (на отличные от нуля числа), возводить в степень. При этом выполняются свойства, верные для действий над рациональными числами. В частности, для действий сложения и умножения выполняются переместительное, сочетательное и распределительное свойства:

переместительное свойство: $a + b = b + a$; $ab = ba$;

сочетательное свойство: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab)c = a(bc)$;

распределительное свойство: $a(b + c) = ab + ac$,

где a, b и c — любые действительные числа.

Например: $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$; $3\cdot(\pi+\sqrt{5})=3\cdot\pi+3\cdot\sqrt{5}$.

Любые два действительных числа можно сравнить. Если числа записаны в виде бесконечных десятичных дробей, то их сравнивают с помощью тех же правил, что и конечные десятичные дроби. Например,

$$5{,}13869\ldots < 5{,}14308\ldots,$$

поскольку данные числа имеют одинаковые целые части, одинаковое число десятых, однако второе число имеет большее число сотых.

Для тех, кто хочет знать больше

1. Докажем, что среди рациональных чисел не существует числа, квадрат которого равен 2.

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что рациональное число x, квадрат которого равен 2, существует. Представим число x в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное. Тогда:

$$x^2=2;\quad \left(\frac{m}{n}\right)^2=2;\quad \frac{m^2}{n^2}=2;\quad m^2=2n^2.$$

Из равенства $m^2=2n^2$ следует, что m^2 — четное число. Тогда и число m должно быть четным (если бы число m было нечетным, то и число m^2 было бы нечетным). Пусть $m=2k$, где k — целое число. Подставив в равенство $m^2=2n^2$ вместо m число $2k$, найдем: $(2k)^2=2n^2$; $4k^2=2n^2$; $2k^2=n^2$. Из равенства $2k^2=n^2$ следует, что число n^2, а с ним и число n — четные. Поскольку числа m и n — четные, то дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить на 2. Это противоречит тому, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

Итак, предположение, что существует рациональное число, квадрат которого равен 2, не верно. Поэтому верным является утверждение, которое нужно было доказать.

2. Число является одним из самых общих понятий математики. Первоначально это понятие связывалось исключительно с процессами подсчета или измерения.

Именно благодаря этому возникли и использовались натуральные и дробные числа, причем дробные числа рассматривались исключительно как отношение натуральных.

Именно натуральные числа больше всего интересовали пифагорейцев — учеников и последователей легендарного древнегреческого математика и философа Пифагора, который жил на рубеже VI–V в. до н. э. Пифагорейцы считали, что все в мире подчиненно законам, которые можно описать натуральными числами и их отношениями. Отсюда сразу же следовало, что для познания мира нужно познавать натуральные числа. Тем не менее со временем пифагорейцы выяснили, что известные им числа не так уж и всесильны, поскольку с их помощью нельзя выразить, например, длину диагонали квадрата со стороной 1. То интуитивное представление о числе (натуральном и дробном), которое у человека сформировалось на основании вековой практики, требовало уточнения и обобщения.

В дальнейшем решения разных математических проблем привело к двум самым важным обобщениям понятия числа. Сначала китайцы в II в. до н. э. пришли к идее отрицательного числа. Второе направление обобщения понятия числа привело к действительным числам. Введение этих чисел решило, в частности, проблему измерения длины отрезка: при выбранной единице измерения длина всякого отрезка выражается действительным числом.

Если основы теории натуральных чисел пифагорейцы заложили еще в V в. до н. э., то строгие теории действительных чисел были предложены лишь во второй половине XIX в.

Теорию действительных чисел на основании десятичных дробей предложил немецкий математик К. Вейерштрасс (1815–1897). Свои теории с другими подходами к введению действительных чисел предложили немецкие математики Р. Дедекинд (1831–1916) и Г. Кантор (1845–1918).

К понятию иррационального числа близко подошел украинский ученый Феофан Прокопович, рассматривая правило извлечения квадратного корня. Извлекая квадратные корни из чисел 2, 3, 5, 6 и т. д., которые не являются квадратами натуральных чисел, он охарактеризовал их так: «Некоторые числа являются настолько глухими, что они вообще лишены квадратного корня». Как вы знаете, квадратный корень из таких чисел записывается в виде бесконечной непериодической дроби, потому извлечение корня из этих чисел является бесконечным процессом. (Подробно о Феофане Прокоповиче читайте в конце учебника.)

Примеры решения упражнений

Пример 1. Найти приближенное значение выражения $a - b$, где $a = 3{,}10346\ldots$, $b = 1{,}78052\ldots$, округлив предварительно значения a и b: а) до сотых; б) до тысячных.

● а) $a \approx 3{,}10$; $b \approx 1{,}78$; $a - b \approx 3{,}10 - 1{,}78 = 1{,}32$;

б) $a \approx 3{,}103$; $b \approx 1{,}781$; $a - b \approx 3{,}103 - 1{,}781 = 1{,}322$. ●

Пример 2. Сравнить числа:

а) $\sqrt{2}$ и 1,415; б) $-\sqrt{2}$ и $-1{,}4154$; в) $-\sqrt{2}$ и 1,5.

● а) С помощью микрокалькулятора находим: $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$. Поскольку $1{,}4142135... < 1{,}415$, то $\sqrt{2} < 1{,}415$.

б) $\sqrt{2} = 1{,}4142135... < 1{,}4154$, поэтому $-\sqrt{2} > -1{,}4154$.

в) $-\sqrt{2} < 0$, а $1{,}5 > 0$, поэтому $-\sqrt{2} < 1{,}5$. ●

Устно

398. Какие из чисел 0; $-2{,}5$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{7}$; 0,2(3); $-\sqrt{2}$; π; 0,121122111222... (количество единиц и двоек последовательно увеличивается на 1) являются рациональными; иррациональными? Приведите другие примеры рациональных и иррациональных чисел.

399. Верно ли, что:

а) любое натуральное число является действительным;

б) любое иррациональное число является действительным;

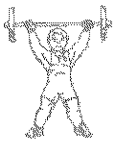
в) любое действительное число является рациональным?

400. Укажите верные утверждения:

а) $\sqrt{5}$ — иррациональное число; **б)** $\sqrt{5}$ — действительное число;

в) $\sqrt{5}$ — рациональное число; **г)** 0,(6) — иррациональное число.

Уровень А



Представьте в виде бесконечной десятичной дроби число:

401. **а)** 2,6; **б)** $-1{,}48$; **в)** 6; **г)** -40;

д) $\frac{3}{8}$; **е)** $3\frac{1}{9}$; **ж)** $-4\frac{2}{11}$; **з)** $3\frac{1}{12}$.

402. **а)** 1,5; **б)** $-7{,}09$; **в)** $2\frac{5}{16}$; **г)** $-1\frac{7}{30}$.

Сравните числа:

403. **а)** 8,998…и 9,113…; **б)** $-0{,}382...$ и 5,117...;

в) $-32{,}144...$ и $-12{,}543...$; **г)** $-2{,}724...$ и $-2{,}725...$

404. а) 7,351…и 7,452…; б) 0,836... и –2,938...;
в) –0,951... и –0,953...; г) –11,531... и –12,938...

Какое из чисел больше:

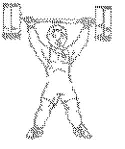
405. а) 0,6 или $\frac{3}{7}$; б) –0,327 или $-\frac{1}{3}$;
в) 0,579... или 0,58; г) 2,72 или 2,(72);
д) 1,7 или $\sqrt{3}$; е) 1,8 или $\sqrt{3}$;
ж) $\sqrt{6}$ или –3; з) $-\sqrt{5}$ или –2?

406. а) 0,75 или $\frac{5}{7}$; б) 5,338... или 5,(33);
в) $-1\frac{2}{3}$ или –1,68; г) –5,(31) или –5,31;
д) 3,34 или $\sqrt{10}$; е) 15 или $\sqrt{226}$?

407. Запишите в порядке возрастания числа: 2,(7); 0,82; –1,95...; –0,03...; $\sqrt{5}$.

408. Запишите в порядке убывания числа: 4,38...; –1,32; $-1\frac{1}{3}$; $\sqrt{17}$; 4,(89).

Уровень Б



409. Найдите приближенное значение суммы $x + y$, округлив слагаемые до сотых:
а) x = 0,3849…;y = 1,1020…; б) x = 102,3120…;
y = 23,1023… .

410. Найдите приближенное значение суммы $x + y$, округлив слагаемые до десятых:
а) x = 18,4105…; y = 9,9981…; б) x = 0,9018…; y = 0,0799… .

Сравните числа:

411. а) 0,7129... и $\frac{5}{7}$; б) $2\frac{1}{3}$ и $\sqrt{5}$; в) $-\sqrt{2}$ и –1,4(3).

412. а) 1,5(4) и $1\frac{15}{29}$; б) –15 и $-\sqrt{224}$; в) 7,1(2) и $\sqrt{49,8}$.

Уровень В

413. Докажите, что число 5,10100100010... (количество нулей последовательно увеличивается на 1) является иррациональным.

Доказательство. 1) Выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ при $a \geq 0$ и $b \geq 0$ имеют смысл. Поскольку $\sqrt{a} \geq 0$ и $\sqrt{b} \geq 0$, то $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$.

2) $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab.$

Итак, выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ принимает неотрицательные значения и квадрат этого выражения равен ab. Поэтому равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ является верным. ●

Используя теорему 1, можно находить корни из произведения, которое содержит три и больше неотрицательных множителя. Например, при $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Вообще, *корень из произведения нескольких неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.*

2. *Квадратный корень из дроби.*

Теорема 2. Корень из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен корню из числителя, разделенному на корень из знаменателя, то есть при $a \geq 0$ и $b > 0$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доказательство. 1) Выражение $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a \geq 0$ и $b > 0$ имеет смысл. Поскольку $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{a} \geq 0$ и $\sqrt{b} > 0$, откуда $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$.

2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}.$

Итак, выражение $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ принимает неотрицательные значения и квадрат этого выражения равен $\frac{a}{b}$. Поэтому равенство $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ является верным. ●

Доказательство. 1) Выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ при $a \ge 0$ и $b \ge 0$ имеют смысл. Поскольку $\sqrt{a} \ge 0$ и $\sqrt{b} \ge 0$, то $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \ge 0$.

2) $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab.$

Итак, выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ принимает неотрицательные значения и квадрат этого выражения равен ab. Поэтому равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ является верным. ●

Используя теорему 1, можно находить корни из произведения, которое содержит три и больше неотрицательных множителя. Например, при $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Вообще, *корень из произведения нескольких неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.*

2. *Квадратный корень из дроби.*

Теорема 2. Корень из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен корню из числителя, разделенному на корень из знаменателя, то есть при $a \ge 0$ и $b > 0$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доказательство. 1) Выражение $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a \ge 0$ и $b > 0$ имеет смысл. Поскольку $a \ge 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{a} \ge 0$ и $\sqrt{b} > 0$, откуда $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ge 0$.

2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}.$

Итак, выражение $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ принимает неотрицательные значения и квадрат этого выражения равен $\frac{a}{b}$. Поэтому равенство $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ является верным. ●

Доказательство. 1) Выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ при $a \geq 0$ и $b \geq 0$ имеют смысл. Поскольку $\sqrt{a} \geq 0$ и $\sqrt{b} \geq 0$, то $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$.

2) $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab.$

Итак, выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ принимает неотрицательные значения и квадрат этого выражения равен ab. Поэтому равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ является верным. ●

Используя теорему 1, можно находить корни из произведения, которое содержит три и больше неотрицательных множителя. Например, при $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Вообще, *корень из произведения нескольких неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.*

2. *Квадратный корень из дроби.*

Теорема 2. Корень из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен корню из числителя, разделенному на корень из знаменателя, то есть при $a \geq 0$ и $b > 0$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доказательство. 1) Выражение $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a \geq 0$ и $b > 0$ имеет смысл. Поскольку $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{a} \geq 0$ и $\sqrt{b} > 0$, откуда $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$.

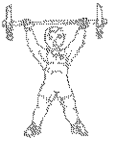
2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}.$

Итак, выражение $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ принимает неотрицательные значения и квадрат этого выражения равен $\frac{a}{b}$. Поэтому равенство $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ является верным. ●

423. а) $\sqrt{\frac{36}{49}}$; б) $\sqrt{\frac{64}{81}}$; в) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$.

424. а) $\sqrt{2^2}$; б) $\sqrt{2^4}$; в) $\sqrt{2^6}$; г) $\sqrt{2^6}$.

Уровень А



Найдите значение выражения:

425. а) $\sqrt{16 \cdot 49}$; б) $\sqrt{121 \cdot 81}$; в) $\sqrt{0,04 \cdot 36}$;

г) $\sqrt{2,25 \cdot 0,16}$; д) $\sqrt{1,44 \cdot 0,25}$; е) $\sqrt{441 \cdot 0,01}$;

ж) $\sqrt{9 \cdot 25 \cdot 64}$; з) $\sqrt{4 \cdot 81 \cdot 625}$; и) $\sqrt{0,36 \cdot 225 \cdot 16}$.

<u>426.</u> а) $\sqrt{25 \cdot 81}$; б) $\sqrt{36 \cdot 144}$; в) $\sqrt{0,09 \cdot 49}$;

г) $\sqrt{3,24 \cdot 0,25}$; д) $\sqrt{9 \cdot 16 \cdot 25}$; е) $\sqrt{64 \cdot 0,04 \cdot 225}$.

427. а) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; б) $\sqrt{\frac{196}{225}}$; в) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

<u>428.</u> а) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{121}{289}}$; в) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$.

Представьте выражение в виде произведения корней:

429. а) $\sqrt{2 \cdot 7}$; б) $\sqrt{21}$; в) $\sqrt{5a}$.

<u>430.</u> а) $\sqrt{8 \cdot 3}$; б) $\sqrt{35}$; в) $\sqrt{8b}$.

Представьте выражение в виде частного корней:

431. а) $\sqrt{\frac{3}{5}}$; б) $\sqrt{\frac{8}{17}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{a}}$.

<u>432.</u> а) $\sqrt{\frac{6}{7}}$; б) $\sqrt{\frac{11}{17}}$; в) $\sqrt{\frac{b}{5}}$.

Найдите значение выражения:

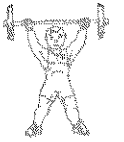
433. а) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$; в) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{0,5}$;

г) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{0,03}$; д) $\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{5}$; е) $\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{\frac{2}{15}}$.

434. а) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{99}}$; в) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{2}}$.

423. а) $\sqrt{\frac{36}{49}}$; б) $\sqrt{\frac{64}{81}}$; в) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$.

424. а) $\sqrt{2^2}$; б) $\sqrt{2^4}$; в) $\sqrt{2^6}$; г) $\sqrt{2^6}$.



Уровень А

Найдите значение выражения:

425. а) $\sqrt{16\cdot49}$; б) $\sqrt{121\cdot81}$; в) $\sqrt{0,04\cdot36}$;

г) $\sqrt{2,25\cdot0,16}$; д) $\sqrt{1,44\cdot0,25}$; е) $\sqrt{441\cdot0,01}$;

ж) $\sqrt{9\cdot25\cdot64}$; з) $\sqrt{4\cdot81\cdot625}$; и) $\sqrt{0,36\cdot225\cdot16}$.

<u>**426.**</u> а) $\sqrt{25\cdot81}$; б) $\sqrt{36\cdot144}$; в) $\sqrt{0,09\cdot49}$;

г) $\sqrt{3,24\cdot0,25}$; д) $\sqrt{9\cdot16\cdot25}$; е) $\sqrt{64\cdot0,04\cdot225}$.

427. а) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; б) $\sqrt{\frac{196}{225}}$; в) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

<u>**428.**</u> а) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{121}{289}}$; в) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$.

Представьте выражение в виде произведения корней:

429. а) $\sqrt{2\cdot7}$; б) $\sqrt{21}$; в) $\sqrt{5a}$.

<u>**430.**</u> а) $\sqrt{8\cdot3}$; б) $\sqrt{35}$; в) $\sqrt{8b}$.

Представьте выражение в виде частного корней:

431. а) $\sqrt{\frac{3}{5}}$; б) $\sqrt{\frac{8}{17}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{a}}$.

<u>**432.**</u> а) $\sqrt{\frac{6}{7}}$; б) $\sqrt{\frac{11}{17}}$; в) $\sqrt{\frac{b}{5}}$.

Найдите значение выражения:

433. а) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; в) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{0,5}$;

г) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{0,03}$; д) $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{5}$; е) $\sqrt{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{\frac{2}{15}}$.

434. а) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{99}}$; в) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$.

в) $\sqrt{\frac{x^2}{y^8}}$, если $x \geq 0$;

г) $\sqrt{49(-x)^2 y^2}$, если $x \geq 0$, $y \geq 0$.

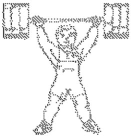
449. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{1\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{4\frac{4}{7}} - \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7}}$;

б) $\sqrt{\frac{8 \cdot 98}{125 \cdot 45}} - \sqrt{\frac{9 \cdot 225}{425^2 - 200^2}}$;

в) $\sqrt{1\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{5\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{12,5^2 - 3,5^2}{2 \cdot 128}}$.

Уровень В



450. Найдите значение корня, не пользуясь микрокалькулятором:

а) $\sqrt{139876}$;

б) $\sqrt{331776}$.

Указание. Число, из которого нужно извлечь корень, разложите на множители. Например, $\sqrt{28224} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 49} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 168$.

451. Представьте выражение $\sqrt{ab}$ в виде произведения корней, а выражение $\sqrt{\frac{a}{b}}$ — в виде частного корней при $a < 0$ и $b < 0$.

452. При каких значениях a и натуральных значениях n верно равенство $\sqrt{a^{2n}} = -a^n$?

453. При каких значениях x верно равенство:

а) $\sqrt{x^6} = x^3$;

б) $\sqrt{x^6} = -x^3$;

в) $\sqrt{x^8} = x^4$;

г) $\sqrt{x^2} = \left(\sqrt{x}\right)^2$;

д) $x\sqrt{2} = \sqrt{2x^2}$;

е) $x\sqrt{2} = -\sqrt{2x^2}$?

Упражнения для повторения

454. Решите уравнение:

а) $(x+1)(x-2) + 3x = x^2$;

б) $3x(1-2x) + x(6x+1) = 1$;

в) $\frac{x-3}{x^2-2x-3} = 0$;

г) $\frac{1}{x-1} + \frac{4}{x+2} = 1$.

455. Упростите выражение:

а) $3(2a-1) - 2(a+5)$;

б) $(3x+5)^2 + (2-3x)(2+3x)$;

в) $\frac{2xz - 2yz}{3xy - 3y^2}$;

г) $\frac{a^2 - 2ab + a - 2b}{a^2 + 2a + 1}$.

456. Разложите на множители:

а) $8x^2y^3 - 12x^3y$;

б) $3a + 6b - ca - 2cb$;

в) $(a-b)^2 - 2(a^2 - b^2)$;

г) $8m^3 - 27$.

457. Найдите значение выражения $|x| + |y|$ при:

а) $x = 1{,}2$; $y = 6{,}5$; б) $x = -3$; $y = -8$; в) $x = 2$; $y = -1{,}8$.

458. Можно ли расставить на трех полках 85 книг так, чтобы на второй полке было в два раза больше книг, чем на первой, а на третьей — в два раза больше, чем на второй?

459. Из города A в город B, расстояние между которыми 42 км, выехал грузовой автомобиль, а через 6 мин — легковой. В город B автомобили прибыли одновременно. Найдите скорость каждого автомобиля, если скорость легкового в 1,2 раза больше скорости грузового.

5. Преобразование выражений с корнями

1. Рассмотрим преобразования, связанные со сложением, вычитанием, умножением, делением и возведением в степень выражений, которые содержат квадратные корни:

$3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$; $\sqrt{a} + 2\sqrt{a} = 3\sqrt{a}$;

$5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$; $2\sqrt{b} - 4\sqrt{b} = -2\sqrt{b}$;

$4\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{6}$; $4\sqrt{a} \cdot (-2\sqrt{b}) = -8\sqrt{ab}$;

$15\sqrt{6} : 3\sqrt{2} = \dfrac{15\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = 5\sqrt{3}$; $10\sqrt{x} : 5\sqrt{x} = \dfrac{10\sqrt{x}}{5\sqrt{x}} = 2$;

$\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 4^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 16 \cdot 2 = 32$; $\left(2\sqrt{a}\right)^2 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{a}\right)^2 = 4a$.

2. Рассмотрим преобразование:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Выполненное преобразование называют *вынесением множителя за знак корня*. В данном случае вынесен за знак корня множитель 3.

Вынесем множитель из-под знака корня в выражениях $\sqrt{3b^2}$, где $b > 0$, и $\sqrt{24a^2}$, где $a < 0$:

$\sqrt{3b^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{b^2} = \sqrt{3} \cdot |b| = b\sqrt{3}$ (при $b > 0$ $|b| = b$);

$\sqrt{24a^2} = \sqrt{4 \cdot a^2 \cdot 6} = 2 \cdot |a| \cdot \sqrt{6} = -2a\sqrt{6}$ (при $a < 0$ $|a| = -a$).

3. Рассмотрим преобразование:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}.$$

Такое преобразование называют *внесением множителя под знак корня.* Заменив выражение $3\sqrt{2}$ выражением $\sqrt{18}$, мы внесли под знак корня множитель 3.

Внесем множитель под знак корня в выражении $a\sqrt{3}$, где $a > 0$. Поскольку $a > 0$, то $a = \sqrt{a^2}$. Поэтому $a\sqrt{3} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3a^2}$.

Внесем множитель под знак корня в выражении $c\sqrt{2}$, где $c < 0$. Поскольку $c < 0$, то $\sqrt{c^2} = |c| = -c$, откуда $c = -\sqrt{c^2}$. Поэтому $c\sqrt{2} = -\sqrt{c^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2c^2}$.

4. Рассмотрим преобразования, которые позволяют избавиться от корней в знаменателях или числителях дробей:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \qquad \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{6} - 2} = \frac{\sqrt{6} + 2}{\left(\sqrt{6} - 2\right)\left(\sqrt{6} + 2\right)} = \frac{\sqrt{6} + 2}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{6} + 2}{6 - 4} = \frac{\sqrt{6} + 2}{2}.$$

Такие преобразования называют *освобождением от иррациональности в знаменателе или числителе дроби*. Каждое такое преобразование сводится к умножению числителя и знаменателя дроби на соответствующее выражение.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Упростить выражение:

а) $\sqrt{18} + \sqrt{8} - \sqrt{50}$; б) $\left(2\sqrt{3} - 3\right)\left(2\sqrt{3} + 3\right)$; в) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{6}$.

● а) $\sqrt{18} + \sqrt{8} - \sqrt{50} = \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2} - \sqrt{25 \cdot 2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0$;

б) $\left(2\sqrt{3} - 3\right)\left(2\sqrt{3} + 3\right) = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 3^2 = 4 \cdot 3 - 9 = 3$;

в) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{6} =$

$= 3 - 2\sqrt{6} + 2 + 2\sqrt{6} = 5$. ●

Пример 2. Разложить на множители:

а) $\sqrt{18} - \sqrt{6}$; б) $m + \sqrt{m}$; в) $a - b$, если $a > 0$; $b > 0$.

● а) $\sqrt{18}-\sqrt{6}=\sqrt{6\cdot 3}-\sqrt{6}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6}=\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

б) Выражение $m+\sqrt{m}$ имеет смысл при $m \geq 0$. При таких значениях m выполняется равенство $m=\left(\sqrt{m}\right)^2$, поэтому:

$$m+\sqrt{m}=\left(\sqrt{m}\right)^2+\sqrt{m}=\sqrt{m}\left(\sqrt{m}+1\right).$$

в) При $a>0$, $b>0$ получим:

$$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right). ●$$

Пример 3. Упростить выражение:

а) $\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)$; **б)** $\dfrac{b^2-3}{2b+2\sqrt{3}}$.

● а) $\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-16-\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}=\sqrt{a}-16$.

б) Разложив числитель и знаменатель дроби на множители, получим:

$$\frac{b^2-3}{2b+2\sqrt{3}}=\frac{b^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2\left(b+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(b-\sqrt{3}\right)\left(b+\sqrt{3}\right)}{2\left(b+\sqrt{3}\right)}=\frac{b-\sqrt{3}}{2}. ●$$

Пример 4. Упростить выражение $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$.

● Освободившись от иррациональности в знаменателях обеих дробей, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2}+\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}+\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=$$

$$\frac{\sqrt{3}+2}{3-4}+\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}=-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}-1=-3. ●$$

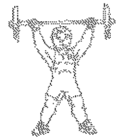
Устно

460. Упростите выражение:

а) $3\sqrt{7}+2\sqrt{7}$; **б)** $9\sqrt{3}-4\sqrt{3}$; **в)** $\sqrt{5}-2\sqrt{5}$;

г) $2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{5}$; д) $\left(2\sqrt{2}\right)^2$; е) $3\sqrt{2}:\sqrt{2}$.

Уровень А



Вынесите множитель из-под знака корня:

461. а) $\sqrt{50}$; б) $\sqrt{48}$; в) $\sqrt{160}$; г) $\sqrt{300}$;

д) $\sqrt{108}$; е) $\sqrt{363}$; ж) $\sqrt{375}$; з) $\sqrt{147}$.

462. а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{45}$; в) $\sqrt{250}$; г) $\sqrt{192}$.

Внесите множитель под знак корня:

463. а) $3\sqrt{2}$; б) $4\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{11}$; г) $9\sqrt{10}$;

д) $4\sqrt{0,1}$; е) $0,1\sqrt{3}$; ж) $2\sqrt{\frac{1}{2}}$; з) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

464. а) $4\sqrt{5}$; б) $3\sqrt{7}$; в) $0,2\sqrt{10}$; г) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Упростите выражение:

465. а) $12\sqrt{3}+4\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{2}$;

г) $\left(3\sqrt{3}\right)^2$; д) $4\sqrt{2}:2\sqrt{2}$; е) $18\sqrt{15}:6\sqrt{5}$.

466. а) $2\sqrt{5}+7\sqrt{5}-\sqrt{5}$; б) $3\sqrt{8}\cdot 5\sqrt{2}-\left(4\sqrt{2}\right)^2$; в) $10\sqrt{10}:2\sqrt{5}$.

467. а) $2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{2}-3\sqrt{6}$; б) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}-3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)$; г) $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}$;

д) $2\sqrt{3}+\sqrt{75}$; е) $3\sqrt{6}-\sqrt{24}$;

ж) $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$; з) $\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)$;

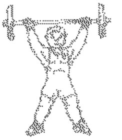
и) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\sqrt{3}$; к) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2$.

468. а) $2\sqrt{8}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}$; б) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{20}\right)\cdot\sqrt{5}$;

в) $\sqrt{32}-2\sqrt{2}$; г) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+5\right)$;

д) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)$; е) $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}$.

Уровень А



Вынесите множитель из-под знака корня:

461. а) $\sqrt{50}$; б) $\sqrt{48}$; в) $\sqrt{160}$; г) $\sqrt{300}$;

д) $\sqrt{108}$; е) $\sqrt{363}$; ж) $\sqrt{375}$; з) $\sqrt{147}$.

462. а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{45}$; в) $\sqrt{250}$; г) $\sqrt{192}$.

Внесите множитель под знак корня:

463. а) $3\sqrt{2}$; б) $4\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{11}$; г) $9\sqrt{10}$;

д) $4\sqrt{0,1}$; е) $0,1\sqrt{3}$; ж) $2\sqrt{\frac{1}{2}}$; з) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

464. а) $4\sqrt{5}$; б) $3\sqrt{7}$; в) $0,2\sqrt{10}$; г) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Упростите выражение:

465. а) $12\sqrt{3}+4\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{2}$;

г) $\left(3\sqrt{3}\right)^2$; д) $4\sqrt{2}:2\sqrt{2}$; е) $18\sqrt{15}:6\sqrt{5}$.

466. а) $2\sqrt{5}+7\sqrt{5}-\sqrt{5}$; б) $3\sqrt{8}\cdot 5\sqrt{2}-\left(4\sqrt{2}\right)^2$; в) $10\sqrt{10}:2\sqrt{5}$.

467. а) $2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{2}-3\sqrt{6}$; б) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}-3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)$; г) $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}$;

д) $2\sqrt{3}+\sqrt{75}$; е) $3\sqrt{6}-\sqrt{24}$;

ж) $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$; з) $\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)$;

и) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\sqrt{3}$; к) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2$.

468. а) $2\sqrt{8}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}$; б) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{20}\right)\cdot\sqrt{5}$;

в) $\sqrt{32}-2\sqrt{2}$; г) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+5\right)$;

д) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)$; е) $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}$.

469. а) $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}-\sqrt{a}$;   б) $4\sqrt{x}-\sqrt{y}-3\sqrt{x}+2\sqrt{y}$;

в) $\sqrt{4c}-\sqrt{9c}+\sqrt{49c}$;   г) $3\sqrt{2a}-\sqrt{18a}$.

470. а) $4\sqrt{b}-\sqrt{9b}$;   б) $\sqrt{25x}+\sqrt{16x}-\sqrt{64x}$.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе (числителе) дроби:

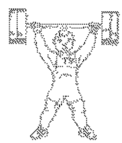
471. а) $\frac{3}{\sqrt{5}}$;   б) $\frac{7}{\sqrt{7}}$;   в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$;   г) $\frac{\sqrt{6}}{3}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{a}}$;   е) $\frac{a}{\sqrt{b}}$;   ж) $\frac{\sqrt{a}}{2}$;   з) $\frac{a^2}{2\sqrt{a}}$.

<u>472</u>. а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;   б) $\frac{3}{\sqrt{3}}$;   в) $\frac{\sqrt{2}}{4}$;   г) $\frac{\sqrt{10}}{5}$;

д) $\frac{2}{\sqrt{a}}$;   е) $\frac{3b}{\sqrt{c}}$;   ж) $\frac{\sqrt{b}}{c}$;   з) $\frac{2b^2}{\sqrt{b}}$.

Уровень Б



Упростите выражение:

473. а) $(1+2\sqrt{2})(2-\sqrt{2})+\sqrt{18}$;   б) $(\sqrt{6}-1)^2+2\sqrt{12}:\sqrt{2}$;

в) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$;   г) $\sqrt{(-5)^2}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$;

д) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1$;   е) $6\sqrt{2}:\sqrt{8}-\sqrt{32}:2\sqrt{2}$.

<u>474.</u> а) $(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)+\sqrt{27}$;   б) $(\sqrt{6}-3)^2+\sqrt{6^3}$;

в) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})$;   г) $8\sqrt{50}:4\sqrt{2}-(\sqrt{7})^2$.

475. а) $\sqrt{a}(2\sqrt{a}-3)+3\sqrt{a}$;   б) $(\sqrt{x}+2)^2-(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$;

в) $\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{ab}$;   г) $(a+\sqrt{a})(a-\sqrt{a})+(\sqrt{a})^2$.

<u>476.</u> а) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{ab}+1)^2$;   б) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})+n$.

Вынесите множитель из-под знака корня:

477. а) $\sqrt{48a^2b}$, если $a>0$;   б) $\sqrt{0{,}09xy^2}$, если $y<0$;

в) $\sqrt{2a^4b^2}$, если $b > 0$; г) $\sqrt{0,64b^3}$;

д) $\sqrt{8x^3z^6}$, если $z < 0$; е) $\sqrt{32ab^3c^6}$, если $b > 0$, $c > 0$.

478. а) $\sqrt{49ab^2}$, если $b < 0$; б) $\sqrt{1,44a^2b^3}$, если $a > 0$;

в) $\sqrt{18x^4y^2}$, если $y < 0$; г) $\sqrt{0,04x^3y^3}$, если $x > 0$, $y > 0$.

Внесите множитель под знак корня:

479. а) $2a\sqrt{3}$, если $a > 0$; б) $b\sqrt{\frac{1}{b}}$; в) $3x^2\sqrt{x}$;

г) $a\sqrt{ab}$, если $a > 0$; д) $(c+1)\sqrt{c+1}$; е) $a\sqrt{a+b}$, если $a > 0$.

480. а) $c\sqrt{5}$, если $c > 0$; б) $n^2\sqrt{\frac{1}{n}}$; в) $b\sqrt{2b}$;

г) $ab\sqrt{a}$, если $b > 0$; д) $x\sqrt{x+1}$, если $x > 0$; е) $(n+k)\sqrt{n+k}$.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе (числителе) дроби:

481. а) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; в) $\frac{14}{3-2\sqrt{2}}$; г) $\frac{2\sqrt{3}-1}{11}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; е) $\frac{a}{\sqrt{a}-3}$; ж) $\frac{1}{x+\sqrt{x}}$; з) $\frac{2}{2\sqrt{b}+3}$.

482. а) $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$; б) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; г) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; е) $\frac{c}{1-\sqrt{c}}$; ж) $\frac{2}{\sqrt{a}-a}$; з) $\frac{\sqrt{b}-3}{c}$.

Разложите на множители:

483. а) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$; б) $5+\sqrt{5}$; в) $\sqrt{15}-\sqrt{35}$;

г) $\sqrt{2a}-\sqrt{a}$; д) $\sqrt{b}+b$; е) $2x-6\sqrt{x}$;

ж) x^2-3; з) $5-4a^2$; и) $x-6$, если $x \geq 0$.

484. а) $\sqrt{12}+\sqrt{3}$; б) $6-\sqrt{6}$; в) $\sqrt{21}-\sqrt{15}$;

г) $\sqrt{3x}-\sqrt{2x}$; д) $c-\sqrt{c}$; е) $4\sqrt{b}+2b$;

ж) a^2-5; з) $2-9n^2$; и) $7-b$, если $b \geq 0$.

Сократите дробь:

485. а) $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-1}$; б) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; в) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{21}+\sqrt{7}}$;

г) $\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$; д) $\dfrac{a+\sqrt{5}}{a^2-5}$; е) $\dfrac{2\sqrt{b}+2\sqrt{3}}{3-b}$.

486. а) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2+2\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$;

г) $\dfrac{a+\sqrt{7}}{a^2-7}$; д) $\dfrac{x^2-2}{\sqrt{2}-x}$; е) $\dfrac{m-5}{\sqrt{m}+\sqrt{5}}$.

Докажите, что:

487. а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$; б) $\sqrt{11+4\sqrt{6}}=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

488. а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{3}+2$; б) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

Упростите выражение:

489. а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$; б) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}-2}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}+2}$;

в) $\dfrac{\sqrt{ab}-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; г) $\dfrac{x-y}{(x-\sqrt{xy})(y+\sqrt{xy})}$ $(x>0;\ y>0)$.

490. а) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$; б) $\dfrac{3\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}+1}-\sqrt{2}$;

в) $\dfrac{2\sqrt{m}-m}{\sqrt{m}-2}$; г) $\dfrac{x+\sqrt{xy}}{y+\sqrt{xy}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Уровень В

491. Упростите выражение:

а) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2b}{a-b}$;

д) $\left(\sqrt{xy}-\dfrac{xy}{x+\sqrt{xy}}\right):\dfrac{\sqrt{xy}-y}{x-y}$ $(x>0;\ y>0)$.

492. Докажите тождество:

$$\frac{m+n}{\sqrt{mn}}+\frac{n}{m-\sqrt{mn}}-\frac{m}{n+\sqrt{mn}}=\frac{m+n}{m-n}\ (m>0;\ n>0).$$

493. Докажите, что значение выражения является натуральным числом:

а) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}}$; б) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

494. Внесите множитель под знак корня:

а) $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$, где $a<0$; б) $ab\sqrt{-\frac{1}{ab}}$, где $a>0$, $b<0$.

495. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}$.

Упражнения для повторения

496. Решите уравнение:

а) $\dfrac{3}{8x}+\dfrac{1}{12x}=1$; б) $\dfrac{2x-1}{x+5}-\dfrac{2x+1}{x-5}=0$.

497. Упростите выражение:

а) $\dfrac{5ab}{9c^2}:\left(\dfrac{4ac}{3b}:\dfrac{2c^2}{3ab^2}\right)$; б) $\left(-\dfrac{2m^2n^4}{5k}\right)^2:\left(-\dfrac{8m^4n^6}{15k}\right)$.

498. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2-b^2}{4ab}:\dfrac{a-b}{8a^2b^2}$ при $a=8$; $b=1{,}125$.

499. Может ли значение выражения $\left(\dfrac{x}{x+4}-\dfrac{x}{x-4}\right):\dfrac{4x}{x^2-16}$ равняться 1?

500. Расстояние между двумя мостами пловец может проплыть по течению реки на 16 мин быстрее, чем против течения. Найдите это расстояние, если скорость пловца в стоячей воде 60 м/мин, а скорость течения реки 40 м/мин.

501. Два поезда вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились в пункте C, расположенном на 20 км ближе к A, чем к B. Скорость поезда, вышедшего из A, на 10 км/ч меньше скорости поезда, вышедшего из B. Найдите скорость каждого поезда, если расстояние между пунктами A и B равно 340 км.

502*. Сплав меди и цинка общей массой 1,5 кг содержит 40% меди. Сколько граммов олова нужно прибавить к этому сплаву, чтобы получить новый сплав, который содержал бы 30% меди?

6. Приближенное вычисление с помощью микрокалькулятора значений выражений, содержащих квадратные корни*

Вы знаете, что для извлечения квадратного корня из числа с помощью микрокалькулятора нужно ввести это число в микрокалькулятор, а потом нажать кнопку $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Рассмотрим, как можно искать значения выражений, которые содержат квадратные корни.

1. Найдем значение выражения $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ при $a = 8{,}3$; $b = 9{,}2$.

Последовательность выполнения действий может быть такой: извлечь квадратный корень из числа a и занести его в память, извлечь квадратный корень из числа b и прибавить его к числу, которое содержится в памяти (к $\sqrt{a}$).

После очистки памяти (нажатия кнопку $\boxed{\text{MC}}$ или $\boxed{\text{AC}}$) схема вычислений будет иметь вид:

$$a\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\text{M+}}\ b\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\text{M+}}\ \boxed{\text{MR}},$$

где кнопка $\boxed{\text{M+}}$ — прибавить к памяти, $\boxed{\text{MR}}$ — взять из памяти.

При $a = 8{,}3$; $b = 9{,}2$ схема вычислений является такой:

$$\boxed{8}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\text{M+}}\ \boxed{9}\ \boxed{,}\ \boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\text{M+}}\ \boxed{\text{MR}}.$$

Выполнив вычисления и округлив результат до сотых, получим: $\sqrt{8{,}3}+\sqrt{9{,}2} \approx 5{,}91$.

2. Найдем значение выражения $\sqrt{a^2+b^2}$ при $a = 8{,}3$; $b = 7{,}4$.

Последовательность выполнения действий может быть такой: возвести в квадрат число a и занести результат в память; возвести в квадрат число b и прибавить его к числу a^2, содержащемуся в памяти; из полученной суммы извлечь квадратный корень.

После очистки памяти схема вычислений будет иметь вид:

$$a\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M+}}\ b\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M+}}\ \boxed{\text{MR}}\ \boxed{\sqrt{\ }}.$$

---

* При наличии в школе калькуляторов других типов последовательность выполнения действий может быть другой.

Выполнив вычисления по указанной схеме при $a = 8{,}3$; $b = 7{,}4$ и округлив полученный результат до десятых, получим: $\sqrt{8{,}3^2 + 7{,}4^2} \approx 11{,}1$.

3. Найдем значение выражения $a\sqrt{b} + \sqrt{c}$ при $a = 1{,}72$; $b = 3{,}58$; $c = 5{,}63$.

После очистки памяти схема вычислений будет иметь вид:

$$b\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\times}\ a\ \boxed{=}\ \boxed{M+}\ c\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{M+}\ \boxed{MR}.$$

Выполнив вычисления по указанной схеме при $a = 1{,}72$; $b = 3{,}58$; $c = 5{,}63$ и округлив полученный результат до сотых, найдем, что $1{,}72 \cdot \sqrt{3{,}58} + \sqrt{5{,}63} \approx 5{,}63$.

4. Найдем значение выражения $a\sqrt{b} + x\sqrt{y} - \sqrt{z}$ при $a = 5{,}7$; $b = 3{,}8$; $x = 11$; $y = 13{,}4$; $z = 7{,}2$.

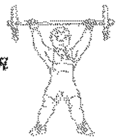
После очистки памяти схема вычислений будет иметь вид:

$$b\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\times}\ a\ \boxed{=}\ \boxed{M+}\ y\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\times}\ x\ \boxed{=}\ \boxed{M+}\ z\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{M-}\ \boxed{MR},$$

где кнопка $\boxed{M-}$ — вычесть из памяти.

Выполнив вычисления по указанной схеме для данных значений a, b, x, y и z и округлив полученный результат до десятых, найдем, что $5{,}7 \cdot \sqrt{3{,}8} + 11 \cdot \sqrt{13{,}4} - \sqrt{7{,}2} \approx 48{,}7$.

Уровень А



С помощью микрокалькулятора вычислите значение выражения (ответ округлите до сотых):

503. а) $\sqrt{a+1}$ при $a = 16{,}9$; $a = 256$; $a = 5$; $a = 0{,}7$;

б) $\sqrt{a-9}$ при $a = 15$; $a = 18{,}5$; $a = 13{,}8$.

504. а) $\sqrt{x+6}$ при $x = 19$; $x = 8$; $x = 0{,}72$;

б) $\sqrt{2x}$ при $x = 63$; $x = 11{,}3$; $x = 0{,}39$.

Составьте схему для вычисления с помощью микрокалькулятора значения выражения:

505. а) $\sqrt{a+b}$; б) $\sqrt{a}-b$; в) $\sqrt{a^2-b^2}$.

506. а) $\sqrt{a}+b$; б) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; в) $a\sqrt{b}$.

Восстановите выражение по представленной схеме вычисления его значения с помощью микрокалькулятора:

507. а) $b\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{-}\ a\ \boxed{=}$; б) $a\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{+}\ b\ \boxed{=}$.

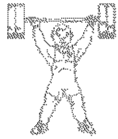
508. а) $a\ \boxed{+}\ b\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}$; б) $a\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{:}\ b\ \boxed{=}$.

Вычислите с помощью микрокалькулятора (ответ округлите до сотых):

509. а) $1,2\sqrt{15}$; б) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$; в) $\sqrt{5,8\cdot 8,9}$.

510. а) $7\sqrt{2}$; б) $\sqrt{10}-\sqrt{5}$; в) $\sqrt{\dfrac{14,8}{2,9}}$.

Уровень Б



Вычислите с помощью микрокалькулятора (ответ округлите до тысячных):

511. а) $\sqrt{1,5^2+8,9^2}$; б) $\sqrt{5+\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{\sqrt{3}}$.

512. а) $\sqrt{10,6^2-3,7^2}$; б) $\sqrt{10-\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{\sqrt{7}}$.

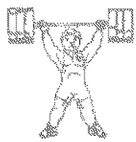
Решите уравнение и найдите с помощью микрокалькулятора приближенные значения его корней (ответ округлите до сотых):

513. а) $x^2=42$; б) $11x^2=43$; в) $(x-1,83)^2=14$.

514. а) $3x^2=29$; б) $(x+3,82)^2=17$; в) $(3x-7)^2=19$.

515. Составьте схему для вычисления с помощью микрокалькулятора значения выражения $a\sqrt{b}-\sqrt{c}$.

Уровень В



516. Составьте схему для вычисления с помощью микрокалькулятора значения выражения $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}+\sqrt{x}$.

Упражнения для повторения

517. Из города в одном направлении выехали два автомобиля. Скорость одного автомобиля 68 км/ч, а другого — 75 км/ч. Запишите в виде выражения расстояние между автомобилями через t ч. Найдите значение этого выражения при $t=1$; $t=1,2$; $t=2,5$.

518. Заполните таблицу:

x	-4	-2	0	0,5	1	4
$2x$						
$-2x+1$						
x^2						

519. Из 100 кг семян подсолнечника получают a кг масла. Сколько масла получат из 450 кг таких семян?

Вопросы и упражнения для повторения § 2

1. Что называется квадратным корнем из числа a?

2. Что называется арифметическим квадратным корнем из числа a? При каких значениях a имеет смысл выражение $\sqrt{a}$? Какие значения может принимать выражение $\sqrt{a}$?

3. Чему равно $\sqrt{a^2}$?

4. При каких значениях a уравнение $x^2 = a$ имеет корни? Сколько корней имеет это уравнение при $a > 0$; $a = 0$; $a < 0$?

5. В виде каких дробей можно преставить рациональные числа?

6. Какие числа называют иррациональными?

7. Какие числа образуют множество действительных чисел?

8. Чему равен квадратный корень из произведения неотрицательных множителей? Докажите соответствующую теорему.

9. Чему равен квадратный корень из дроби $\frac{a}{b}$, где $a \geq 0$, $b > 0$? Докажите соответствующую теорему.

10. Чему равен квадратный корень из степени a^{2n}, где $a \geq 0$? Докажите соответствующую теорему.

11. На примере выражения $2\sqrt{b}$ покажите, как можно внести множитель под знак корня.

12. На примере выражения $\sqrt{16b}$ покажите, как можно вынести множитель из-под знака корня.

13. На примере выражений $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{2}}$ покажите, как можно освободиться от иррациональности в знаменателе дроби.

520. Даны числа: -25; $3{,}8$; 8; 0; $-2{,}1$; $\sqrt{5}$; $\frac{2}{9}$; $0{,}(6)$; $-\sqrt{3}$; 1; $-2\frac{1}{3}$; π; $0{,}1011011101111 0\ldots$ (количество единиц последовательно увеличивается на 1). Выпишите: а) все натуральные числа; б) все целые числа; в) все рациональные числа; г) все иррациональные числа.

521. Сравните числа:

а) 1,138 и 1,183; б) –3,4 и –3,5; в) $\frac{5}{24}$ и $\frac{2}{9}$; г) –0,3 и $-\frac{1}{3}$;

д) $\sqrt{5}$ и 2,5; е) $-\sqrt{10}$ и $-\pi$; ж) 1,13745... и 1,1375... .

522. Найдите приближенное значение выражения, округлив значения корней до сотых:

а) $2,7-\sqrt{5}$; б) $5\sqrt{3,6}$; в) $\sqrt{10}-\sqrt{3}$; г) $\sqrt{4,5}+\sqrt{5,5}$.

523. Докажите, что: а) $\sqrt{441}=21$; б) $\sqrt{0,81}=0,9$.

524. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{x}$; б) $-\sqrt{x}$; в) $\sqrt{-x}$; г) $\sqrt{x^2}$?

Найдите значение выражения:

525. а) $\sqrt{16}+\sqrt{625}$; б) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{2,25}-10\sqrt{1,21}$;

в) $\frac{2}{3}\sqrt{81}+2\sqrt{\frac{9}{16}}$; г) $\sqrt{0,01}\cdot\sqrt{4900}-0,1\sqrt{90000}$;

д) $\left(\sqrt{361}-\sqrt{289}\right)\left(\sqrt{2,25}-\sqrt{6,25}\right)$; е) $\left(\sqrt{10000}-99\right):\left(\sqrt{1\frac{7}{9}}-1\right)$.

526. а) $\sqrt{9\cdot 36}$; б) $\sqrt{160\cdot 40}$; в) $\sqrt{15\cdot 24\cdot 40}$;

г) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{500}$; д) $\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}$; е) $\sqrt{0,02}\cdot\sqrt{0,32}$.

527. а) $\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{\frac{16}{81}}$; б) $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$; в) $\sqrt{4\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{25}}-\sqrt{\frac{8\cdot 72}{21\cdot 84}}$.

528. а) $\sqrt{2^{10}}-\sqrt{2^8}$; б) $\sqrt{41^2}+\sqrt{(-41)^2}$; в) $\sqrt{(-15)^2}\cdot\sqrt{(-1,2)^2}$.

Упростите выражение:

529. а) $5\sqrt{6}-7\sqrt{6}+4\sqrt{6}$; б) $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)+3\sqrt{3}$;

в) $\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)^2-3-4\sqrt{10}$; г) $\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)+\left(3\sqrt{3}\right)^2$.

530. а) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+3\right)-a$; б) $\left(4\sqrt{b}-3\right)\left(\sqrt{b}+1\right)-\sqrt{b}$;

в) $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+1$; г) $\left(2\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)^2-4\sqrt{a^2}-9b$.

531. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{28}$; б) $\sqrt{200}$; в) $\sqrt{250}$;

г) $\sqrt{243}$; д) $\sqrt{8a^2}$, где $a > 0$; е) $\sqrt{98ab^2}$, где $b < 0$.

532. Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt{2}$; б) $5\sqrt{10}$; в) $0,4\sqrt{30}$;

г) $c\sqrt{c}$; д) $m\sqrt{7}$, где $m > 0$; е) $n\sqrt{19m}$, где $n < 0$.

533. Разложите на множители:

а) $\sqrt{15} - \sqrt{10}$; б) $10 + \sqrt{10}$; в) $\sqrt{7a} - \sqrt{3a}$;

г) $c - 4$, где $c > 0$; д) $m^2 - 6$; е) $n + \sqrt{2n}$.

534. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{21}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}-1}$; б) $\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{3}}{b-3}$; в) $\dfrac{a-5}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}$;

г) $\dfrac{c^2-10}{c-\sqrt{10}}$; д) $\dfrac{\sqrt{2}-x}{x^2-2}$; е) $\dfrac{b+\sqrt{ab}}{a-b}$ $(b > 0)$.

535. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{8}}$; б) $\dfrac{5}{2\sqrt{10}}$; в) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$; г) $\dfrac{1}{3\sqrt{m}-2\sqrt{n}}$.

536. Докажите, что $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{5}+2$.

Упростите выражение:

537. а) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}+3}$; б) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

538. а) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \dfrac{\sqrt{xy}}{x-y}$.

539*. Докажите, что значение выражения является натуральным числом:

а) $\sqrt{6\sqrt{5}+14} - \sqrt{5}$; б) $\sqrt{11+2\sqrt{10}} - \sqrt{11-2\sqrt{10}}$.

540*. Докажите тождество: $\sqrt{a^8+4a^4+4} = a^4+2$.

Решите уравнение:

541. а) $x^2 = 25$; б) $x^2 = 0,09$; в) $3x^2 = 21$; г) $2x^2 = -0,2$.

542. а) $(2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 42$; б) $(5x-4)^2 = 9 - 40x$.

521. Сравните числа:

а) 1,138 и 1,183; б) –3,4 и –3,5; в) $\frac{5}{24}$ и $\frac{2}{9}$; г) –0,3 и $-\frac{1}{3}$;

д) $\sqrt{5}$ и 2,5; е) $-\sqrt{10}$ и $-\pi$; ж) 1,13745... и 1,1375... .

522. Найдите приближенное значение выражения, округлив значения корней до сотых:

а) $2,7-\sqrt{5}$; б) $5\sqrt{3,6}$; в) $\sqrt{10}-\sqrt{3}$; г) $\sqrt{4,5}+\sqrt{5,5}$.

523. Докажите, что: а) $\sqrt{441}=21$; б) $\sqrt{0,81}=0,9$.

524. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{x}$; б) $-\sqrt{x}$; в) $\sqrt{-x}$; г) $\sqrt{x^2}$?

Найдите значение выражения:

525. а) $\sqrt{16}+\sqrt{625}$; б) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{2,25}-10\sqrt{1,21}$;

в) $\frac{2}{3}\sqrt{81}+2\sqrt{\frac{9}{16}}$; г) $\sqrt{0,01}\cdot\sqrt{4900}-0,1\sqrt{90000}$;

д) $\left(\sqrt{361}-\sqrt{289}\right)\left(\sqrt{2,25}-\sqrt{6,25}\right)$; е) $\left(\sqrt{10000}-99\right):\left(\sqrt{1\frac{7}{9}}-1\right)$.

526. а) $\sqrt{9\cdot36}$; б) $\sqrt{160\cdot40}$; в) $\sqrt{15\cdot24\cdot40}$;

г) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{500}$; д) $\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}$; е) $\sqrt{0,02}\cdot\sqrt{0,32}$.

527. а) $\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{\frac{16}{81}}$; б) $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$; в) $\sqrt{4\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{25}}-\sqrt{\frac{8\cdot72}{21\cdot84}}$.

528. а) $\sqrt{2^{10}}-\sqrt{2^8}$; б) $\sqrt{41^2}+\sqrt{(-41)^2}$; в) $\sqrt{(-15)^2}\cdot\sqrt{(-1,2)^2}$.

Упростите выражение:

529. а) $5\sqrt{6}-7\sqrt{6}+4\sqrt{6}$; б) $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)+3\sqrt{3}$;

в) $\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)^2-3-4\sqrt{10}$; г) $\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)+\left(3\sqrt{3}\right)^2$.

530. а) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+3\right)-a$; б) $\left(4\sqrt{b}-3\right)\left(\sqrt{b}+1\right)-\sqrt{b}$;

в) $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+1$; г) $\left(2\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)^2-4\sqrt{a^2-9b}$.

543. а) $\sqrt{x} = 4$; б) $\sqrt{x} = 0$; в) $\sqrt{x} = -2$;

г) $\sqrt{x-1} = 0{,}5$; д) $\sqrt{x^2+2} = 1$; е) $\sqrt{x^2+8} = 3$.

544*. а) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) = \sqrt{x}$; б) $\sqrt{x}+\sqrt{2+x} = -1$; в) $\sqrt{x^2}+\sqrt{x} = 0$.

545*. Докажите, что уравнение $\sqrt{x} = -x-0{,}1$ не имеет корней.

Задания для самопроверки №4

I уровень

1. Укажите неверное утверждение:

а) 5 — рациональное число; б) $\frac{2}{3}$ — действительное число;

в) $\sqrt{3}$ — иррациональное число; г) $\sqrt{5}$ — рациональное число.

2. Какое из равенств является верным:

а) $\sqrt{36} = 4$; б) $\sqrt{49} = -7$; в) $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$; г) $\sqrt{0{,}4} = 0{,}2$?

3. Найдите значение выражения $\sqrt{36\cdot 64} + \sqrt{\frac{9}{16}}$ и укажите верный ответ:

а) $24\frac{3}{4}$; б) $47\frac{1}{4}$; в) $48\frac{3}{4}$; г) 60.

4. Упростите выражение $4\left(\sqrt{2}-2\right)-\left(2\sqrt{2}-4\right)$ и укажите верный ответ:

а) $6\sqrt{2}-12$; б) $2\sqrt{2}-12$; в) $6\sqrt{2}-4$; г) $2\sqrt{2}-4$.

5. Найдите значение выражения $3\sqrt{2}-\sqrt{3}$, округлив значения корней до десятых, и укажите верный ответ:

а) 5,9; б) 2,5; в) 2,4; г) 2,8.

II уровень

1. Разместите в порядке возрастания числа $\sqrt{10}$; $-\sqrt{3}$; 3; 0; 3,8.

2. Вычислите:

а) $\sqrt{25\cdot 0{,}49}$; б) $\sqrt{\frac{9}{0{,}04}}$; в) $\sqrt{3^4}$.

3. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2\sqrt{3}-5\right)-16$; б) $\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)-a$.

4. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}$; б) $\dfrac{4-\sqrt{80}}{1-\sqrt{5}}$.

5. Решите уравнение:

а) $2(x^2-3)=12$; б) $(x-2)(x+2)=-1$.

III уровень

1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{28\cdot 63}$; б) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}-\sqrt{6\dfrac{1}{4}}$; в) $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2+4\sqrt{14}$.

2. Упростите выражение:

а) $\sqrt{3}-2\sqrt{12}+\sqrt{48}$; б) $\dfrac{11}{2\sqrt{5}-3}-\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$.

3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{x}{2\sqrt{x}+1}$.

4. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{a-b}{a+\sqrt{ab}}$, где $a>0$, $b>0$.

5. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x-1}=5$; б) $\sqrt{x^2-2}=2$.

IV уровень

1. Докажите, что выражение $\sqrt{x^2-4x+5}$ имеет смысл при любом значении x.

2. При каких значениях x верно равенство:

а) $\sqrt{x^6}=x^3$; б) $x\sqrt{x^2}=-\sqrt{x^4}$; в) $\sqrt{x}=\sqrt{-x}$?

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}:\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$.

4. Решите уравнение:

а) $(x-1)(x+2)\sqrt{2x+1}=0$; б) $2\sqrt{x}+\sqrt{x(x+1)}=0$.

5. Докажите, что значения выражения $\sqrt{19+8\sqrt{3}}\cdot x-\left(4+\sqrt{3}\right)x$ не зависят от значений x.

§ 3. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Квадратные уравнения. Неполные квадратные уравнения

В 7 классе мы рассматривали линейные уравнения с одной переменной, то есть уравнения вида $ax = b$, где x — переменная, a, b — некоторые числа (коэффициенты уравнения). В уравнение $ax = b$ переменная x входит лишь в первой степени, и если $a \neq 0$, то само уравнения называют уравнением первой степени с одной переменной.

Решение некоторых практических задач, задач математики и физики приводят к уравнениям, которые содержат переменную во второй степени (в квадрате). Рассмотрим, например, такую задачу.

Площадь участка прямоугольной формы равна 600 м^2. Длина участка на 10 м больше ширины. Найти ширину участка.

Пусть ширина участка равна x м. Тогда длина участка равна $(x + 10)$ м, а площадь — $x(x + 10)$ м^2. По условию задачи эта площадь равна 600 м^2, поэтому имеем уравнение $x(x + 10) = 600$, откуда

$$x^2 + 10x - 600 = 0.$$

Полученное уравнение называют *квадратным*.

Определение | Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Числа a, b, c называют *коэффициентами квадратного уравнения*:

a — первый коэффициент;

b — второй коэффициент;

c — свободный член.

Например, $7x^2 - 3x + 5 = 0$ — квадратное уравнение, в котором первый коэффициент $a = 7$, второй коэффициент $b = -3$, свободный член $c = 5$.

Если в квадратном уравнении первый коэффициент равен 1, то такое уравнение называют *приведенным квадратным уравнением*. Итак, уравнение $x^2 + 10x - 600 = 0$ является приведенным квадратным уравнением.

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют *неполным квадратным уравнением*.

Например, уравнения

$x^2 + 9x = 0,$ $\qquad$ $5x^2 - 125 = 0,$ $\qquad$ $4x^2 = 0$

являются неполными квадратными уравнениями. В первом уравнении $c = 0$, во втором — $b = 0$, в третьем — $b = 0$ и $c = 0$.

Итак, существует три вида неполных квадратных уравнений:

1) $ax^2 + bx = 0$ $(b \neq 0)$; $\quad$ 2) $ax^2 + c = 0$ $(c \neq 0)$; $\quad$ 3) $ax^2 = 0$.

Решение неполных квадратных уравнений

№	Вид уравнения	Пример уравнения и его решение
1.	$ax^2 + bx = 0$	$3x^2 - 5x = 0$. $x(3x - 5) = 0$. Отсюда $x = 0$ или $3x - 5 = 0$; $x = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.
2.	$ax^2 + c = 0$	1) $2x^2 - 8 = 0$. $2x^2 = 8$; $x^2 = 4$. Отсюда $x = -2$ или $x = 2$. 2) $2x^2 + 8 = 0$; $2x^2 = -8$; $x^2 = -4$. Уравнение не имеет корней.
3.	$ax^2 = 0$	$7x^2 = 0$. $x^2 = 0$. Отсюда $x = 0$.

Замечание. Уравнение $x^2 = 0$ можно записать как $x \cdot x = 0$. Первый множитель равен нулю при $x = 0$, второй — также при $x = 0$. Поэтому иногда говорят, что уравнение $x^2 = 0$ имеет два одинаковых корня $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

Итак, *уравнение $ax^2 = 0$ имеет единственный корень $x = 0$ (или два одинаковых корня, равных нулю).*

Примеры решения упражнений

Пример 1. Решить уравнение $9x^2 + 11x = 0$.

● $x(9x + 11) = 0$. Отсюда $x = 0$ или $9x + 11 = 0$.

Решим уравнение $9x + 11 = 0$; $9x = -11$; $\quad x = -\frac{11}{9} = -1\frac{2}{9}$.

Уравнение имеет два корня $x_1 = 0$; $x_2 = -1\frac{2}{9}$.

Ответ. $-1\frac{2}{9}$; 0. ●

Пример 2. Решить уравнение $2{,}5x(x - 2) - 7{,}5 = -5x$.

● $2{,}5x^2 - 5x - 7{,}5 = -5x$; $2{,}5x^2 - 7{,}5 = 0$; $x^2 = 3$; $x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = \sqrt{3}$.

Ответ. $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. ●

Устно

546. Какое из уравнений является квадратным:

а) $4x + 5^2 = 0$; б) $7x^2 - x - 3 = 0$; в) $\frac{1}{x^2} + 2x - 3 = 0$;

г) $9x^2 = 0$; д) $-x^2 + 2 = 0$; е) $-6y^2 - 24y = 0$?

547. Какое из квадратных уравнений является неполным; приведенным:

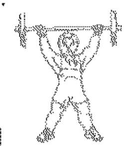
а) $x^2 + 5x - 2 = 0$; б) $7x^2 + 1{,}8 = 0$; в) $-x^2 - 2x = 0$;

г) $x^2 + \sqrt{3}\,x = 0$; д) $3x^2 + 7x + 1 = 0$; е) $x^2 = 0$?

548. Решите неполные квадратные уравнения:

а) $x^2 + 25 = 0$; б) $x^2 - 4 = 0$; в) $y^2 - 2y = 0$;

г) $x^2 + x = 0$; д) $5y^2 = 0$; е) $-\sqrt{3}z^2 = 0$.



Уровень А

549. Заполните таблицу:

Квадратное уравнение	Коэффициенты уравнения		
$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
	4	1	3
$-2x^2 - 3x + 1 = 0$			
	1	0	–24
	3	–5	0
$5x^2 - 8 = 0$			
	7	0	0

550. Запишите квадратное уравнение, коэффициенты которого равны:

а) $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$; б) $a = 3$; $b = 0$; $c = -7$;

в) $a = -1$; $b = 4$; $c = 5$; г) $a = -6$; $b = -2{,}4$; $c = \sqrt{9}$;

д) $a = 1$; $b = \sqrt{5}$; $c = 0$; е) $a = 2$; $b = 0$; $c = 0$.

Запишите приведенное квадратное уравнение, равносильное уравнению:

551. а) $2x^2 + 2x - 6 = 0$; б) $-4x^2 - 10x + 8 = 0$.

552. а) $5x^2 - 9x + 2 = 0$; б) $-x^2 + 12x + 6 = 0$.

Решите уравнение:

553. а) $x^2 - 36 = 0$; б) $2x^2 - 4 = 0$; в) $x^2 + 49 = 0$.

554. а) $x^2 - 64 = 0$; б) $-6x^2 + 18 = 0$; в) $2x^2 + 8 = 0$.

555. а) $x^2 - 3x = 0$; б) $-5x^2 + 20x = 0$; в) $x^2 + 3{,}5x = 0$.

556. а) $4x^2 + 8x = 0$; б) $3x^2 - 81x = 0$; в) $2{,}2x^2 - 8{,}8x = 0$.

557. а) $7 - 2x^2 = 7 + 0{,}5x^2$; б) $2x^2 - 3x = 2x$; в) $2x(x - 3) = x^2$.

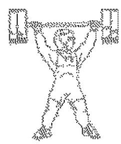
558. а) $5x^2 - 3 = x^2 - 3$; б) $x^2 + 15x = 8x$; в) $x(x - 2) = -x^2$.

Преобразуйте уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$:

559. а) $x(3x - 2) + 4 = 0$; б) $5x(x + 3) = 2x^2 + 1$; в) $x(x - 9) = 4x(x + 7)$.

560. а) $7x^2 - 2 = 4x + 5$; б) $(x + 1)x = 5$; в) $x^2 = 6x^2 - 3(x - 4)$.

Уровень Б



Решите уравнение:

561. а) $x^2 - 13x + 8 = 3x^2 - 13x$; б) $x(x + 1) = x + 24$;
в) $2x^2 - (5x - 1) = 17 - 5x$; г) $0{,}3x(x - 4) + 1{,}2x - 2{,}7 = 0$.

562. а) $5x^2 - 11x - 108 = 2x^2 - 11x$; б) $3 - 2x = x(x - 2)$;
в) $18 - 16x = 7x^2 - (3 + 16x)$; г) $3x(2x + 0{,}5) - 2x^2 - 0{,}64 = 1{,}5x$.

Найдите корни уравнения:

563. а) $5x^2 - 7x + 3 = 3x^2 + 2x + 3$; б) $4 - 6x - x^2 = 9x^2 + x + 4$;
в) $2(x^2 + x - 3) = 5x^2 - 6$; г) $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 3x^2 - 9$;
д) $6x^2 + 9x - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$; е) $4(x^2 - 2) = x(1 - x) - 8$;
ж) $0{,}2x^2 - x(0{,}5x - 1) = x - 9$; з) $0{,}3x(x - 4) + 1{,}2x - 2{,}7 = 2{,}7$.

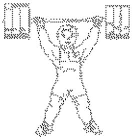
564. а) $2x^2 - 3x + 7 = 7x^2 + x + 7$; б) $6 - x - 3x^2 = 5x^2 + x + 6$;
в) $(3x - 5)(3x + 5) = 6x^2 - 25 + 15x$; г) $\left(2x - \sqrt{5}\right)\left(2x + \sqrt{5}\right) = (x - 1)^2 - 6$;
д) $(x + 0{,}4)^2 + (x - 0{,}4)^2 = 0{,}64$; е) $3x(2x + 0{,}6) - 2x^2 - 0{,}64 = 1{,}8x$.

565. Найдите значения x, при которых значение выражения $(2\sqrt{3}x - 1)(2\sqrt{3}x + 1)$ равно 17.

566. При каких значениях x значение выражения $(2x - 7)(x + 4)$ равно -28?

567. При каких значениях x значение выражения $x^2 - 5x + 7$ на 4 больше значения выражения $2x^2 + 4x + 3$?

568. Найдите числа, которые в 17 раз меньше своих квадратов.



Уровень В

569. При каких значениях a число 2 является корнем уравнения:

а) $a^2x^2 - 7x + 2a + 14 = 0$; б) $3x^2 + (a^2 - 1)x - 18 = 0$?

570. При каких значениях a уравнение имеет один корень:

а) $2x^2 - (a^2 - 3a)x = 0$; б) $ax^2 + a^2 - 2 = 0$?

571. Решите уравнение с параметром a:

а) $ax^2 + 1 = 0$; б) $x^2 - 2ax = 0$; в) $ax^2 - a^3 = 0$.

Упражнения для повторения

572. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

а) $m^2 - 6m + 9$; б) $4x^2 + 12x + 9$; в) $49x^2 - 28xy + 4y^2$.

573. Найдите значение выражения:

а) $x^2 - 4x + 4$ при $x = 22$; $x = 2{,}2$; $x = -8$;

б) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ при $x = \frac{1}{11}$; $y = \frac{3}{11}$.

574. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{x - 5}$ при $x = 12{,}5$; б) $\dfrac{2\sqrt{y} + 6}{y + 6\sqrt{y} + 9}$ при $y = 1{,}21$.

575*. При каком значении m выражение $m^2 - 4m + 7$ принимает наименьшее значение?

576. В фермерском хозяйстве пшеницы собрали на 40% больше, чем ячменя. 20% собранной пшеницы и 30% собранного ячменя продали, что вместе составило 29 т. Сколько тонн пшеницы и сколько тонн ячменя собрали в хозяйстве?

2. Формула корней квадратного уравнения

Решим квадратное уравнение

$$2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на 2:

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Перенесем свободный член уравнения в правую часть:

$$x^2 - \frac{5}{2}x = \frac{3}{2}.$$

Выделим в левой части уравнения квадрат двучлена. Для этого сначала запишем выражение $\frac{5}{2}x$ как удвоенное произведение неизвестного x и числа $\frac{5}{4}$:

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{2}.$$

Прибавим к обеим частям уравнения квадрат числа $\frac{5}{4}$, то есть $\frac{25}{16}$:

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{4} + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}.$$

Левую часть уравнения запишем в виде квадрата двучлена $x - \frac{5}{4}$:

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}.$$

Тогда:

$x - \frac{5}{4} = -\frac{7}{4}$ или $x - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$, откуда $x = \frac{5}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{1}{2}$ или $x = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3.$

Итак, корнями уравнения являются $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 3$.

Способ, с помощью которого мы решили уравнение $2x^2 - 5x - 3 = 0$, называют способом *выделения квадрата двучлена.*

Решим этим способом квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Разделим обе части уравнения на a ($a \neq 0$). Получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Перенесем свободный член уравнения в правую часть:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Выражение $\frac{b}{a}x$ запишем как удвоенное произведение неизвестного x и числа $\frac{b}{2a}$:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}.$$

Прибавим к обеим частям уравнения квадрат числа $\frac{b}{2a}$, то есть $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Левую часть уравнения запишем в виде квадрата двучлена $x + \frac{b}{2a}$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения (1) и обозначают буквой D, то есть $D = b^2 - 4ac$. Тогда уравнение (2) можно записать так:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}. \qquad (3)$$

Возможны три случая: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

а) Если $D > 0$, то из уравнения (3) получаем:

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

откуда

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Итак, если $D > 0$, то квадратное уравнение (1) имеет два разных корня

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Эти две формулы можно объединить в одну:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{где } D = b^2 - 4ac.$$

Полученную формулу называют *формулой корней квадратного уравнения.*

б) Если $D = 0$, то из уравнения (3) получим:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0; \quad x+\frac{b}{2a}=0; \quad x=-\frac{b}{2a}.$$

Корень $x=-\frac{b}{2a}$ можно найти и по формуле корней квадратного уравнения, учитывая, что $D=0$: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}=\frac{-b}{2a}$. Поэтому иногда говорят, что при $D=0$ уравнение имеет два одинаковых корня, каждый из которых равен $-\frac{b}{2a}$.

Итак, если $D=0$, то квадратное уравнение (1) имеет один корень $x=-\frac{b}{2a}$ *(или два одинаковых корня, каждый из которых равен* $-\frac{b}{2a}$*).*

в) Если $D<0$, то уравнение (3) не имеет корней, так как не существует такого значения x, при котором значение выражения $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ равнялось бы отрицательному числу $\frac{D}{4a^2}$.

Итак, если $D<0$, то квадратное уравнение (1) не имеет корней.

Решать квадратные уравнения целесообразно так:

1. Вычислить дискриминант $D=b^2-4ac$ и сравнить его с нулем.

2. Если дискриминант положительный или равен нулю ($D\geq 0$), то воспользоваться формулой корней квадратного уравнения: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Если дискриминант отрицательный, то записать, что уравнение не имеет корней.

Для тех, кто хочет знать больше

1. Если в квадратном уравнении коэффициент при x^2 равен 1, то получим приведенное квадратное уравнение. Записывают его так: $x^2+px+q=0$. Для этого уравнения:

$$D=p^2-4q=4\left(\frac{p^2}{4}-q\right);$$

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm 2\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}{2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Итак, для приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ имеем такую формулу корней:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Пользуясь этой формулой, найдем корни уравнения $x^2 + 7x + 6 = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{5}{2}; \quad x_1 = -6; \quad x_2 = -1.$$

2. Пусть в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ второй коэффициент b является четным числом. Разделим Обе части уравнения на 2, получим: $\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{c}{2} = 0$. Тогда $D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$, $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$.

Полученную формулу целесообразно использовать при решении квадратних уравнений, в которых коэффициент при x — четное число.

Например, найдем корни уравнения $3x^2 - 16x + 5 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 3 \cdot 5}}{3} = \frac{8 \pm 7}{3}; \quad x_1 = \frac{1}{3}; \quad x_2 = 5.$$

3. Квадратные уравнения отдельных видов умели решать вавилонские ученые еще около двух тысяч лет до н. э. В более поздние времена некоторые виды квадратных уравнений решали геометрически (с использованием построений) древнегреческие и индийские математики. В IX в. арабский математик Мухаммед бен Муса аль-Хорезми в трактате «Китаб ал-джебр ал-мукабала» собрал и систематизировал способы решения квадратных уравнений. В своем произведении он объяснил приемы решения уравнений вида $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, где a, b, c — положительные числа. Разделение квадратных уравнений на такие виды обусловлено тем, что в то время не признавали отрицательных чисел. Понятно, что и отрицательных корней тогда не находили.

Только после признания математиками отрицательных и иррациональных чисел благодаря работам голландского математика А. Жирара (1595–1632), а также Р. Декарта (1596–1650) и И. Ньютона (1643–1727) был обоснован современный способ решения квадратных уравнений общего вида.

Теорию уравнений разрабатывал известный украинский математик-педагог, профессор Львовского университета Николай Андреевич Чайковский (1887–1970). Его диссертация называлась «Об уравнениях степени p^2». Во многих его статьях и некоторых пособиях рассматривается теория квадратных уравнений. Он опубликовал статью «К теории дискриминанта алгебраического уравнения», пособие «Квадратные уравнения», которое пользовалось большой популярностью среди учителей. (Подробно о Николае Андреевиче Чайковском читайте в конце учебника.)

Примеры решения упражнений

Пример 1. Решить уравнение $x^2 + 3x - 10 = 0$.

● $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$. $\sqrt{D} = 7$.

$x_{1,2}=\frac{-3\pm7}{2}$; $x_1=\frac{-3-7}{2}=-5$; $x_2=\frac{-3+7}{2}=2$.

Ответ. -5; 2. ●

Пример 2. Решить уравнение $5x^2-3x+7=0$.

● $D=(-3)^2-4\cdot5\cdot7=9-140=-131<0$.

Поскольку $D<0$, то данное уравнение не имеет корней.

Ответ. Уравнения не имеет корней. ●

Пример 3. Доказать, что уравнение $6x^2+9=4x+10x(2-x)$ имеет один корень.

● $6x^2+9-4x-10x(2-x)=0$; $6x^2+9-4x-20x+10x^2=0$;

$16x^2-24x+9=0$.

$D=(-24)^2-4\cdot16\cdot9=576-576=0$.

Поскольку $D=0$, то данное уравнение имеет один корень. ●

Пример 4. Решить уравнение $5(x^2+2x)=3-4x$.

● $5x^2+10x-3+4x=0$; $5x^2+14x-3=0$. Используем формулу корней квадратного уравнения, коэффициент при x которого является четным числом.

Получим: $x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{(-7)^2-5(-3)}}{5}=\frac{-7\pm\sqrt{64}}{5}=\frac{-7\pm8}{5}$.

Отсюда $x_1=-3$; $x_2=\frac{1}{5}$.

Ответ. -3; $\frac{1}{5}$. ●

Пример 5. Найти три значения m, при которых уравнение $5x^2-2x-m+4=0$ не имеет корней.

● Перепишем уравнение так: $5x^2-2x+(4-m)=0$.

Найдем дискриминант уравнения:

$D=(-2)^2-4\cdot5\cdot(4-m)=4-80+20m=20m-76$.

Уравнение не имеет корней, если $D<0$, то есть $20m-76<0$. Последнее неравенство верно, например, при $m=0$, $m=1$, $m=2$. Итак, при значениях $m=0$, $m=1$, $m=2$ данное уравнение не имеет корней. ●

Устно

577. Верно ли записан дискриминант $D=b^2-4ac$ квадратного уравнения:

а) $2x^2+5x-3=0$; $D=5^2-4\cdot2\cdot3$;

б) $x^2 - 3x - 4 = 0$; $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$;

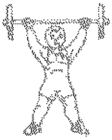
в) $3x^2 - x + 2 = 0$; $D = (-1)^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2$;

г) $-2x^2 + 5x + 7 = 0$; $D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 7$?

578. Сколько корней имеет уравнение:

а) $7x^2 - x + 1 = 0$; $D = -27$; б) $x^2 + 4x - 3 = 0$; $D = 28$;

в) $x^2 - 6x + 9 = 0$; $D = 0$?



Уровень А

Найдите дискриминант квадратного уравнения и укажите количество корней уравнения:

579. а) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; б) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; в) $-3x^2 + 6x - 4 = 0$.

580. а) $x^2 + 2x - 3 = 0$; б) $2x^2 - 5x + 4 = 0$; в) $-x^2 + 8x - 16 = 0$.

Решите уравнение:

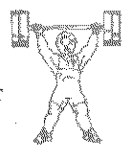
581. а) $x^2 - 6x + 5 = 0$; б) $x^2 + 4x - 12 = 0$; в) $x^2 + 7x + 10 = 0$;
г) $x^2 - 3x + 4 = 0$; д) $x^2 - 10x + 25 = 0$; е) $x^2 - 4x - 21 = 0$.

582. а) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; б) $2x^2 + x - 1 = 0$; в) $3x^2 + 5x - 2 = 0$;
г) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; д) $2x^2 - 3x + 2 = 0$; е) $7x^2 - 6x - 1 = 0$.

583. а) $x^2 + 4x - 5 = 0$; б) $x^2 + 5x + 4 = 0$; в) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
г) $x^2 - 2x + 6 = 0$; д) $x^2 - 8x + 16 = 0$; е) $x^2 - 10x + 21 = 0$;
ж) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; з) $6x^2 - 5x + 1 = 0$; и) $2x^2 + x - 3 = 0$.

584. а) $x^2 = 5x - 4$; б) $2x^2 + 7x = 4$; в) $x^2 - 4x = 2 - 3x$.

585. а) $x^2 - 2x = 3$; б) $x^2 - 4x = 4x - 7$; в) $4x^2 + 3x = 1$.



Уровень Б

586. Не решая уравнений, укажите те из них, которые имеют один корень:

а) $9x^2 + 6x + 1 = 0$; б) $3x^2 - x - 4 = 0$; в) $2x^2 - 16x + 32 = 0$.

587. Какие из уравнений не имеют корней:

а) $x^2 + 2x - 7 = 0$; б) $2x^2 - 3x + 8 = 0$; в) $3x^2 + 5x + 4 = 0$?

588. Не решая уравнений, укажите те из них, которые имеют один корень или не имеют корней:

а) $3x^2 + x + 1 = 0$; б) $25x^2 + 20x + 4 = 0$; в) $x^2 - 16x + 60 = 0$.

Решите уравнение:

589. а) $x^2-2x-1=0$; б) $7x^2-18x+8=0$; в) $3x^2+22x-16=0$;
г) $x^2+21x+90=0$; д) $3x^2+53x-18=0$; е) $-25x^2+50x+75=0$;
ж) $x^2+0{,}5x-1{,}5=0$; з) $2x^2-x+\dfrac{1}{9}=0$; и) $x^2-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{8}{9}=0$.

590. а) $x^2-6x+6=0$; б) $3x^2+20x+12=0$; в) $4x^2-16x+7=0$;
г) $x^2-16x-161=0$; д) $4x^2+73x+18=0$; е) $-12x^2-36x+48=0$;
ж) $x^2+1{,}2x+0{,}2=0$; з) $3x^2-x-\dfrac{2}{3}=0$; и) $5x^2-\dfrac{1}{3}x-2=0$.

591. При каких значениях a значение трехчлена $24a^2-90a-24$ равно 0?

Решите уравнение:

592. а) $t^2+3t=-4t-6-t^2$; б) $5(y^2+3)=-24y+20$;
в) $4x(x-2)+x^2=6x+3$; г) $6x^2+3x=5(2x+1)$;
д) $(x-1)^2+4x^2=4$; е) $(3x-2)(3x+2)=6x+3$;
ж) $5x^2-\dfrac{1}{5}x=0{,}1-\dfrac{1}{2}x+4x^2$; з) $(\sqrt{3}x+2)(\sqrt{3}x-2)+7x=x^2+11$.

593. а) $2(12x^2+x-10)=-5$; б) $5(x^2-2)=x(1-x)+10x$;
в) $(2x+3)^2+2x^2=-12x-(x-2)^2$; г) $6x^2+20x=(2x-5)(2x+5)$;
д) $2\left(x^2-\dfrac{1}{3}x\right)+1\dfrac{1}{3}=1+\dfrac{1}{2}x+x^2$.

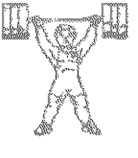
594. При каких значениях x значение разности многочленов $3x^2+24x+48$ и $10x+30$ равно 2?

595. При каких значениях x значение суммы многочленов $3x^2-6x$ и $5x^2-x+2$ равно 3?

596. Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{t^2+3t}{2}=\dfrac{t+7}{4}$; б) $\dfrac{y^2+y}{4}=\dfrac{3-7y}{20}+0{,}3$.

Уровень B



597. Найдите значения b, при которых один из корней уравнения равен -3:

а) $20x^2+bx-b^2=0$; б) $\dfrac{b^2x^2}{49}-\dfrac{5}{7}bx-14=0$.

598. При каких значениях a уравнение имеет один корень:

а) $x^2 - 16x + 4a = 0$; б) $x^2 + (a + 1)x + 4 = 0$?

599. Найдите два значения m, при которых уравнение $x^2 + 7x + 3m - 7 = 0$ имеет два разных корня.

600. Найдите два значения c, при которых уравнение $(1 - c)x^2 + 4x + 8 = 0$ не имеет корней.

601. Докажите, что при любом значении b уравнение $x^2 + bx - 3 = 0$ имеет два корня.

602. Докажите, что при любом значении n уравнение $x^2 - nx + n^2 + 1 = 0$ не имеет корней.

Упражнения для повторения

603. Подберите два числа, сумма которых равна 8, а произведение — 12. Проверьте, являются ли эти числа корнями уравнения $x^2 - 8x + 12 = 0$.

604. Найдите сумму и произведение двух выражений:

а) $3+\sqrt{2}$ и $3-\sqrt{2}$; б) $x-2\sqrt{6}$ и $x+2\sqrt{6}$; в) $x-\sqrt{x}$ и $x+\sqrt{x}$.

605. Число десятков некоторого двузначного числа больше числа единиц на 4. Найдите это двузначное число, если сумма его цифр равна 14.

606. Два грузовых автомобиля перевезли 46 т груза, причем первый автомобиль сделал 5 рейсов, а второй — 3 рейса. Сколько тонн груза перевез каждый автомобиль, если за рейс первый автомобиль перевозит на 2 т больше груза, чем второй?

3. Теорема Виета

1. Рассмотрим приведенные **квадратные уравнения:**

$x^2 + 2x - 3 = 0$; $x^2 - 7x + 10 = 0$; $x^2 + 5x + 4 = 0$.

Найдем корни каждого **из** этих **уравнений,** используя формулу корней квадратного уравнения, а также сумму корней и их произведение. Результаты занесем в таблицу:

Уравнение	Корни уравнения: x_1, x_2	Сумма корней: $x_1 + x_2$	Произведение корней: $x_1 \cdot x_2$
$x^2 + 2x - 3 = 0$	$-3; 1$	-2	-3
$x^2 - 7x + 10 = 0$	$2; 5$	7	10
$x^2 + 5x + 4 = 0$	$-4; -1$	-5	4

Из таблицы видно, что сумма корней каждого из уравнений равна второму коэффициенту уравнения, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Это верно для любого приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, которое имеет корни.

Теорема. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Доказательство. Рассмотрим приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$. Дискриминант этого уравнения $D = p^2 - 4q$. При $D \geq 0$ уравнение имеет корни:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}; \qquad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}.$$

Найдем сумму и произведение корней:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Итак, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Теорема доказана. ●

$x^2 + px + q = 0$ — приведенное квадратное уравнение;

x_1, x_2 — корни уравнения;

$x_1 + x_2 = -p$, $\qquad x_1 \cdot x_2 = q$.

Доказанную теорему называют «теоремой Виета» по фамилии французского математика Франсуа Виета (1540–1603), который первым заметил зависимость между корнями и коэффициентами квадратного уравнения.

Замечание. Если в уравнении $x^2 + px + q = 0$ число q является целым, то из равенства $x_1 \cdot x_2 = q$ следует, что целыми корнями такого уравнения могут быть только делители числа q (свободного члена).

2. Мы доказали теорему Виета для приведенного квадратного уравнения. Рассмотрим теперь произвольное квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, которое имеет корни x_1 и x_2. Данное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Полученное квадратное уравнение уже является приведенным, а потому для него выполняется теорема Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Пример. Не решая уравнение $6x^2 - 7x + 2 = 0$, найти сумму и произведение его корней.

● Вычислим дискриминант уравнения: $D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 49 - 48 = 1$. Поскольку $D > 0$, то данное уравнение имеет корни. По теореме Виета их сумма равна $-\frac{-7}{6} = \frac{7}{6}$, а произведение — $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Если x_1 и x_2 — корни уравнения, то записываем: $x_1 + x_2 = -\frac{-7}{6} = \frac{7}{6}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$. ●

Итак, на основании теоремы Виета можно, не вычисляя корней квадратного уравнения, находить их сумму и произведение. Использовать теорему Виета можно только для квадратных уравнений, имеющих корни.

3. Верна и *теорема, обратная теореме Виета.*

Теорема. Если числа m и n таковы, что $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство теоремы представлено в рубрике «Для тех, кто хочет знать больше».

Пример. Являются ли числа -3 и 5 корнями уравнения $x^2 - 2x - 15 = 0$?

● Найдем сумму чисел -3 и 5 и их произведение: $-3 + 5 = 2$; $(-3) \cdot 5 = -15$. Сумма чисел равна второму коэффициенту уравнения, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену. Поэтому по теореме, обратной теореме Виета, числа -3 и 5 являются корнями уравнения $x^2 - 2x - 15 = 0$. ●

На основании теоремы, обратной теореме Виета, можно проверить, являются ли некоторые два числа корнями заданного квадратного уравнения, решить квадратное уравнение путем подбора его корней, записать приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются данные два числа.

Для тех, кто хочет знать больше

Докажем теорему, обратную теореме Виета.

Доказательство. По условию теоремы $m + n = -p$, $mn = q$, тогда $p = -(m + n)$, $q = mn$. Подставим значения p и q в уравнение

$$x^2 + px + q = 0, \qquad (1)$$

получим равносильное ему уравнение

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Решим полученное уравнение так:

$$x^2 - mx - nx + mn = 0;$$
$$x(x - m) - n(x - m) = 0;$$
$$(x - m)(x - n) = 0, \qquad (2)$$

откуда $x = m$ или $x = n$. Числа m и n являются корнями уравнения (2), а потому и корнями уравнения (1). Теорема доказана. ●

Примеры решения упражнений

Пример 1. Уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$ имеет корни. Не решая уравнение, найти сумму и произведение его корней.

● Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. По теореме Виета

$x_1 + x_2 = -(-12) = 12;$ $x_1 \cdot x_2 = 20.$ ●

Пример 2. Решить уравнение $x^2 + 2x - 8 = 0$, не используя формулы корней квадратного уравнения.

● Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда

$$x_1 + x_2 = -2,$$
$$x_1 \cdot x_2 = -8.$$

Если x_1 и x_2 — целые числа, то равенство $x_1 \cdot x_2 = -8$ верно только для пар чисел: -1 и 8; -2 и 4; -4 и 2; -8 и 1. Из этих пар только сумма чисел третьей пары равна -2. Поэтому по теореме, обратной теореме Вита, числа -4 и 2 будут корнями данного уравнения. Итак, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

Ответ. -4; 2. ●

Пример 3. Составить приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа −11 и 4.

● Искомое уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0$, где

$p = -(x_1 + x_2) = -(-11 + 4) = 7$; $q = x_1 \cdot x_2 = -11 \cdot 4 = -44$.

Итак, имеем уравнение $x^2 + 7x - 44 = 0$.

Ответ. $x^2 + 7x - 44 = 0$. ●

Пример 4. Найти значение выражения $5\sqrt{x_1x_2} - (x_1 + x_2)^2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 9x + 16 = 0$.

● По теореме Виета $x_1 + x_2 = 9$, $x_1x_2 = 16$. Тогда:

$$5\sqrt{x_1x_2} - (x_1 + x_2)^2 = 5\sqrt{16} - 9^2 = -61.$$

Ответ. −61. ●

Пример 6. Корни уравнения $x^2 + 10x + a = 0$ удовлетворяют условию $3x_1 - x_2 = -6$. Найти эти корни и коэффициент a.

● По теореме Виета $x_1 + x_2 = -10$. Учитывая условие $3x_1 - x_2 = -6$, получим систему $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -6; \\ x_1 + x_2 = -10, \end{cases}$ откуда: $\begin{cases} 4x_1 = -16; \\ x_1 + x_2 = -10; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -4; \\ x_2 = -6. \end{cases}$

Итак, $x_1 = -4$, $x_2 = -6$ — корни уравнения. Тогда $a = x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot (-6) = 24$.

Ответ. −4; −6 — корни уравнения; $a = 24$. ●

Устно

607. Каждое из следующих уравнений имеет корни. Найдите сумму и произведение этих корней:

а) $x^2 - 6x + 5 = 0$; **б)** $x^2 + 6x - 27 = 0$; **в)** $3x^2 - 16x + 5 = 0$.

608. Являются ли данные числа корнями уравнения?

Уравнения	Числа	
а) $x^2 - 11x + 10 = 0$	2 и 5	1 и 10
б) $x^2 + 9x - 22 = 0$	−2 и 11	−11 и 2
в) $x^2 + 4x - 21 = 0$	−3 и 7	−7 и 3

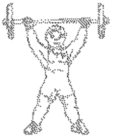
609. Один из корней уравнения равен 3. Найдите другой корень:

а) $x^2 - 10x + 21 = 0$; **б)** $x^2 - 2x - 3 = 0$; **в)** $x^2 - 6x + 9 = 0$.

610. Найдите корни уравнения по теореме, обратной теореме Виета:

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 + 3x + 2 = 0$; в) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Уровень А



Являются ли данные числа корнями уравнения?

611. а) $x^2 - 2{,}5x + 1 = 0$, числа 2 и 0,5;

б) $x^2 + 20x - 125 = 0$, числа –5 и 25.

612. а) $x^2 - 15x + 56 = 0$, числа –7 и –8; б) $x^2 - 18x - 40 = 0$, числа –2 и 20.

Найдите по формуле корни уравнения и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:

613. а) $x^2 - 13x + 40 = 0$; б) $x^2 + 6x + 5 = 0$.

614. а) $x^2 + 3x - 18 = 0$; б) $x^2 - 5x - 14 = 0$.

615. Найдите свободный член q приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, если его корнями являются числа: 5 и –3; –2 и –6.

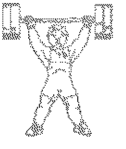
616. Найдите коэффициент p приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, если его корнями являются числа: 1 и 4; –1 и 2.

Числа x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения. Запишите это уравнение, если:

617. а) $x_1 + x_2 = 4$; $x_1 \cdot x_2 = 3$; б) $x_1 + x_2 = -7$; $x_1 \cdot x_2 = 10$.

618. а) $x_1 + x_2 = 1$; $x_1 \cdot x_2 = -6$; б) $x_1 + x_2 = -3$; $x_1 \cdot x_2 = 2$.

Уровень Б



Каждое из следующих уравнений имеет корни. Найдите сумму и произведение этих корней:

619. а) $3x^2 - 4x + 1 = 0$; б) $10x^2 + x - 3 = 0$.

620. а) $3x^2 - 16x + 5 = 0$; б) $6x^2 - x - 1 = 0$.

Найдите корни уравнения по теореме, обратной теореме Виета:

621. а) $x^2 + 4x + 3 = 0$; б) $x^2 - 5x + 6 = 0$; в) $x^2 + 7x + 12 = 0$;

г) $x^2 - 3x - 2 = 0$; д) $x^2 - 10x + 21 = 0$; е) $x^2 - 8x - 9 = 0$;

ж) $x^2 + 5x + 3 = 0$; з) $x^2 - 2x - 8 = 0$; и) $x^2 + 2x - 15 = 0$.

622. а) $x^2 - 9x + 14 = 0$; б) $x^2 + x - 6 = 0$; в) $x^2 - 8x + 15 = 0$;

г) $x^2 - 4x - 21 = 0$; д) $x^2 + 7x - 18 = 0$; е) $x^2 + 10x + 16 = 0$.

623. Найдите коэффициенты p и q приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, если его корнями являются числа: 5 и –3; –2 и –6.

Запишите приведенное квадратное уравнение, которое имеет корни:

624. а) 1 и 3; б) –4 и 1,5; в) –4 и –5; г) $\frac{2-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

625. а) 2 и 4; б) –2 и –3,5; в) $1-\sqrt{3}$ и $1+\sqrt{3}$.

626. Число –9 является корнем уравнения $x^2 + 10x + q = 0$. Найдите другой корень уравнения и коэффициент q.

627. Число –2 является корнем уравнения $x^2 + px - 6 = 0$. Найдите другой корень уравнения и коэффициент p.

628. Какими могут быть целые корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, если:

а) $q = 7$; б) $q = -5$; в) $q = 9$; г) $q = -8$?

629. Не решая уравнения, найдите значение выражения $(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2$, если x_1 и x_2 — корни уравнения:

а) $x^2 - 7x + 9 = 0$; б) $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

630. Не решая уравнения, найдите значение выражения $7x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2$, если x_1 и x_2 — корни уравнения:

а) $x^2 - x - 4 = 0$; б) $2x^2 + 11x + 5 = 0$.

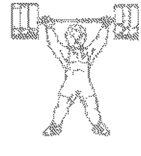
631. При каких значениях m произведение корней уравнения:

а) $x^2 + 8x + 4m + 7 = 0$ равно 15; б) $x^2 + 3x + m^2 - 14 = 0$ равно 2?

632. Найдите $|x_1 - x_2|$, если x_1 и x_2 — корни уравнения:

а) $x^2 - 5x - 14 = 0$; б) $2x^2 - x - 1 = 0$.

Уровень B



633. Уравнения $x^2 + px + 8 = 0$ имеет положительные корни, один из которых в 4 раза больше другого. Найдите корни уравнения и коэффициент p.

634. Один из корней уравнения $x^2 + px - 33 = 0$ больше другого на 14. Найдите корни уравнения и коэффициент p.

635. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 10x + b = 0$ удовлетворяют условию $x_1 - 3x_2 = 2$. Найдите эти корни и коэффициент b.

636. Докажите, что уравнение $5x^2 - 3x - a^2 - 2 = 0$ при любом значении a имеет корни разных знаков.

637. Найдите все значения b, при которых уравнение $x^2 - bx + 3 = 0$ имеет только натуральные корни.

638. Не решая уравнение $10x^2 + 3x - 4 = 0$, найдите сумму квадратов его корней.

Упражнения для повторения

639. Упростите выражение:

а) $\frac{m+4}{m^2-2m} - \frac{m+10}{m^2-4}$; б) $\frac{5a-a^2}{a^2-10a+25} - \frac{a+1}{5-a}$.

640. Найдите значение выражения:

а) $\frac{x+2}{x^2+3x} - \frac{1+x}{x^2-9}$ при $x = 3{,}2$;

б) $\frac{4b}{3a^2+2ab} - \frac{9a}{2b^2+3ab}$ при $a = 2$; $b = 2{,}5$.

641. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\frac{a}{a+3} + \frac{8-a}{a}$; б) $\frac{5}{2x^2-2x} + \frac{x^2+3}{x-4}$.

642. Если одну сторону квадрата увеличить в два раза, а соседнюю сторону увеличить на 3 см, то периметр образованного прямоугольника будет равен 72 см. Найдите сторону квадрата.

4. Уравнения, приводимые к квадратным

1. Дробные уравнения.

Решение некоторых дробных рациональных уравнений сводится к решению квадратных уравнений.

Пример. Решить уравнение $\frac{x+1}{x-1} = \frac{12}{x+2}$.

● Перенесем дробь $\frac{12}{x+2}$ в левую часть уравнения и запишем полученную разность в виде дроби:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{12}{x+2}=0; \qquad \frac{(x+1)(x+2)-12(x-1)}{(x-1)(x+2)}=0;$$

$$\frac{x^2+2x+x+2-12x+12}{(x-1)(x+2)}=0; \qquad \frac{x^2-9x+14}{(x-1)(x+2)}=0.$$

Найдем значение x, при которых числитель дроби равен нулю:

$x^2-9x+14=0$; $D=(-9)^2-4\cdot1\cdot14=25$; $\sqrt{D}=5$;

$x_1=\frac{9-5}{2}=2$; $x_2=\frac{9+5}{2}=7$.

При $x=2$ и $x=7$ знаменатель $(x-1)(x+2)$ не равен нулю. Итак, $x_1=2$; $x_2=7$ — корни уравнения.

Ответ. 2; 7. ●

2. Биквадратные уравнения.

Уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq0$, называется *биквадратным уравнением*. Заменой $x^2=y$ его можно привести к квадратному уравнению $ay^2+by+c=0$.

Пример. Решить уравнение $2x^4-11x^2+12=0$.

● Сделаем замену $x^2=y$, тогда $x^4=y^2$. Имеем квадратное уравнение:

$$2y^2-11y+12=0.$$

Решим полученное уравнение:

$D=(-11)^2-4\cdot2\cdot12=121-96=25$; $\sqrt{D}=5$;

$y_1=\frac{11-5}{4}=1{,}5$; $y_2=\frac{11+5}{4}=4$.

Возвращаясь к замене $x^2=y$, получим:

1) $x^2=1{,}5$; откуда $x_1=-\sqrt{1{,}5}$; $x_2=\sqrt{1{,}5}$;

2) $x^2=4$; откуда $x_3=-2$; $x_4=2$.

Ответ. -2; $-\sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{1{,}5}$; 2. ●

Для тех, кто хочет знать больше

Решение биквадратного уравнения путем замены $x^2 = y$ сводится к решению квадратного уравнения. Используя соответствующие замены, подобным способом можно решать и некоторые другие уравнения. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение $(x^2 - 3x)^2 + x^2 - 3x - 20 = 0$.

● Пусть $x^2 - 3x = y$. Получим квадратное уравнение $y^2 + y - 20 = 0$. Его корнями являются числа $y_1 = -5$, $y_2 = 4$.

Учитывая замену, получим:

1) $x^2 - 3x = -5$; $\quad x^2 - 3x + 5 = 0$; $\quad D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$.

Поскольку дискриминант отрицательный, то уравнение корней не имеет.

2) $x^2 - 3x = 4$; $\quad x^2 - 3x - 4 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = -1$; $x_2 = 4$.

Ответ. -1; 4. ●

Пример 2. Решить уравнение $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$.

● Пусть $\sqrt{x} = y$, тогда $x = y^2$. Имеем уравнение:

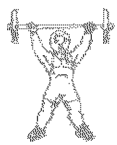
$$y^2 - 2y - 8 = 0,$$

корнями которого являются числа $y_1 = -2$, $y_2 = 4$.

Учитывая замену, получим:

1) $\sqrt{x} = -2$ — уравнение корней не имеет; $\quad$ 2) $\sqrt{x} = 4$; $x = 16$.

Ответ. 16. ●



Уровень А

Решите уравнение:

643. а) $\dfrac{x^2 - x}{x + 4} = 0$; $\quad$ б) $\dfrac{3y^2 - 5y - 2}{4 - y} = 0$; $\quad$ в) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = 0$;

г) $\dfrac{x^2 - 3x}{x - 3} = 0$; $\quad$ д) $\dfrac{4y^2 + 11y - 3}{y + 3} = 0$; $\quad$ е) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 0$.

<u>644.</u> а) $\dfrac{x^2 - 49}{x + 3} = 0$; $\quad$ б) $\dfrac{2x^2 - 8x}{x} = 0$; $\quad$ в) $\dfrac{2x^2 + 9x - 11}{x - 1} = 0$.

645. а) $\dfrac{x^2}{3x - 4} - \dfrac{100}{3x - 4} = 0$; $\quad$ б) $\dfrac{5z^2}{z - 4} = \dfrac{20z}{z - 4}$; $\quad$ в) $\dfrac{y^2}{y + 3} = \dfrac{y + 12}{y + 3}$.

646. а) $\frac{6t}{t+6}+\frac{t^2}{t+6}=0$; б) $\frac{x^2+7x}{4+x}=\frac{2x-6}{4+x}$; в) $\frac{x^2-12}{x-6}-\frac{4x}{x-6}=0$.

647. а) $\frac{x^2-5x}{x^2+3}=2$; б) $\frac{2+3x}{x+2}=x$; в) $-\frac{32}{y}=y-12$;

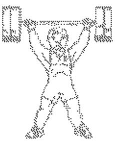
г) $\frac{18-4x^2}{x-x^2}=3$; д) $\frac{x^2-7}{x-4}=2x$; е) $y-1=\frac{20}{y}$.

648. а) $\frac{x^2+9x}{x+1}=14$; б) $\frac{2x-15}{x-6}=x$; в) $y+6=\frac{7}{y}$.

649. а) $x^4-5x^2+4=0$; б) $x^4-7x^2-18=0$; в) $x^4+x^2-6=0$.

650. а) $x^4-3x^2-4=0$; б) $x^4-10x^2+9=0$; в) $x^4-7x^2+12=0$.

Уровень Б



Решите уравнение:

651. а) $\frac{x^2+x-12}{x^2-16}=0$; б) $\frac{3x^2+8x-3}{x^2-\frac{1}{9}}=0$;

в) $\frac{2x^2+9x-5}{x^2+6x+5}=0$; г) $\frac{2x^2-5x+2}{(2x-1)(x-2)}=0$.

652. а) $\frac{4x^2-1}{x+\frac{1}{2}}=0$; б) $\frac{x^2-11x+10}{x^2-1}=0$.

653. а) $\frac{8x-5}{x}=\frac{9x}{x+2}$; б) $\frac{5+23x}{2x+1}=\frac{12x-6}{x}$;

в) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}=1$; г) $\frac{x}{x-3}-\frac{x-10}{x+2}=5$.

654. а) $\frac{22(x-1)}{x}=\frac{21x-9}{x+1}$; б) $\frac{27x+17}{28}=x+\frac{x+1}{x}$;

в) $\frac{x+3}{2x-6}+\frac{29}{x+4}=3$.

655. а) $\frac{22}{1-4x^2}-\frac{4}{2x-1}+\frac{28}{1+2x}=-2$; б) $\frac{7}{x-4}+\frac{27}{x+4}-\frac{18}{x^2-16}=8$;

в) $\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x^2-9}+\frac{2}{x^2-3x}=0$; г) $\frac{18}{6x+x^2}-\frac{9}{x-6}+\frac{27}{x^2-36}=0$.

656. а) $\frac{12}{x+1}+\frac{8}{1-x^2}+\frac{x-9}{x-1}=-1$; б) $\frac{3}{x-9}+\frac{5}{x^2+9x}-\frac{10}{81-x^2}=0$.

657. а) $x^3-5x=0$; б) $4x^3-0{,}04x=0$.

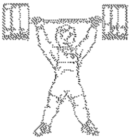
658. а) $x^3+2x=0$; б) $5x^3-11{,}25x=0$.

659. а) $2x^4-9x^2+4=0$; б) $36x^4-7x^2-4=0$;

в) $\left(x^2-1\right)^2-11\left(x^2-1\right)+24=0$; г) $\left(x^2+2x\right)^2-2\left(x^2+2x\right)-3=0$.

660. а) $4x^4-17x^2+4=0$; б) $2x^4+5x^2-3=0$;

в) $\left(x^2-x\right)^2+2\left(x^2-x\right)-8=0$.



Уровень В

Решите уравнение:

661. а) $\frac{x+4}{4x^2+4x+1}-\frac{10}{1-2x}=\frac{15}{2x+1}$; б) $\frac{2}{x-5}+\frac{7x}{x+3}+\frac{14}{x^2-2x-15}=0$;

в) $\frac{6+x}{x^2-3x-10}-\frac{8+x}{x+2}+\frac{1}{x-5}=2$; г) $\frac{y-3}{2}+\frac{y^2+2}{y^2}=\frac{1-y-y^2}{y}+\frac{2}{y^2}$.

662. а) $\frac{3y-y^2}{y-2}+\frac{y-2}{3y-y^2}=-2{,}5$; б) $\frac{x^2+4x+9}{x-3}+\frac{x-3}{x^2+4x+9}=-2$.

663. а) $\left(x^2+5x\right)\left(x^2+5x-2\right)=24$; б) $\left(2x^2+x+1\right)\left(2x^2+x+3\right)=8$;

в) $\left(x^2-5x+7\right)^2-(x-2)(x-3)=1$; г) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=120$;

д) $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$; е) $(x+3)^2(x+2)(x+4)=12$.

664. а) $\sqrt{x^2-3x+5}=3$; б) $\sqrt{3x^2-14x+9}=1$.

665. а) $x-6\sqrt{x}+5=0$; б) $x+\sqrt{x}-6=0$;

в) $\sqrt{x-1}+2x=12$; г) $x+\sqrt{x+20}=22$;

д) $x^2-3x-7=-\sqrt{x^2-3x+5}$; е) $(x+1)(x+4)=3\sqrt{x^2+5x+2}+6$.

666. Сократите дробь:

а) $\frac{24a^2c^6}{32a^3c^4}$; б) $\frac{4x^4-y^2}{2x^2y+y^2}$.

667. Докажите тождество $\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right):\frac{a-b}{a+b}=a-b$.

668. Упростите выражение:

а) $5\sqrt{8}+3\sqrt{16}-6\sqrt{32}-6\sqrt{64}$; б) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{12}-\sqrt{8}\right)$.

669. Из двух сел навстречу друг другу одновременно отправились пешеход и велосипедист. Пройдя 2 км, пешеход встретил велосипедиста, который за это время проехал 6 км. Найдите скорость пешехода, если она на 8 км/ч меньше скорости велосипедиста.

670. Мотоциклист за некоторое время проехал 19 км. Если бы его скорость была на 2 км/ч больше, то за то же время он проехал бы 20 км. Найдите скорость мотоциклиста.

5. Решение задач при помощи квадратных уравнений и уравнений, приводимых к квадратным

Рассмотрим примеры.

Задача 1. Длина классной доски на 1,3 м больше ширины. Найти размеры доски, если ее площадь 3 м^2.

● Пусть ширина доски равна x м. Тогда длина доски равна $(x + 1{,}3)$ м, а площадь — $x(x + 1{,}3)$ м^2. По условию задачи площадь доски 3 м^2. Имеем уравнение: $x(x + 1{,}3) = 3$, откуда $x^2 + 1{,}3x - 3 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $x_1 = -2{,}5$ и $x_2 = 1{,}2$. Первый корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, ширина доски равна 1,2 м, а длина — $1{,}2 + 1{,}3 = 2{,}5$ (м).

Ответ. 1,2 м; 2,5 м. ●

Задача 2. Моторная лодка за 2 ч прошла 15 км по течению реки и 14 км против течения. Найти скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения 3 км/ч.

● Пусть скорость лодки в стоячей воде x км/ч ($x > 3$, поскольку скорость лодки должна быть больше скорости течения), тогда скорость лодки по течению реки $(x + 3)$ км/ч, а против течения — $(x - 3)$ км/ч.

Путь 15 км по течению реки лодка прошла за $\frac{15}{x+3}$ ч, а путь 14 км против течения — за $\frac{14}{x-3}$ ч. На весь путь ушло $\left(\frac{15}{x+3}+\frac{14}{x-3}\right)$ ч, что по условию задачи равно 2 ч. Имеем уравнение:

$$\frac{15}{x+3}+\frac{14}{x-3}=2.$$

Решим это уравнение, учитывая, что $x+3\neq 0$ и $x-3\neq 0$:

$15(x-3)+14(x+3)-2(x-3)(x+3)=0;$

$-2x^2+29x+15=0;\quad 2x^2-29x-15=0;\quad x_1=-0{,}5;\ x_2=15.$

При найденных значениях x знаменатель $(x+3)(x-3)$ не равен нулю.

Число $-0{,}5$ не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость лодки в стоячей воде 15 км/ч.

Ответ. 15 км/ч. ●

Задача 3. Две бригады рабочих, работая вместе, выполнили заказ за 4 дня. За сколько дней может выполнить заказ каждая бригада, работая отдельно, если первая может это сделать на 6 дней быстрее, чем вторая?

● По условию задачи составляем таблицу:

Бригады	*Количество дней*	*Часть заказа, выполняемая за один день (производительность труда)*
I	x	$\frac{1}{x}$
II	$x+6$	$\frac{1}{x+6}$
I и II	4	$\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}$

Получим уравнение: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$.

Решив уравнение, найдем его корни: $x_1=-4$; $x_2=6$.

Число -4 не удовлетворяет условию задачи. Итак, первая бригада может выполнить заказ за 6 дней, а вторая — за $6+6=12$ (дней).

Ответ. 6 дней; 12 дней. ●

Задача 4. Поезд был задержан в дороге на 20 мин. Чтобы прибыть на станцию назначения вовремя, он на расстоянии 160 км от этой станции увеличил свою скорость на 16 км/ч. Найти начальную скорость поезда.

● По условию задачи составляем таблицу:

Условия движения	*Путь*	*Скорость*	*Время*	
без опоздания	160 км	x км/ч	$\frac{160}{x}$ ч	больше на 20 мин
ликвидируя опоздание на 20 мин	160 км	$(x + 16)$ км/ч	$\frac{160}{x+16}$ ч	

20 мин $= \frac{1}{3}$ ч.

Получим уравнение: $\frac{160}{x} - \frac{160}{x+16} = \frac{1}{3}$.

Решим уравнение, учитывая, что $x \neq 0$ и $x + 16 \neq 0$.

$480(x + 16) - 480x - x(x + 16) = 0;$

$-x^2 - 16x + 7680 = 0;$

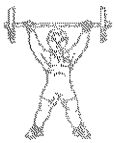
$x^2 + 16x - 7680 = 0;$

$x_1 = -96; x_2 = 80.$

Число -96 не удовлетворяет условию задачи. Начальная скорость поезда составляет 80 км/ч.

Ответ. 80 км/ч. ●

Уровень А



671. Произведение двух чисел равно 135. Найдите эти числа, если одно из них на 6 больше другого.

672. Одно число меньше другого на 20, а их произведение равно -91. Найдите эти числа.

673. Разность двух положительных чисел равна 23, а их произведение равно 420. Найдите эти числа.

674. Найдите стороны прямоугольника, периметр которого равен 30 см, а площадь — 56 см^2.

675. Площадь участка прямоугольной формы равна 32 м^2. Длина участка на 4 м больше ширины. Найдите размеры участка.

676. Расстояние между двумя городами 180 км. Пассажирский поезд прошел путь между городами на 1 ч быстрее, чем товарный. Найдите скорости поездов, если скорость пассажирского поезда на 30 км/ч больше скорости товарного.

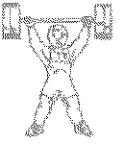
677. Чтобы попасть из города в село, нужно проехать 40 км по шоссе, а потом еще 8 км по грунтовой дороге. На путь от города до села мотоциклист затратил 1 ч. Найдите скорость мотоциклиста на шоссе, если она на 10 км/ч больше скорости на грунтовой дороге.

678. Токарь за определенное время должен был изготовить 96 деталей. Изготавливая каждый час на 2 детали больше, чем планировалось, он выполнил задание на 4 ч быстрее. Сколько деталей планировал изготовлять токарь каждый час?

679. Андрей должен был набрать на компьютере 20 страниц текста за определенное время. Если бы он набирал каждый час на 1 страницу больше, то выполнил бы задание на 1 ч быстрее. Сколько страниц планировал набирать Андрей за 1 ч?

680. Катер за 1 ч прошел 12 км по течению реки и 9 км против течения. Найдите скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде 21 км/ч.

681. Моторная лодка за 2 ч прошла 24 км по течению реки и 6 км против течения. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 2 км/ч.



Уровень Б

682. Одно число больше другого на 3. Разность между квадратом большего числа и меньшим числом, увеличенным в 10 раз, равна 69. Найдите эти числа.

683. Найдите два последовательных натуральных числа, квадрат суммы которых больше суммы их квадратов на 180.

684. Знаменатель обыкновенной дроби на 2 больше числителя. Если из числителя дроби вычесть 1, а к знаменателю прибавить 3, то получим дробь, на $\frac{7}{20}$ меньше данной. Найдите данную дробь.

685. Числитель дроби больше знаменателя на 5. Если к числителю дроби прибавить 3, а из знаменателя вычесть 1, то получим дробь, которая на 6,5 больше данной. Найдите данную дробь.

686. Два экскаватора, работая вместе, вырыли канаву за 3 ч 45 мин. Первый экскаватор, работая отдельно, может вырыть канаву на 4 ч быстрее, чем второй. За какое время может вырыть канаву каждый экскаватор, работая отдельно?

687. Двое рабочих, работая вместе, изготовили партию деталей за 6 ч. Первый рабочий, работая отдельно, может изготовить эту партию деталей на 5 ч быстрее, чем второй. За какое время каждый рабочий может изготовить партию деталей, работая отдельно?

688. Два трактора, работая вместе, вспахали за 1 день половину поля. За сколько дней может вспахать все поле каждый трактор отдельно, если один из них может это сделать на 3 дня быстрее, чем другой?

689. Первая бригада может проложить дорогу на 3 дня быстрее, чем вторая. Если первая бригада проработает 6 дней, а потом вторая — 4 дня, то они проложат всю дорогу. За сколько дней может проложить дорогую первая бригада, работая отдельно?

690. За 4 дня совместной работы два токаря выполнили $\frac{3}{5}$ всего задания. Первый токарь может выполнить все задание на 3 дня быстрее, чем второй. За какое время может выполнить задание каждый токарь, работая отдельно?

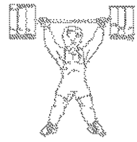
691. Моторная лодка проплыла 15 км по озеру и 30 км по реке, которая впадает в озеро. На путь по озеру она затратила на 1 ч 10 мин меньше, чем на путь по реке. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 3 км/ч.

692. Катер проплыл 9 км по течению реки и 14 км против течения, затратив на весь путь столько времени, сколько ему нужно, чтобы проплыть 24 км в стоячей воде. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки 2 км/ч.

693. Из одного села в другое, расстояние между которыми 24 км, выехал мотоциклист, а через 12 мин вслед за ним выехал автомобиль. Во второе село мотоциклист и автомобиль прибыли одновременно. Найдите скорость автомобиля, если она на 20 км/ч больше скорости мотоциклиста.

694. Поезд был задержан на станции на 6 мин. Увеличив скорость на 10 км/ч, он на перегоне в 90 км ликвидировал отставание от графика. Найдите скорость поезда по расписанию.

Уровень В



695. Каждая ученица 8 класса обменялась фотографиями со всеми остальными ученицами класса. Сколько учениц в этом классе, если они обменялись 210 фотографиями?

696. Точка C делит отрезок AB на две части так, что $AC : CB = CB : AB$. (Такое деление отрезка называют «золотым делением», или «золотым сечением».) Найдите отношение $AC : CB$.

697. Чтобы собрать пшеницу с поля, первому комбайну нужно на 9 ч меньше времени, чем второму, и на 3 ч больше, чем обоим вместе при совместной работе. За какое время каждый комбайн, работая отдельно, может собрать всю пшеницу?

698. Автомобиль за определенное время должен был преодолеть путь 250 км, двигаясь с постоянной скоростью. Но через 2 ч после начала движения он был задержан на 5 мин и, чтобы прибыть к месту назначения вовремя, увеличил скорость на 5 км/ч. Найдите скорость автомобиля на протяжении первых двух часов движения.

699. Бригада из 6 токарей за определенное время должна была изготовить 700 деталей. Когда бригада проработала 5 дней, одному из токарей, который изготавливал за день на 2 детали меньше, чем каждый другой токарь, поручили другую работу, поэтому за отведенное время было изготовлено лишь 650 деталей. Сколько деталей изготавливал за 1 день токарь, которому поручили другую работу?

700. При помощи статистических исследований установлено, что спрос на радиоприемники на местном рынке определяется по формуле $G = p^2 - 100p + 2500$, где p — цена одного радиоприемника в гривнах, не превышающая 50 грн., G — количество радиоприемников, проданных по этой цене. Предприятие оценивает количество проданных радиоприемников по формуле $Q = 0{,}5p^2 - 700$. В каком количестве предприятию наиболее выгодно выпускать радиоприемники?

Указание. Предприятию наиболее выгодно выпускать такое количество радиоприемников, когда их цена на рынке совпадает с ценой производителя ($G = Q$.)

Упражнения для повторения

701. Запишите формулу для вычисления периметра квадрата со стороной a.

702. Запишите формулу для вычисления площади поверхности прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, a и b.

703. Запишите формулу целых чисел, которые при делении на 9 дают в остатке 2.

704. Ширина прямоугольника a см, а длина на 5 см больше. Запишите в виде выражения площадь прямоугольника. Найдите значение этого выражения при $a = 2$; $a = 3{,}5$.

705. Упростите выражение $\frac{b+1}{b-1} + \frac{4}{1-b} \cdot \frac{b}{1+b}$ и найдите его значение при $b = 2$.

706. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения $\frac{a}{a-b} - \frac{b^2}{a^2-b^2} : \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)$ равно 1.

707. Заполните таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
$4x$					
x^2					
x^3					

Вопросы и упражнения для повторения § 3

1. Какое уравнение называется квадратным?

2. Укажите типы неполных квадратных уравнений.

3. Как решить квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$?

4. Как решить квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$?

5. Укажите корень квадратного уравнения $ax^2 = 0$.

6. Какое уравнение называется приведенным квадратным уравнением?

7. По какой формуле вычисляется дискриминант квадратного уравнения?

8. Сколько корней имеет квадратное уравнение, если: $D > 0$; $D < 0$; $D = 0$?

9. По какой формуле находят корни квадратного уравнения? Выведите эту формулу.

10. Как формулируется теорема Виета для приведенного квадратного уравнения? Докажите эту теорему.

11. Сформулируйте теорему, обратную теореме Виета.

12. Чему равна сумма и произведение корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?

Решите уравнение:

708. а) $0{,}3x^2 - 4{,}8 = 0$; б) $20{,}5 - 4{,}1x^2 = 0$;

в) $5\frac{1}{3}x^2 - 2 = 10$; г) $2{,}4x^2 - \frac{3}{8} = 4{,}425$.

709. а) $6x^2 - 3{,}6x = 0$; б) $5{,}3x^2 - 1{,}06x = 0$.

710. а) $2x^2 - x - 1 = 0$; б) $4x^2 - 11x - 3 = 0$;

в) $5x^2 - 21x + 4 = 0$; г) $3x^2 + 5x + 2 = 0$.

711. Найдите по формуле корни уравнения и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:

а) $x^2 - 5x - 14 = 0$; б) $x^2 + 4x - 60 = 0$.

712. Найдите корни уравнения (устно):

а) $x^2 + 3x - 4 = 0$; б) $x^2 + 7x + 10 = 0$.

Решите уравнение:

713. а) $(x-4)^2 - 36 = 0$; б) $(2x+3)^2 - 25 = 0$;

в) $(x+4)(x-1) - 5x = 2x^2 - 4$; г) $(x-5)^2 - (3x+2)^2 = (4x-1)(x-4)$;

д) $(x-3)^2 - (3x-5)^2 = 0$; е) $(7x-1)^2 - (x+9)^2 = 0$.

714. а) $x^3 - 3x = 0$; б) $x^3 - 0{,}64x = 0$.

715. а) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$; б) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

716*. а) $\left(x^2 - x\right)^2 + x^2 - x = 6$; б) $\left(3x^2 + 2x\right)^2 - 4\left(3x^2 + 2x\right) - 5 = 0$;

в) $\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + x + 2\right) = 12$; г) $(x^3 - 4x + 1)(x^2 - 4x - 3) = 12$.

717*. а) $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$; б) $\sqrt{x^2 - 7x + 7} = 5$.

718. а) $\dfrac{z^2 + 5z - 24}{3 - z} = 0$; б) $\dfrac{x^2 - 5}{x+2} + \dfrac{5x+11}{x+2} = 0$;

в) $\dfrac{x+7}{2x-3} = \dfrac{13-x}{x}$; г) $\dfrac{x}{x+5} = \dfrac{1+2x}{3-x}$;

д) $\dfrac{x-1}{x-3} - \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{x^2+x-4}{(x-3)(x+1)}$; е) $\dfrac{2x+3}{x-4} - \dfrac{x}{x^2-16} + \dfrac{5(x+2)}{x+4} = 0$;

ж) $\dfrac{2x-1}{x+2} - \dfrac{x+2}{x-5} = \dfrac{12-5x}{x^2-3x-10}$; з) $\dfrac{2x^2-1}{3x+2} - \dfrac{3x+2}{2x^2-1} = 1{,}5$.

719. Может ли значение выражения $x^2 - 5x + 15$ равняться 5?

720. При каких значениях x значение выражения $\frac{11x-3}{2x-1}$ на 3 больше значения выражения $\frac{x+3}{x-1}$?

721*. Корни уравнения $x^2-16x+m=0$ относятся как $1:7$. Найдите корни уравнения и коэффициент m.

722*. При каких значениях a сумма корней уравнения $x^2+(2-a-a^2)x-a^2=0$ равна нулю?

723*. Найдите значения k, при которых уравнение $(k-3)x^2+(k^2-4k+3)x+1=0$ имеет корни, являющиеся противоположными числами.

724*. При каких натуральных значениях k уравнение $kx^2-2(k-3)x+k-4=0$ имеет корни?

725*. Не решая уравнение $x^2-4x-7=0$, вычислите $x_1^{-2}+x_2^{-2}$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

726. Одна сторона прямоугольника на 3 см длиннее другой, а его площадь равна 130 см^2. Найдите периметр прямоугольника.

727. Найдите натуральное число, которое меньше своего квадрата на 12.

728. Произведение двух последовательных натуральных чисел больше их суммы на 5. Найдите эти числа.

729. Найдите три таких последовательных нечетных числа, для которых сумма квадратов первых двух чисел больше квадрата третьего числа на 9.

730. Один катет прямоугольного треугольника на 1 меньше гипотенузы и на 1 больше другого катета. Найдите стороны треугольника.

731. Знаменатель обыкновенной дроби на 7 больше числителя. Если к числителю и знаменателю дроби прибавить 2, то получим дробь, которая больше данной на $\frac{1}{12}$. Найдите данную дробь.

732. Сумма числителя и знаменателя обыкновенной дроби равна 13. Если к числителю дроби прибавить 7, а из знаменателя вычесть 9, то получим дробь, которая в произведении с данной дробью дает 3. Найдите данную дробь.

733. Пароход проплыл 18 км по течению реки и 16 км против течения. На путь по течению реки он затратил на 15 мин меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость течения реки, если скорость парохода в стоячей воде 20 км/ч.

734. От пристани отплыл плот, а через 9 ч — моторная лодка, которая догнала плот на расстоянии 21 км от пристани. Найдите скорость плота, если она на 12 км/ч меньше скорости лодки по течению реки.

735. Расстояние между железнодорожными станциями A и B равно 230 км. Со станции A на станцию B отправился товарный поезд, а через 1 ч навстречу ему со станции B — пассажирский. Поезда встретились на расстоянии 140 км от станции A. Найдите скорость пассажирского поезда, если она на 20 км/ч больше скорости товарного.

736. Автомобиль прошел путь между городами A и B длиной 132 км. Возвращаясь назад, он уменьшил скорость на 6 км/ч, поэтому затратил на обратной путь на 10 мин больше, чем на путь от A до B. Найдите скорость автомобиля при движении из города A в город B.

737. Грузовой автомобиль перевез груз из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 48 км. Возвращаясь назад, автомобиль проехал $\frac{1}{4}$ пути с той же скоростью, с которой ехал из A в B, а потом увеличил скорость на 12 км/ч. Найдите скорость автомобиля при движении из A в B, если на путь из A в B и на обратный путь он затратил 1 ч 30 мин.

738. Два экскаватора разной мощности могут вырыть котлован за 4 дня. Треть котлована первый экскаватор может вырыть на 2 дня быстрее, чем второй. За сколько дней может вырыть котлован каждый экскаватор, работая отдельно?

739. Двое рабочих могут выполнить $\frac{3}{5}$ задания за 4 дня. За сколько дней сможет выполнить задание каждый рабочий, работая отдельно, если половину задания один из них выполняет на 5 дней быстрее, чем другой?

740*. В первом квартале предприятие выпустило 2000 единиц продукции, а во втором увеличило выпуск на $x\%$. В третьем же квартале предприятие выпустило 3000 единиц продукции, что на $(x + 5)\%$ больше, чем во втором. Найдите x.

Задания для самопроверки №5

I уровень

1. Найдите корни уравнения $x^2 - 2x = 0$ и укажите верный ответ:

а) 1; –2; б) 0; –2; **в)** 0; 2; г) –1; 2.

2. Решите уравнение $x^2 - 64 = 0$ и укажите верный ответ:

а) –64; 64; **б)** 0; 64; **в)** –2; 2; г) –8; 8.

3. Дискриминант квадратного уравнения $3x^2 + 2x - 1 = 0$ равен:

а) $2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)$; **б)** $2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1$;

в) $3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)$; г) $1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$.

4. Решите уравнение $x^2 + 7x - 8 = 0$ и укажите верный ответ:

а) 1; 8; **б)** 7; 8; **в)** –8; 1; г) –1; 8.

5. Сумма и произведение корней уравнения $x^2 + 11x + 30 = 0$ соответственно равны:

а) 11; 30; б) –11; 30; **в)** 11; –30; г) –11; –30.

II уровень

1. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 12 = 0$; **б)** $2x^2 - 6x = 0$.

2. Решите уравнение:

а) $x^2 + 6x + 8 = 0$; б) $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

3. Найдите сумму и произведение корней уравнения $x^2 - 10x + 24 = 0$.

4. Решите уравнение:

а) $(x + 3)(2x - 1) = x^2 + 5x - 7$; б) $\dfrac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} = 0$.

5. Произведение двух чисел равно –24. Найдите эти числа, если одно из них на 11 больше другого.

III уровень

1. **Решите** уравнение:

а) $6x^2 - 3x + \dfrac{1}{3} = 0$; б) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$.

2. Найдите значение выражения $3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

3. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{x-1}-\frac{3}{x+2}=\frac{5}{4}$; б) $\frac{8x}{x+3}-\frac{x+3}{x^2-9}=\frac{5}{x-3}$.

4. Найдите значения b, при которых один из корней уравнения $2x^2-4x+b=0$ в три раза больше другого.

5. Из города A в город B выехал мотоциклист. Через 18 мин вслед за ним выехал автомобиль, который, проехав 40 км, догнал мотоциклиста. Найдите скорости автомобиля и мотоциклиста, если скорость автомобиля на 30 км/ч больше скорости мотоциклиста.

IV уровень

1. Решите уравнение:

а) $\left(x^2+2x-1\right)\left(x^2+2x-2\right)=2$; б) $x-7\sqrt{x}-8=0$.

2. При каких значениях a уравнение $x^2-(a+2)x+a+5=0$ имеет один корень?

3. Найдите все значения b, при которых корни уравнения $3x^2-bx-2=0$ удовлетворяют условию $x_1+6x_2=0$.

4. Решите уравнение $\frac{y+1}{y+3}+\frac{y-14}{y-7}=\frac{20y+47}{21+4y-y^2}$.

5. Два трактора готовят землю под озимые. На протяжении 3 ч они работали вместе, после чего еще 1 ч работал только второй трактор. За все это время трактора подготовили половину поля. За какое время может подготовить все поле каждый трактор, работая отдельно, если первый может это сделать на 4 ч быстрее, чем второй?

§ 4. ФУНКЦИИ

1. Что такое функция. Способы задания функции

Пусть сторона квадрата равна a см, а его периметр — P см. Зная сторону a, по формуле $P = 4a$ можно найти соответствующее значение периметра P. Например,

при $a = 6$ $\quad P = 4 \cdot 6 = 24$;

при $a = 0{,}1$ $\quad P = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$;

при $a = 2{,}5$ $\quad P = 4 \cdot 2{,}5 = 10$.

Мы изменяли значения a, при этом изменялись соответствующие значения P. Поэтому в дальнейшем будем говорить, что a и P — *переменные*. Поскольку каждому значению длины стороны квадрата соответствует определенное значение его периметра, то говорят, что имеем *соответствие* между длиной стороны квадрата и его периметром, или *соответствие между переменными* a и P. При этом говорят, что значению $a = 6$ *соответствует* значение $P = 24$ или значение $P = 24$ *является соответствующим* значению $a = 6$.

Значения переменной a можно выбрать произвольно, а значения переменной P зависят от выбранных значений a. Поэтому a называют *независимой переменной*, а P — *зависимой переменной*.

Другой пример соответствия: каждому значению радиуса окружности соответствует определенное значение длины этой окружности, которое можно найти по формуле $C = 2\pi r$. Эта формула задает *соответствие* между переменными r и C. Первая из них является независимой переменной, а вторая — зависимой переменной.

Рассмотрим такой пример. Водитель решил проследить по спидометру, какое расстояние он проедет за 1 ч, 2 ч, 3 ч, 4 ч, 4,5 ч, 5 ч. Результаты наблюдений он записал в таблицу:

t, ч	1	2	3	4	4,5	5
S, км	82	170	225	300	335	405

Пользуясь таблицей, можно для данных промежутков времени указать соответствующие значения расстояния. Например, времени $t = 2$ соответствует значение расстояния $S = 170$. Итак, имеем *соответствие* между временем t и расстоянием S, пройденным за время t. В этом соответствии t — независимая переменная, а S — зависимая переменная.

В математике, как правило, независимую переменную обозначают буквой x, а зависимую переменную — буквой y. В рассмотренных примерах каждому значению независимой переменной соответствует *единственное значение* зависимой переменной.

Если каждому значению переменной x соответствует *единственное* значение переменной y, то такое соответствие называют *функциональным соответствием, или функцией.* Термин «функция» используют также для обозначения зависимой переменной y, а независимую переменную x при этом называют *аргументом*; y является *функцией от аргумента* x.

Итак, рассмотренные примеры соответствий являются функциями:

периметр P квадрата является функцией от длины его стороны a; здесь P — функция, a — аргумент;

длина C окружности является функцией от радиуса r; здесь C — функция, r — аргумент;

расстояние S является функцией от времени t; здесь S — функция; t — аргумент.

Первые две функции заданы *формулами*: $P = 4a$ и $C = 2\pi r$. Третья функция задана *таблицей*.

Все значения, принимаемые независимой переменной (аргументом), образуют *область определения* функции; все значения, принимаемые зависимой переменной (функцией), образуют *область значений* функции.

Так, область определения функции, заданной формулой $P = 4a$, образуют все значения, которые может принимать переменная a. Поскольку эта переменная определяет длину стороны квадрата, то a может принимать только положительные значения. Итак, область определения этой функции образуют все положительные числа (говорят также, что областью определения функции является множество положительных действительных чисел).

Область значений функции, заданной формулой $P = 4a$, образуют все значения, которые может принимать зависимая переменная P. Периметр P не может равняться отрицательному числу или нулю, однако может равняться любому положительному числу. Например, P может равняться 2, так как 2 — это периметр квадрата со стороной 0,5. Итак, область значений этой функции образуют все положительные числа (говорят также, что областью значений функции является множество положительных действительных чисел).

Область определения функции, заданной таблицей, образуют числа 1; 2; 3; 4; 4,5; 5 (числа первой строки таблицы); область значений этой функции образуют числа 82; 170; 225; 300; 335; 405 (числа второй строки таблицы).

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = x^2 + 1$, где $0 \le x \le 10$. Такая запись означает, что областью определения функции являются все значения x, которые удовлетворяют неравенству $0 \le x \le 10$. Если же функцию задают формулой и не указывают, какие значения может принимать аргумент, то считают, что область определения функции образуют все действительные числа, при которых формула имеет смысл. Например, областью определения функции $y = \frac{1}{x-1}$ являются все действительные числа, кроме $x = 1$.

Для тех, кто хочет знать больше

Все в природе находится в состоянии непрерывного изменения и развития. В практической деятельности человека постоянно приходится иметь дело с величинами, которые изменяются в зависимости от времени и других условий, то есть с переменными величинами.

Понятия переменной величины впервые было введено в математику Рене Декартом в его знаменитом произведении «Геометрия» в 1637 г.

В первой половине XVII в. начинает формироваться представление о функции как о зависимости одной переменной величины от другой.

Выдающийся чешский математик Бернард Больцано (1781–1848) в работе «Чисто аналитическое доказательство» определял функцию как зависимость, заданную любым законом, только бы каждому значению одной переменной соответствовало определенное значение другой.

Термин «функция» (от латинского *functio* — выполнение, свершение) впервые ввел немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646–1716) в 1694 г.

Необходимость изучения функциональной зависимости в школьном курсе математики неоднократно подчеркивал профессор Киевского университета и Киевского политехнического института Василий Петрович Ермаков. (Подробно о В. П. Ермакове читайте в конце учебника.)

Примеры решения упражнений

Пример 1. Автомобиль, двигаясь со скоростью 80 км/ч, проходит за t ч расстояние S км. Задать формулой функцию S от t. Найти значения функции, которые соответствуют значениям аргумента: 2; 2,5; 4.

● Функция задается формулой $S = 80t$. При $t = 2$ $S = 80 \cdot 2 = 160$; при $t = 2{,}5$ $S = 80 \cdot 2{,}5 = 200$; при $t = 4$ $S = 80 \cdot 4 = 320$. ●

Пример 2. Начиная с трех часов, через каждый час измеряли атмосферное давление и данные записывали в таблицу:

t, ч	3	4	5	6	7	8	9
p, мм рт. ст.	746	748	751	752	752	755	756

Соответствие между какими переменными задает таблица? Является ли это соответствие функцией? Какое давление в мм ртутного столбика было в 4 ч; в 8 ч?

● Таблица задает соответствие между временем суток t и атмосферным давлением p. Это соответствие является функцией, поскольку каждому значению t соответствует единственное значение p. При $t = 4$ по таблице находим: $p = 748$. Итак, в 4 часа атмосферное давление было 748 мм рт. ст. Аналогично в 8 часов — 755 мм рт. ст. ●

Пример 3. Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{x^2 + 7x + 6}$.

● Областью определения функции являются все значения x, при которых имеет смысл дробь $\dfrac{1}{x^2 + 7x + 6}$. Найдем сначала значения x, при которых знаменатель дроби равен нулю: $x^2 + 7x + 6 = 0$; $x_1 = -6$, $x_2 = -1$. Итак, областью определения функции являются все действительные числа, кроме $x = -6$ и $x = -1$. ●

Пример 4. Функция задана формулой $y = \dfrac{18}{x}$. Составить таблицу значений аргумента и соответствующих значений функции, выбирая для аргумента такие значения: -6; -3; -2; 2; 3; 4; 6.

●

x	-6	-3	-2	2	3	4	6
y	-3	-6	-9	9	6	4,5	3

●

Пример 5. При каких значениях аргумента значение функции равно -3, если функция задана формулой:

а) $y = 2x - 5$; **б)** $y = x^2 + x - 5$; **в)** $y = x^2 + 2x$?

● **а)** Чтобы найти значения x, при которых $y = -3$, решим уравнение: $2x - 5 = -3$; $2x = 2$; $x = 1$. Итак, значение $y = -3$ функция принимает при $x = 1$.

б) $x^2 + x - 5 = -3$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. Значение $y = -3$ функция принимает при $x = -2$ и $x = 1$.

в) $x^2 + 2x = -3$; $x^2 + 2x + 3 = 0$; $D = 2^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$ — уравнения корней не имеет. Значение $y = -3$ функция не принимает. ●

Устно

741. Пусть x — длина стороны квадрата, а S — его площадь. Почему соответствие между длиной стороны квадрата и его площадью является функциональным соответствием? Какая переменная в этом соответствии является независимой, а какая зависимой; какая является аргументом, а какая — функцией? Задайте это соответствие формулой.

742. Функция задана формулой $y = 5x$.

а) Какая переменная является независимой, а какая — зависимой; какая является аргументом, а какая — функцией?

б) Какое значение функции соответствует значению аргумента $x = 2$; $x = -1$?

в) Какому значению аргумента соответствует значение функции $y = 5$; $y = 0$?

743. Какова область определения функции, заданной формулой:

а) $y = x^2 + 3$, где $0 \le x \le 1$;

б) $y = 2x + 5$;

в) $y = \dfrac{x}{x-5}$;

г) $y = \sqrt{x} + 1$?

744. Соответствия заданы таблицами:

а)

x	1	2	3
y	1	1	1

б)

x	1	4	9
y	–1; 1	–2; 2	–3; 3

В таблице б) числам 1, 4, 9 соответствуют их квадратные корни. Какое из этих соответствий является функцией? Для функционального соответствия укажите область определения и область значений.

745. Функция задана таблицей:

x	–2	0	1	3	4
y	3	–1	5	7	7

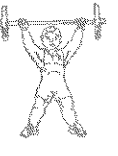
а) Чему равно значение функции при $x = -2$; $x = 1$; $x = 4$?

б) При каких значениях аргумента значение функции равно –1; 7; 3?

в) Найдите область определения функции.

г) Найдите область значений функции.

Уровень А



746. Одна сторона прямоугольника равна 6 см, а другая — x см. По какой формуле можно вычислить площадь S прямоугольника? Задает ли эта формула функцию?

747. Плотность стали 780 кг/м^3. Запишите формулу, по какой можно вычислить массу стального куба с ребром a м. Какова область определения функции, заданной этой формулой? Найдите значение функции при $a = 0{,}2$.

748. Автомобиль движется со скоростью 75 км/ч. За время t ч он проходит расстояние S км. Задайте соответствие между t и S формулой. Найдите значение функции, заданной этой формулой, при $t = 2{,}4$.

749. Длина прямоугольного параллелепипеда равна 7,5 см, ширина — 4 см, а высота — x см. Задайте формулой соответствие между измерениями параллелепипеда и его объемом V. Найдите значение функции, заданной этой формулой, при $x = 2{,}5$.

Найдите область определения функции, заданной формулой:

750. а) $y = 2x - 1$; б) $y = \frac{1}{3x - 9}$; в) $y = \frac{x - 3}{3x + 2}$.

751. а) $y = 2x^2$; б) $y = \frac{3}{2x - 4}$; в) $y = \frac{2 - x}{7x - 9}$.

752. Функция задана формулой $y = \frac{x + 3}{x + 4}$. Составьте таблицу значений функции для значений аргумента: –3; –2; 0; 1; 6.

753. Функция задана формулой $y = 2x^2 + 1$. Составьте таблицу значений функции для значений аргумента: –4; –2; 0; 2; 4.

754. Функция задана формулой $y = 4x - 5$. При каких значениях аргумента значение функции равно 0; 3?

755. Функция задана формулой $y = -2x + 3$. При каких значениях аргумента значение функции равно 1; 5?

756. Функция задана таблицей:

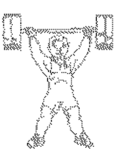
x	–4	–2	0	2	4
y	–2	–1	0	1	2

а) Найдите значение функции при $x = -2$; $x = 2$.

б) При каких значениях x значение функции равно –1; 1?

в) Найдите область определения функции.

г) Найдите область значений функции.



Уровень Б

757. Функция задана формулой $y = \frac{12}{x}$. Заполните таблицу:

x	–12	–6					3	–4		1,5
y			1	2	–3	4			0,5	

758. Функция задана формулой $y = \frac{x}{6}$. Заполните таблицу:

x	-12	-6					24	-24
y			2	3	-4	-6		

759. Велосипедист должен преодолеть путь от села до автостанции длиной 7 км, двигаясь со скоростью 10 км/ч. Пусть S км — путь, который осталось проехать велосипедисту через t ч после начала движения. Задайте формулой путь S как функцию от времени t. Найдите значение функции при $t = 0{,}5$. Какова область определения и область значений этой функции?

760. Натуральное число m при делении на 4 дает в неполном частном n и в остатке 0. Задайте формулой m как функцию от n. Найдите значение функции при $n = 50$. Какова область определения и область значений этой функции?

Найдите область определения функции, заданной формулой:

761. а) $y = \frac{1}{x^2 - 3x - 10}$; б) $y = \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x}$; в) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{4x}$.

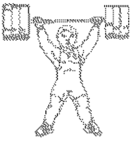
762. а) $y = \frac{x}{x^2 + 4x - 12}$; б) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$; в) $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$.

763. Функция задана формулой $y = x^2 - 4x + 2$. При каких значениях аргумента значение функции равно: а) 2; б) -2; в) -4?

764. Функция задана формулой $y = x^2 + 4x - 3$. При каких значениях аргумента значение функции равно: а) 2; б) -7; в) -8?

765. Функция задана формулой $y = 3x - 1$, где переменная x может принимать значения -6; -3; 0; 3; 6; 9. Задайте эту функцию таблицей.

Уровень В



766. Найдите область определения функции $y = \frac{3}{|x+1| - 2}$.

767. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x + 2$.

768. При каких значениях аргумента значение функции $y = x^2 - 4|x| + 3$ равно нулю?

769. Найдите все значения a, при которых функция $y = x^2 + 2ax + 2$ принимает значение 1 только при одном значении x.

770. Докажите, что функция $y = \frac{1}{x^2 + 6x + 10}$ не может принимать отрицательные значения.

771. На координатной плоскости отметьте точки $A(-4; 0)$, $B(0; 1)$, $C(4; -1)$ и точку D с абсциссой -3 и ординатой 2.

772. Постройте график уравнения $3x - y = -3$. Найдите координаты точек пересечения графика с осями координат.

773. На координатной плоскости проведите прямую через точки $A(2; 2)$ и $B(-3; -4)$. Является ли эта прямая графиком уравнения $6x - 5y = 2$?

774. Из города A в город B, расстояние между которыми 40 км, выехал велосипедист со скоростью 15 км/ч, а через 40 мин навстречу ему из города B выехал мотоциклист со скоростью 45 км/ч. Через какое время после выезда велосипедиста они встретятся?

2. График функции

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = \dfrac{6}{x+2}$, где $-1 \le x \le 4$. Найдем значение этой функции для целых значений аргумента и запишем результаты в таблицу:

x	-1	0	1	2	3	4
y	6	3	2	1,5	1,2	1

Значения x мы брали так, что каждое следующее на 1 больше предыдущего. Поэтому говорят, что таблица значений функции составлена с шагом 1.

Отметим на координатной плоскости точки, абсциссы которых равны выбранным значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции (рис. 4).

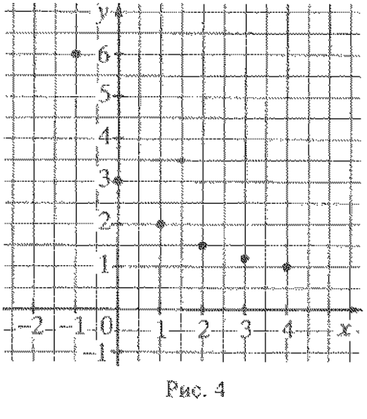


Рис. 4

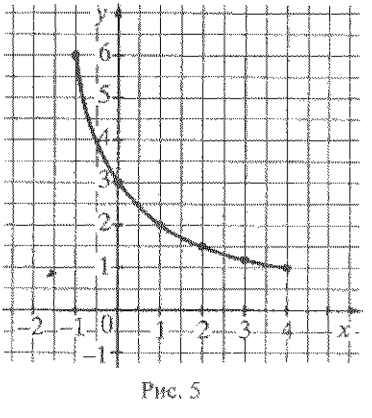


Рис. 5

Выбирая другие значения x, которые удовлетворяют неравенству $-1 \leq x \leq 4$, и вычисляя соответствующие значения y, получим другие пары значений x и y. Каждой из этих пар также соответствует определенная точка на координатной плоскости. Все такие точки образуют фигуру, которую называют *графиком* функции, заданной формулой $y = \frac{6}{x+2}$, где $-1 \leq x \leq 4$ (рис. 5).

Определение Графиком функции называется фигура, состоящая из всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значению аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Построим график функции, заданной формулой $y = 0{,}5x^2$, где $-3 \leq x \leq 2$. Составим таблицу значений функции для некоторых значений аргумента:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	4,5	2	0,5	0	0,5	2

Отметим точки, координаты которых указаны в таблице, на координатной плоскости. Соединим их плавной линией. Получим график функции, заданной формулой $y = 0{,}5x^2$, где $-3 \leq x \leq 2$ (рис. 6).

С помощью графика функции для определенного значения аргумента можно найти соответствующее значение функции и наоборот: для определенного значения функции можно найти те значения аргумента, которым оно соответствует.

Рассмотрим, например, функцию, график которой изображен на рисунке 7. (О такой функции говорят, что она задана *графически*.)

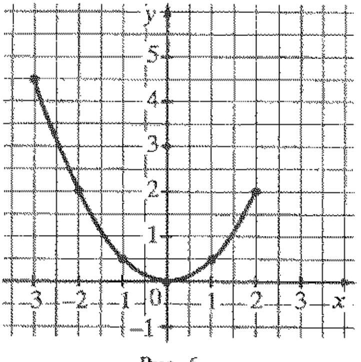


Рис. 6

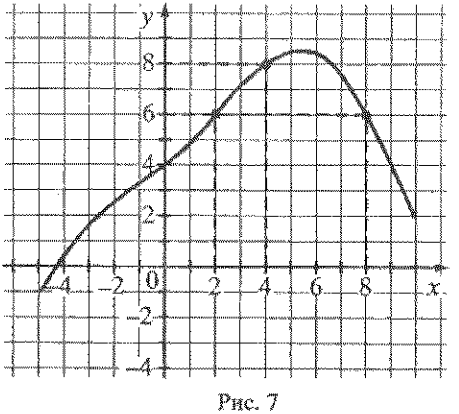


Рис. 7

Найдем с помощью графика значение функции при $x = 4$. Для этого через точку оси x с абсциссой 4 проведем прямую, перпендикулярную оси x. Точка ее пересечения с графиком функции имеет координаты (4; 8). Итак, при $x = 4$ значение функции равно 8. Найдем с помощью этого же графика значения аргумента, при которых значение функции равно 6. Для этого через точку оси y с ординатой 6 проведем прямую, перпендикулярную оси y. Получим две точки ее пересечения с графиком функции: (2; 6) и (8; 6). Итак, функция принимает значение 6 при $x = 2$ и $x = 8$.

Для тех, кто хочет знать больше

Французские математики Пьер Ферма (1601–1665) и Рене Декарт представляли функцию как зависимость ординаты точки кривой от ее абсциссы. А английский ученый Исаак Ньютон понимал функцию как координату движущейся точки, которая изменяется в зависимости от времени.

Немецкий математик Лежен Дирихле в 1837 г. так определяет понятие функции: «y является функцией переменной x, если каждому значению x соответствует вполне определенное значение y, причем безразлично, каким способом установлено это *соответствие* — аналитической формулой, графиком, таблицей или просто словами».

Примеры решения упражнений

Пример 1. На рисунке 8 изображен график функции. Найти область определения этой функции. Чему равно наибольшее и наименьшее значение функции? Какова область значений функции? Используя график, заполнить таблицу:

x	–6	–2	8			
y				–4	–1,5	1

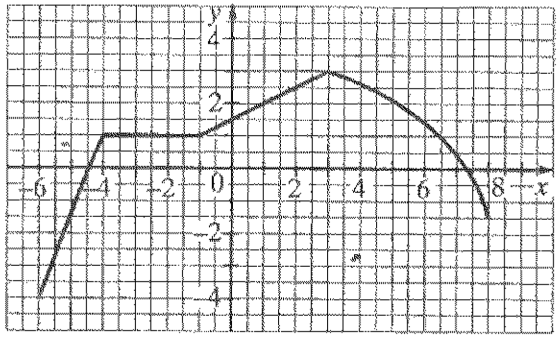


Рис. 8

● Область определения функции образуют все значения x, которые удовлетворяют неравенству $-6 \le x \le 8$. Наибольшее значение функции равно 3 (это значение функция принимает при $x = 3$); наименьшее значение равно -4 (это значение функция принимает при $x = -6$). Область значений функции образуют все значения y, которые удовлетворяют неравенству $-4 \le y \le 3$. Заполним таблицу:

x	-6	-2	8	-6	$-5;\ 8$	$-4 \le x \le -1;\ 6{,}5$
y	-4	1	$-1{,}5$	-4	$-1{,}5$	1

●

Пример 2. Построить график функции, заданной формулой:

а) $y = 0{,}5x + 1$, где $-4 \le x \le 4$, составив таблицу значений функции с шагом 1;

б) $y = \dfrac{x^2 - 4}{2x - 4}$, где $-4 \le x \le 4$.

● **а)** Составим таблицу значений функции:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3

Отметим точки, координаты которых указаны в таблице, на координатной плоскости. Если приложить линейку к этим точкам, то увидим, что все они лежат на одной прямой. Соединим отрезком крайние отмеченные точки. Этот отрезок и является графиком функции $y = 0{,}5x + 1$, где $-4 \le x \le 4$ (рис. 9).

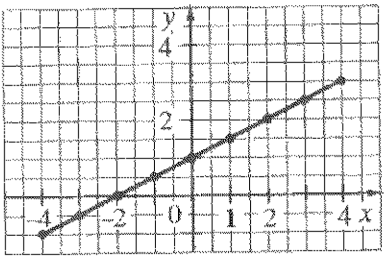


Рис. 9

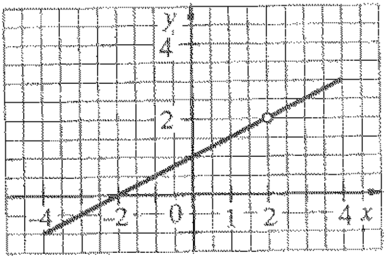


Рис. 10

б) Дробь $\dfrac{x^2 - 4}{2x - 4}$ имеет смысл при $x \ne 2$. Поэтому область определения функции образуют те значения x, которые удовлетворяют неравенству $-4 \le x \le 4$, кроме $x = 2$. Для этих значений x получим:

$$y = \frac{x^2 - 4}{2x - 4} = \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \frac{x+2}{2}, \text{ то есть } y = 0{,}5x + 1.$$

Графиком функции является тот же отрезок, что и в задаче а), но без точки (2; 2) (рис. 10). ●

Устно

775. Функция задана графиком (рис. 11). Найдите значение функции при $x = -2$. Какому значению аргумента соответствует значение функции $y = 2$? Какова область определения и область значений функции?

776. Является ли линия, изображенная на рисунке 12, графиком некоторой функции? Ответ обоснуйте.

777. Найдите область определения и область значений функции, график которой изображен на рисунке 13. Найдите значение функции при $x = -4$; $x = 0$; $x = 2$. Найдите значение аргумента, которому соотвтствует значение функции $y = -2$; $y = 0$; $y = 1$.

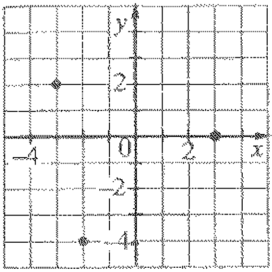


Рис. 11

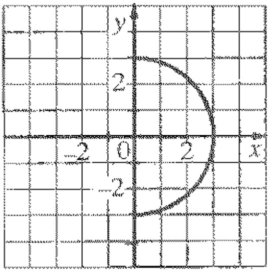


Рис. 12

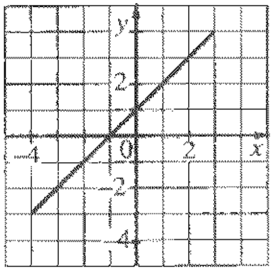
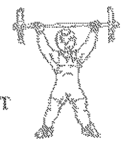


Рис. 13



Уровень А

778. На рисунке 14 изображен график функции. Используя этот график, заполните таблицу:

x	-3	-2	0	1	$4{,}5$				
y						$-1{,}5$	-1	2	4

Какова область определения и область значений функции?

779. На рисунке 15 изображен график функции. Используя этот график, заполните таблицу:

x	$-2{,}5$	-1	3	4				
y					$-1{,}5$	0	2	4

Какова область определения и область значений функции?

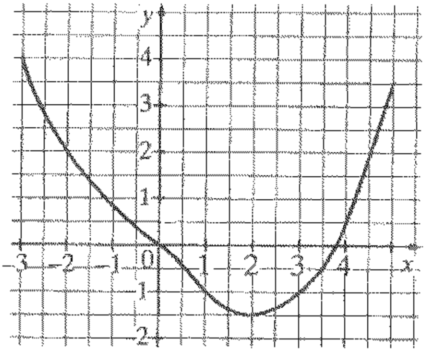


Рис. 14

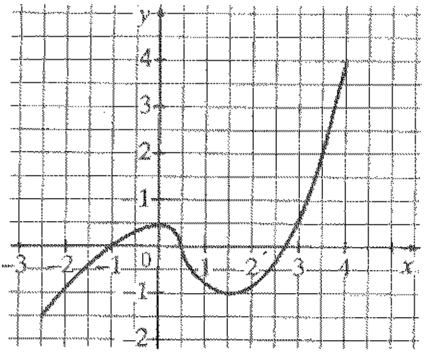


Рис. 15

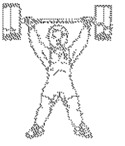
780. Постройте график функции, заданной формулой $y = 2x + 1$, где $-3 \le x \le 3$, составив таблицу значений функции с шагом 1. Принадлежат ли графику функции точки $A(-2; -3)$, $B(0; -1)$? Используя график, найдите: значение функции при $x = -1{,}5$; $x = 0{,}5$; значение аргумента, которому соответствует значение функции $y = 0$; $y = 1$.

<u>781.</u> Постройте график функции, заданной формулой $y = -3x - 1$, где $-2 \le x \le 2$, составив таблицу значений функции с шагом 1. Принадлежат ли графику функции точки $M(0; -1)$, $N(2; 5)$?

Постройте график функции, заданной формулой:

782. **а)** $y = \frac{1}{4}x - 1$, где $-4 \le x \le 6$; **б)** $y = \frac{4}{x}$, где $1 \le x \le 4$.

<u>783.</u> **а)** $y = \frac{1}{2}x + 2$, где $-6 \le x \le 4$; **б)** $y = x^2 - 1$, где $-2 \le x \le 2$.



Уровень Б

784. На рисунке 16 изображен график изменения температуры воздуха на протяжении суток.

а) Какова температура воздуха была в 2 ч; в 9 ч; в 18 ч; в 24 ч?

б) В которому часу температура воздуха была –2°; 0°; 6°?

в) В которому часу температура воздуха была минимальной; максимальной?

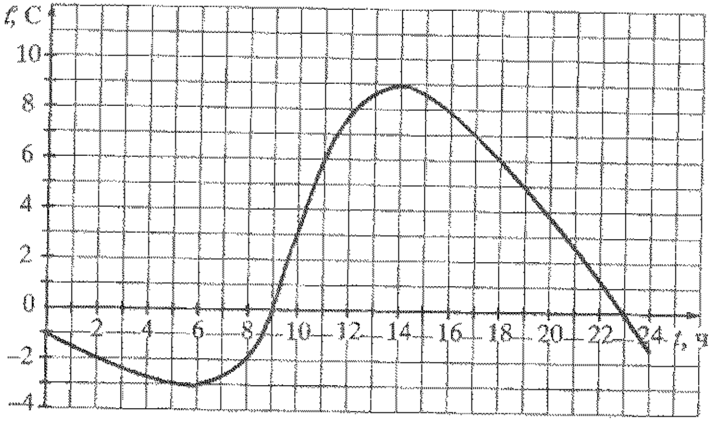


Рис. 16

785. На рисунке 17 изображен график зависимости скорости тела от времени.

а) Какую скорость имело тело через 2 с после начала движения; через 5 с; через 10 с; через 20 с?

б) В какой момент времени скорость тела была 4 м/с; 6 м/с; 8 м/с?

в) В какой момент времени скорость тела была наименьшей?

г) Укажите время, на протяжении которого тело двигалось с постоянной скоростью. Какой путь прошло тело за это время?

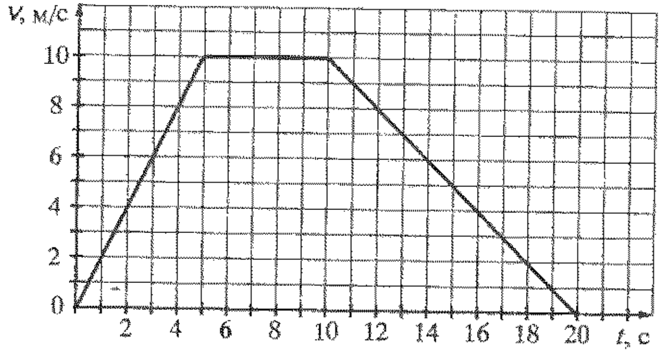


Рис. 17

786. На рисунке 18 изображен график движения группы туристов из лагеря до автостанции.

а) Сколько времени двигались туристы и какое расстояние они прошли?

б) Сколько времени затратили туристы на привал?

в) С какой скоростью двигались туристы на протяжении первых двух часов; после привала?

г) Какова средняя скорость движения туристов?

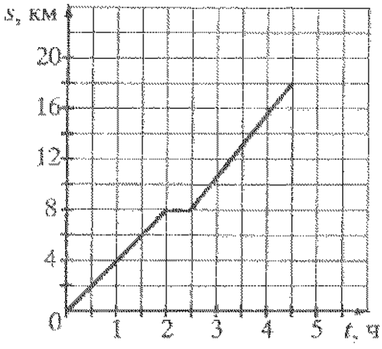


Рис. 18

787. Графиком функции является ломаная $ABCD$, причем $A(-2; -3)$, $B(0; 3)$, $C(4; 3)$, $D(6; 1)$. Начертите график функции и заполните таблицу:

x	-1	1,33			4,5	
y			-2	3		1,5

Какова область определения и область значений функции?

788. Графиком функции является ломаная $KLMN$, причем $K(-4; 4)$, $L(-2; 2)$, $M(2; 2)$, $N(3; 3)$. Начертите график функции и заполните таблицу:

x	-3			1,25	2,5	
y		3,5	2			3

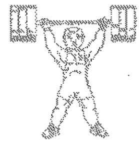
Какова область определения и область значений функции?

Постройте график функции, заданной формулой:

789. а) $y = x(4 - x)$, где $-1 \le x \le 5$; б) $y = \dfrac{6}{3-x}$, где $-3 \le x \le 2$.

790. а) $y = x^2 - 2x$, где $-2 \le x \le 3$; б) $y = -\dfrac{4}{x-2}$, где $-2 \le x \le 1$.

Уровень В



791. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = |x|$, где $-3 \le x \le 3$;

б) $y = |x| - 2$, где $-3 \le x \le 3$;

в) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{2x}$, где $-2 \le x \le 4$; г) $y = \dfrac{6x-6}{x^2-3x+2}$, где $-2 \le x \le 1,5$.

Упражнения для повторения

792. Расстояние между городами A и B равно 190 км. Из города A в город B выехал автомобиль со скоростью 90 км/ч. На каком расстоянии от города B он будет через t ч? Запишите решение в виде выражения с переменной. Найдите значение этого выражения при $t = 1{,}2$.

793. При каких значениях x значение выражения $15x - 6$ равно 3?

794. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2 + 12x + 35}{x + 7} = 0$; б) $\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{4x}{x+2} = 2$.

795*. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к этому числу прибавить 36, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

3. Линейная функция

1. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть тело движется равномерно и прямолинейно со скоростью 20 м/с и направление его движения совпадает с направлением оси x (рис. 19). Если в начальный момент движения тело находилось на расстоянии 35 м от начала отсчета, то через t с тело будет находиться на расстоянии $S = (20t + 35)$ м от него.

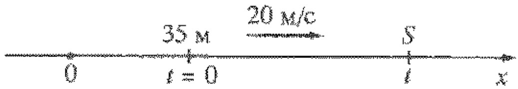


Рис. 19

Пусть в бассейн через трубу вливается каждую минуту 2,5 м^3 воды. Если в начальный момент времени в бассейне было 70 м^3 воды, то объем V воды (в м^3), которая будет в бассейне через t мин, можно вычислить за формулой $V = 2{,}5t + 70$.

Формулами $S = 20t + 35$, $V = 2{,}5t + 70$, где t — независимая переменная, задаются функции, которые называют *линейными*.

Определение

Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа.

В формуле $y = kx + b$ переменная x может принимать любые значения, поэтому областью определения линейной функции является множество всех действительных чисел.

2. Построим график линейной функции $y = 0{,}5x - 1$. Для этого составим таблицу нескольких значений x и соответствующих значений y:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$

Отметим точки, координаты которых указаны в таблице, на координатной плоскости (рис. 20). Из рисунка видно, что точки расположены в определенном порядке, а именно, лежат на одной прямой. Если бы для каждого действительного значения x вычислили соответствующее значение y и отметили бы точки с такими координатами на координатной плоскости, то получили бы прямую (доказательство этого утверждения рассматривается в 10 классе). Проведем прямую. Она является графиком линейной функции $y = 0{,}5x - 1$.

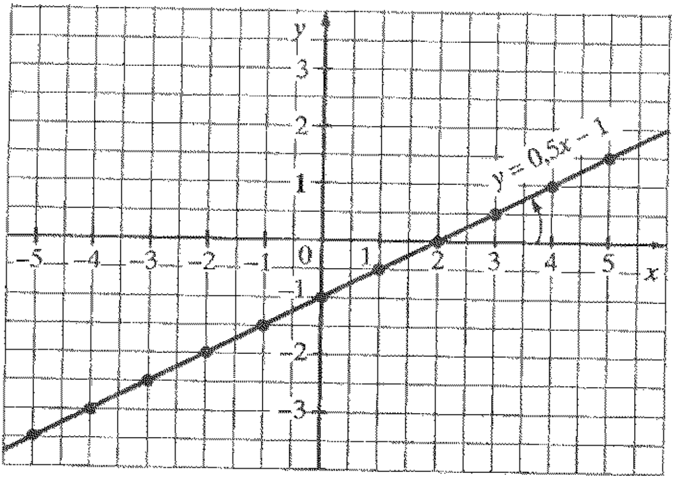


Рис. 20

Вообще, *графиком линейной функции является прямая.*

Чтобы построить график линейной функции, достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки на координатной плоскости и провести через них прямую. Так, чтобы построить график функции $y = 0{,}5x - 1$, достаточно было взять две точки, например, $(0; -1)$ и $(2; 0)$.

В 7 классе мы изучали линейные уравнения с двумя неизвестными. Уравнение $x - 2y = 2$ равносильно такому: $-2y = -x + 2$ или $y = 0{,}5x - 1$. Поэтому графиком уравнения $x - 2y = 6$ и графиком функции, заданной формулой $y = 0{,}5x - 1$, является одна и та же прямая (см. рис. 20).

3. Линейная функция $y = 0{,}5x - 1$ имеет положительный коэффициент при переменной x: $k = 0{,}5 > 0$. Ее график образует острый угол с положительным направлением оси x (см. рис. 20). На рисунке 21 изображен график линейной функции $y = -2x + 1$. Эта функция имеет отрицательный коэффициент при переменной x: $k = -2 < 0$. Ее график образует тупой угол с положительным направлением оси x.

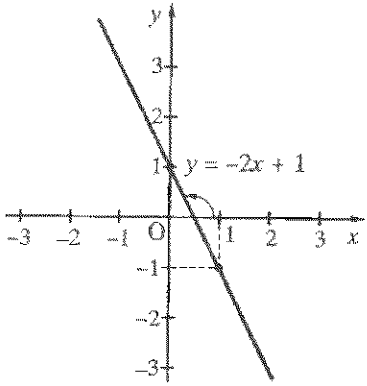


Рис. 21

Коэффициент k определяет угол, который образует график функции $y = kx + b$ с положительным направлением оси x. Поэтому число k называют *угловым коэффициентом прямой*, которая является графиком функции $y = kx + b$.

Верно такое утверждение: прямая, являющаяся графиком функции $y = kx + b$, образует с положительным направлением оси x острый угол, если $k > 0$, и тупой угол, — если $k < 0$.

Если $k = 0$, то формула, которой задается линейная функция, имеет вид $y = 0x + b$, то есть $y = b$. Такая функция при всех значениях x принимает одно и то же значение b. Например, функция $y = 2$ при всех значениях x принимает значение 2. Поэтому графиком функции является прямая, образованная точками $(x; 2)$, где x — любое число. Эта прямая параллельна оси x (рис. 22).

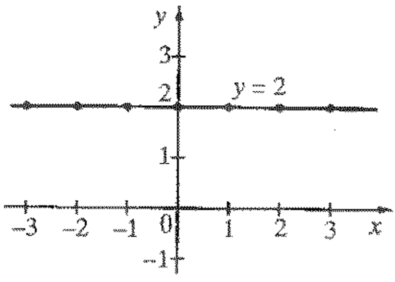


Рис. 22

Чтобы построить график функции $y = 2$, достаточно было отметить на оси y точку с ординатой 2 и провести через нее прямую, параллельную оси x.

Свойства линейной функции $y = kx + b$.

1. *Областью определения функции является множество всех действительных чисел.*

2. *Областью значений функции при* $k \neq 0$ *является множество всех действительных чисел* (доказательство в рубрике «Для тех, кто хочет знать больше»); *при* $k = 0$ *функция принимает только одно значение* $y = b$.

3. Графиком функции является прямая.

4. График функции образует с положительным направлением оси x острый угол, если $k > 0$, тупой угол, — если $k < 0$. При $k = 0$ график параллельный оси x, в частности, при $k = 0$ и $b = 0$ он совпадает с осью x.

Для тех, кто хочет знать больше

1. На рисунке 23 изображены графики двух линейных функций $y = -0{,}25x + 4$ и $y = x - 1$. При $x = 4$ функции принимают одно и то же значение $y = 3$. Графики функций пересекаются в точке $(4; 3)$. Вообще, графики двух функций имеют общую точку, если существует значение x, при котором обе функции принимают одно и то же значение.

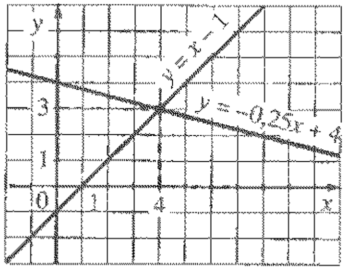


Рис. 23

2. Рассмотрим две линейные функции $y = 0{,}5x - 2$ и $y = 0{,}6x + 1$, формулы которых имеют разные коэффициенты при x. Выясним, пересекаются ли графики этих функций (рис. 24). Для этого решим уравнение $0{,}5x - 2 = 0{,}6x + 1$:

$$0{,}5x - 0{,}6x = 2 + 1; \quad -0{,}1x = 3; \quad x = -30.$$

При $x = -30$ обе функции принимают одно и то же значение:

$$y = 0{,}5 \cdot (-30) - 2 = -17 \text{ и } y = 0{,}6 \cdot (-30) + 1 = -17.$$

Итак, графики функций пересекаются в точке $(-30; -17)$.

Рассмотрим две линейные функции $y = 0{,}5x - 2$ и $y = 0{,}5x + 1$, формулы которых имеют одинаковые коэффициенты при x. Уравнение $0{,}5x - 2 = 0{,}5x + 1$ не имеет корней. Поэтому прямые, которые являются графиками функций $y = 0{,}5x - 2$ и $y = 0{,}5x + 1$ (рис. 25), не имеют общих точек (эти прямые параллельны).

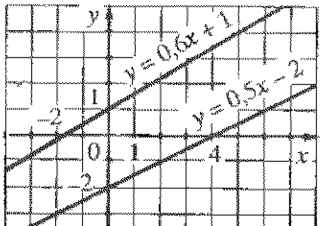


Рис. 24

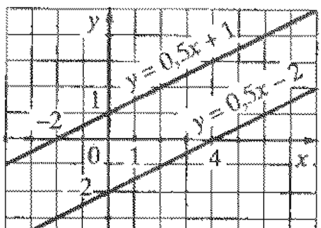


Рис. 25

Вообще, ***графики двух линейных функций вида $y = kx + b$ пересекаются, если коэффициенты при x разные, и параллельны, если коэффициенты при x одинаковы.***

3. Докажем, что при $k \neq 0$ областью значений функции $y = kx + b$ является множество всех действительных чисел.

Для этого покажем, что произвольное действительное число y_0 является значением линейной функции при некотором значении аргумента x. Чтобы найти нужное значение x, решим уравнение $y_0 = kx + b$, в котором $k \neq 0$:

$$kx = y_0 - b; \quad x = \frac{y_0 - b}{k}.$$

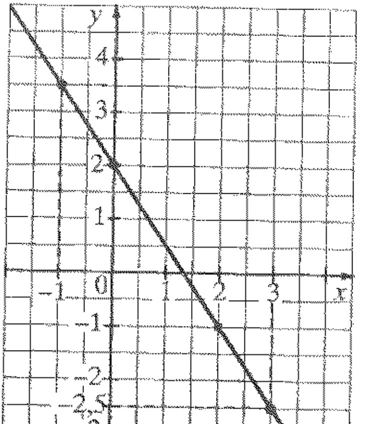
Итак, произвольное действительное число y_0 является значением линейной функции при $x = \frac{y_0 - b}{k}$. Это значит, что областью значений функции $y = kx + b$, где $k \neq 0$, является множеством всех действительных чисел.

Примеры решения упражнений

Пример 1. Построить график функции, заданной формулой $y = -1{,}5x + 2$. Используя график, найти: а) значение y, которое соответствует $x = -1$; б) значение x, которому соответствует $y = -2{,}5$.

● Построим график функции.

$y = -1{,}5x + 2$		
x	0	2
y	2	-1



а) При $x = -1$ через точку $(-1; 0)$ проводим прямую, перпендикулярную оси x, и находим точку ее пересечения с графиком. Это точка $(-1; 3{,}5)$. Итак, значению $x = -1$ соответствует значение $y = 3{,}5$.

б) Пусть $y = -2{,}5$. Через точку $(0; -2{,}5)$ проводим прямую, перпендикулярную оси y, и находим точку пересечения этой прямой с графиком. Это точка $(3; -2{,}5)$. Итак, значение $y = -2{,}5$ соответствует значению $x = 3$. ●

Пример 2. График функции — прямая, проходящая через точки $A(-1; 2)$ и $B(2; 5)$. Задать эту функцию формулой.

● Прямая является графиком линейной функции. Пусть искомая линейная функция задается формулой $y = kx + b$, где k и b — пока что неизвестные числа. Поскольку график функции проходит через точки $A(-1; 2)$ и $B(2; 5)$, то $2 = k\cdot(-1) + b$ и $5 = k\cdot 2 + b$. Решив систему $\begin{cases}2 = -k + b;\\ 5 = 2k + b,\end{cases}$ найдем: $k = 1$, $b = 3$.

Итак, функция задается формулой $y = x + 3$. ●

Устно

796. Какие из данных функций являются линейными:

а) $y = x + 5$; б) $y = -3x$; в) $y = \frac{2}{x}$; г) $y = 8$;

д) $y = \frac{1}{3}x - 1$; е) $y = 0$; ж) $y = 3 - 7x$; з) $y = x^2 + 4$?

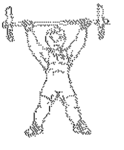
797. Линейные функции заданы формулами:

а) $y = -5x + 1$; б) $y = 0{,}1x$; в) $y = -3$; г) $y = 0$.

Чему равны коэффициенты k и b в каждой из этих формул?

798. Принадлежат ли точки $A(-4; 2)$, $B(2; -4)$, $C(0; 0)$ графику функции, заданной формулой $y = -2x$?

799. Дано две линейных функции $y = -3x + 1$ и $y = 2x - 4$. График какой из этих функций образует с положительным направлением оси x острый угол; тупой угол?



Уровень А

800. Линейная функция задана формулой $y = 2x - 6$. Найдите значение y, которое соответствует $x = -6$; $x = 0$; $x = 9$. При каком значении x значение функции равно -3; 0; 7?

<u>801.</u> Линейная функция задана формулой $y = 5x - 1$. Найдите значение y, которое соответствует $x = -4$; $x = 0$; $x = 2$. При каком значении x значение функции равно -6; 0; 4?

802. Проходит ли график функции $y = 1{,}8x + 9$ через точку: $A(10; 27)$; $B(50; 89)$, $C(-20; -27)$?

Постройте график функции, заданной формулой:

803. а) $y = 2x - 3$; б) $y = -0{,}5x + 1$; в) $y = 0{,}5x + 2$; г) $y = -3x$.

<u>804.</u> а) $y = x - 2$; б) $y = -2x + 0{,}5$; в) $y = -2{,}5$.

В одной системе координат постройте графики функций:

805. а) $y = -1{,}5x$; $y = -1{,}5x - 2$; $y = -1{,}5x + 2$;

б) $y = 4$; $y = 1{,}5$; $y = -2$.

806. $y = 2x$; $y = 2x - 2$; $y = 2x + 1$.

807. Постройте график функции, заданной формулой $y = -1{,}5x + 1$. Используя график, найдите:

а) значение y, которое соответствует $x = -4$; $x = 0$; $x = 2$;

б) значение x, которому соответствует $y = -1$; $y = 4$;

в) все значения x, при которых $y > 1$; $y < 4$;

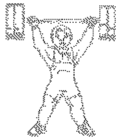
г) все значения y, которые соответствуют значениям $x \geq 0$.

808. Постройте график функции, заданной формулой $y = 0{,}5x - 3$. Используя график, найдите:

а) значение y, которое соответствует $x = -2$; $x = 2$; $x = 4$;

б) значение x, которому соответствует $y = -2$; $y = 1$;

в) все значения x, при которых $-3 \leq y \leq -1$.



Уровень Б

Найдите координаты точки пересечения графиков функций:

809. а) $y = 8x - 1$ и $y = 5x + 11$;   б) $y = -5x + 4$ и $y = x - 2$;

в) $y = 15x + 6$ и $y = 9$;   г) $y = -4x$ и $y = 7x + 11$.

810. а) $y = 3x - 2$ и $y = 4x + 1$;   б) $y = -4x + 6$ и $y = 2x - 3$.

811. Пересекаются ли графики функций:

а) $y = -2{,}5x + 1$ и $y = 2{,}5x - 1$;   б) $y = 2x + 2$ и $y = 2x + 3$?

Не выполняя построения графика функции, найдите координаты точек его пересечения с осями координат:

812. а) $y = -1{,}2x + 4$;   б) $y = 0{,}3x - 21$;   в) $y = -8$.

813. а) $y = 7 - 2{,}1x$;   б) $y = -1{,}6x + 4{,}8$;   в) $y = 6$.

814. График функции — прямая, проходящая через точки $A(-2; 6)$, $B(3; 1)$. Задайте эту функцию формулой.

815. График функции — прямая, проходящая через точки $A(-3; 2)$, $B(3; -1)$. Задайте эту функцию формулой.

816. Проходит ли график функции $y = x + 4$ через точку пересечения графиков функций $y = 2x + 5$ и $y = -5x - 2$?

817. В начальный момент времени точка находилась на расстоянии 60 м от начала отсчета. На рисунке 26 изображен график изменения расстояния от точки до начала отсчета соответственно изменению времени.

а) В какой момент времени точка достигла начала отсчета?

б) С какой скоростью двигалась точка?

в) На каком расстоянии от начала отсчета находилась точка через 2 с после начала движения?

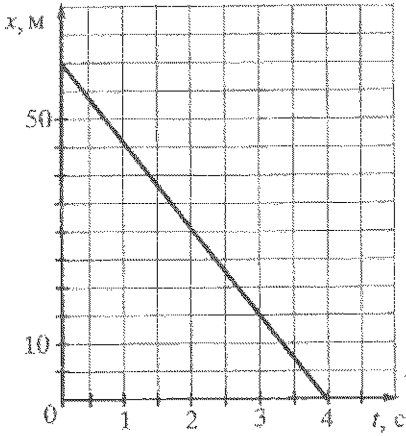


Рис. 26

818. Олег и Петр соревновались в плавании на дистанции 200 м в 50-метровом бассейне. На рисунке 27 изображены графики изменения расстояния от ребят до точки старта.

а) Сколько времени затратил каждый из ребят на преодоление первых 50 м; всей дистанции?

б) Кто выиграл соревнование?

в) На сколько секунд отстал от победителя проигравший?

г) Какая средняя скорость каждого из ребят на первой стометровке?

д) Что означают точки пересечения графиков?

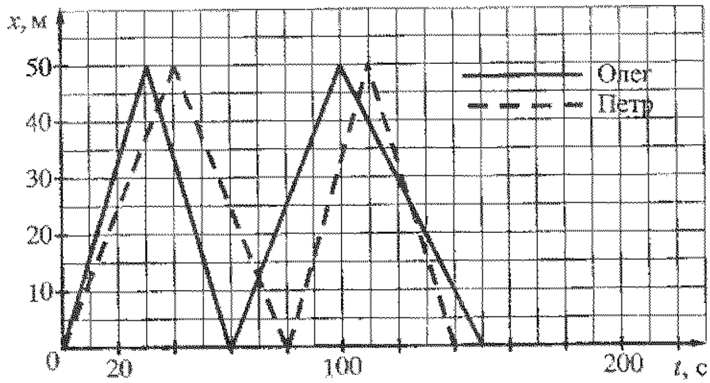


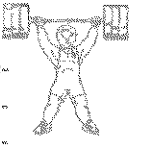
Рис. 27

819. Стоимость телеграммы определяется так: каждое слово стоит 5 к., прибавляют еще 5 к. и к полученной сумме прибавляют 20% НДС. Запишите формулу для нахождения стоимости телеграммы, состоящей из n слов. Найдите стоимость телеграммы, состоящей из 21 слова.

820. Абонентная плата за телефон составляет 7 грн. 34 к. Стоимость одной минуты местных разговоров 2 к., причем стоимость 100 мин разговоров входит в абонентную плату. Запишите формулу для нахождения платы за телефон за месяц, если на протяжении месяца абонент осуществлял только местные разговоры общей продолжительностью n мин, где $n > 100$. Найдите плату за телефон, если $n = 320$.

821. Линейные размеры тела при нагревании можно найти по формуле $l = l_0(1 + \beta\Delta t)$, где l_0 — начальная длина, β — тепловой коэффициент линейного расширения тела, $\Delta t = t - t_0$, t_0 — начальная температура тела, t — конечная температура. Известно, что $l_0 = 5$ м, $\beta = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$, $t_0 = 10°C$. Найдите l при $t = 20°C$; $t = 100°C$.

Уровень В



822. Известно, что общая сумма денег, одолженных или инвестированных на срок t лет на ставку r процентов, вычисляется по формуле $S = P + Prt$, где P — основная или начальная сумма. Пусть P и r — постоянные величины.

а) Какая существует зависимость между S и r? Почему?

б) Пусть некто инвестировал 1000 грн. с процентной ставкой 6% годовых. Какую сумму он получит, если срок инвестирования равен 1 году; 2 годам? Какую сумму он получит, если срок инвестирования равен t годам? Запишите зависимость S от t для этого случая.

в) Чему равен угловой коэффициент линейной функции, которую вы получили в случае б)? Какое содержание имеет угловой коэффициент согласно условию задачи?

823. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = |x| - 2$; б) $y = 5 - |x|$.

824. Постройте график уравнения $2|x| - |y| = 0$.

Упражнения для повторения

825. Дана точка A. Постройте точку B, симметричную данной относительно начала координат. Запишите координаты точки B. В каких координатных четвертях расположены точки A и B, если: а) $A(4; 3)$; б) $A(-2; 5)$?

826. Решите уравнение:

а) $\frac{18}{x+3}+\frac{12}{x-3}=2$; б) $\frac{180}{x}+\frac{180}{x+30}=5$.

827. К 30% раствора сульфатной кислоты массой 750 г долили 150 г воды. Сколько процентов сульфатной кислоты содержит образовавшийся раствор?

828. За 24 рабочих дня бригада лесорубов заготовила 804 $м^3$ дров. Сколько дров заготовит бригада за 38 дней при такой же производительности труда?

4. Функция $y = kx$

Рассмотрим примеры.

1. Пусть тело движется равномерно и прямолинейно со скоростью 20 м/с. Тогда путь S м, пройденный им за время t с, можно вычислить по формуле $S = 20t$. В этом случае S выступает как функция от t.

2. Плотность железа 7,8 г/$см^3$. Массу m г железного кубика объемом V $см^3$ можно вычислить по формуле $m = 7{,}8V$. В этом случае m — как функция от V.

Перейдя к принятым обозначениям аргумента и функции, получим функции, заданные формулами $y = 20x$ и $y = 7{,}8x$. Каждую из этих функций называют *прямой пропорциональностью*.

Определение **Прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx$, где x — независимая переменная, k — некоторое не равное нулю число.**

Формулу $y = kx$, которой задается прямая пропорциональность, можно получить из формулы $y = kx + b$, которой задается линейная функция, если положить $b = 0$, $k \neq 0$. Поэтому прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции.

Итак, графиком прямой пропорциональности является прямая. Эта прямая проходит через начало координат, поскольку при $x = 0$ $y = 0$. Поэтому для построения графика прямой пропорциональности достаточно найти любую точку графика, отличную от начала координат, и провести через эту точку и начало координат прямую.

Построим график функции $y=\frac{1}{3}x$. Найдем координаты какой-нибудь точки графика, отличной от начала координат: при $x = 3$ $y = 1$. Отметим на координатной плоскости точку (3; 1) и проведем через нее и начало координат прямую (рис. 28). Эта прямая — график функции $y = \frac{1}{3}x$.

На рисунке 29 изображены графики функций вида $y = kx$ для разных значений k.

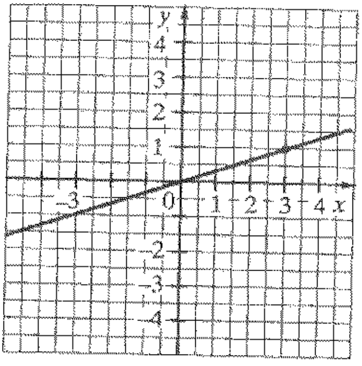


Рис. 28

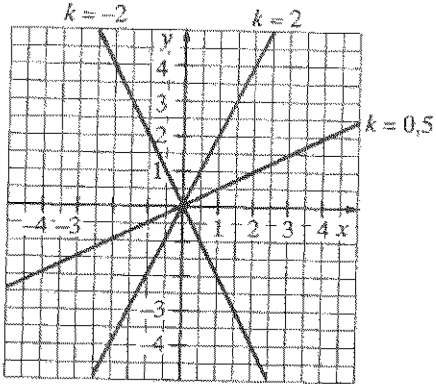


Рис. 29

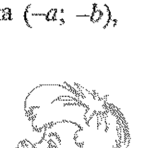
Свойства функции $y = kx$ (прямой пропорциональности).

1. *Прямая пропорциональность имеет все свойства линейной функции.*

2. *График прямой пропорциональности проходит через точку* (0; 0) и через точку (1; k). Точка (1; k) лежит в первой четверти при $k > 0$; в четвертой четверти при $k < 0$. Поэтому *при $k > 0$ график прямой пропорциональности расположен в первой и третьей координатных четвертях, а при $k < 0$ — во второй и четвертой четвертях.*

3. *График прямой пропорциональности симметричный относительно начала координат.* В самом деле, если графику функции $y = kx$ принадлежит точка (a; b), то выполняется равенство $b = ka$. Тогда верно равенство $-b = k(-a)$, из которого следует, что графику принадлежит и точка ($-a$; $-b$), симметричная точке (a; b) относительно начала координат.

Примеры решения упражнений



Пример 1. Найти значение функции $y = -3x$ при $x = 2$ и $x = 5$. Сравнить данные значения аргумента и соответствующие значения функции.

● При $x = 2$ $y = -3 \cdot 2 = -6$; при $x = 5$ $y = -3 \cdot 5 = -15$. Сравним значения аргумента: $2 < 5$; сравним соответствующие значения функции: $-6 > -15$. Меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции. ●

Устно

829. Какая из заданных функций является прямой пропорциональностью:

а) $y = -3x$; б) $y = \frac{5}{x}$; в) $y = 8x + 1$; г) $y = \frac{4}{5}x$?

830. Какова область определения функции $y = \frac{2}{3}x$; $y = 4x$?

831. В каких четвертях расположен график функции:

а) $y = -1{,}5x$; б) $y = \sqrt{3}x$; в) $y = -x$; г) $y = \frac{1}{10}x$?

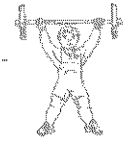
832. Укажите верные утверждения:

а) графиком прямой пропорциональности является прямая;

б) график прямой пропорциональности проходит через начало координат;

в) при $k<0$ график прямой пропорциональности расположен в I и III четвертях.

Уровень А



833. Прямая пропорциональность задана формулой $y = 4x$. Заполните таблицу:

x	-3		-1	2	3	
y		-8				20

834. Прямая пропорциональность задана формулой $y = -2x$. Заполните таблицу:

x	-5		-2			3
y		6		0	-4	

Постройте в одной системе координат графики функций:

835. а) $y = 4x$; б) $y = -4x$; в) $y = -\frac{2}{3}x$.

836. а) $y = -3x$; б) $y = 3x$; в) $y = \frac{1}{2}x$.

837. Постройте график функции $y = -\frac{1}{2}x$.

а) Используя график, найдите значения аргумента, которым соответствуют такие значения функции: -1; 2; 3.

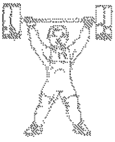
б) Найдите координаты точки B, симметричной точке $A(4; -2)$ относительно начала координат. Принадлежат ли эти точки данной прямой?

838. Постройте график функции $y = 2x$. Используя график, найдите значения функции, которые соответствуют значениям аргумента: $-1{,}5$; $2{,}5$.

839. Принадлежит ли графику прямой пропорциональности $y = 14x$ точка: $A(-2; -28)$; $B(0{,}5; 7)$; $C\left(-\frac{2}{7}; 4\right)$?

840. Какие из точек принадлежат графику прямой пропорциональности $y = -4x$: $K(4; -1)$; $M(0{,}3; -1{,}2)$; $N(0; -4)$?

Уровень Б



841. Запишите формулу прямой пропорциональности, если ее график проходит через точку: а) (1; 17); б) (–2; –4).

842. Функция $y = kx$ при $x = 2$ принимает значение 7. Найдите k.

843. Найдите значения функции $y = 2{,}5x$ при $x = -2$ и $x = 4$. Сравните данные значения аргумента и соответствующие значения функции.

844. На рисунке 30 изображен график прямой пропорциональности.

а) Запишите формулу, которой задается эта функция.

б) Найдите все значения y, которые соответствуют значениям $x \geq 0$.

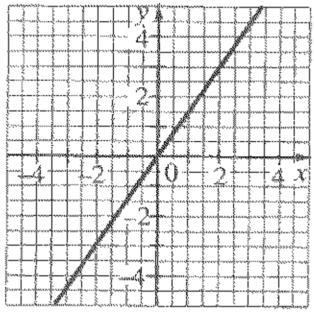


Рис. 30

845. В одной системе координат постройте графики функций $y = 3{,}5$ и $y = 2x$. При каких значениях x точки первого графика лежат выше точек второго графика?

846. При каких значениях x график функции $y = 0{,}5x$ лежит ниже графика функции $y = 2$?

847. Одна сторона прямоугольника равна 2 см, а другая — x см, где $x \geq 1$. Запишите формулу, определяющую площадь y прямоугольника (в квадратных сантиметрах) как функцию от x. Постройте график этой функции.

848. На рисунке 31* изображен график движения двух поездов, отправившихся с одной станции.

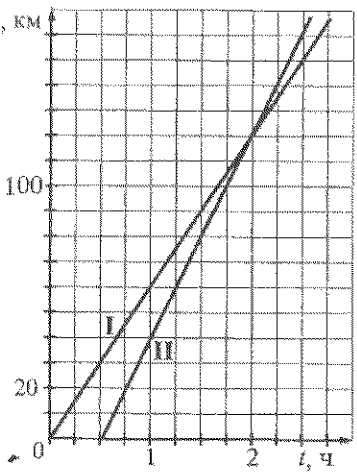


Рис. 31

а) Через какое время после отправки первого поезда отправился второй?

б) С какими скоростями двигались поезда?

в) На каком расстоянии от станции второй поезд догнал первый?

г) Какими формулами задается путь, пройденный каждым поездом, в зависимости от времени?

849. На рисунке 32 изображен график изменения температуры тела на протяжении 20 мин.

а) Какова начальная температура тела?

б) На сколько градусов увеличилась температура тела на протяжении первых 4 мин?

в) На сколько градусов изменилась температура тела на протяжении последних 6 мин?

г) На протяжении скольких минут температура тела не изменялась?

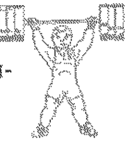
Рис. 32

850. Количество теплоты Q, которое выделяется при сгорании некоторого топлива, прямо пропорционально массе m топлива: $Q = qm$, где q — удельная теплота сгорания.

В отопительном котле сожгли 0,5 т каменного угля и получили $1{,}25 \cdot 10^{10}$ Дж тепла. На сколько больше нужно сжечь угля, чтобы получить $3{,}75 \cdot 10^{10}$ Дж тепла?

851. Участок цепи имеет сопротивление 21 Ом, а напряжение на этом участке 105 В. Какое сопротивление имеет последовательно соединенный с этим участком проводник, если напряжение на нем 50 В?

Уровень В



852. Найдите значение a, при котором точка пересечения прямых $y = ax$ и $y = 6x - 2$ имеет абсциссу 2.

853. Постройте график уравнения:

а) $(y + 3x)(y - 2x) = 0$; б) $y^2 - 10x + 5xy - 2y = 0$;

в) $(x + y)^2 + (y + 5x)^2 = 0$.

854. Решите уравнение:

а) $x - \dfrac{5x-6}{x} = 0$; б) $4x + 3 - \dfrac{10}{x} = 0$.

855. Упростите выражение:

а) $a^{12} \cdot a^3 + a^{30} : a^{15} - 2a^{18} \cdot a^{-3} + a^0$; б) $\dfrac{x-6}{x^3-9x} : \left(\dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{9}{x^2-9}\right)$.

856. Партию деталей рабочий может изготовить за 15 ч, изготовляя за час 6 деталей. За сколько часов он изготовит эту партию деталей, если за час будет изготовлять 5 деталей?

857. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 240 км, отправляются одновременно два автомобиля. Если автомобили будут двигаться навстречу друг другу, то встретятся через 2 ч. Если же они будут ехать в одном направлении, то автомобиль, выехавший из пункта B, догонит автомобиль, выехавший из пункта A, через 12 ч. Найдите скорость каждого автомобиля.

5. Функция $y = \dfrac{k}{x}$

Рассмотрим примеры.

1. Пусть тело движется равномерно и прямолинейно. Если за время t с тело проходит путь 4 м, то скорость его движения равна $v = \dfrac{4}{t}$ м/с. Скорость v является функцией от времени t.

2. Пусть напряжение на концах проводника 6 В, а его сопротивление R Ом. Тогда сила тока равна $I = \dfrac{6}{R}$ А. Сила тока I является функцией от сопротивления R.

3. Пусть площадь прямоугольника равна 12 см^2, а одна из его сторон — x см, тогда вторая сторона прямоугольника — $y = \dfrac{12}{x}$ см. Длина второй стороны является функцией от первой стороны при постоянной площади.

Перейдя к принятым обозначениям аргумента и функции, во всех трех примерах получили функции, заданные формулой $y = \dfrac{k}{x}$. Каждую из таких функций называют *обратной пропорциональностью*.

Определение | Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная, k — некоторое не равное нулю число.

Построим график функции $y = \frac{4}{x}$. Составим таблицу для нескольких значений x и соответствующих значений y:

x	–8	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4	8
y	–0,5	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1	0,5

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице (рис. 33).

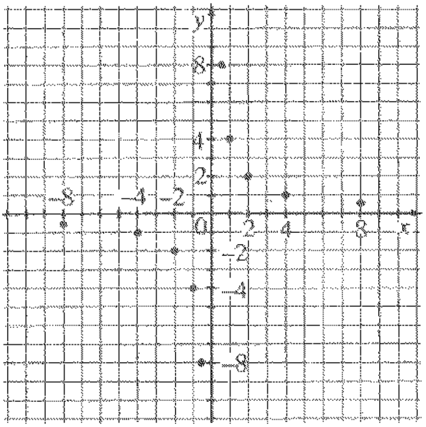


Рис. 33

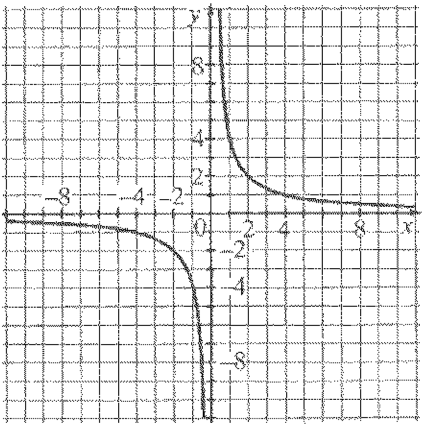


Рис. 34

Если бы для каждого действительного значения x, кроме $x = 0$, вычислили соответствующее значение y и отметили бы точки с такими координатами на координатной плоскости, то получили бы линию, которую называют *гиперболой* (рис. 34). Она состоит из двух ветвей, расположенных в первой и третьей координатных четвертях.

Вообще, график обратной пропорциональности называют *гиперболой*. На рисунке 35 изображена гипербола, которая является графиком функции $y = -\frac{4}{x}$. Она состоит из двух ветвей, расположенных во второй и четвертой координатных четвертях.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ (обратной пропорциональности).

1. *Областью определения функции является множество всех действительных чисел, кроме $x = 0$.*

2. *Область значений функции — множество всех действительных чисел, кроме $y = 0$.*

3. *График функции — гипербола.* Она состоит из двух ветвей.

4. *График функции лежит в I и III координатных четвертях при $k > 0$; в II и IV координатных четвертях при $k < 0$.*

5. *График функции симметричный относительно начала координат.*

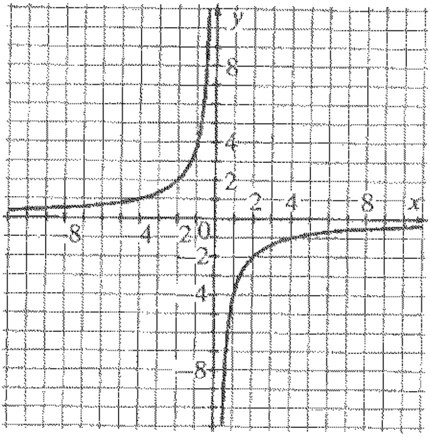


Рис. 35

Доказательство свойств 2 и 5 представлено в рубрике «Для тех, кто хочет знать больше».

Графики функций имеют широкое применение, в частности, они используются при *графическом решении уравнений.*

Пример. Решить графически уравнение: $\frac{6}{x} + 2 = 2x + 1$.

● Уравнение $\frac{6}{x} + 2 = 2x + 1$ равносильно уравнению $\frac{6}{x} = 2x - 1$. Строим в одной системе координат графики функций $y = \frac{6}{x}$ и $y = 2x - 1$ (рис. 36). Эти графики пересекаются в точках с абсциссами $x = -1{,}5$ и $x = 2$.

Итак, $x = -1{,}5$ и $x = 2$ — корни уравнения.

Ответ. $-1{,}5$; 2. ●

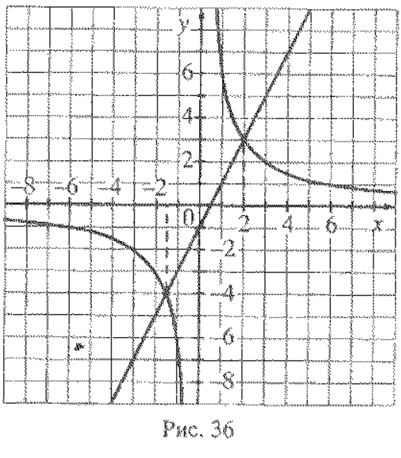


Рис. 36

Для тех, кто хочет знать больше

1. Докажем, что областью значений функции $y = \frac{k}{x}$ является множество всех действительных чисел, кроме $y = 0$ (свойство 2).

Поскольку в формуле $y = \frac{k}{x}$ число k не равно нулю, то и значения функции не равны нулю. Итак, число 0 не входит в область значений.

Пусть теперь y_0 — произвольное отличное от нуля действительное число. Решим уравнение $y_0 = \frac{k}{x}$, учитывая, что $y_0 \neq 0$ и $k \neq 0$:

$$x = \frac{k}{y_0}.$$

Итак, произвольное действительное число y_0, кроме $y_0 = 0$, является значением функции при $x = \frac{k}{y_0}$. Это значит, что область значений функции образуют все действительные числа, кроме $y = 0$.

2. Докажем, что график обратной пропорциональности симметричный относительно начала координат (свойство 5).

В самом деле, если графику функции принадлежит точка $(a; b)$, то выполняется равенство $b = \frac{k}{a}$. Тогда верно равенство $-b = \frac{k}{-a}$, из которого следует, что графику принадлежит и точка $(-a; -b)$, симметричная точке $(a; b)$ относительно начала координат.

Устно

858. Какая из данных функций является обратной пропорциональностью:

а) $y = 16x$; б) $y = \frac{16}{x}$; в) $y = \frac{x}{16}$; г) $y = -\frac{16}{x}$?

859. Какова область определения функции: $y = \frac{3}{x}$; $y = -\frac{10}{x}$?

860. В каких четвертях расположен график функции: $y = -\frac{17}{x}$; $y = \frac{13}{x}$?

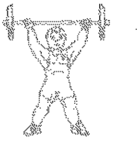
861. Укажите верные утверждения:

а) обратная пропорциональность задается формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$;

б) графиком обратной пропорциональности является гипербола;

в) график обратной пропорциональности проходит через начало координат;

г) график обратной пропорциональности симметричный относительно начала координат.



Уровень А

862. Найдите значение функции $y = \frac{8}{x}$ при $x = -4$; $x = 2$; $x = 8$.

863. Найдите значение x, при котором значение функции $y = -\frac{15}{x}$ равно: -5; -1; 15.

<u>864.</u> Функция задана формулой $y = \frac{10}{x}$. Заполните таблицу:

x	-5		1	10	
y		-5			0,5

865. Принадлежат ли графику функции $y = -\frac{8}{x}$ точки: $A(-8; 1)$; $B(-4; -2)$; $C(-2; 4)$; $D(-0{,}5; 8)$?

<u>866.</u> Принадлежат ли графику функции $y = \frac{9}{x}$ точки: $A(-1; 9)$; $B(3; 3)$; $C(-2; -4{,}5)$; $D(9; 1)$?

Постройте график функции:

867. а) $y = \frac{8}{x}$; б) $y = -\frac{5}{x}$; в) $y = -\frac{4}{x}$, где $-4 \le x \le 5$ $(x \ne 0)$.

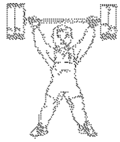
<u>868.</u> а) $y = -\frac{6}{x}$; б) $y = \frac{2}{x}$; в) $y = \frac{2}{x}$, где $-3 \le x \le 4$ $(x \ne 0)$.

869. Постройте график функции $y = \frac{5}{x}$. Используя график, найдите значения функции, которые соответствуют таким значениям аргумента: $-2{,}5$; 4.

<u>870.</u> Постройте график функции $y = -\frac{8}{x}$. Используя график, найдите значения аргумента, которым соответствуют такие значения функции: -2; 4.

871. Ученик имеет определенную сумму денег, на которую он может купить 12 тетрадей по цене 0,4 грн. Сколько тетрадей по цене b грн. может купить ученик на эту же сумму?

Уровень Б



872. Обратная пропорциональность задана формулой $y = \frac{a}{x}$. Найдите a, если $y = 2$ при $x = 0,5$.

873. Точка с абсциссой 3 принадлежит графику функции $y = -\frac{24}{x}$. Найдите ординату этой точки.

874. Запишите формулу обратной пропорциональности, если ее графику принадлежит: **а)** точка $A(-3;\ 12)$; **б)** точка $B(8;\ 4)$.

875. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = -\frac{5}{x}$ и $y = x - 4,5$; **б)** $y = \frac{12}{x}$ и $y = -2x + 1$.

876. При каких значениях аргумента принимают одинаковые значения функции:

а) $y = \frac{3}{x}$ и $y = 3x$; **б)** $y = -\frac{4}{x}$ и $y = 5$.

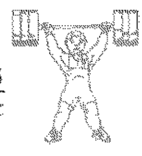
Решите графически уравнение:

877. **а)** $x - 1 = \frac{2}{x}$; **б)** $\frac{5}{x} + 2x = 7$.

878. **а)** $\frac{3}{x} = x + 2$; **б)** $2x - 9 = -\frac{4}{x}$.

879. Сила тока в проводнике 2 А, а его сопротивление 40 Ом. Проводником какого сопротивления нужно заменить данный проводник, чтобы сила тока равнялась y ампер при том же напряжении?

Уровень В



880. При каких значениях аргумента график функции $y = \frac{5}{x}$ расположен выше графика функции $y = 5x$.

881. Постройте график функции:

а) $y = \frac{2 - 7x}{x^2 - 2x} - \frac{6}{2 - x}$; **б)** $y = \frac{-40}{(x-5)^2 - (5+x)^2}$.

882. Докажите, что при $k < 0$ и $a < 0$ графики функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = ax + 3$ пересекаются во II и IV координатных четвертях.

883. Решите графически уравнение $\frac{2}{|x|} = x + 1$.

884. Найдите, используя графики функций, количество корней уравнения $-\frac{3}{|x|} = x - 4$.

Упражнения для повторения

885. Вычислите: $1{,}1^2 + 0{,}3^2 + (-0{,}4)^2 + (-0{,}2)^3 + 1{,}117^0$.

886. Решите уравнение:

а) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$; б) $x - 15\sqrt{x} - 16 = 0$.

887. Упростите выражение: $\left(m + 1 - \frac{1}{1-m}\right) : \left(m - \frac{m^2}{m-1}\right)$.

888. Сумма двух чисел равна 105,8. Одно из них на 30% больше другого. Найдите меньшее из этих чисел.

6. Функция $y = x^2$

Вы знаете, что площадь квадрата вычисляется по формуле $S = a^2$, где a — длина стороны квадрата. При изменении a будет изменяться S и каждому значению a соответствует единственное значение S, то есть S является функцией от a. Перейдя к принятым обозначениям аргумента и функции, получим функцию $y = x^2$.

В дальнейшем будем рассматривать функцию $y = x^2$, в которой переменная x может принимать любые действительные значения.

Построим график функции $y = x^2$. Составим таблицу для нескольких значений x и соответствующих значений y:

x	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
y	9	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9

Отметим точки, координаты которых представлены в таблице, на координатной плоскости (рис. 37). Если бы для каждого действительного значения x вычислили соответствующее значение y и отметили бы точки с такими координатами на координатной плоскости, то получили бы линию, которая является графиком функции $y = x^2$ (рис. 38). Эту линию называют *параболой*.

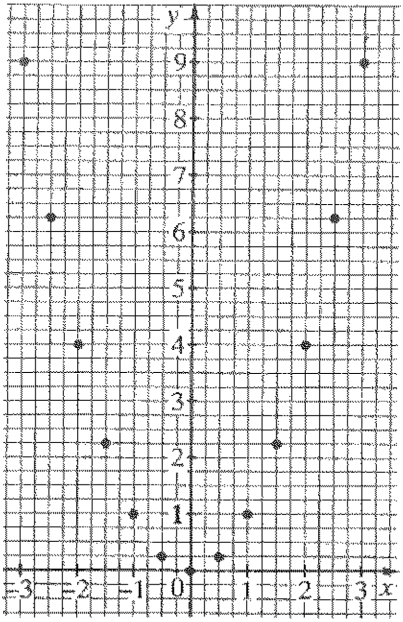


Рис. 37

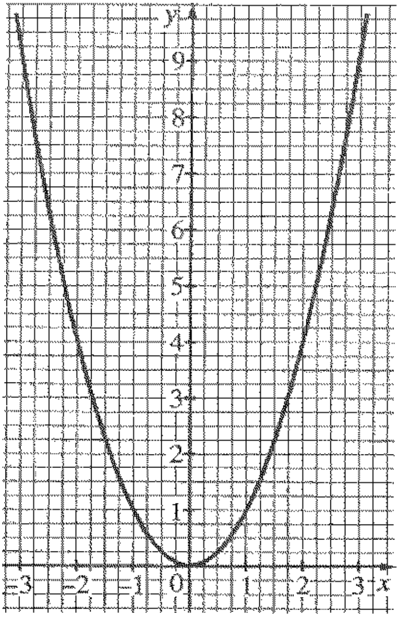


Рис. 38

Свойства функции $y = x^2$.

1. *Областью определения функции является множество всех действительных чисел.*

2. *Областью значений функции является множество неотрицательных действительных чисел.* В самом деле, значения функции $y = x^2$ не могут быть отрицательными, поскольку квадрат любого действительного числа не равен отрицательному числу. В то же время любое неотрицательное число является значением функции. Например, число 100 является значением функции $y = x^2$ при $x = 10$.

3. *График функции — парабола.*

4. При $x = 0$ $y = 0$. График проходит через точку (0; 0). Эта точка называется *вершиной* параболы. При $x \neq 0$ $y > 0$. Это значит, что все точки параболы, кроме ее вершины, расположены выше оси x.

5. Противоположным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции. (Например, противоположным значениям $x = -2$ и $x = 2$ соответствует одно и то же значение $y = 4$.) Итак, если графику принадлежит точка $(a; b)$, то ему принадлежит и точка $(-a; b)$. Это значит, что *график функции симметричный относительно оси y*.

Для тех, кто хочет знать больше

Объем куба вычисляется по формуле $V = a^3$, где a — длина стороны куба. При изменении a будет изменяться V и каждому значению a соответствует единственное значение V, то есть V является функцией от a. Перейдя к принятым обозначениям аргумента и функции, получим функцию $y = x^3$.

В дальнейшем будем рассматривать функцию $y = x^3$, считая, что областью ее определения является множество всех действительных чисел.

Построим график функции $y = x^3$, составив таблицу для нескольких значений x и соответствующих значений y.

x	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
y	-8	$-3\frac{3}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$3\frac{3}{8}$	8

Отметим точки, координаты которых представлены в таблице, на координатной плоскости (рис. 39). Если бы для каждого действительного значения x вычислили соответствующее значение y и отметили бы точки с такими координатами на координатной плоскости, то получили бы линию, которая является графиком функции $y = x^3$ (рис. 40). Эту линию называют *кубической параболой*.

Свойства функции $y = x^3$.

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел.

2. Областью значений функции также является множество всех действительных чисел.

3. График функции — кубическая парабола.

4. При $x = 0$ $y = 0$, то есть график проходит через начало координат. При $x > 0$ $y > 0$; при $x < 0$ $y < 0$. Это означает, что при $x > 0$ все точки кубической параболы размещены выше оси x, а при $x < 0$ — ниже этой оси.

5. Противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции. (Например, противоположным значениям $x = -2$ и $x = 2$ соответствуют противоположные значения $y = -8$ и $y = 8$.) Итак, если графику функции принадлежит точка $(a; b)$, то ему принадлежит и точка $(-a; -b)$. Это значит, что график функции симметричный относительно начала координат.

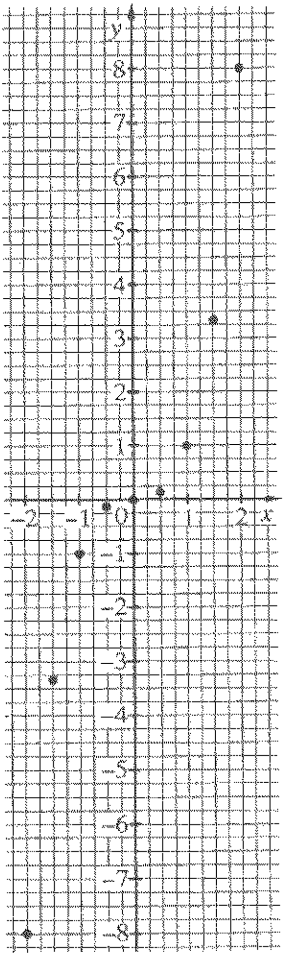


Рис. 39

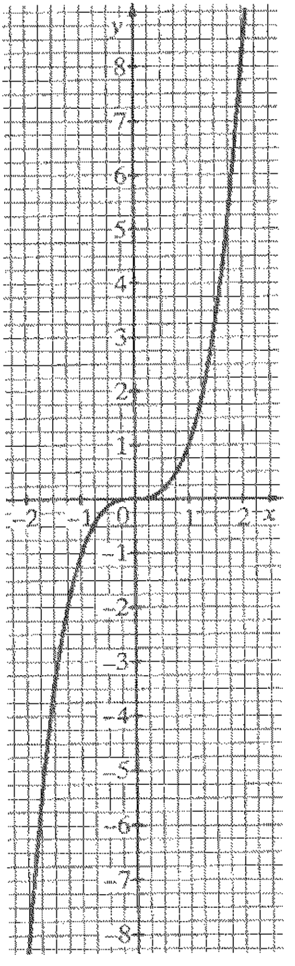
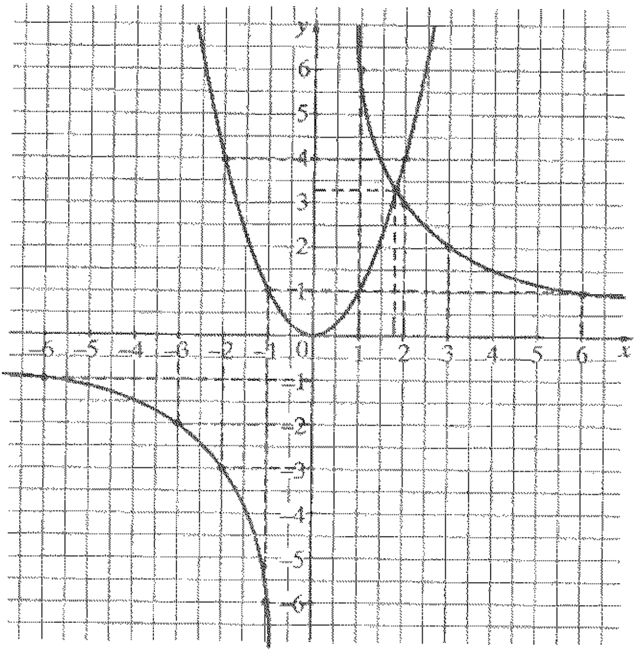


Рис. 40

Пример 1. Решить графически уравнение $x^2 = \frac{6}{x}$.

● Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = \frac{6}{x}$. Эти графики пересекаются в точке с абсциссой $x \approx 1{,}8$.



Итак, $x \approx 1{,}8$ — корень уравнения.

Ответ. $\approx 1{,}8$. ●

Устно

889. Укажите верные утверждения:

а) областью значений функции $y = x^2$ является множество всех действительных чисел;

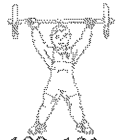
б) функция $y = x^2$ может принимать отрицательные значения;

в) графиком функции $y = x^2$ является гипербола;

г) график функции $y = x^2$ симметричный относительно оси y;

д) точка $(-1; 1)$ принадлежит графику функции $y = x^2$.

Уровень А



890. Функция задана формулой $y = x^2$. Найдите:

а) значения y, которые соответствуют таким значениям x: -4; $-2{,}1$; 0; 5;

б) значения x, которым соответствуют такие значения y: 36; 49; 100; 121.

891. Для функции $y = x^2$ заполните таблицу:

x	-5	$-1{,}5$			4
y			0	0,36	

892. Используя график функции $y = x^2$ (рис. 38), найдите значения аргумента, которым соответствуют такие значения функции: 1,5; 3,5; 7,5.

893. Используя график функции $y = x^2$ (рис. 38), найдите значения функции, которые соответствуют таким значениям аргумента: $-2{,}25$; $0{,}75$; $1{,}25$.

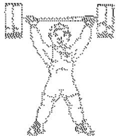
894. Проходит ли график функции $y = x^2$ через точку: $A(15;\ 225)$; $B(-22;\ 464)$; $C\left(-\frac{1}{5};\ -\frac{1}{25}\right)$?

895. Проходит ли график функции $y = x^2$ через точку: $M(14;\ 186)$; $N\left(-\frac{2}{3};\ \frac{4}{9}\right)$?

896. Постройте график функции $y = x^2$, где $-3 \le x \le 2$.

897. Постройте график функции $y = x^2$, где $-2 \le x \le 3$.

Уровень Б



898. При каких значениях аргумента функции $y = x^2$ и $y = 5x - 6$ принимают одни и те же значения?

Сколько точек пересечения имеют графики функций?

899. **а)** $y = x^2$ и $y = x - 5$; **б)** $y = x^2$ и $y = 4x - 4$.

900. $y = x^2$ и $y = 3x + 1$.

Решите графически уравнение:

901. **а)** $x^2 = \frac{12}{x}$; **б)** $x^3 - 3 = -2x$.

902. **а)** $x^2 = \frac{8}{x}$; **б)** $x^3 = -x + 2$.

903. Постройте систему координат, приняв за единицу 10 клеток, и постройте графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$, где $0 \le x \le 1$. Сделайте вывод о взаимном расположении этих графиков.

904. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = x^3$.

Уровень В

905. Докажите, что всякая прямая, параллельная оси y, пересекает график функции $y = x^2$.

906. Найдите значение k, при котором графики функций $y = kx + 4$ и $y = x^2$ пересекаются в точке с абсциссой -1.

907. Найдите значение b, при котором графики функций $y = 2x + b$ и $y = x^2$ имеют только одну общую точку. Каковы координаты этой точки?

908. Используя график функции $y = x^2$, укажите значения x, при которых точки параболы расположены ниже прямой $y = -x + 6$.

909. При каких значениях x значения функции $y = x^3$ меньше соответствующих значений функции $y = -1$?

Упражнения для повторения

910. Вычислите:

а) $\sqrt{2,25} \cdot \sqrt{\dfrac{4}{9}} + \sqrt{0,04} \cdot \sqrt{3600}$; б) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50} + \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}$.

911. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{70} - \sqrt{30}}{\sqrt{35} - \sqrt{15}}$; б) $\left(\sqrt{5 - \sqrt{21}} + \sqrt{5 + \sqrt{21}}\right)^2$.

912. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} = 0,3$; б) $\sqrt{x} = -8$; в) $2(\sqrt{x} - 1) = 4 - \sqrt{x}$.

913. Длина обода заднего колеса трактора 2 м, переднего — 1,5 м. На каком расстоянии переднее колесо делает на 10 оборотов больше заднего?

7. Функция $y = \sqrt{x}$

Если известна площадь S квадрата, то его сторону a можно найти по формуле $a = \sqrt{S}$. При изменении площади (S) будет изменяться и длина стороны (a), причем каждому значению S соответствует единственное значение a, то есть a является функцией от S. Перейдя к принятым обозначениям функции и аргумента, получим функцию $y = \sqrt{x}$.

Из формулы $y = \sqrt{x}$, которой задается функция, следует, что областью ее определения является множество неотрицательных действительных чисел, поскольку арифметический квадратный корень существует только из неотрицательных действительных чисел.

Построим график функции $y = \sqrt{x}$, составив таблицу для нескольких значений x и соответствующих значений y:

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Отметим точки, координаты которых представлены в таблице, на координатной плоскости (рис. 41). Если бы для каждого неотрицательного значения x вычислили соответствующее значение y и отметили бы точки с такими координатами на координатной плоскости, то получили бы линию, являющуюся графиком функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 42).

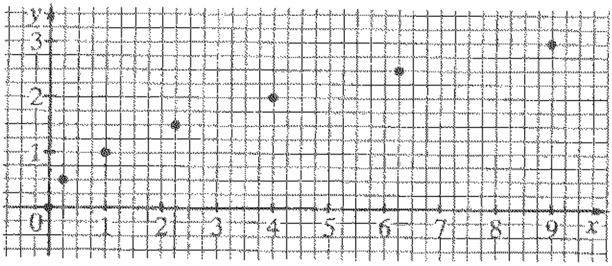


Рис. 41

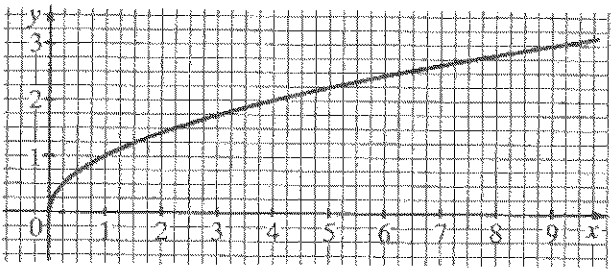


Рис. 42

График функции $y = x^2$, где $x \geq 0$, называют правой ветвью параболы. График функции $y = \sqrt{x}$ можно получить, если эту ветвь симметрично отобразить относительно прямой $y = x$ (рис. 43). Поэтому и график функции $y = \sqrt{x}$ называют *ветвью параболы*.

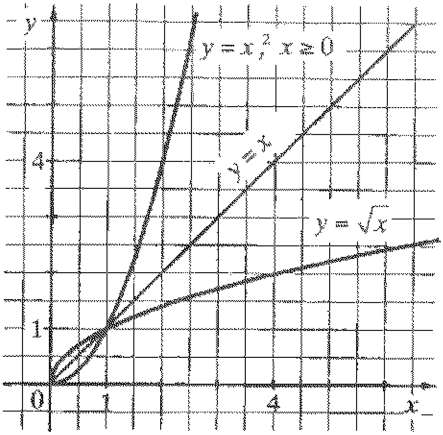


Рис. 43

Свойства функции $y = \sqrt{x}$.

1. *Областью определения функции является множество неотрицательных действительных чисел.*

2. *Областью значений функции также является множество неотрицательных действительных чисел.* В самом деле, значения функции $y = \sqrt{x}$ не могут быть отрицательными. В то же время любое неотрицательное число является значением функции. Например, число 10 является значением функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 100$.

3. *График функции — ветвь параболы.*

4. При $x = 0$ $y = 0$, то есть график проходит через начало координат. График расположен в первой четверти координатной плоскости.

Устно

914. Укажите верные утверждения:

а) областью значений функции $y = \sqrt{x}$ является множество всех положительных чисел;

б) функция $y = \sqrt{x}$ принимает только неотрицательные значения;

в) графиком функции $y = \sqrt{x}$ является ветвь параболы;

г) точка (16; 4) принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$.

915. Пересекает ли график функции $y = \sqrt{x}$ прямые: $y = 3$; $y = -5$?

916. На рисунке 44 изображены графики функций $y = -x + 2$ и $y = \sqrt{x}$.

а) При каком значении x функции принимают одно и то же значение? Чему равно это значение?

б) Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x} = -x + 2$? Назовите эти корни.

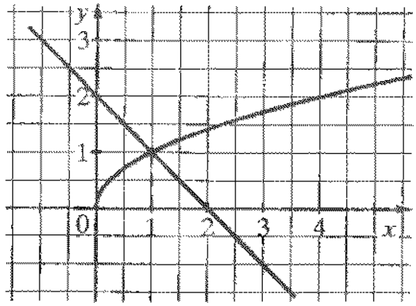
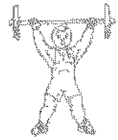


Рис. 44

Уровень А



917. Используя график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 42), найдите значения функции, соответствующие таким значениям аргумента: 3; 2,5; 0,75; 5.

918. Функция задана формулой $y = \sqrt{x}$. Найдите x при $y = 1$; $y = 2$; $y = 2{,}5$.

919. Функция задана формулой $y = \sqrt{x}$. Найдите y при $x = 1$; $x = 4$; $x = 9$.

920. Используя график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 42), найдите значения аргумента, которым соответствуют такие значения функции: 1,5; 0,5; 2,25.

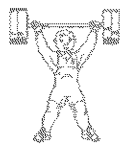
921. Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt{x}$ точка: $A(50; 5)$; $B(36; 6)$; $D(3; 9)$?

922. Проходит ли график функции $y = \sqrt{x}$ через точку: $A(225; 15)$; $B(4; -2)$; $C(12{,}25; 3{,}5)$?

923. Постройте график функции $y = \sqrt{x}$, где $1 \le x \le 9$.

924. Постройте график функции $y = \sqrt{x}$, где $0 \le x \le 4$.

Уровень Б



925. Используя график функции $y = \sqrt{x}$, сравните числа:

а) $\sqrt{3{,}5}$ и $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5}$ и 2,5.

926. График функции $y = \sqrt{x}$ проходит через точку с абсциссой 25. Найдите ординату этой точки.

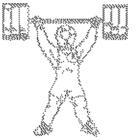
927. Укажите все целые значения x, при которых значения функции $y = \sqrt{x}$ меньше 6.

Решите графически уравнение:

928. а) $3+\sqrt{x}=x+1$; б) $\sqrt{x}=\dfrac{8}{x}$.

929. а) $\sqrt{x}-0{,}5x=0$; б) $\sqrt{x}=x^2$.

Уровень В



930. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y=\sqrt{x}$ и $y=x-12$; б) $y=\sqrt{x}$ и $y=2x-6$.

931. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt{x^2}$; б) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$; в) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$.

932. Решите графически уравнение $\sqrt{x}=x^3$.

Упражнения для повторения

933. Упростите выражение:

а) $\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\cdot\dfrac{a^2-a}{a+1}$; б) $\left(\dfrac{b-3}{b+2}-\dfrac{b-2}{b+3}\right):\dfrac{5}{b+3}$.

934. Решите уравнение:

а) $2x^2-7x+6=0$; б) $x^2-3x-3=0$;

в) $x^2+(x+2)(x-4)=-4$; г) $(x-3)^2=(4x-3)(2x+3)$.

935. Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел больше их произведения на 43. Найдите эти числа.

Вопросы и упражнения для повторения § 4

1. Приведите пример функционального соответствия между переменными.
2. Объясните на примере, что такое аргумент и что такое функция.
3. Какие вы знаете способы задания функции? Приведите пример задания функции с помощью формулы.
4. Что называют областью определения и областью значений функции?
5. Что называется графиком функции?
6. Как с помощью графика найти значение функции по известному значению аргумента?
7. Какая функции называется линейной? Приведите примеры линейных функций.
8. Какие свойства имеет линейная функция?

9. Какая функция называется прямой пропорциональностью? Приведите примеры прямой пропорциональности.
10. Какие свойства имеет прямая пропорциональность?
11. Какая функция называется обратной пропорциональностью? Приведите примеры обратной пропорциональности.
12. Какие свойства имеет обратная пропорциональность?
13. Какие свойства имеет функция $y = x^2$?
14. Какие свойства имеет функция $y = \sqrt{x}$?

936. Функция задана формулой $y = 5x - 3$.
а) Найдите значение функции, соответствующее таким значениям аргумента: -8; 0; 16.
б) Найдите значение аргумента, соответствующее значению функции: -3; 1.
в) При каком значении x значение функции равно значению аргумента?

937. Функция задана формулой $y = x^2 - 3$, где переменная x может принимать значения: -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3. Задайте эту функцию таблицей.

938. Найдите область определения функции:
а) $y = \dfrac{x}{2x+9}$; **б)** $y = \dfrac{1}{x^2-9}$; **в)** $y = \dfrac{2x-3}{x^2-7x-8}$.

939. Постройте график функции $y = -3x - 1$. С помощью графика найдите: а) значения функции при $x = -1{,}5$; $x = 1{,}5$; б) значение x, при котором $y = 5$.

940. Постройте график функции:
а) $y = 2x + 1$, где $-3 \le x \le 1$; **б)** $y = 0{,}5x^2 - 0{,}5$, где $-2 \le x \le 2$;
в) $y = -3x$; **г)** $y = 1{,}5x - 1$; **д)** $y = -\dfrac{3}{x}$.

941. Запишите формулу прямой пропорциональности, если ее график проходит через точку $A(-3; 1)$.

942. Запишите формулу обратной пропорциональности, если ее график проходит через точку $B\left(-6; -\dfrac{1}{3}\right)$.

943. График функции $y = kx$ проходит через точку $A(-8; 4)$. Найдите k. Проходит ли график этой функции через точку: $B(2; -1)$; $C\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}\right)$?

944. График функции $y = \dfrac{k}{x}$ проходит через точку $A(1; 8)$. Проходит ли график этой функции через точку: $B(0{,}5; 16)$; $C(-0{,}4; -20)$?

945. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = -4x + 6$ с осями координат.

946. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 3x$ и $y = -3x + 6$; б) $y = x^2$ и $y = 5 - 4x$;

в) $y = x^2$ и $y = -1{,}5x$; г) $y = 3x$ и $y = \sqrt{x}$.

947. С помощью графиков функций выясните, имеет ли корни уравнение:

а) $10x = -\frac{2}{x}$; б) $\sqrt{x} + x = -1$; в) $x^2 = \frac{1}{5}x - 2$; г) $\frac{10}{x} = 0{,}5x - 1$.

948. Решите графически уравнение:

а) $x^2 = 1{,}5x + 1$; б) $x^2 + 2 = -3x$; в) $\sqrt{x} = -4x + 5$; г) $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$.

949. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $(-1; 15)$. Найдите координаты точки, симметричной данной относительно начала координат. Принадлежит ли она графику данной функции?

950. График функции $y = x^2$ проходит через точку $(-5; 25)$. Найдите координаты точки, симметричной данной относительно оси y. Принадлежит ли найденная точка графику данной функции?

951*. Постройте график функции:

а) $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3} + 3$; б) $y = \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x - 1} + 1$;

в) $y = x + |x|$; г) $y = x\sqrt{x^2}$;

д) $y = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0; \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$ е) $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

952*. Функция задана формулой $y = kx + 3$.

а) При каком значении k график этой функции проходит через точку $(2; 4)$?

б) При каком значении k график этой функции параллельный графику функции $y = 5x - 8$?

953*. Найдите значение a, при котором графики функций $y = 2x + a$ и $y = x^2$ пересекаются в точке $(3; 9)$. Найдите координаты другой точки пересечения этих графиков.

Задания для самопроверки №6

I уровень

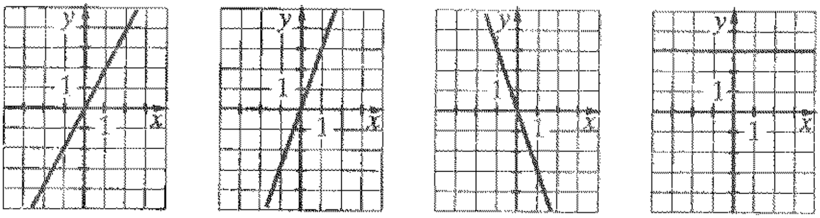
1. Чему равно значение функции $y = -2x + 0{,}5$ при $x = -1{,}5$:

   а) $-3{,}5$; б) 3; в) $-2{,}5$; г) $3{,}5$?

2. При каком значении аргумента значение функции $y = \dfrac{10}{x}$ равно 4?

   а) 40; б) 2,5; в) 5; г) 2,4.

3. Который из графиков является графиком функции $y = 3x$ (рис. 45)?



а) б) в) г)

Рис. 45

4. Какие из точек:

   а) $A(-4;\ 16)$; б) $B(4;\ 16)$; в) $C(4;\ 8)$; г) $D(-4;\ 8)$

   принадлежат графику функции $y = x^2$?

5. Укажите верные утверждения:

   а) графиком линейной функции является прямая;

   б) график прямой пропорциональности симметричный относительно оси y;

   в) графиком функции $y = \dfrac{k}{x}$ является гипербола;

   г) график функции $y = x^2$ симметричный относительно оси y.

II уровень

1. Функция задана формулой $y = -\dfrac{4}{x}$. Найдите значения функции при $x = -2$; $x = 0{,}5$.

2. Функция задана формулой $y = -4x - 1$. Найдите значение аргумента, которому соответствует значение функции –9; 9.
3. Используя график функции (рис. 46), найдите:

   а) значение функции при $x = -3$;

   б) значение аргумента, котрому соответствует значение функции –2.
4. Постройте график функции $y = -2x$.
5. Проходит ли график функции, заданной формулой $y = \sqrt{x}$, через точку (1,69; 1,3)?

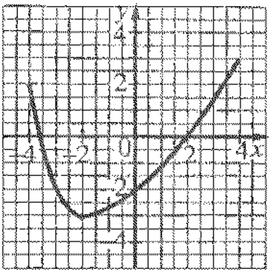


Рис. 46

III уровень

1. Найдите область определения и область значений функции, график которой изображен на рисунке 46.
2. Функция задана формулой $y = x^2$. Найдите значения аргумента, которым соответствует значение функции $y = 2{,}25$.
3. Найдите область определения функции $y = \dfrac{x-1}{2x^2 - x - 1}$.
4. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = -\dfrac{8}{x}$ и $y = x - 9$.
5. Решите графически уравнение $x^2 + 1{,}5x = 1$.

IV уровень

1. Функция задана формулой $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 10}$. Найдите область определения и наибольшее значение функции.
2. График функции $y = \dfrac{k}{x}$ проходит через точку $A(2; 4{,}5)$. Проходит ли график этой функции через точку (–3; –3)?
3. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = -2x + 3$ и $y = \sqrt{x}$.
4. При помощи графиков функций найдите значения x, при которых значения функции $y = x^2$ больше соответствующих значений функции $y = x + 2$.
5. При помощи графиков функций выясните, имеет ли корни уравнение $\sqrt{x} + x = 0{,}5$.

ЗАДАЧИ ЗА КУРС АЛГЕБРЫ 8 КЛАССА

954. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\frac{3b}{5b+1}$; б) $\frac{x+2}{x^2+3x}$; в) $\frac{-5}{a^2-3}$; г) $\frac{4}{x^2-7x+12}$.

955. Сократите дробь:

а) $\frac{42x^2y^5}{36x^4y^3}$; б) $\frac{6xy+6y^2}{x^2-y^2}$; в) $\frac{a^2-6a+9}{(a-2)^2-1}$;

г) $\frac{a^2-2a+1}{a^2+ab-a-b}$; д) $\frac{x^{15}-1}{x^{10}+x^5+1}$; е) $\frac{x^{10}-5}{x^5-\sqrt{5}}$.

Упростите выражение:

956. а) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a+2}$; б) $\frac{x-y}{y}+\frac{y}{x+y}$;

в) $\frac{xb}{2y^2}\cdot\frac{6y}{x}+\frac{b}{y}$; г) $\frac{2b}{a}+\frac{a+b}{a-b}:\frac{a^2+ab}{ab-b^2}$;

д) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{x-6}{x^2-4}$; е) $\frac{2}{y-2}+\frac{2}{y+2}+\frac{4y-34}{4-y^2}$.

957. а) $\frac{3}{a+b}-\frac{3a-3b}{2a-3b}\cdot\left(\frac{2a-3b}{a^2-b^2}-2a+3b\right)$;

б) $\left(m+\frac{m-n}{m+n}-n\right):\left(\frac{2m+1}{m^2-n^2}+1\right)$;

в) $\left(\frac{x-y}{xy}-\frac{3x+y}{xy-y^2}+\frac{3y+x}{xy-x^2}\right):\frac{2x+2y}{xy}-\frac{2x}{y-x}$;

г) $\frac{a^2+ax+ab+bx}{a^2-ax-ab+bx}\cdot\frac{a^2-ax-bx+ab}{a^2+ax-bx-ab}$.

958. Докажите тождество:

а) $\left(x-\frac{xy}{x+y}\right):\left(y-\frac{y^2}{x+y}\right)=\frac{x}{y}$;

б) $\left(\frac{1}{a-2b}+\frac{1}{a+2b}\right):\left(\frac{4(a^2+b^2)}{a^2-4b^2}+1\right)=\frac{2}{5a}$;

в) $\frac{1}{a-2b}+\frac{6b}{4b^2-a^2}-\frac{2}{a+2b}=-\frac{1}{2a}\cdot\left(\frac{a^2+4b^2}{a^2-4b^2}+1\right)$.

959. Упростите выражение и найдите его значение при данном значении переменной:

а) $\frac{a+1}{a^2+2a+1}-\frac{1}{a-1}$; $a=15$; б) $\frac{(b-2)^2}{b^2-4}-1$; $b=-1{,}9$.

960. Докажите, что выражение $\frac{2^m\cdot 3^{n-1}-2^{m-1}\cdot 3^n}{2^m\cdot 3^n}$ принимает одно и то же значение при любых натуральных значениях m и n.

961. Вычислите:

а) $\frac{2^{-3}\cdot 2^{-8}}{2^{-10}}$; б) $\frac{5^{-3}\cdot 25^4}{125^2}$; в) $\frac{6^{-5}}{2^{-6}\cdot 3^{-5}}$.

962. Упростите выражение:

а) $(a^{-2}-a^{-1}+1):(a^{-2}+a)$; б) $\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}+1}+1\right):\left(1-\frac{3x^{-4}}{1-x^{-4}}\right)$.

963. Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{7}{16}$; б) $-\frac{7}{36}$; в) $\frac{5}{27}$; г) $\frac{13}{40}$.

964. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\sqrt{x^2+1}$; б) $\sqrt{|x|}$; в) $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$; г) $\frac{5}{\sqrt{x}-4}$.

965. Докажите, что $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

966. Упростите выражение:

а) $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}-3\sqrt{32}$; б) $4\left(\sqrt{12}+\frac{1}{2}\sqrt{18}-\sqrt{3}\right):\sqrt{3}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{12}\right)\cdot 2\sqrt{3}$; г) $\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}\sqrt{36x^3}-\frac{2x}{3}\sqrt{9x}$.

967. Сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt{20}-4}{\sqrt{5}-2}$; б) $\frac{c-3}{\sqrt{c}+\sqrt{3}}$; в) $\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$.

968. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+3}$; в) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{2a}-\sqrt{a}}$.

969. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{8}-3}-\dfrac{1}{\sqrt{8}+3}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

в) $\left(2+\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$.

970*. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$; б) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-4\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}+4\right)^2}$;

в) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; г) $\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{2}}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$.

971*. Упростите выражение:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+1}{a-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}\right).$$

Решите уравнение:

972. а) $x^2-2x-15=0$; б) $2x^2-5x-7=0$;

в) $15x^2+75x-90=0$; г) $3x^2-4x-8=0$;

д) $\left(x-2\right)^2=\left(7-2x\right)^2$; е) $\left(2x-1\right)^2+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$;

ж) $x^4-7x^2-18=0$; з) $\left(x-1\right)x+x\left(x^2-5\right)=0$.

973*. а) $\left(x^2-3x\right)^2+3\left(x^2-3x\right)-28=0$; б) $\left(x^2-2x-4\right)\left(x^2-2x-3\right)=2$;

в) $\left(x^2+2x+1\right)^2+\left(x^2+2x+2\right)^2-\left(x^2+2x+3\right)^2=60$.

974. а) $x-\dfrac{3x}{x+3}=\dfrac{9}{x+3}$; б) $\dfrac{x+5}{x+2}-1=\dfrac{2}{3-x}$;

в) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x+3}=1$; г) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}=2,5$;

д) $\frac{3}{1+5x}-\frac{12}{1-5x}=\frac{6}{1-25x^2}=3$; е) $\frac{2}{x+2}-\frac{35}{2x-x^2}-\frac{7}{x^2-4}=0$;

ж) $\frac{2x+6}{1+3x}-\frac{4x+8}{3x-1}-\frac{3x^2+30x-1}{1-9x^2}=0$.

975*. а) $|x^2-2x|=3$; б) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=1$.

976*. а) $\sqrt{x-5}=1$; б) $\sqrt{x^2-2x+1}=2$;

в) $x-3\sqrt{x}-10=0$; г) $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}-6=0$.

977. Найдите значение выражения $2(x_1+x_2)^2-5x_1x_2$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-11x+2=0$.

978. Найдите значение выражения $x_1^3+x_2^3$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+7x+3=0$.

979. Один из корней уравнения $12x^2+x+c=0$ равен 0,25. Найдите число c и другой корень уравнения.

980. Частное корней уравнения $3x^2+bx+2=0$ равно 6. Найдите эти корни и число b.

981*. При каких значениях a уравнение имеет один корень:

а) $ax^2-(2a-1)x-2=0$; б) $a^2x^2+(a-1)x+1=0$?

982*. При каких значениях a уравнение $(a-3)x^2-(a^2-9)x+7=0$ имеет корни, являющиеся противоположными числами?

983*. Докажите, что уравнение $x^2-3mx-m^2-1=0$ при любом значении m не имеет двух положительных корней.

984. Произведение двух последовательных целых чисел больше их суммы на 11. Найдите эти числа.

985. Найдите пять последовательных целых чисел, если известно, что сумма квадратов трех первых чисел равна сумме квадратов двух последних.

986. Гипотенуза прямоугольного треугольника на 4 см длиннее одного катета и на 2 см — другого. Найдите периметр треугольника.

987. Ширина прямоугольника на 2 см меньше длины и на 4 см меньше его диагонали. Найдите площадь прямоугольника.

988. Знаменатель обыкновенной дроби на 4 больше числителя. Если к числителю прибавить 1, а из знаменателя вычесть 1, то получим дробь, которая на $\frac{3}{10}$ больше данной. Найдите данную дробь.

989. Токарь должен изготовить за определенное время 70 деталей. Каждый день он изготавливал на 2 детали больше, чем планировал, и выполнил задание на 4 дня раньше срока. Сколько деталей за день изготавливал токарь?

990. Две бригады, работая вместе, могут выполнить задание за 12 ч. Первая бригада, работая отдельно, может выполнить это задание на 10 ч быстрее, чем вторая. Сколько часов нужно первой бригаде, чтобы выполнить задание?

991. Два насоса, работая вместе, могут наполнить водой $\frac{7}{8}$ бассейна за 3 ч. За какое время может наполнить бассейн каждый насос отдельно, если один из них может это сделать на 2 ч быстрее, чем другой?

992. Чтобы выполнить заказ, два токаря работали вместе 2 ч, после чего первый из них работал еще 1 ч. За какое время может выполнить заказ каждый токарь, работая отдельно, если второй может это сделать на 2 ч быстрее, чем первый?

993. В озеро впадают две реки. Катер отчалил от пристани A, расположенной на первой реке, проплыл 12 км до озера, потом 7 км озером и 10 км по второй реке до пристани B. На весь путь катер затратил 1 ч 20 мин. Найдите скорость течения каждой реки, если скорость течения первой реки на 2 км/ч больше скорости течения второй, а скорость катера в стоячей воде 21 км/ч.

994. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 30 км, выехал мотоциклист, а через 6 мин вслед за ним выехал автобус, скорость которого на 15 км/ч больше скорости мотоциклиста. Найдите скорость автобуса, если в пункт B он прибыл на 4 мин раньше, чем мотоциклист.

995. В магазине, находящимся возле нашего дома, 1 кг сахара стоит 2 грн. 90 к., а на оптовом рынке — 2 грн. 60 к. Правда, до оптового рынка нужно проехать тролейбусом, проезд в котором стоит 40 к. Где выгоднее покупать сахар — в магазине или на оптовом рынке, — если нужно купить: **а)** 1 кг сахара; **б)** 4 кг сахара?

996*. На оптовом рынке два предприятия купили вместе 300 кг товара по цене 12,5 грн. за 1 кг. Первое предприятие перевозит товар на расстояние 20 км от рынка, а второе — на расстояние 30 км. Перевоз 100 кг товара на расстояние 1 км стоит 50 к. Сколько товара купило первое предприятие, если известно, что оно потратило на покупку и перевоз товара на 1270 грн. меньше, чем второе?

997*. Две точки равномерно вращаются по двум окружностям. Первая из них осуществляет полный оборот на 5 с быстрее, чем вторая, и потому успевает выполнить на 2 оборота в минуту больше, чем вторая. Сколько оборотов в минуту осуществляет вторая точка?

998*. На соревнованиях по волейболу было сыграно 28 игр. Сколько команд принимало участие в соревнованиях, если каждая команда сыграла по одному разу со всеми остальными?

999*. Сплав олова и серебра, содержащий 5 кг серебра, сплавили с 15 кг серебра. В результате процентное содержание олова в новом и начальном сплавах стало отличаться на 30%. Найдите массу начального сплава.

1000*. В сосуде было 10 л концентрированной сульфатной кислоты. Часть ее отлили и сосуд долили таким же количеством воды. Потом снова отлили такое же количество смеси и долили сосуд таким же количеством воды. Сколько воды доливали каждый раз, если в результате в сосуде образовался 64% раствор сульфатной кислоты?

1001*. Морская вода содержит 5% соли (по массе). Сколько пресной воды нужно добавить до 30 кг морской, чтобы получить раствор, в котором процентное содержание соли было бы на 70% меньше, чем процентное содержание соли в морской воде?

1002. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{5x}{x^2 - 7x + 12}$; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 5}$; в) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 9}$.

1003. Постройте график функции:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = -1{,}5x - 1$; в) $y = 2x^2 - 2$, где $-2 \le x \le 2$.

1004*. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{-x}{|x|}$; б) $y = \dfrac{12}{|x|}$; в) $y = -\dfrac{6}{\sqrt{x^2}}$; г) $y = \sqrt{x^2} + 2$.

1005. При каких значениях аргумента принимают одинаковые значения функции:

а) $y = x^2$ и $y = 6x - 5$; б) $y = -\frac{2}{x}$ и $y = -8x$?

1006. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 1{,}5x$ и $y = -x + 5$; б) $y = -2x + 35$ и $y = x^2$.

1007. Решите графически уравнение:

а) $x^2 = 1{,}5x + 1$; б) $\frac{4}{x} = x - 3$; в) $\sqrt{x} = -0{,}5x + 4$.

1008. На рисунке 47 изображен график функции. Какова область определения и область значений этой функции? Задайте функцию формулой при:

а) $0 \le x \le 2$; б) $2 \le x \le 6$; в) $6 \le x \le 10$.

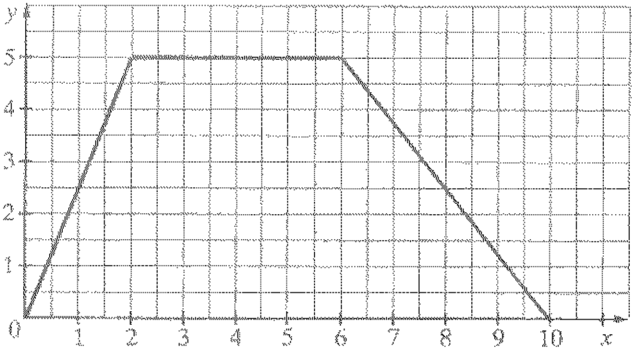


Рис. 47

1009. График прямой пропорциональности проходит через точку $A(2; 7)$. Проходит ли этот график через точку $B(-4; -14)$?

1010. График обратной пропорциональности проходит через точку $A(-3; 2)$. Проходит ли этот график через точку $B(-4; 1{,}5)$?

1011. График линейной функции проходит через точки $A(-1; 1)$ и $B(3; -7)$. Задайте эту функцию формулой.

1012. При каком значении b графики функций $y = 3x + b$ и $y = 2x + 4$ пересекаются в точке, которая лежит на оси абсцисс?

1013*. Найдите значения x, при которых значение функции $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ равно нулю. Постройте график этой функции.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

К § 1

1014. Сократите дробь:

а) $\dfrac{(x^2+x)^2-(x^2+x)-2}{x^2+x+1}$; б) $\dfrac{x^4+x^2a^2+a^4}{x^3+a^3}$.

1015. Упростите выражение:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}.$$

1016. Докажите тождество:

$$(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)=\frac{x^{32}+x^{16}+1}{x^2+x+1}.$$

1017. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$ при $n=100$.

1018. При каких натуральных значениях n значение дроби $\dfrac{n^3-n+2}{n-1}$ является целым числом?

1019. Докажите, что если $xyz=1$, то $\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+zx}=1$.

Указание. Умножьте числитель и знаменатель первой дроби на z, а второй — на xz. Тогда в силу условия $xyz=1$ все три дроби будут иметь одинаковые знаменатели.

1020. О числах x, y, z известно, что $\dfrac{x}{y+z-x}=\dfrac{y}{x+z-y}=\dfrac{z}{x+y-z}$. Какие значения может принимать дробь $\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$?

1021. При некотором нецелом значении a число $a+\dfrac{1}{a}$ является целым. Докажите, что при том же значении a целым является число $a^3+\dfrac{1}{a^3}$.

1022. Значения какого выражения является большим и на сколько большим:

$\left(4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3n-4}\right)\cdot\left(16\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-3n}\right)$ или $\left(9\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{5m-5}\right)\cdot\left(27\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{4-5m}\right)$, где n и m — целые числа?

1023. Докажите, что число 0,123456789101112... (после запятой записываются подряд все натуральные числа) является иррациональным.

1024. Известно, что a, b, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — рациональные числа. Докажите, что числа $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ также рациональные.

1025. Докажите, что число $\sqrt{6666^{15}+2}$ не является натуральным.

1026. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\left(\sqrt{a}-1\right)^2+4\sqrt{a}}$; б) $\sqrt{a+2\sqrt{a+1}+2}$.

1027. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+1}$.

1028. Докажите, что значение выражения является натуральным числом:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;

б) $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}$; в) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

1029. Докажите тождество:

$$\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}}=2.$$

1030. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+1=0$; б) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}=3$;

в) $\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}=3$; г) $\sqrt{x+4-4\sqrt{x+2}}=\sqrt{2}$.

1031. Найдите все числа x и y, для которых верно равенство:

$$x^2-8x+y-4\sqrt{y}+20=0.$$

1032. а) Докажите, что когда $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=a$, где $a>0$, то $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{a}$.

б) Решите уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=2$.

1033. Даны три числа: 2, $1-\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$. За один ход разрешается написать новые три числа, заменив каждое из начальных чисел полусуммой двух других. Можно ли, проделав несколько таких ходов, прийти к набору чисел: 1, $2-\sqrt{2}$ и $2+\sqrt{2}$?

1034. Дискриминант квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равен нулю и $a > 0$. Докажите, что левая часть уравнения является полным квадратом.

1035. Докажите, что при любых действительных значениях a, b и c уравнение $x^2 - (a + b)x + ab - c^2 = 0$ имеет корни.

1036. Докажите, что при рациональных значениях a, b и c, где $a + b + c \neq 0$, уравнение $(a + b + c)x^2 + 2(a + b)x + a + b - c = 0$ имеет корни и эти корни являются рациональными числами.

1037. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a - 1 = 0$ является наименьшей?

1038. При каких значениях c уравнения $x^2 - 8x + 5c = 0$ и $2x^2 + 6x - c = 0$ имеют общий корень?

1039. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Запишите квадратное уравнение, корнями которого являются числа $x_1^2 + x_2^2$ и $x_1^3 + x_2^3$.

1040. Корни a и b квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ являются положительными числами. Выразите $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ через p и q.

1041. Решите уравнение:

а) $\left(2x^2 + 3x + 4\right)^2 = \left(x^2 + x + 7\right)^2$; б) $(2x-1)^2 + \left(2x^2 + 5x - 3\right)^2 = 0$;

в) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x+5}{x-5} = \dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x+4}{x-4}$; г) $\dfrac{x^2+1}{3x^2+2} = \dfrac{4x^2-5}{x^2+6}$;

д) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 2$; е) $\dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{x^2+1}{2x} = 2$.

1042. Найдите сумму квадратов корней уравнения $(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) + 3 = 0$.

1043. Найдите наибольший корень уравнения:

$$(x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 3)(x^4 + 4x^2 - 5) = 0.$$

1044. Найдите все целые числа a, при которых выражение $(x - a)(x - 10) + 1$ разлагается в произведение $(x - b)(x - c)$ с целыми b и c.

1045. С квадратным уравнением $ax^2 + bx + c = 0$ разрешается делать такие преобразования:

1) заменить в нем x на $x - k$, где k — некоторое действительное число;

2) заменить его на уравнение $cx^2 + (b + 2c)x + (a + b + c) = 0$.

Можно ли при помощи нескольких таких преобразований от уравнения $x^2 - 3x - 4 = 0$ перейти к уравнению $x^2 - 5x - 5 = 0$?

1046. Корни уравнения $x^2 + mx + n + 1 = 0$ являются натуральными числами. Докажите, что число $m^2 + n^2$ является составным.

1047. Найдите четыре последовательных натуральных числа, произведение которых равно 1680.

1048. Идя вдоль трамвайной линии определенного маршрута, я заметил, что через каждые 12 мин меня настигает трамвай, а через каждые 4 мин я встречаю трамвай. Трамваи двигаются с одинаковой скоростью. Через сколько минут один за другим они отправлялись с конечной остановки?

1049. Из города A в город B, расстояние между которыми 100 км, на мотоцикле выехал курьер. Через 24 мин вслед за ним на автомобиле выехал второй курьер, который догнал первого, передал ему дополнительное поручение и сразу же отправился в обратный путь. Второй курьер возвратился в город A в тот момент, когда первый прибыл в город B. Найдите скорость первого курьера, если скорость второго 75 км/ч.

1050. Отец и сын в час дня начали строить теплицу и должны были закончить работу к началу трансляции футбольного матча. Однако, когда была выполнена половина работы, сын поранил палец, и отец, оставшись один, закончил работу с опозданием на 2 ч. Отец, работая сам, мог бы соорудить теплицу на 5 ч быстрее, чем сын. В котором часу началась трансляция футбольного матча?

1051. Пассажир метро спускается вниз по неподвижному эскалатору за 42 с. Если пассажир будет идти с той же скоростью по движущемуся эскалатору, то он спустится за 24 с. За какое время спустится пассажир, стоя на движущемся эскалаторе?

1052. Из пункта A в пункт B вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Спустя некоторое время из A вышел второй пешеход, а еще через такой же промежуток времени — третий. Третий пешеход догнал второго на полпути от A к B, и дальше они пошли вместе со скоростью, которая равна среднему арифметическому их предыдущих скоростей. Все три пешехода одновременно прибыли в пункт B. Найдите начальную скорость второго пешехода, если начальная скорость третьего 6 км/ч.

1053. Из бака, наполненного спиртом, отлили часть спирта и долили его водой. Потом из бака отлили столько же литров смеси, после чего в нем осталось 49 л спирта. Сколько литров спирта отлили в первый раз, если вместимость бака 64 л?

1054. В двух сосудах вместимостью по 30 л каждая содержится вместе 30 л кислоты. Первый сосуд долили доверху водой и полученной смесью долили второй сосуд, потом из второго сосуда отлили в первый 12 л смеси. Сколько кислоты было в первом сосуде вначале, если во втором сосуде после всех переливаний кислоты стало на 2 л меньше, чем в первом?

К § 4

1055. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x^2} - x + 1$; б) $y = x - \dfrac{|x|}{x}$; в) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$.

1056. Двое ребят соревновались в плавании на дистанции 100 м. На рисунке 48 изображены графики их заплывов на первых 60 м дистанции. Назовите победителя, считая, что каждый из ребят плыл с постоянной скоростью. Найдите расстояние между ребятами через 45 с после старта; в момент финиша победителя.

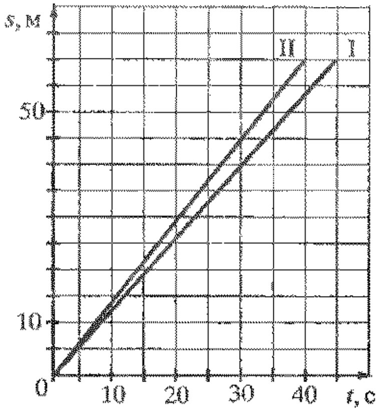


Рис. 48

1057. Докажите, что графики функций $y = \sqrt{x+9}$ и $y = 2 - \sqrt{x}$ не пересекаются.

1058. При каких значениях a графики функций $y = x^3 + ax + 1$ и $y = x^4 + ax^2 + 1$ имеют три общих точки?

1059. Установите графическим способом количество корней уравнения $x + 1 = x|x|$.

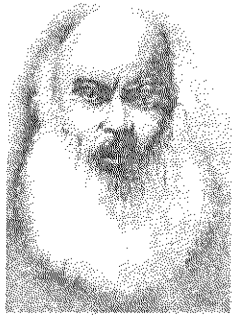
1060. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x} = a - |x|$ в зависимости от значений a?

1061. При каких значениях a уравнение $x^2 = a - |x|$ имеет два корня?

1062. Докажите, что при $a > 0$ система уравнений $\begin{cases} y = x^2; \\ |x| + |y| = a \end{cases}$ имеет два решения.

БИОГРАФИИ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ МАТЕМАТИКОВ-ПЕДАГОГОВ

Василий Петрович Ермаков (1845–1922)



В. П. Ермаков родился в семье учителя в селе Терюха (сейчас Гомельская область, Беларусь). Среднее образование он получи в Гомельской, а потом в Черниговской гимназиях. В 1864 В. П. Ермаков поступил в Киевский университет и уже в студенческие годы занимался научной работой. Он внес большой научный вклад в разные области математики.

В. П. Ермаков опубликовал много статей педагогического и научно-популярного характера, ряд учебников для высшей школы. Список его печатных работ превышает 180 названий.

Большую роль в популяризации математических знаний сыграл основанный им «Журнал элементарной математики», адресованный учителям, учащимися старших классов и всем, кто любит математику.

Известный математик и педагог В. П. Ермаков был убежден, что математику может изучать каждый средних способностей ребенок. Все зависит от педагогического мастерства первого учителя математики. Он писал: «Говорят, что для изучения математики необходимы особые способности, эта мысль ошибочна; для математики необходимо логически верное мышление. При условии правильного воспитания эта способность может быть развита у каждого подростка».

Феофан Прокопович (1675–1736)

В 1631 г. Петром Могилой в Киеве была открыта лаврская школа, которая через год объединилась со школой при Киевском братстве, и был образован Киево-Могилянський коллегиум, позже переименованный в Киевскую академию. Он представлял собой общеобразовательную высшую школу. Математика в академии изучалась фрагментарно и непостоянно. Один из самых полных математических курсов был прочитан в начале

XVIII в. воспитанником и преподавателем академии Феофаном Прокоповичем.

О детских годах Ф. Прокоповича известно очень мало. Его родители умерли рано, и сироту опекал его дядя Феофан Прокопович I, который был ректором Киево-Могилянского коллегиума. Юноша успешно закончил коллегиум, несмотря на трудности, связанные со смертью дяди.

Жажда к знаниям у молодого Прокоповича была так велика, что он принял новую веру — католицизм и стал учеником коллегиума св. Афанасия в Риме. На способного ученика обратили внимание преподаватели и начальники коллегиума, и он использовал все возможности для получения надлежащего образования.

В 1702 г. Ф. Прокопович убежал из коллегиума и спустя некоторое время возвратился в Киев. С 1704 года он работает в Киевской академии, в 1707 г. Феофана Прокоповича избирают префектом (заместителем ректора), и ему поручают читать курс философии. Он же прочитал не только курс философии, но и два математических курса — арифметику и геометрию, создав оригинальные учебники по этим предметам.

Позже Ф. Прокопович был избран ректором Киевской академии и профессором богословия (1711–1715). В 1715 году его вызывают в Петербург, где в 1721 он становится вице-президентом Синода.

Большая заслуга Ф. Прокоповича в создании университета в Петербурге и Русской академии наук.

Ф. Прокопович впервые в Русской империи проводил исследование с помощью микроскопа, вел наблюдение звездного неба с помощью телескопа. Проводил опыты по изучению атмосферного давления.

Математической работой Феофана Прокоповича является курс лекций по математике под названием «Арифметика и геометрия, два первые и наиболее плодовитые начала математических наук, объясненные в Киево-Могилянской академии...», прочитанный в Киево-Могилянской академии.

Ф. Прокопович внес значительный вклад в развитие науки и образования в Украине.

Николай Андреевич Чайковский
(1887–1970)

Родился Н. А. Чайковский 2 января 1887 г. в Бережанах — небольшом городке на Галичине. В 1905 г. с отличием закончил Бережанскую гимназию.

Учился Н. А. Чайковский сначала на механическом факультете Пражского немецкого университета, который вскоре оставил и перешел на философский факультет.

В Праге Н. А. Чайковский знакомится с выдающимися земляками — физиком И. Пулюем и биохимиком И. Горбачевским, которым было не суждено работать на родной земле.

Пражский немецкий университет не удовлетворял научные запросы Н. А. Чайковского. Через год он перешел в Венский университет, а закончил свое обучение во Львовском университете.

В 1912–1919 годах Н. А. Чайковский преподает математику в средних школах Львова, Тернополя, Равы Русской, возглавляет частные гимназии в Яворове, Калуше, Рогатине, занимается популяризацией математики и ее истории.

В 1918 г. Н. А. Чайковский был приглашен на должность приват-доцента университета, открывшегося в Каменец-Подольске. Там он впервые преподавал математику на украинском языке. Н. А. Чайковский уделял много внимания вопросу математической терминологии, а также подготовке учебников по математике на родном языке.

В 1929 г. Н. А. Чайковский был приглашен на должность профессора математики Одесского института народного образования. В Одессе он плодотворно занимался научной работой. Вместе с М. П. Кравчуком работал над составлением учебника по высшей алгебре, переводил с немецкого языка на украинский первую часть «Элементарной математики» Ф. Клейна.

В печальном 1933 году выдающегося математика академика М. Ф. Кравчука обвинили в буржуазном национализме. В «деле» М. Ф. Кравчука фигурировало и имя Н. А. Чайковского как польского резидента, которому М. Ф. Кравчук помог перебраться из Рогатина на Советскую Украину.

Н. А. Чайковский прошел Беломор, Соловки, выжил и возвратился на Украину, во Львов. Но это произошло лишь в 1956 году. Он был реабилитирован и зачислен на должность доцента Львовского пединститута.

В 1959 г. была напечатана одна из популярных его книг «Квадратные уравнения». В 1960 г. опубликован русско-украинский математический словарь, одним из авторов которого был Н. А. Чайковский. Он принимал участие в подготовке Украинской энциклопедии, для которой написал 51 статью.

Н. А. Чайковский был известным математиком и педагогом, человеком большого трудолюбия, ответственности перед обществом.

ОТВЕТЫ

§ 1

12. **а)** 1000000; **б)** 1; **в)** 2; **г)** 27. **13.** **а)** 10000; **б)** 1; **в)** 1; **г)** 81. **20.** 56 мин. **36.** **б)** Все числа, кроме -4 и 0; **в)** все числа, кроме -2, 0 и 1. **37.** **б)** Все числа, кроме -10 и -8; **в)** все числа, кроме -2, 0 и 2. **40.** **а)** 400; **б)** 0; **в)** 4. **41.** **а)** 0; **б)** 17. **42.** $\frac{25}{v+u}+\frac{20}{v-u}$. **43.** $\frac{48}{n}+\frac{64}{m}$. **44.** **а)** Все числа, кроме -3 и 3; **б)** все отрицательные числа; **в)** все числа, кроме -2, 0 и 2; **г)** все числа. **45.** 0,55. **46.** $\frac{250}{a}-\left(2+\frac{250-2a}{a+25}\right)$. **47.** **б)** $(y+8)(x+9)$; **в)** $(a+2b)(a-2b+1)$; **е)** $(a^2+ac+c^2)(1+a-c)$. **50.** 4,8 р. **55.** **а)** $\frac{4}{5y}$; **б)** $\frac{2bc}{3}$; **в)** $-\frac{3}{8m}$; **г)** $-\frac{2m}{3k^2}$. **56.** **а)** $\frac{3c^2}{2n}$; **б)** $\frac{9y}{7}$; **в)** $-\frac{5}{3ab}$; **г)** $\frac{a}{3b}$. **57.** **а)** a; **б)** $\frac{1}{3}$; **в)** $\frac{k}{3k+4}$; **г)** $\frac{m-n}{n}$. **58.** **а)** $\frac{ab}{c}$; **б)** $\frac{x-2y}{x-y}$; **в)** 3; **г)** $\frac{7x}{x-5}$. **62.** **а)** $\frac{3}{4}$; **б)** 4; **в)** $a+b$; **г)** $\frac{1+x}{1-y}$; **д)** $\frac{a-3}{7}$; **е)** $\frac{7(x+2)}{10}$; **ж)** $\frac{4}{y-2}$; **з)** $\frac{x-3}{x+3}$. **63.** **а)** $\frac{3}{5}$; **б)** $\frac{c+2}{c-2}$; **в)** $m-n$; **г)** $\frac{a}{b}$; **д)** $\frac{x-y}{5}$; **е)** $\frac{10}{b}$; **ж)** $\frac{3}{m-2}$; **з)** $\frac{a+5}{a-5}$. **66.** **а)** $\frac{3b}{2a+3b}$; **б)** $\frac{2c-5x}{2c+5x}$; **в)** $-2(x+2y)$. **67.** **а)** x^2-2x+4; **б)** $\frac{1}{3-z}$; **в)** $-(y^4+y^2+1)$. **68.** **а)** $\frac{a+c}{c}$; **б)** $\frac{a+b}{a-x}$; **в)** $\frac{4}{b-d}$. **69.** **а)** $\frac{7}{2b+9c}$; **б)** $\frac{3n}{k-4}$; **в)** $\frac{2}{3n-m}$; **г)** $-\frac{5}{c^2+3c+9}$; **д)** $\frac{x+y}{y-1}$; **е)** $\frac{a+b}{ab}$. **72.** **а)** $\frac{7x}{x^2+xy}$; $\frac{7(x+y)}{x^2+2xy+y^2}$; **б)** $\frac{c(a+b)}{a^2-b^2}$; **в)** $\frac{n(m^2+mn+n^2)}{m^3-n^3}$. **73.** **а)** $\frac{2a(x-y)}{x^2-y^2}$; **б)** $\frac{a^2-ac+c^2}{a^3+c^3}$. **74.** **а)** $\frac{8x^2}{9}$; **б)** $\frac{409}{351x^n}$. **в)** $\frac{x+2y}{x-2y}$; **г)** $y+1$. **77.** **б)** 0,4; **в)** -4; **г)** $2\frac{1}{3}$. **78.** 6 ч. **79.** 12 кг; 10 кг. **80.** 7 кг; 21 кг. **85.** **а)** $\frac{12x}{4x+1}$; **б)** -2; **в)** 2; **г)** 6; **д)** 1; **е)** $\frac{4x}{x-2y}$. **86.** **а)** 5; **б)** 8; **в)** 8; **г)** 8. **87.** **а)** $1\frac{1}{3}$; **б)** 0,56. **88.** **а)** 0,4; **б)** 8,5. **89.** **а)** $c-1$; **б)** $a^3(a+1)$; **в)** $\frac{b+3}{b-3}$; **г)** $\frac{4a^2}{b}$. **90.** **а)** $6(y+2)$;

б) $\frac{1}{x-y}$; в) $\frac{1}{a-1}$; г) $2(3a+b^2)$. **91.** а) 4; б) x. **94.** а) x^2-x+1; б) $\frac{a^2+x^2+ax}{a+x}$.

97. 75 км/ч. **98.** 11 ч 15 мин. **105.** а) $\frac{7y+10x}{xy}$; б) $\frac{a^2+b^2}{ab}$; в) $\frac{a^2}{c(a+c)}$; г) $\frac{4z}{z^2-1}$;

д) $\frac{a}{(2a+1)(3a+2)}$; е) $-\frac{1}{x(x-1)}$. **106.** а) $\frac{4b+3a}{ab}$; б) $\frac{x^2-y^2}{xy}$; в) $\frac{3}{(y-2)(y+1)}$.

107. а) $\frac{4n}{2n-1}$; б) $\frac{2y}{x}$; в) $\frac{2y}{y-2}$. **108.** а) $\frac{7}{y+1}$; б) $\frac{3}{2x+3}$; в) $\frac{3c+2}{c-1}$. **109.** а) $\frac{5}{c^2}$;

б) $\frac{b+1}{b}$; в) $\frac{7}{24x}$; г) $-\frac{5}{18}$; д) $\frac{2x+3y}{6x^2y}$; е) $\frac{7a}{6(a+b)}$; ж) $\frac{7}{x+y}$; з) $-\frac{15}{a(a+5)}$; и) $\frac{3}{b}$.

110. а) $\frac{2}{a^2}$; б) $\frac{y+3}{3y}$; в) $\frac{1}{12b}$; г) $\frac{b+2}{6b}$; д) $\frac{1}{m(m-1)}$; е) $\frac{8}{15}$. **111.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{5m}{m^2-n^2}$;

в) $\frac{2k}{k^2-4}$. **112.** а) 0; б) $\frac{1}{x-1}$; в) $\frac{3}{8}$. **113.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{y}{y^2-x^2}$; в) 0. **120.** а) $\frac{a+bc}{a^2b^2c^2}$;

б) $\frac{3y+4x}{36x^4y^3}$; в) $\frac{d-c}{cd(m+n)}$; г) $\frac{5x^2+xy}{36(x^2-y^2)}$; д) $\frac{1}{ab}$; е) $\frac{2b}{(a^2-b^2)(a-b)}$. **121.** а) $\frac{3b-2a}{48a^3b^3}$;

б) $\frac{7b+5a}{ab(x-y)}$; в) $\frac{b^2}{a(a^2-b^2)}$; г) $\frac{3x-y}{2(x+y)^2}$. **122.** а) $\frac{5-m}{m^2}$; б) $\frac{2b}{a}$; в) $\frac{b^3-a^3}{a^2b^2}$;

г) $\frac{x^2+3x+5}{(x+1)(x+2)}$. **123.** а) $\frac{k^2n^2-1}{kn^2}$; б) $-\frac{2}{ab^2}$. **124.** а) $\frac{7-x}{6(x-4)}$; б) $\frac{4}{x-4}$; в) $\frac{4}{a}$;

г) $\frac{ab}{b^2-a^2}$; д) $\frac{b}{y}$; е) $-\frac{b+2a}{ab}$; ж) $\frac{2xy}{x+y}$; з) $\frac{2}{1-a^2}$. **125.** а) $\frac{a}{15(a+1)}$; б) $\frac{5}{4(b+8)}$;

в) $\frac{4mn}{m+n}$; г) $\frac{a-12}{a-10}$; д) $\frac{5a^2}{(a-9)^2}$; е) $\frac{9}{2(3-x)}$. **126.** а) $\frac{1}{5(a+5)}$; б) $\frac{6x^2+4}{(x-2)^2(x+2)}$;

в) $-\frac{a^2+6a}{a^3+27}$; г) $\frac{1}{b^3+1}$. **127.** а) $\frac{a+20}{a^2-25}$; б) $\frac{a}{4b^2-a^2}$. **130.** а) $-0{,}125$; б) 14,3. **131.** 22.

132. а) $\frac{1}{2}-\frac{5}{a}$; б) $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}$; в) $\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^4}$; г) $\frac{x}{2y}+\frac{4y}{x}$. **133.** а) $a=1$; $b=-1$; б) $a=\frac{5}{7}$;

$b=1\frac{2}{7}$. **134.** а) 0; б) $\frac{16}{1-x^{16}}$; в) $\frac{16x^{15}}{1-x^{16}}$; г) $\frac{4}{a(a+4)}$; д) $\frac{b}{b^2-1}$. **137.** б) $-1{,}25$; в) 1;

г) $1\frac{2}{3}$. **138.** 9. **139.** 150 г; 450 г. **140.** 5 л; 5 л.

Задания для самопроверки №1

I уровень. **1.** а). **2.** в). **3.** в). **4.** г). **5.** в). *II уровень.* **1.** $x=0$ и $x=5$. **2.** а) $\frac{3b}{4a}$; б) $\frac{5}{3}$. **3.** 14. **4.** а) $\frac{5bx-3a^2y}{a^3b^2}$; б) $\frac{7a+4b}{28(x+y)}$. **5.** а) $\frac{3x}{x-y}$; б) $\frac{8}{m+n}$. *III уровень.* **1.** Все значения, кроме $k=0$ и $k=4$. **2.** а) $\frac{7y^4}{5x}$; б) $-\frac{a}{b^2(1+3a)}$. **3.** а) $\frac{4}{a^2-1}$; б) $\frac{3m^2n+mn^2}{(m+n)^2(m-n)}$. **4.** $-4\frac{2}{7}$. **5.** а) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$; б) $\frac{a^2}{b(a-b)^2}$. *IV уровень.* **1.** а) $a=-5$ и $a=3$; б) выражение имеет смысл при всех значениях x. **2.** а) $4-x^2$; б) $x-a-8$. **3.** а) $\frac{x+11}{30(x+1)^2}$; б) $\frac{4a^2b}{(a-b)(a+b)^2}$. **4.** $\frac{1}{2a}$.

145. а) $\frac{25}{6a^3b}$; б) $-\frac{5a^2}{3b}$; в) $\frac{y^2}{2x^3}$. **146.** а) $\frac{3}{2x}$; б) $\frac{4a^2}{b}$; в) $-\frac{9m}{4n^3}$. **147.** в) $\frac{3}{b}$; г) $\frac{1}{x}$; д) $m+3$; е) $\frac{a-2}{a+2}$. **148.** в) $\frac{a}{k}$; г) $b-1$; д) $\frac{b(y+4)}{a}$; е) $\frac{c^2(c+1)}{c-1}$. **151.** а) $\frac{10by}{3ax}$; б) $-\frac{2n}{3m^3}$; в) $\frac{b^2}{2a^2y}$; г) $\frac{1}{axy^2}$; д) $\frac{4a}{3x^2}$; е) $\frac{a}{3b}$. **152.** а) $\frac{m^3n}{2a^3}$; б) $\frac{x}{3}$; в) $\frac{12}{5m^2y}$. **153.** а) $\frac{1}{(a-1)(3a+1)}$; б) $-\frac{x(a+b)}{9}$; в) $\frac{y}{8(x+y)}$; г) $\frac{5y(a+y)}{2(a-y)}$; д) $-\frac{(2x+1)(a+b)}{14}$; е) $\frac{2}{(m+n)^2}$; ж) $\frac{(n-m)(x+y)}{2}$; з) $\frac{3(c-2a)}{a^2-ab+b^2}$. **154.** а) $\frac{5}{x-y}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) $\frac{(4-x)(x-y)}{3y}$; г) $\frac{y+1}{6(a+b)}$; д) $\frac{3(a+b)}{10ab}$; е) $\frac{a-1}{(x-1)(a+1)}$. **155.** 1,2; –14,4; $1\frac{19}{30}$. **156.** –20; 160; 55. **157.** а) 1; б) 1. **158.** $\frac{1}{9}$. **159.** в) $(2a-b+1)(2a+b+1)$. **162.** 12 дней. **163.** 1,5 ч; 18 км/ч.

165. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{9a}{c}$; в) x^3; г) $\frac{3}{d}$; д) $\frac{5p^2n^2}{2}$; е) $\frac{c^2}{4m}$; ж) $\frac{2c^2}{a^2}$; з) $\frac{4ax}{5b}$. **166.** а) $\frac{3x}{2y}$; б) $\frac{21ab^2}{2}$; в) $\frac{2xy}{5}$; г) $\frac{m}{14k^3}$. **167.** а) $\frac{9}{ab^3}$; б) $-\frac{n}{16b}$; в) $-\frac{5z}{2xy}$. **168.** а) $-\frac{2y}{3}$; б) $-\frac{20}{3mn}$;

в) $\frac{4}{xy}$. **169.** а) $\frac{6}{c^2}$; б) $\frac{n}{a^2}$; в) $k(c-d)$; г) $\frac{x^2}{x+4}$; д) $\frac{b^2}{b-3}$; е) $\frac{y-2}{y+2}$. **170.** а) $\frac{x^2}{a}$; б) $\frac{2+a}{c}$; в) $\frac{mn}{y^4}$; г) $k(k-5)$; д) $\frac{5(x-y)}{2}$; е) $\frac{a-1}{a+1}$. **171.** а) $\frac{2a(5-x^2)}{x}$; б) $\frac{a(1-b)}{bc}$; в) $\frac{a}{2(a-b)}$; г) $\frac{3(x-1)}{2(x^2+1)}$; д) $\frac{3b(1-x)}{4a(1+x)}$; е) $c(a+b)$. **172.** а) $\frac{2a^2(7c-1)}{b^2}$; б) $\frac{x+2}{x^2}$; в) $\frac{(m-n)(m-1)}{6m}$. **173.** а) $\frac{3(a-b)}{7(a+b)}$; б) $\frac{(2c+1)(x+y)}{3(2c-1)}$; в) $\frac{n}{4m(m+n)}$; г) $\frac{9a}{a-b}$; д) $\frac{2}{x^2-y^2}$; е) $\frac{(3-a)(1+2a)}{a}$. **174.** а) $\frac{2(1-b)}{a}$; б) $\frac{x+y}{6(x+2y)}$; в) $\frac{b(a-b)}{a+b}$; г) $-\frac{a(a+2)}{c+b}$. **177.** а) $\frac{x+0,5}{(x^2+1)(x-0,5)}$; б) 1. **179.** а) 0; б) 0,5. **181.** 1,5 кг. **182.** 4 т; 8 т. **183.** а) $\frac{3}{a(a-1)}$; б) $-\frac{2}{a-5}$; в) $-\frac{7}{a^2}$; г) $\frac{1}{2(2b-1)}$; д) $\frac{a^3}{a-4}$; е) $\frac{2}{x-y}$. **184.** а) $\frac{4}{b(b-1)}$; б) $\frac{25-20a}{a(a-5)}$; в) $-\frac{12x}{x-4}$; г) $\frac{1}{4(c+1)}$. **187.** $\frac{18x}{x+3}$; 12. **188.** $\frac{2}{x-9}$; $-0,4$. **189.** а) $\frac{2m}{n-m}$; б) -1; в) $\frac{2a(b-2a)}{b+2a}$; г) $\frac{1}{ab}$; д) $\frac{x-1}{x(x+1)}$. **190.** а) $\frac{-y^2}{x^2+y^2}$; б) $\frac{2}{x-2}$; в) $\frac{2(3-x)}{5}$; г) 10. **191.** а) a; б) $-\frac{m}{n}$. **192.** а) $-a-b$; б) $\frac{1}{c}$. **195.** а) $\frac{b^2+3b+9}{b-a}$; б) $\frac{x-4y}{x(x-5y)}$; в) $\frac{32mn^5}{m^8-16n^8}$. **197.** $\frac{x}{2x-1}$. **198.** а) -1; б) -4; 0; в) 14; г) 13. **199.** 1,5. **200.** 150 км. **201.** 45 кг; 15 кг. **202.** 11 м/с; 9 м/с. **207.** а) -1; б) -2; в) -5. **208.** а) $\frac{7}{12}$; б) $\frac{19}{40}$; в) $\frac{5}{6}$. **209.** д) -3; е) 10; ж) 1; з) $\frac{1}{2}$; и) $\frac{1}{6}$. **210.** а) 0; б) -10; в) $-\frac{9}{11}$. **211.** а) 0; 3; б) -1; 0; в) $\frac{5}{22}$. **214.** 3. **215.** 5. **216.** а) $-\frac{1}{9}$; б) $-0,8$; в) $-2\frac{1}{3}$; г) 0; $\frac{5}{6}$; д) $-0,8$; е) 0,3. **217.** а) корней нет; б) 2; в) $-1,5$; г) 0,125. **218.** 9 месяцев. **219.** 40000 грн. **220.** 360 км/ч; 60 км/ч. **221.** 6 ч; 12 ч. **222.** 7,5 ч; 15 ч. **223.** а) -5; б) 7; в) -3; 0; г) 0; 2. **224.** а) при $a \neq 2$ $x = a$; при $a = 2$ корнем является произвольное число; б) при $a \neq -1$ и $a \neq 1$ $x = \frac{1}{a-1}$; при $a = -1$ корнем является произвольное число; при $a = 1$ корней нет; г) при $a \neq -0{,}5$ и $a \neq 4$ $x = a - 1$; при $a = -0{,}5$ или $a = 4$ корней нет. **225.** $a = 0$ и $a = 2$. **226.** $a = -7$, $a = -1$ и $a = 5$. **228.** б) a. **229.** в) $(a - c)(2a - d)$. **230.** Да. **231.** 10 ч. **232.** а) $-1{,}85$; б) 1; в) 1; г) 0. **233.** а) 1; б) 1.

Задания для самопроверки №2

I уровень. **1.** в). **2.** в). **3.** б). **4.** б). **5.** а). ***II уровень.*** **1.** а) $\frac{0{,}001a^9}{b^6}$; б) $-\frac{64x^3y^6}{27z^{12}}$. **2.** а) $\frac{6a^4}{b^2c}$; б) $\frac{3}{20xz^3}$. **3.** а) $\frac{2}{x-3}$; б) $\frac{1}{a}$. **4.** 4,2. **5.** а) -2; 0; б) $-4{,}5$.

III уровень. **1.** а) $\frac{3a^4c^4}{16b^3}$; б) $-\frac{28y^2z}{5x}$. **2.** а) $\frac{a-1}{2a-1}$; б) $\frac{2-6a}{3a}$. **3.** $-\frac{3}{4}$. **4.** а) $\frac{11}{24}$; б) 0. **5.** 10 ч. ***IV уровень.*** **1.** а) $\frac{a(a+10)}{a+4}$; б) 1. **4.** а) 2; б) 0,4. **5.** 15 км/ч.

250. б) 101; в) $1\frac{23}{27}$; е) $5\frac{29}{64}$. **251.** а) $2\frac{1}{12}$; б) $-7\frac{1}{12}$; в) 0; г) $-\frac{64}{225}$. **252.** б) 121; в) $-3\frac{29}{32}$; г) $1\frac{1}{3}$; д) 19,2; е) 15. **253.** а) $\frac{3}{a+5}$; б) $\frac{b-a}{a^2b^2}$; в) $\frac{8}{b^2-16}$; г) $\frac{y-x}{x^3y^3}$; д) $\frac{1}{(x-1)(y-1)}$; е) $x^2(1-x^2)$. **254.** а) $\frac{a+b}{a-b}$; б) $\frac{2}{a+7}$; в) $-\frac{m^2n^2}{m+n}$; г) $\frac{2x^6y^3}{y^6-x^6}$. **256.** Нет. **258.** а) 1; б) корней нет. **261.** 20, 10 и 15 деталей. **262.** 50 см; 70 см. **263.** 8 косарей. **271.** а) $\frac{1}{8}$; б) 125; в) 243; г) 27; д) 1; е) $\frac{3}{4}$. **272.** а) 1; б) 6; в) $\frac{5}{8}$. **273.** а) 27; б) 4; в) $\frac{1}{7}$; г) $\frac{1}{512}$; д) 9; е) 4. **274.** а) $\frac{2}{x^3y^2}$; б) $\frac{25}{x^3}$; в) $0{,}4m^4n^2$; г) $81a^2b^5$; д) $\frac{5a^{12}}{4b^2}$; е) $\frac{m^7}{32n^6}$. **275.** а) $0{,}5ab$; б) $\frac{12a}{25b^3}$; в) $\frac{125a}{b^3}$; г) $\frac{a^2}{3b^7}$. **278.** а) -1; б) $-\frac{9b^3+2}{b^3}$; в) $-\frac{4}{xy^2}$; г) $4c^4+c^2-2$; д) $\frac{b^3-a^3}{a^3b^3}$; е) $\frac{b^4+a^4}{b^4-a^4}$. **279.** а) $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$; б) a^4; в) $\frac{2(a^2+b^2)}{a^2b^2}$; г) $\frac{n^2+m^2}{n^2-m^2}$. **280.** а) $(a^3b^4)^m$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3n+3}$. **281.** 511. **283.** а) $\frac{2(y^{10}-x^{10})}{3(y^{10}+x^{10})}$; б) $\frac{3a^2-1}{a^2}$; в) $\frac{b-b^2}{1+b}$. **286.** 120 и 130 деталей. **287.** 58 и 30 книг. **288.** 30 км. **297.** а) $1{,}9 \cdot 10^9$ т; б) $2{,}8 \cdot 10^2$ кг; в) $5{,}2 \cdot 10^{-1}$ см; г) $6{,}12 \cdot 10^3$ дм. **298.** а) 7,3 дм; б) $1{,}1 \cdot 10^4$ кг; в) $9{,}3 \cdot 10^5$ г;

г) $8{,}6 \cdot 10^3$ см. **299.** а) $2{,}76 \cdot 10^{-3}$; б) $3{,}468 \cdot 10^{-11}$; в) $7{,}2 \cdot 10^{-7}$; г) $4{,}838 \cdot 10$. **300.** а) $1{,}89 \cdot 10^5$; б) $2 \cdot 10^{-8}$. **301.** а) $9 \cdot 10^{18}$; б) $2 \cdot 10^9$; в) $4{,}5 \cdot 10^{-7}$; г) $1{,}71875 \cdot 10^7$. **302.** а) $5 \cdot 10^{-8}$; б) $5 \cdot 10^{-5}$. **303.** 7,9 км/с; $1{,}12 \cdot 10$ км/с; $1{,}667 \cdot 10$ км/с. **304.** $2{,}844 \cdot 10^7$ м. **305.** а) -2; 2; б) $-0{,}25$; в) $-0{,}5$; г) 0,3. **306.** 75 км. **307.** 585 т; 195 т. **310.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{c}$; в) $\frac{a-3}{3}$; г) $\frac{c-4}{c+4}$; д) $\frac{b-3}{b+3}$; е) $x-2y$; ж) $\frac{5x-2}{x-2y}$. **313.** 625; 3,24. **315.** а) $\frac{2x}{x^2-1}$; б) $\frac{a^2}{b(a+b)}$; в) $\frac{b}{xy}$. **316.** а) -1; б) $\frac{4a+13}{a^2-16}$; в) $\frac{17y}{10(2y+1)}$; г) $\frac{2(a^2+b^2)}{a^3-b^3}$. **317.** а) $1+\frac{9}{a}$; б) $a+4+\frac{1}{a}$; в) $x+2+\frac{3}{x+2}$. **318.** а) 1; 2; 4; 8; б) 1; 11; в) 1. **319.** б) $\frac{2a}{15x}$; в) $\frac{3c}{4ab}$; г) $-\frac{1}{x+y}$; д) $\frac{2(1-x)}{x}$; е) $\frac{-x(x+y)}{y}$. **321.** а) $\frac{2ax}{3}$; б) $\frac{(2-b)(1+b)}{b}$; в) $\frac{x(x-y)}{4}$. **322.** 90. **323.** а) $\frac{1}{a+b}$; б) 1; в) $\frac{4a}{3(a-4)}$. **325.** $\frac{2a}{(a-1)^2}$; 4. **328.** а) $\frac{x+1}{3x+1}$; б) $\frac{x+1}{x+2}$. **329.** б) 127; в) $-0{,}9$; г) $2\frac{1}{3}$; д) 4; е) $\frac{4}{7}$. **330.** а) $\frac{a}{b^2c}$; б) $\frac{a}{a^2-b^2}$; в) $2x^2y^3$; г) $\frac{c^3}{(c^2+1)^2}$. **331.** а) $\frac{27x^{12}}{y^{10}}$; б) $\frac{a^{15}c}{3}$; в) $\frac{2}{2x+3}$; г) $\frac{a+b}{ab}$; д) 1; е) $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2}$. **332.** а) 2^{n+2}; б) 2^{n+7}; в) 2^{7-n}; г) 2^{n-8}. **333.** $x^{-3}(x^{-4}+x^{-2})$; $x^{-5}(x^{-2}+1)$; $x(x^{-8}+x^{-6})$. **335.** а) -1; б) 0; в) корней нет; г) -2; д) 0,6; е) 0; 3; ж) $-4\frac{1}{3}$; з) $-2{,}8$. **336.** $3{,}6 \cdot 10^3$ с; $8{,}64 \cdot 10^4$ с; $2{,}592 \cdot 10^6$ с. **337.** $5{,}11 \cdot 10^5$ г; $1{,}2 \cdot 10^6$ г; $2{,}3 \cdot 10^7$ г.

Задания для самопроверки №3

I уровень. **1.** а); г). **2.** в). **3.** в). **4.** а). **5.** г). ***II уровень.*** **1.** а) $-\frac{1}{8}$; б) 2000. **2.** а) 250; б) $3\frac{1}{9}$. **3.** а) $12a$; б) $\frac{b}{b-3}$. **4.** а) $\frac{a^{10}}{9b^4}$; б) $\frac{27n^6}{m^{12}}$. **5.** а) $(b^{-2})^9$; б) $(b^3)^{-6}$. ***III уровень.*** **1.** а) 65,5; б) $\frac{1}{27}$. **2.** а) $4ab^3c^3$; б) $\frac{n^3}{9m^2}$. **3.** а) $\left(\frac{4a^{-1}}{b^2}\right)^3$; б) $(4x^4y^3)^2$. **4.** а) $\frac{5}{a+2}$; б) $-\frac{a+b}{ab}$.

5. а) $1{,}403\cdot10^{6}$; б) $3\cdot10^{-5}$. ***IV уровень.*** **1.** а) a^{7-2m}; б) b^{n-3}. **2.** а) 1,5; б) $2\frac{2}{3}$. **3.** а) $\frac{y}{x^{m+3}}$; б) $\frac{b^{3n-2}}{2y^{2n-1}}$. **4.** а) $\frac{1}{x^2-y^2}$; б) –2. **5.** а) $x=2\cdot10^3$; б) $x=10^{-3}$.

§ 2

360. а) 3,5; б) $1\frac{1}{6}$; в) 7,1; г) –6; д) –1,2; е) –0,99. **361.** а) 0,18; б) 2,5; в) 0,32; г) 50. **366.** а) 2; б) –1; в) 0. **367.** 72 книги. **368.** $\frac{2}{5}$. **384.** а) –1; 1; б) $-\sqrt{1,5}$; $\sqrt{1,5}$; в) $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$. **385.** а) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; б) –1; 1; в) –8; 8; г) $-4\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$. **386.** г) 5; д) $4\frac{2}{3}$; е) корней нет; ж) 0,9; з) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; и) корней нет. **387.** в) 1; г) 2,52; д) корней нет; е) –1; 1. **390.** а) $a=0$ и $a=2$; б) $a=1$. **392.** а) –2; 2; б) 2; в) 0; г) 2. **393.** а) корней нет; б) 3. **394.** (–1; 3). **395.** $a=-6$. **396.** 60 деталей. **397.** а) 68°; б) –40°. **420.** 20,5 км/ч. **421.** 7,2 ч. **438.** а) 24; б) 180; в) 45; г) 3; д) 10,5; е) 105. **439.** а) 200; б) 42; в) 0,24. **440.** а) 75; б) 36; в) 14; г) 720; д) 1,6; е) 154. **441.** а) 21; б) 63; в) 20. **442.** а) 12; б) 20; в) 6. **443.** а) 300; б) 5; в) 1,44. **444.** а) 253,44; б) 0. **445.** а) 64; б) 243; в) 64. **446.** а) 32; б) 125; в) 81. **447.** а) ab; б) $-ab$; в) $-2x^2y^3$; г) $\frac{5m}{n^3}$; д) $-ab^2$; е) $-0{,}2xy$. **448.** а) $-a^2b$; б) $-6a^5b^3$; в) $\frac{x}{y^4}$; г) $7xy$. **449.** а) 2; б) $\frac{19}{75}$; в) 2. **450.** а) 374; б) 576. **451.** $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$; $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$. **452.** $a\le0$; n — нечетное. **454.** а) 1; б) 0,25; в) корней нет; г) 0; 4. **455.** в) $\frac{2z}{3y}$; г) $\frac{a-2b}{a+1}$. **458.** Нет. **459.** 84 км/ч; 70 км/ч. **467.** а) $5\sqrt{6}$; б) –26; в) 9; г) 0; д) $7\sqrt{3}$; е) $\sqrt{6}$; ж) $3+\sqrt{5}$; з) 9; и) 4. **468.** а) $2\sqrt{6}$; б) 15; в) $2\sqrt{2}$; г) $4\sqrt{3}-2$; д) 5; е) 9. **473.** а) $6\sqrt{2}-2$; б) 7; в) 6; г) $-2\sqrt{6}$; д) 0; е) 1. **474.** а) $5+2\sqrt{3}$; б) 15; в) –19; г) 3. **475.** а) $2a$; б) $4\sqrt{x}+8$; в) a; г) a^2. **476.** а) $a+b+ab+1$; б) m. **477.** а) $4a\sqrt{3b}$; б) $-0{,}3y\sqrt{x}$; в) $a^2b\sqrt{2}$; г) $0{,}8b\sqrt{b}$; д) $-2xz^3\sqrt{2x}$; е) $4bc^3\sqrt{2ab}$. **478.** а) $-7b\sqrt{a}$; б) $1{,}2ab\sqrt{b}$; в) $-3x^2y\sqrt{2}$; г) $0{,}2xy\sqrt{xy}$. **479.** а) $\sqrt{12a^2}$; б) $\sqrt{b}$; в) $\sqrt{9x^5}$; г) $\sqrt{a^3b}$;

д) $\sqrt{(c+1)^3}$; е) $\sqrt{a^3+a^2b}$. **480.** а) $\sqrt{5c^2}$; б) $\sqrt{n^3}$; в) $\sqrt{2b^3}$; г) $\sqrt{a^3b^2}$; д) $\sqrt{x^3+x^2}$; е) $\sqrt{(n+k)^3}$. **481.** а) $\sqrt{3}+1$; б) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$; в) $14(3+2\sqrt{2})$; г) $\frac{1}{2\sqrt{3}+1}$; д) $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{m-n}$; е) $\frac{a(\sqrt{a}+3)}{a-9}$; ж) $\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; з) $\frac{4\sqrt{b}-6}{4b-9}$. **482.** а) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$; г) $4\left(3\sqrt{2}-4\right)$; д) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$; е) $\frac{c(1+\sqrt{c})}{1-c}$; ж) $\frac{2(\sqrt{a}+a)}{a-a^2}$; з) $\frac{b-9}{c\left(\sqrt{b}+3\right)}$.

483. в) $\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{7})$; е) $2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)$. **484.** в) $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$; е) $2\sqrt{b}(2+\sqrt{b})$. **485.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{8}-1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; г) $x+\sqrt{2}$; д) $\frac{1}{a-\sqrt{5}}$; е) $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{b}}$. **486.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $1-\sqrt{5}$; в) $-\sqrt{2}$; г) $\frac{1}{a-\sqrt{7}}$; д) $-x-\sqrt{2}$; е) $\sqrt{m}-\sqrt{5}$. **489.** а) $2\sqrt{2}$; б) $\frac{4}{23}$; в) $\sqrt{b}$; г) $\frac{1}{\sqrt{xy}}$. **490.** а) 4; б) 2; в) $-\sqrt{m}$; г) 0. **491.** а) $2+\sqrt{5}$; б) $\sqrt{3}-1$; в) 9; г) 1; д) x. **494.** а) $-\sqrt{\frac{a^2}{3}}$; б) $-\sqrt{-ab}$.

495. а) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}}{3}$. **496.** а) $\frac{11}{24}$; б) 0. **499.** Нет. **500.** 400 м. **501.** 80 км/ч; 90 км/ч. **502.** 500 г. **519.** 4,5a кг. **525.** б) 1; в) 7,5; г) −23; д) −2; е) 3. **527.** а) $\frac{7}{18}$; б) 6; в) $\frac{1}{35}$. **528.** а) 16; б) 82; в) 18. **529.** в) 10; г) 30. **530.** б) $4b-3$; г) $-12\sqrt{ab}$. **531.** д) $2a\sqrt{2}$; е) $-7b\sqrt{2a}$. **532.** д) $\sqrt{7m^2}$; е) $-\sqrt{19mn^2}$. **533.** б) $\sqrt{10}(\sqrt{10}+1)$; г) $(\sqrt{c}-2)(\sqrt{c}+2)$; д) $(m-\sqrt{6})(m+\sqrt{6})$. **534.** а) $\sqrt{7}$; б) $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{a}-\sqrt{5}$; г) $c+\sqrt{10}$; д) $\frac{1}{x+\sqrt{2}}$; е) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. **535.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{10}}{4}$; в) $2(\sqrt{5}+2)$; г) $\frac{3\sqrt{m}+2\sqrt{n}}{9m-4n}$. **537.** а) −6; б) $\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$. **538.** а) $\frac{2\sqrt{b}}{a-b}$; б) $\frac{x}{x-y}$.

542. а) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; б) корней нет. **543.** г) 1,25; д) корней нет; е) −1; 1. **544.** а) 0; б) корней нет; в) 0.

Задания для самопроверки №4

I уровень. **1.** г). **2.** в). **3.** в). **4.** г). **5.** б). ***II уровень.*** **1.** $-\sqrt{3}$; 0; 3; $\sqrt{10}$; 3,8. **2.** а) 3,5; б) 15; в) 9. **3.** а) $-9\sqrt{3}$; б) -1. **4.** а) $\sqrt{2}$; б) 4. **5.** а) -3; 3; б) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. ***III уровень.*** **1.** а) 42; б) 1,5; в) 30. **2.** а) $\sqrt{3}$; б) 6. **3.** а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{x(2\sqrt{x}-1)}{4x-1}$. **4.** а) $\sqrt{a}-\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. **5.** а) 13; б) $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$. ***IV уровень.*** **2.** а) $x \geq 0$; б) $x \leq 0$; в) $x = 0$. **3.** а) 1; б) 6. **4.** а) $-0,5$; 1; б) 0. **5.** *Указание.* $19+8\sqrt{3}=(4+\sqrt{3})^2$.

§ 3

561. а) -2; 2; б) $-2\sqrt{6}$; $2\sqrt{6}$; в) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; г) -3; 3. **562.** а) -6; 6; б) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; в) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; г) $-0,4$; 0,4. **563.** а) 0; 4,5; б) $-0,7$; 0; в) 0; $\frac{2}{3}$; г) $-\sqrt{17}$; $\sqrt{17}$; д) $-4,5$; 0; е) 0; 0,2; ж) $-\sqrt{30}$; $\sqrt{30}$; з) $-3\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$. **564.** а) $-0,8$; 0; б) $-0,25$; 0; в) 0; 5; г) $-\frac{2}{3}$; 0; д) $-0,4$; 0,4; е) $-0,4$; 0,4. **565.** $-\sqrt{1,5}$; $\sqrt{1,5}$. **566.** $-0,5$; 0. **567.** -9; 0. **568.** 0; 17. **569.** а) $-0,5$; 0; б) -2; 2. **570.** а) 0; 3; б) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **571.** а) При $a<0$ $x_1=-\sqrt{-\frac{1}{a}}$; $x_2=\sqrt{-\frac{1}{a}}$; при $a \geq 0$ корней нет; б) $x_1=0$; $x_2=2a$ при произвольном a; в) при $a=0$ корнем является произвольное число; при $a \neq 0$ $x_1=-a$; $x_2=a$. **575.** $m=2$. **576.** 70 т; 50 т. **581.** а) 1; 5; б) -6; 2; в) -5; -2; г) корней нет; д) 5; е) -3; 7. **582.** а) 1; 1,5; б) -1; 0,5; в) -2; $\frac{1}{3}$; г) 0,5; д) корней нет; е) $-\frac{1}{7}$; 1. **583.** а) -5; 1; б) -1; -4; в) 2; 3; г) корней нет; д) 4; е) 3; 7; ж) -1; $-0,5$; з) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; и) $-1,5$; 1. **584.** а) 1; 4; б) -4; 0,5; в) -1; 2. **585.** а) -1; 3; б) 1; 7; в) -1; 0,25. **589.** а) $1-\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$; б) $\frac{4}{7}$; 2; в) -8; $\frac{2}{3}$; г) -15; -6; д) -18; $\frac{1}{3}$; е) -1; 3; ж) $-1,5$; 1; з) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; и) $-\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{3}$. **590.** а) $3-\sqrt{3}$; $3+\sqrt{3}$;

б) -6; $-\frac{2}{3}$; в) 0,5; 3,5; г) -7; 23; д) -18; $-0{,}25$; е) -4; 1; ж) -1; $-0{,}2$; з) $-\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$;

и) $-\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$. **591.** $-0{,}25$; 4. **592. а)** -2; $-1{,}5$; б) -5; 0,2; в) $-0{,}2$; 3; г) $-\frac{1}{2}$; $1\frac{2}{3}$; д) $-0{,}6$; 1;

е) $\frac{1-2\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$; **ж)** $-0{,}5$; 0,2; з) -5; 1,5. **593. а)** $-\frac{5}{6}$; $\frac{3}{4}$; б) $-\frac{2}{3}$; 2,5; в) $-1\frac{6}{7}$; -1;

г) $\frac{-10-5\sqrt{2}}{2}$; $\frac{-10+5\sqrt{2}}{2}$; д) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$. **594.** $-2\frac{2}{3}$; -2. **595.** $-\frac{1}{8}$; 1. **596. а)** $-3{,}5$; 1;

б) -3; 0,6. **597. а)** -15; 12; б) $-16\frac{1}{3}$; $4\frac{2}{3}$. **598. а)** 16; б) -5; 3. **605.** 95. **606.** 32,5 т; 13,5 т.

623. $p=-2$, $q=-15$; $p=8$, $q=12$. **626.** -1 — другой корень уравнения; $q=9$. **627.** 3 — другой корень уравнения; $p=-1$. **629. а)** 22; б) $3\frac{4}{9}$. **630. а)** -29; б) $-12\frac{3}{4}$. **631. а)** $m=2$;

б) $m=-4$; $m=4$. **632. а)** 9; б) 1,5. **633.** $\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$ — корни уравнения; $p=-5\sqrt{2}$.
634. -11 и 3 — корни уравнения; $p=8$. **635.** 8 и 2 — корни уравнения; $b=16$.
637. $b=4$. **638.** 0,89. **639. а)** $-\frac{4}{m(m+2)}$; б) $\frac{1}{a-5}$. **640. а)** $-3{,}125$; б) $-0{,}2$. **642.** 11 см.

643. а) 0; 1; б) $-\frac{1}{3}$; 2; в) 1; 4; г) 0; д) 0,25; е) -3. **644. а)** -7; 7; б) 4; в) $-5{,}5$.

645. а) -10; 10; б) 0; в) 4. **646. а)** 0; б) -3; -2; в) -2. **647. а)** -3; -2; б) -1; 2; в) 4; 8;
г) -6; 3; д) 1; 7; е) -4; 5. **648. а)** -2; 7; б) 3; 5;
в) -7; 1. **649. а)** -2; -1; 1; 2; б) -3; 3; в) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **650. а)** -2; 2; б) -3; -1; 1; 3;
в) -2; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 2. **651. а)** 3; б) -3; в) 0,5; г) корней нет. **652. а)** 0,5; б) 10. **653. а)** 1; 10;
б) -1; 6; в) -2; 1; г) 0; 4. **654. а)** -11; 2; б) -7; -4; в) 1,8; 10. **655. а)** -7; 1; б) $-0{,}75$; 5;
в) 1,5; 2; г) корней нет. **656. а)** -5; 3; б) -15; 1. **657. а)** $-\sqrt{5}$; 0; $\sqrt{5}$;
б) $-0{,}1$; 0; 0,1. **658. а)** 0; б) $-1{,}5$; 0; 1,5. **659. а)** -2; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2; б) $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$;

в) -3; -2; 2; 3; г) -3; -1; 1. **660. а)** -2; $-0{,}5$; 0,5; 2; б) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; в) -1; 2.

661. а) $-\frac{7}{18}$; 3; б) $\frac{5}{7}$; 4; в) -4; $5\frac{2}{3}$; г) -1; $\frac{2}{3}$. **662. а)** 1; $\frac{7-\sqrt{33}}{4}$; $\frac{7+\sqrt{33}}{4}$; 4;

б) –3; –2. **663.** а) –6; –4; –1; 1; б) –1; 0,5; в) 2; 3; г) –1; 6; д) –3; 2; е) –5; –1. **664.** а) –1; 4; б) $\frac{2}{3}$; 4. **665.** а) 1; 25; б) 4; в) 5; г) 16; д) –1; 4; е) –7; 2. **666.** а) $\frac{3c^2}{4a}$; б) $\frac{2x^2-y}{y}$. **668.** а) $-36-14\sqrt{2}$; б) 2. **669.** 4 км/ч. **670.** 38 км/ч. **671.** –15 и –9; 9 и 15. **672.** –13 и 7; –7 и 13. **673.** 12; 35. **674.** 7 см; 8 см. **675.** 4 м; 8 м. **676.** 60 км/ч; 90 км/ч. **677.** 50 км/ч. **678.** 6 деталей. **679.** 4 страницы. **680.** 3 км/ч. **681.** 14 км/ч. **682.** –6 и –3; 10 и 13. **683.** 9; 10. **684.** $\frac{3}{5}$. **685.** $\frac{7}{2}$. **686.** 6 ч; 10 ч. **687.** 10 ч; 15 ч. **688.** 3 дня; 6 дней. **689.** 9 дней. **690.** 12 дней; 15 дней. **691.** 18 км/ч. **692.** 16 км/ч. **693.** 60 км/ч. **694.** 90 км/ч. **695.** 15 девочек. **696.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **697.** 9 ч; 18 ч. **698.** 75 км/ч. **699.** 10 деталей. **700.** 100 радиоприемников. **702.** $S=2a^2+4ab$. **703.** $m=9k+2$, где k — целое число. **705.** $\frac{b-1}{b+1}$; $\frac{1}{3}$. **708.** а) –4; 4; б) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; в) –1,5; 1,5; г) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **709.** а) 0; 0,6; б) 0; 0,2. **710.** а) –0,5; 1; б) –0,25; 3; в) 0,2; 4; г) –1; $-\frac{2}{3}$. **711.** а) –2; 7; б) –10; 6. **712.** а) –4; 1; б) –5; –2. **713.** а) –2; 10; б) –4; 1; в) –2; 0; г) $-1\frac{5}{12}$; 1; д) 1; 2; е) –1; $1\frac{2}{3}$. **714.** а) $-\sqrt{3}$; 0; $\sqrt{3}$; б) –0,8; 0; 0,8. **715.** а) $-\sqrt{2}$; –1; 1; $\sqrt{2}$; б) –3; 3. **716.** а) –1; 2; б) $-1\frac{2}{3}$; 1; в) –2; 1; г) –1; 1; 3; 5. **717.** а) 1; б) –2; 9. **718.** а) –8; б) –3; в) 3; $4\frac{1}{3}$; г) $-1\frac{2}{3}$; –1; д) –4; е) –2; 2; ж) –1; 11; з) $-\frac{3}{4}$; $\frac{3-\sqrt{19}}{2}$; 0; $\frac{3+\sqrt{19}}{2}$. **720.** $\frac{1}{3}$; 3. **721.** 2, 14 — корни уравнения; $m=28$. **722.** –2; 1. **723.** 1. **724.** 1; 2; 3; 4. **726.** 46 см. **727.** 4. **728.** 3; 4. **729.** 7; 9; 11. **730.** 3; 4; 5. **731.** $\frac{5}{12}$. **732.** $\frac{3}{10}$. **733.** 4 км/ч. **734.** 2 км/ч. **735.** 90 км/ч. **736.** 72 км/ч. **737.** 60 км/ч. **738.** 6 дней; 12 дней. **739.** 10 дней; 20 дней. **740.** 20.

Задания для самопроверки №5

I уровень. **1.** в). **2.** г). **3.** а). **4.** в). **5.** б). ***II уровень.*** **1.** а) –2; 2; б) 0; 3. **2.** а) –4; –2; б) 1; 1,5. **3.** $x_1+x_2=10$; $x_1x_2=24$. **4.** а) корней нет; б) –6. **5.** –3 и 8; –8 и 3. ***III уровень.***

1. а) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; б) –1; 1. **2.** $3\frac{1}{3}$. **3.** а) –11; 2; б) 1; 1,5. **4.** $b = 1,5$. **5.** 80 км/ч; 50 км/ч.

IV уровень. **1.** а) –3; –2; 0; 1; б) 64. **2.** $a = -4$; $a = 4$. **3.** $a = -5$. **4.** –2; 0,5. **5.** 12 ч; 16 ч.

§ 4

763. а) $x = 0$; $x = 4$; б) $x = 2$; в) таких значений x не существует. **764.** а) $x = -5$; $x = 1$; б) $x = -2$; в) таких значений x не существует. **766.** Все числа, кроме $x = -3$ и $x = 1$. **767.** –2. **768.** –3; –1; 1; 3. **769.** –1; 1. **774.** 1 ч 10 мин. **785.** в) $t = 0$; $t = 20$; г) $5 \le t \le 10$; 50 м. **786.** б) 0,5 ч; в) 4 км/ч; 5 км/ч; г) 4 км/ч. **795.** 48. **814.** $y = -x + 4$. **815.** $y = -0,5x + 0,5$. **816.** Да. **822.** б) 1060 грн.; 1120 грн.; $S = 1000 + 60t$; в) $k = 60$, годовой прирост. **826.** а) 0; 15; б) –18; 60. **827.** 25%. **828.** 1273 м^3. **845.** $x < 1,75$. **846.** $x < 4$. **850.** 1 т. **851.** 100 м. **852.** 5. **853.** а) График уравнения образуют точки графиков функций $y = -3x$ и $y = 2x$; б) график уравнения образуют точки графиков функций $y = -5x$ и $y = 2$; в) график уравнения образует одна точка (0; 0). **854.** а) 2; 3; б) –2; 1,25. **855.** а) 1; б) $\frac{1}{x^2}$. **856.** 18 ч. **857.** 70 км/ч; 50 км/ч. **872.** $a = 1$. **873.** –8. **874.** а) $y = -\frac{36}{x}$; б) $y = \frac{32}{x}$. **875.** а) (2; –2,5) и (2,5; –2); б) графики не пересекаются. **876.** а) –1; 1; б) –0,8. **880.** $x < -1$; $0 < x < 1$. **883.** 1. **884.** Три. **886.** а) –2; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 2; б) 256. **887.** $-m$. **888.** 46. **906.** $k = 3$. **907.** $b = -1$; (1; 1). **908.** $-3 < x < 2$. **909.** $x < -1$. **911.** б) 14. **912.** в) 4. **913.** 60 м. **933.** а) $(a-1)^2$; б) $-\frac{1}{b+2}$. **935.** 6; 7. **936.** в) 0,75. **943.** $k = -0,5$. **944.** $k = 8$. **946.** б) (–5; 25) и (1; 1); в) (–1,5; 2,25) и (0; 0); г) (0; 0) и $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$. **952.** а) $k = 0,5$; б) $k = 5$. **953.** $a = 3$; (–1; 1).

Задания для самопроверки №6

I уровень. **1.** г). **2.** б). **3.** б). **4.** а); б). **5.** а); в); г). ***II уровень.*** **1.** 2; –8. **2.** 2; –2,5. **3.** а) –2; б) –3; 0. **5.** Да. ***III уровень.*** **1.** Область определения: $-4 \le x \le 4$. Область значений: $-3 \le y \le 3$. **2.** –1,5; 1,5. **3.** Все числа, кроме $x = -0,5$ и $x = 1$. **4.** (1; –8); (8; –1). **5.** –2; 0,5. ***IV уровень.*** **1.** Область определения образуют все значения x. Наибольшее значение функции — $y = 1$. **2.** Да. **3.** (1; 1). **4.** $x < -1$ или $x > 2$. **5.** Да.

Задачи за курс алгебры 8 класса

955. а) $\frac{7y^2}{6x^2}$; б) $\frac{6y}{x-y}$; в) $\frac{a-3}{a-1}$; г) $\frac{a-1}{a+b}$; д) x^5-1; е) $x^5+\sqrt{5}$. **956.** а) $\frac{4}{a^2-4}$; б) $\frac{x^2}{y(x+y)}$; в) $\frac{4b}{y}$; г) $\frac{3b}{a}$; д) $\frac{1}{x+2}$; е) $\frac{34}{y^2-4}$. **957.** а) $3(a-b)$; б) $\frac{(m-n)^2}{m-n+1}$; в) 1; г) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$. **959.** а) $\frac{2}{1-a^2}$; $-\frac{1}{112}$; б) $-\frac{4}{b+2}$; -40. **961.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{5}$; в) 2. **962.** а) $\frac{1}{a+1}$; б) $\frac{x^2-1}{x^2-2}$. **964.** в) $x \geq 0$; г) $x \geq 0$; $x \neq 16$. **966.** а) 0; б) $4+2\sqrt{6}$; в) $46+4\sqrt{6}$; г) $2x\sqrt{x}$. **967.** а) 2; б) $\sqrt{c}-\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{x+\sqrt{3}}$. **969.** а) -6; б) 5; в) $4\sqrt{3}$. **970.** а) 10; б) 8; в) 4; г) $2\frac{8}{9}$. **971.** $\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{ab}}$. **972.** а) -3; 5; б) -1; 3,5; в) -6; 1; г) $\frac{2-2\sqrt{7}}{3}$; $\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$; д) 3; 5; е) 0,5; ж) -3; 3; з) -3; 0; 2. **973.** а) -1; 4; б) $1-\sqrt{6}$; $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$; $1+\sqrt{6}$; в) -4; 2. **974.** а) 3; б) 1; в) -4; 1; г) -2; 1; д) 1,2; е) -7; -5; ж) 1; 5. **975.** а) -1; 3; б) 0. **976.** а) 6; б) -1; 3; в) 25; г) -4; 1. **977.** 232. **978.** -280. **979.** $c=-1$; $-\frac{1}{3}$ — другой корень. **980.** 2 и $\frac{1}{3}$ — корни, $b=-7$, или -2 и $-\frac{1}{3}$ — корни, $b=7$. **981.** а) $-0,5$; 0; б) -1; 0; $\frac{1}{3}$. **982.** -3. **984.** -3 и -2; 4 и 5. **985.** -2, -1, 0, 1, 2 или 10, 11, 12, 13, 14. **986.** 24 см. **987.** 48 см^2. **988.** $\frac{1}{5}$. **989.** 7 деталей. **990.** 20 ч. **991.** 6 ч; 8 ч. **992.** 6 ч; 4 ч. **993.** 3 км/ч; 1 км/ч. **994.** 60 км/ч. **995.** а) в магазине; б) на оптовом рынке. **996.** 100 кг. **997.** 4 оборота. **998.** 8 команд. **999.** 10 кг или 25 кг. **1000.** 2 л. **1001.** 70 кг. **1002.** б) $x \geq 0$; в) $x \geq 0$; $x \neq 81$. **1006.** а) 1; 5; б) $-0,5$; 0,5. **1007.** а) (2; 3); б) (-7; 49); (5; 25). **1008.** а) $-0,5$; 2; б) -1; 4; в) 4. **1009.** Да. **1010.** Да. **1011.** $y=-2x-1$. **1012.** $b=6$.

Задачи повышенной сложности

1014. а) x^2+x-2; б) $\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}$. **1015.** $\frac{32}{1-x^{32}}$. **1017.** $\frac{100}{101}$. **1018.** $n=2$; $n=3$. **1020.** -1; 8. **1030.** а) Корней нет; б) 0; в) 4; г) -2; 14. **1031.** $x=4$; $y=4$.

1032. б) $\frac{9}{16}$. **1033.** Нет. **1037.** $a = 1$. **1038.** $c = 0$; $c = -4$. **1040.** $\sqrt{2\sqrt{q} - p}$. **1041.** **а)** -3, 1; **б)** 0,5; **в)** 0; $7 - 2\sqrt{3}$; $7 + 2\sqrt{3}$; **г)** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; **д)** 1; **е)** 1. **1042.** 18. **1043.** 1. **1044.** $a = 8$; $a = 12$. **1045.** Нет. *Указание.* При данных преобразованиях не меняется дискриминант квадратного уравнения. **1047.** 5; 6; 7; 8. **1048.** 6 мин. **1049.** 50 км/ч. **1050.** В 19 ч. **1051.** 56 с. **1052.** $3\sqrt{2}$ км/ч. **1053.** 8 л. **1054.** 20 л. **1058.** $a = -1$. **1060.** При $a < 0$ корней нет; при $a \geq 0$ — 1 корень. **1061.** $a > 0$.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 3. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 4. ФУНКЦИИ

Учебное издание

Василий Ростиславович Кравчук
Мария Васильевна Пидручная
Галина Михайловна Янченко

Алгебра

Учебник для 8 класса

Под редакцией Зинаиды Ивановны Слепкань

Редакторы: *Ярослав Гапюк, Ярослав Гринчишин, Сергей Мартынюк*
Литературный редактор *Оксана Давыдова*
Обложка *Светланы Демчак*

Подписан в печать 14.01.2005. Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. 13,53 усл. печ. лист., 12,96 обл.-изд. лист. Тираж 5 000.
Заказ №05-008.

Редакция газеты «Підручники і посібники». Свидетельство ТР 189 от 10.01.96.
46010, г. Тернополь, ул. Полесская, 6а. Тел. 8-(0352)-43-10-31, 43-15-15, 43-10-21.
Факс 8-(0352)-43-10-31. E-mail: pp@pp.utel.net.ua

Тернопільське видавництво
«Підручники і посібники»
працює для вас

ISBN 966-07-0247-7

9 789660 702479 30105