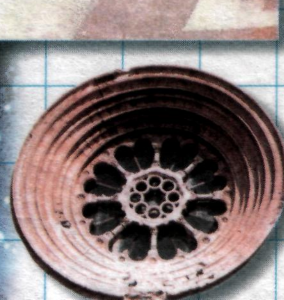
Г. В. АПОСТОЛОВА

Геометрия

8

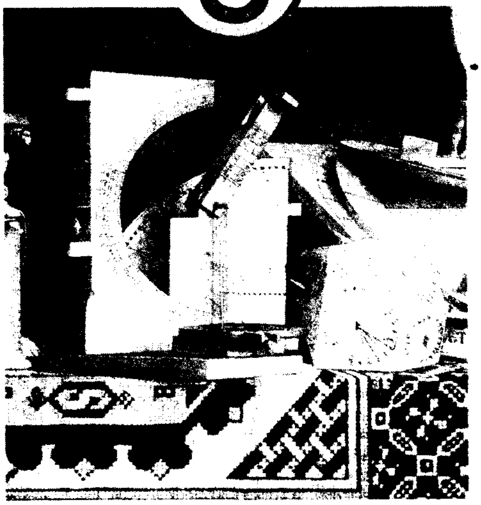
ВИДАВНИЦТВО «ГЕНЕЗА»



Г. В. АПОСТОЛОВА

Геометрия

8



Двухуровневый учебник
для общеобразовательных учебных заведений

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины

Перевод с украинского

КИЕВ
«ГЕНЕЗА»
2008

ББК 22.151я721
А76

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины (письмо МОН Украины №1.4/18-679 от 27.03.08 г.)

**Издано за счет государственных средств.
Продажа запрещена**

Перевод *Г.В. Апостоловой*

Ответственные за подготовку к изданию:
Прокопенко Н. С. – главный специалист МОН Украины;
Потапова Ж. В. – методист высшей категории Института инновационных технологий и содержания образования

Рецензенты:

Ясинский В. В. – директор Института доуниверситетской подготовки и профессиональной ориентации НТУУ «КПИ», доктор физ.-мат. наук, профессор, заслуженный работник народного образования Украины;

Грищенко В. А. – старший научный сотрудник Института математики НАН Украины, канд. физ.-мат. наук;

Барышникова О. И. – учитель-методист лицея «Подол» г. Киева

Составители заданий:
Вашуленко О. П., Карликова Е. А.

Апостолова, Г.В.

А76 Геометрия : 8 : двухуровн. учеб. для общеобразоват. учебн. завед. / Пер. с укр. Г. В. Апостолова. – К. : Генеза, 2008. – 272 с. : ил.

ISBN 978-966-504-862-6.

Учебник *соответствует* как программе общеобразовательных средних учебных заведений, так и классов с углубленным изучением математики – является двухуровневым. *Отличается*: многоуровневой дифференциацией теоретического и дидактического материала; выделением опорных фактов и опорных задач, обобщающих схем; наличием исторической информации; заданиями логического характера; обширностью дидактического материала. *Может быть использован*: в общеобразовательных классах и классах с углубленным изучением математики; для организации внеклассных занятий и самостоятельной учебной деятельности учащихся.

Главная цель: предоставить широкий спектр возможностей и учителю, и учащемуся независимо от типа учебного заведения и места его расположения.

ББК 22.151я721

ISBN 978-966-504-862-6 (рус.)
ISBN 978-966-504-798-8 (укр.)

Автор Галина Вадимовна Апостолова – профессор Киевского областного института последипломной подготовки педагогических кадров, кандидат физико-математических наук, учитель-методист.

Я благодарна всем своим ученикам за совместный поиск и открытия, за то, что вместе радовались и удивлялись красоте и гармоничности математической модели мира. В этом учебнике есть частичка от встречи с каждым из вас.

Уважаемый ученик!

Возможно, на фоне удивительных достижений науки и техники, с которыми вы встречаетесь на каждом шагу, геометрия, предлагаемая для изучения в школе, может показаться каким-то несовременным предметом, совсем ненужным в наше время человеку, в жизнь которого вошли компьютеры, мобильные телефоны, цифровые технологии.

Действительно, за последние тысячелетия человечество стало намного умнее. Но стал ли умнее каждый отдельный человек? Сегодня мы знаем намного больше своих предков, потому что «стоим на их плечах». Развитие человечества – это, в первую очередь, развитие человеческой мысли. Геометрия является своеобразным зеркалом человеческого разума, уникальной сокровищницей, которая сохраняет наивысшие достижения человечества, жемчужины мысли, создававшиеся на протяжении более чем двух тысячелетий самыми мудрыми его представителями. Овладеть этими сокровищами – это значит не только научиться логично и последовательно мыслить, но еще и получить в подарок возможность наслаждаться от самого процесса мышления, способности самостоятельно совершать открытия.

В. Фукс (известный немецкий математик XX в.) сказал:

«Геометрия – это широкий роскошный пейзаж, открытый всем тем, кому мышление доставляет настоящую радость».

Учебник предоставляет вам широкие возможности в использовании сокровищницы Геометрии.

Желаю радости работы с этим учебником.

Автор

Информация для учащихся

Перед началом работы с учебником внимательно прочитайте *вступление*, в котором обобщается то, что вы уже изучали ранее. Обратите внимание на *форзацы* – на них представлены опорные факты геометрии за курс 7-го класса.

Домашнюю работу лучше начинать с выполнения *практических работ*, которые предлагаются после каждого параграфа. Это поможет вам «ощутить» геометрию, понять и запомнить выученное.

На поля учебника вынесено *главную (опорную) информацию*, а в конце учебника предлагаются обобщающие *опорные конспекты*. Пользуйтесь ими во время подготовки к уроку и при решении задач.

Обязательный (минимальный) объем информации обозначен цветной вертикальной чертой.

Задания подразделяются на четыре уровня сложности: задания с нуликом возле номера – наиболее простые, задания без обозначений возле номера – несколько сложнее, задания со звездочкой – требуют более глубоких размышлений, задания с двумя звездочками – наиболее сложные, для их выполнения нужны творческие усилия.

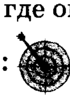
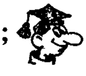
Задания «*Для повторения*» и «*Готовимся к тематической аттестации*» помогут вам повторить изученное, подготовиться к итоговой аттестации.

Кроме того, в конце учебника предлагаются *задания в тестовой форме «Проверь себя»*. Их цель – определить уровень ваших умений и знаний, помочь вам адаптироваться к будущим тестированиям.

«*Ответы и советы*» помогут вам убедиться в правильности выполнения заданий, а иногда и подскажут путь решения.

Задания рубрики «*Для любознательных*», параграфы с такой же пиктограммой и последний раздел «*Любопытные приложения*» предназначены для более широкого и глубокого знакомства с геометрией, чем это требуется программой общеобразовательной школы.

В конце учебника вас ожидает *Словарик* новых терминов и незнакомых слов (со ссылкой на страницы, где они встречаются).

Пиктограммы в учебнике означают:  – определение; $\boxed{T}$ – теорема; $\boxed{C}$ – следствие;  – материал для ознакомления;  – дополнительный материал.

Не ждите указаний учителя, работайте самостоятельно – учебник предоставляет вам такую возможность. Помните, что готовиться к внешнему тестированию, к вступительным экзаменам в ВУЗ по определенным темам надо тогда, когда эти темы изучаются.

Тот, кто учится самостоятельно,
достигнет в семь раз больше того,
кому все разъясняется.

Артур Гитерман (поэт)

Информация для учителей и родителей

Обычно в учебнике объем учебного материала четко ограничен – все, что в нем содержится, учитель должен отработать с классом. Поэтому и создаются учебники для общеобразовательных школ и для классов с углубленным изучением математики. **Главная цель этого учебника – предоставить возможность (независимо от названия и месторасположения учебного заведения):** *ученику* – узнать хочет ли и может ли он знать больше минимальных требований программы, подготовиться к вступительным экзаменам (тестированию), а, возможно, и олимпиадам; *учителю* – осуществить дифференцированный подход в работе, естественным образом продолжить изучение геометрии на внеклассных занятиях, направить самостоятельную работу определенных учащихся.

Этот учебник двухуровневый – *по нему можно работать как по общеобразовательной программе (ОП), так и в классах с углублённым изучением математики (МК).* Можно сказать, что он «многоуровневый» – по объему и спектру представленного дидактического и теоретического материала. Учебник дает возможность одним учащимся плавно идти вверх, другим – спуститься и залатать индивидуальные «прорехи».

Теоретический материал подразделяется на:

- *параграфы, обязательные для изучения* по программе общеобразовательной школы, основной материал (минимум по госстандарту) обозначен цветной вертикальной чертой;
- *параграфы для ознакомления* (необязательные для оценивания по ОП);
- *параграфы, необязательные для изучения* (по ОП);
- *информацию рубрики «Для любознательных»*, которая дополняет параграфы исторической и математической информацией;
- *информацию раздела «Любопытные приложения»* – для МК, кружковой и индивидуальной внеклассной работы, подготовки к олимпиадам, подготовки реферативных работ и работ в системе МАН (содержит списки рекомендованной литературы).

Дидактический материал подразделяется на:

- *практические работы* (приведенные после каждого параграфа): задачи четырех уровней сложности; задания первых трех уровней с цветными номерами рекомендованы для домашней работы;
- *задания рубрики «Для любознательных»*: дополнительные задачи повышенной сложности и не только по программному материалу;
- *задания раздела «Любопытные приложения»*: задачи повышенной сложности по представленным темам;
- *задания для повторения* расположены после разделов и в конце учебника (в тестовой форме);
- *«Готовимся к тематической аттестации»* – ориентировочные задания аттестации по темам (для ОП).

Не следует стремиться решить все предложенные задачи. Обширность дидактического материала предоставляет возможность (без привлечения дополнительных сборников) реализовать дифференцированный подход в работе с классом.

Заметим, что использование пособия «Геометрия в опорных схемах и рисунках. Рабочая тетрадь ученика 8 класса» позволит учащимся не носить учебник в школу (работать по нему только дома), облегчит усвоение, повторение и обобщение учебного материала.

Этот учебник вариативный, предлагает «возможности», а вот насколько они будут реализованы – это уже зависит лично от Вас. РАДОСТИ ПОИСКА и УСПЕХОВ!

Автор

Вступление

Память – страж всему
и сокровищница всего.
Цицерон

Взгляд на старые проблемы
под иным углом зрения –
это требует творческого воображения
и дает большие преимущества.
Альберт Эйнштейн

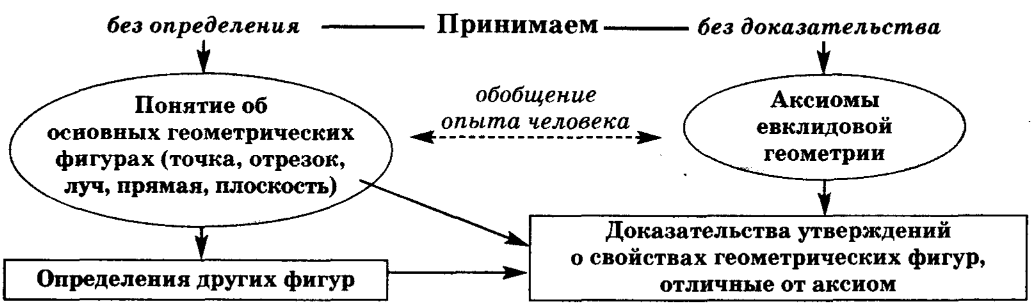
Вступая в геометрию 8-го класса, предлагаем сначала остановиться и оглянуться на то, что было раньше, – на «пейзаж» 7-го класса. Ощутите его логичность и цельность, красоту маленьких сюжетов опорных задач. Это поможет вам овладеть новыми просторами геометрии в 8-м классе.

Телом, *фигурой* или *формой* называют предметы, когда интересуются только лишь их числовыми характеристиками (размером, площадью, объемом, размещением...).

Геометрия как математическая наука изучает свойства тел, фигур окружающего мира в наиболее абстрактной форме, т. е. независимо от их конкретного смысла. Это дает возможность использовать *дедуктивный метод* – цепочку переходов от утверждения-условия к утверждению-выводу.

(Напомним, что *утверждением называется предложение, о котором можно сказать «да» или «нет», т. е. оно может быть или истинным или ложным.*)

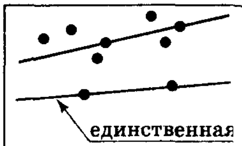
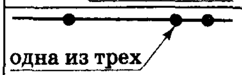
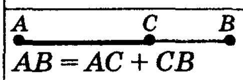
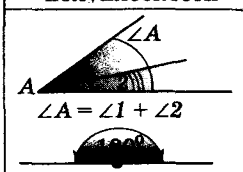
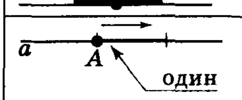
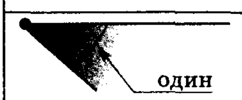
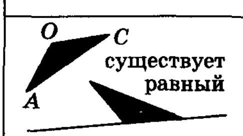
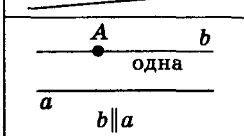
Геометрия – это не просто собрание определенных фактов и размышлений, а строгая, целостная, эстетическая в своей логичности наука. Ее структуру можно представить так.



Аксиомы евклидовой геометрии не являются свободным творением Евклида, а получены человечеством в процессе многовекового опыта. Их формулировка очень важна, т. к. она является краеугольным камнем построения геометрии. Так, русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) усомнился в одной из аксиом Евклида (аксиоме об единственности прямой, параллельной данной, которая проходит через заданную точку вне данной прямой) и получил совсем другую геометрию, которая, как оказалось, описывает свойства фигур, размеры которых превышают размеры Земли.

Мы с вами продолжаем изучать плоские фигуры по Евклиду (планиметрию). Вспомним **АКСИОМЫ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ** (планиметрии).

Геометрия – это математическая наука о пространственных формах, которая опирается на дедуктивный метод – цепочку логичных переходов (шагов) от утверждения-условия к утверждению-выводу.

	**I.**	**Какая б ни была прямая, существуют точки, которые принадлежат этой прямой, и точки, которые не принадлежат ей. Через любые две точки можно провести прямую и при том только одну.**
	**II.**	**Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.**
	**III.**	**Каждый отрезок имеет определенную длину, больше нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается какой-либо точкой.**
	**IV.**	**Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.**
	**V.**	**Каждый угол имеет определенную меру, которая больше нуля. Мера угла равна сумме мер углов, на которые он разбивается каким-либо лучом, лежащим внутри этого угла (с началом в вершине угла). Градусная мера развернутого угла равняется 180°.**
	**VI.**	**На любой прямой от заданной точки в заданном направлении можно отложить отрезок заданной длины и при том только один.**
	**VII.**	**От любой полупрямой в заданной полуплоскости можно отложить заданный угол с вершиной в начале этой полупрямой и при том только один.**
	**VIII.**	**Какой бы ни был треугольник, существует треугольник, равный данному в заданном размещении относительно заданной прямой.**
	**IX.**	**Через точку, что не лежит на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.**

Вы имеете определенный опыт работы с геометрическими понятиями и фактами, понимаете, что все геометрические свойства фигур формулируются в виде утверждений. Для дальнейшего изучения геометрии полезно обобщить виды математических утверждений, с которыми вы встречались (и будете работать далее).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ – **это утверждение, в котором разъясняется (через уже известные понятия), какие именно объекты или свойства попадают под это название.**

Вспомните, например, определение треугольника, смежных углов, равенства двух углов и т. д.

АКСИОМА – **утверждение, которое принимается без доказательства** (говорят еще – *постулат*).

Мы с вами уже обсуждали значение этих утверждений в построении геометрии и повторили их формулировку по Евклиду. Мы не можем просто так, по собственному желанию, взять и добавить к перечню этих аксиом еще какое-то утверждение. *Все утверждения о свойствах геометрических фигур, которые отличаются от аксиом, мы должны доказывать.*

ТЕОРЕМА – **утверждение, истинность которого определяется после логического рассуждения** – ***доказательства.***

Из опыта изучения геометрии в 7-м классе вы можете привести примеры таких утверждений и их доказательств.

Теорема состоит из двух утверждений: *утверждение-условие* и *утверждение-вывод*. Теорему всегда можно записать в виде:

> «ЕСЛИ» – «*утверждение-условие*» – «ТО» – «*утверждение-вывод*».

Например, теорему о свойствах вертикальных углов «Вертикальные углы равны» можно сформулировать так: «ЕСЛИ два угла являются вертикальными, ТО они равны». Попробуйте сформулировать в таком виде теоремы: «Сума смежных углов равна 180°»; «Биссектрисы смежных углов перпендикулярны».

СЛЕДСТВИЕ – **утверждение, которое является непосредственным выводом из аксиомы или теоремы.**

Можно ли следствие назвать теоремой? Да, так как мы должны это утверждение доказывать. Но при этом такое доказательство опирается на теорему или аксиому, следствием которой ее называют, и это доказательство, как правило, содержит небольшое количество логических шагов.

ТЕОРЕМА, ОБРАТНАЯ ДАННОЙ – **такая теорема, в которой условием является вывод, а выводом – условие заданной (прямой) теоремы.**

Например, обратными друг другу будут теоремы:

Структура геометрии:
1) основные понятия;
2) аксиомы;
3) определение других фигур, доказательство свойств фигур, которые отличаются от аксиом.

Логический шаг доказательства:
1. Исходное утверждение (несколько утверждений);
2. «Тогда»;
3. Утверждение-вывод.

Геометрия Евклида опирается на аксиомы, которые были им сформулированы. (Греция, V в. до н.э.)

Определение – название (с разъяснением, что именно так называется).

Аксиома – принимается без доказательства.

Теорема – ***доказывается*** **определенным логическим рассуждением (доказательством).**

Если внутренние разносторонние углы равны, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°.	Если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то внутренние разносторонние углы равны.

Если одну из этих теорем рассматривать как прямую, то другая будет обратной.

Важно помнить, *если доказана прямая теорема, то правильность обратной теоремы нельзя считать само собой разумеющейся!*

Утверждение, обратное к истинному, не всегда будет истинным. (У курицы две ноги, но если у кого-то две ноги, то он не обязательно является курицей.) Приведем пример, когда обратное математическое утверждение не выполняется:

Если два угла являются вертикальными, то они равны.	Если два угла равны, то они являются вертикальными.

ПРИЗНАК – **теорема, в которой утверждается, что определенные условия обеспечивают принадлежность фигуры (фигур) конкретному множеству, которое было определено ранее.**

Как пример, сформулируйте признаки равнобедренного треугольника, признаки параллельности двух прямых.

СВОЙСТВО – **теорема, в которой утверждается, что принадлежность фигуры (фигур) определенному множеству обеспечивает выполнение конкретных условий.**

Как пример, сформулируйте свойства равнобедренного треугольника, свойства смежных углов.

Подчеркнем, что не всегда признаки и свойства фигуры являются взаимно обратными утверждениями (например, признаки и свойства вертикальных углов, смежных углов).

Прежде чем начать дальнейшее углубление в мир Геометрии и решение ее задач, обобщим уже имеющийся у вас опыт и сформулируем, что означает «решить геометрическую задачу» и как лучше записать ее решение.

Решение геометрической задачи, как правило, предусматривает такие этапы.

1. *Выполнить рисунок к тексту условия.*

2. *Сделать на рисунке определенные обозначения.*

3. *Записать сокращенное условие задачи через введенные обозначения.*

4. *Сформулировать и кратко записать утверждение, которое требуется доказать, или то, что нужно найти по условию задачи.*

5. *Обозначить то, что запись условия задачи окончена.* Обычно проводят горизонтальную черту или пишут слово «Решение» («Доказательство»).

Доказательство опирается на аксиомы и утверждения, доказанные ранее (состоит из логических шагов).

Следствие – непосредственный вывод из теоремы или аксиомы.

Прямая и обратная теоремы – меняются местами условие и вывод.

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ТРЕБУЕТ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА!

Множество – совокупность объектов, которые мы представляем как единое целое.
Например: множество усатых, множество треугольников.

Признак – теорема, выводом которой есть принадлежность фигуры определенному множеству (определение которому дано было ранее).

Свойство – теорема, выводом которой есть выполнение определенных условий, если фигура принадлежит конкретному множеству.

Если вы хотите научиться плавать, то смело ступайте в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!

Д. Пойя

6. *Записать логические шаги решения (доказательства):*

• *необходимо доказывать те утверждения (соотношения), которые используются в решении и которые не совпадают с утверждениями условия или аксиомами и теоремами;*

• *логический шаг имеет структуру: исходное утверждение; «тогда» (⇒); утверждение-вывод;*

• *исходными утверждениями логического шага могут быть: утверждения условия задачи, аксиомы, теоремы и утверждения, доказанные в предыдущих логических шагах.*

7. *Записать ответ или «что и требовалось доказать» («Ч. т. д.»).*

Замечание.

Рисунок не является основанием для выводов.

Доказательство от противного:

1) четко сформулировать утверждение, что именно нужно доказать;

2) сформулировать утверждение, противоположное к (1);

3) предположить, что (2) выполняется;

4) прийти к логическому противоречию;

5) вывод: (2) – ложно и выполняется (1).

Просматривая изученное в 7-м классе, нельзя обойти способ доказательства **«от противного»**.

Английский математик Г. Харди (1877–1947) сказал: «Доказательство от противного, так любимое Евклидом, это чуть ли не самое утонченное оружие математики».

Вспомним, каких именно логических шагов-размышлений требует его применение.

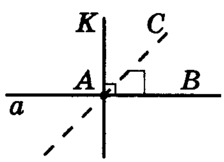
Шаг 1: *проанализировать утверждение, которое нужно доказать, и сформулировать противоположное утверждение.*

Шаг 2: *предположить, что сформулированное противоположное утверждение является правильным.*

Шаг 3: *опираясь на это предположение, логическими (дедуктивными) размышлениями прийти к абсурдному выводу.*

Шаг 4: *сказать, что предположение отбрасывается как ложное и принимается то утверждение, которое нужно было доказать.*

Как пример рассмотрим доказательство методом от противного известной вам теоремы: «Через заданную точку на данной прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную к данной».



Дано: точку A на прямой a.

Доказать: существует $AK \perp a$ и AK – единственная.

Доказательство

То, что искомая прямая существует, можно показать построением (опорная задача). То, что такая прямая единственная, – докажем от противного.

Напомним обозначение:

$\neq$ – «не совпадает», знак отрицания тождественного равенства.

1) Пусть существует $AC \perp a$ и $AC \neq AK$.

2) $AC \perp a$ и $AK \perp a$, тогда $\angle KAB = \angle CAB = 90°$, чего быть не может по аксиоме об откладывании углов.

Тогда AK – единственная. Ч. т. д.

Обсудим еще такой метод доказательства, как **контрпример**. Этим методом легко доказать ложность утверждения – достаточно привести один пример, когда утверждение не выполняется (контрпример).

Будет ли правильным утверждение: «Все треугольники – остроугольные»? Это утверждение ложно, так как мы можем построить, например, прямоугольный треугольник, а он не остроугольный.

ВАЖНОЕ замечание. *Пример (даже очень много примеров), когда утверждение выполняется, не является его доказательством.* Пожалуйста, не забывайте об этом, решая задачи или формулируя выводы, выполнив практическую работу.

Вспомним такое важное понятие, как **геометрическое место точек (ГМТ), удовлетворяющих определенному условию.**

Чтобы утверждать, что некая фигура является определенным ГМТ, нужно доказать два взаимно обратных утверждения.

1. **Доказать,** что ВСЕ точки фигуры удовлетворяют этому условию (**свойство фигуры**).
2. **Доказать обратное:** ВСЕ точки, удовлетворяющие данному условию, лежат на этой фигуре (**признак фигуры**).

Заметим, последнее означает, что вне фигуры нет точек, удовлетворяющих заданному условию.

Математики говорят про указанную выше пару доказательств – **доказательства необходимого и достаточного условий:**

- *свойство – необходимое условие*;
- *признак – достаточное условие.*

Как уже говорилось выше, если какое-то утверждение является правильным, это еще не значит, что выполняется и обратное ему утверждение. Важно, рассматривая фигуру как определенное ГМТ, не забывать о доказательстве ее соответствующего признака.

Например, утверждение, что **биссектриса угла – ГМТ внутри угла, равноудаленных от его сторон,** означает:

1) *если точка лежит на биссектрисе угла – она удалена от его сторон (необходимое условие)*;

2) *если какая-то точка внутри угла равноудалена от его сторон, то эта точка принадлежит биссектрисе угла (достаточное условие).*

Утверждение, что серединный перпендикуляр к отрезку – ГМТ, равноудаленных от концов отрезка, означает:

1) *любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов (необходимое условие)*;

2) *если какая-то точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка (достаточное условие).*

Чтобы установить ложность утверждения, достаточно привести один контрпример.

Очень много примеров того, что утверждение выполняется, не является его доказательством!

Геометрическое место точек (ГМТ) – это совокупность (множество) ВСЕХ точек, удовлетворяющих определенному условию.

Доказать, что некая фигура является определенным ГМТ, означает доказать:

1) *необходимость* – свойство фигуры;

2) *достаточность* – признак фигуры.

Повторить основные опорные факты и определения за курс 7-го класса вам помогут рисунки-схемы на форзацах и странице 253 учебника, а также ВОПРОСЫ.

1. Как обозначаются точки, прямые, лучи, отрезки, углы, треугольники?
2. Какая фигура называется углом; треугольником?
3. Какие отрезки (углы, треугольники) называются равными? Приведите пример равных треугольников и запишите соотношение для их соответственных сторон (углов).
4. Сформулируйте признаки равенства: треугольников; прямоугольных треугольников.
5. Какой угол называется: развернутым; прямым; острым; неострым; тупым?
6. Какие углы называются смежными? Сформулируйте основные свойства смежных углов. Что можно сказать о биссектрисах смежных углов?
7. Какие углы называются вертикальными? Сформулируйте основные свойства вертикальных углов. Как расположены биссектрисы вертикальных углов?
8. Какие прямые называются параллельными? Как называются углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей – секущей? Сформулируйте основные свойства параллельных прямых.
9. Сформулируйте признаки параллельности двух прямых.
10. Что такое перпендикуляр, проведенный через данную точку к данной прямой? Сколько таких перпендикуляров можно провести? Почему? (Рассмотрите два случая расположения данной точки относительно заданной прямой).
11. Что называется расстоянием между: двумя точками, точкой и прямой, двумя параллельными прямыми?
12. Сформулируйте определение внутренних и внешних углов треугольника. Какие свойства этих углов вы знаете?
13. Что такое биссектриса (медиана, высота) треугольника? Начертите эти отрезки для остроугольного, тупоугольного и прямоугольного треугольников. Какие свойства биссектрис (медиан, высот) треугольника вы знаете?
14. Какая градусная мера углов: образованных биссектрисами внутреннего и внешнего углов треугольника при одной его вершине; равностороннего треугольника; равнобедренного прямоугольного треугольника? Какое свойство прямоугольного треугольника с углом 30° вы знаете?
15. Какие треугольники называются равнобедренными? Сформулируйте свойства (признаки) равнобедренного треугольника.
16. Что такое геометрическое место точек (ГМТ), удовлетворяющих определенному условию? Каким ГМТ является: биссектриса угла; серединный перпендикуляр к отрезку; окружность? Что такое ГМТ удаленных от заданной прямой на заданное расстояние? Какие еще ГМТ вы знаете?
17. Каким может быть размещение: прямой и окружности; двух окружностей? Каким условиям (для радиусов окружностей) они соответствуют?
18. Какие свойства хорд окружности (касательной к окружности) вы знаете?
19. Сколько окружностей можно вписать в данный угол? А в заданный треугольник? Почему?
20. Сколько окружностей можно описать вокруг данного треугольника? Почему?
21. Что такое центр вписанной (описанной) окружности треугольника и где он расположен? Почему?
22. Что означает «решить задачу на построение»? Какие опорные задачи на построение вы знаете?

Вступительная работа окончена. Пришло время раскрывать учебник и с его помощью тайны мудрой красавицы Геометрии.

Глава 1
ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ОКРУЖНОСТЬЮ

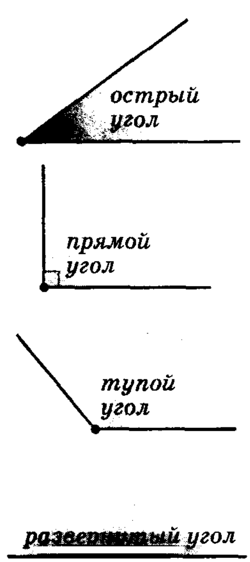
В этой главе мы с вами продолжим изучать свойства окружности, рассмотрим:

- **углы с вершиной в центре окружности;**
- **углы с вершиной на окружности;**
- **углы с вершиной внутри круга;**
- **углы с вершиной вне круга.**

§ 1. Расширение понятия угла

В 7-м классе мы рассматривали свойства углов, не превышающих развернутый угол. Для дальнейшего изучения геометрии нужно расширить понятие угла.

Возьмем произвольный луч n и с одной стороны от него с вершиной в начале этого луча отложим $\angle(an) = \alpha$, а с другой $\angle(bn) = \beta$ (рис. 1.1). Тогда $\angle(ba)$ – сумма углов $\angle(an)$ и $\angle(bn)$. Мерой этого угла будет сумма мер углов α и β. Может получиться так, что градусная мера суммы углов, меньших развернутого, будет больше $180°$ (рис. 1.2).



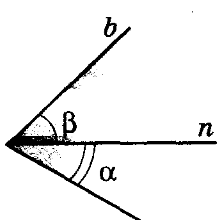


Рис. 1.1

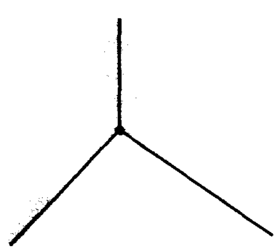


Рис. 1.2

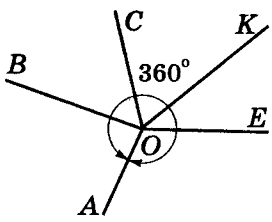


Рис. 1.3

Соответствующую часть плоскости тоже будем называть углом. Градусная мера такого угла больше развернутого угла.

При нахождении суммы углов может получиться так, что после сложения нескольких углов, например пяти углов на рисунке 1.3, сторона OA первого угла совпадет со стороной OA последнего угла. Фигурой, которая соответствует сумме этих углов, будет вся плоскость, расположенная вокруг общей вершины углов O.

Такая фигура называется ***полным углом***. *Полный угол состоит из двух развернутых углов*, поэтому его градусной мерой будет сумма мер этих углов, т.е. 360°.

Практическая работа 1

1. На листе бумаги проведите 2 луча с началом в общей точке. Сколько углов получилось? Раскрасьте каждый из них в разные цвета.

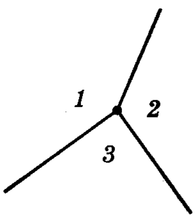


Рис. 1.4

2. На отдельном листе бумаги проведите 3 луча с началом в общей точке. Пронумеруйте их, как показано на рисунке 1.4.

3. А теперь вырежте полученные три угла и с помощью транспортира определите их градусную меру.

4. С помощью полученных шаблонов углов изобразите на бумаге сумму углов: **а)** *1* и *2*; **б)** *3* и *1*. Определите градусную меру этих углов.

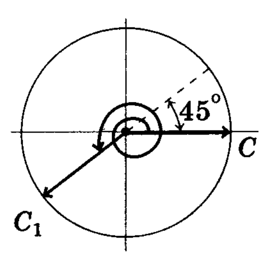
5. С помощью полученных шаблонов углов изобразите на бумаге сумму двух углов, один из которых равен наименьшему из углов *1*, *2*, *3*. Определите градусную меру изображенных углов.

6. Повторите рисунок пункта 2 и обозначьте изображенные лучи как OA, OB и OC. На сколько углов эти лучи разделили плоскость?

7. Согласно последнему рисунку дополните выражение в левой части равенства $\angle AOB + \ldots = 360°$, чтобы оно было правильным.

Для любознательных

Наверняка у вас уже возник вопрос, бывают ли углы, градусная мера которых превышает полный угол? Да, такие углы существуют! Вы позже, в старших классах будете их изучать в разделе математики, который называется «*Тригонометрия*». В тригонометрии угол рассматривается как фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки. При этом хотя бы один из таких лучей свободно вращается вокруг такой точки, «как стрелка часов». Градусная мера угла в тригонометрии учитывает количество полных оборотов, совершенных одним лучом относительно другого. Например, на рисунке градусной мерой такого угла будет 360° + 180° + 45° = 585°. Попытайтесь в таком понимании меры угла самостоятельно решить следующую задачу.



На сколько градусов повернется большая стрелка часов за: **а)** 2 ч; **б)** 4 ч; **в)** 12 ч 45 мин?

Задание 1

1°. Используя транспортир, определите градусные меры углов, изображенных на рисунке 1.5.

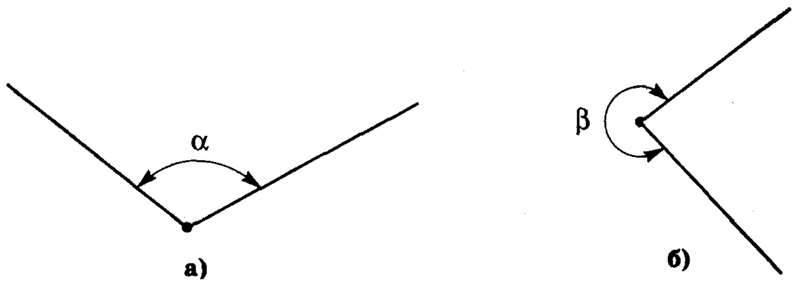


Рис. 1.5

2°. Найдите градусную меру угла между стрелками OC и OC_2 на рисунке 1.6.

3°. Допишите равенство в соответствии с рисунком 1.7:

а) $\angle AOB + \angle BOC = \angle \ldots$;

б) $\angle BOC + \angle COD + \angle DOA = \angle \ldots$;

в) $\angle DOA + \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = \ldots$.

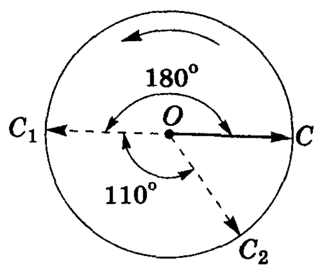


Рис. 1.6

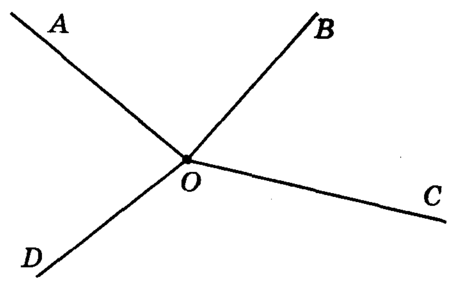


Рис. 1.7

4. Определите градусную меру угла между стрелками OC и OC_1, изображенными на рисунке: а) 1.8; б) 1.9.

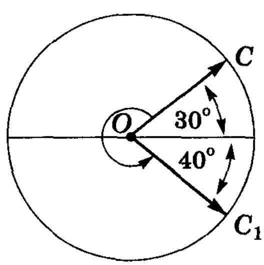


Рис. 1.8

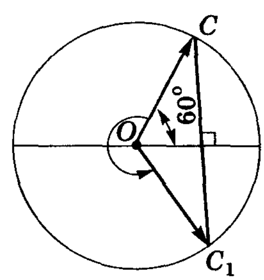
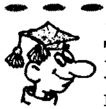


Рис. 1.9



Для любознательных

Маленькая Катя вышла на прогулку между 8 и 9 часами утра в тот момент, когда часовая и минутная стрелки часов совпали. Она вернулась домой между 2 и 3 часами после полудня, когда часовая и минутная стрелки оказались на одной прямой. Сколько времени гуляла Катя?

5. По рисунку 1.10 вычислите градусную меру угла MOP, если OP – биссектриса угла MOK.

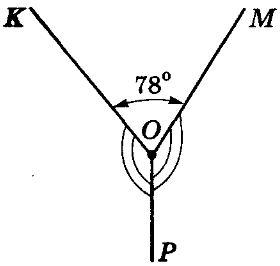


Рис. 1.10

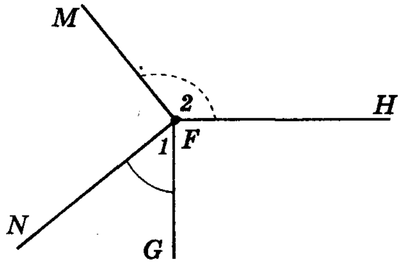


Рис. 1.11

6. На прямой AB отметили точку O. Найдите градусные меры углов с вершиной в точке O.

7*. На рисунке 1.11 $MF \perp NF$, $HF \perp GF$. Докажите, что $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

8. Лучи OT, OR и OM делят полный угол на три части. Найдите градусные меры образованных углов, если: **а)** $\angle ROM = 100°$, $\angle ROT - \angle TOM = 20°$; б) $\angle ROM = 3\angle ROT$, $\angle TOM = 2\angle ROT$; **в)** $\angle ROM : \angle ROT : \angle TOM = 1 : 7 : 4$.

9*. На сколько градусов поворачивается маленькая стрелка часов: **а)** за 12 ч; б) за 4 ч; в) за 2 ч 30 мин?

10**. Найдите градусную меру угла между стрелками часов, когда они показывают: **а)** 2 ч 15 мин; б) 1 ч 12 мин; в) 7 ч 18 мин.

11**. С помощью ножниц из прямоугольного листа бумаги (который можно складывать) получите угол: **а)** 270°; б) 315°.

12**. Постройте (с помощью циркуля и линейки без делений) угол, градусная мера которого: **а)** 135°; б) 285°.

13**. Постройте биссектрису угла, который больше развернутого.

14**. Постройте биссектрису полного угла.

Замечание. Утверждение, доказанное нами в 7-м классе, о свойстве биссектрисы угла как геометрического места точек внутри угла, равноудаленных от его сторон, теперь, после расширения понятия угла, нужно уточнить так. *Биссектриса угла, меньше развернутого, является геометрическим местом точек внутри угла, равноудаленных от сторон этого угла.*

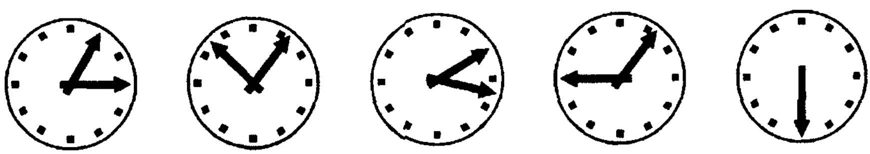
Для любознательных

1. Через данную точку внутри заданного круга проведите хорду, которая делится этой точкой пополам.

2. Постройте окружность данного радиуса, которая касается данной прямой в заданной точке.

3. Дано две параллельные прямые и секущая. Постройте окружность, которая касается всех трех данных прямых.

4. После ремонта часы Оксаны шли правильно, но рассеянный мастер установил в часах две стрелки одинаковой длины. Сколько раз в течение суток Оксана могла видеть на своих часах каждую из приведенных ниже картинок?



А Б В Г Д

§ 2. Центральный угол. Градусная мера дуги окружности

Центральным углом называется угол с вершиной в центре окружности.

Часть окружности, которая при этом расположена внутри центрального угла, называют *дугой окружности, соответствующей данному центральному углу.*

Часть центрального угла, ограниченная соответствующей ему дугой окружности, называется *сектором.*

Например, на рисунке 1.12 вы видите два центральных угла AOB, один из которых меньше развернутого, а второй – больше. Им соответствуют две дуги с концами в точках A и B: одна – меньше полуокружности (рис. 1.12-а), а другая – больше (рис. 1.12-б). Чтобы различать эти дуги, на каждой из них можно поставить точки, например M и K (рис. 1.12), и записать указанные дуги так: $\smile AMB$ и $\smile AKB$. Тогда соответствующие этим дугам секторы можно назвать как $AMBO$ (рис. 1.12-а) и $AKBO$ (рис. 1.12-б).

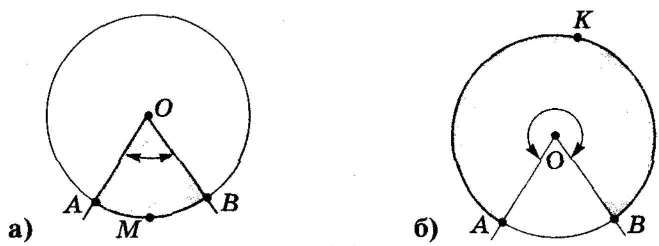
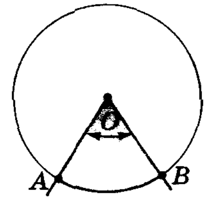


Рис. 1.12

Замечание. Если один из центральных углов развернутый, то второй тоже – развернутый. Две соответствующие им дуги будут полуокружностями, а два сектора – полукругами.

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего ей центрального угла.

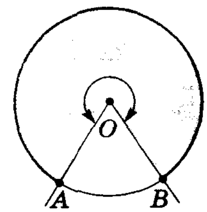
Мера дуги окружности не зависит от радиуса окружности, так как от нее не зависит мера центрального угла. Какой бы не был радиус окружности, полный центральный угол равен 360°. Тогда *дуга всей окружности имеет меру 360°.*

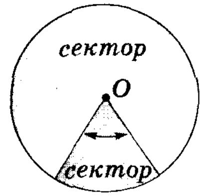


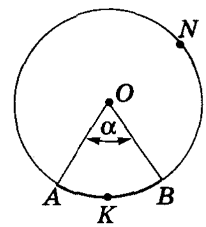
⇑

∠AOB – центральный

⇓





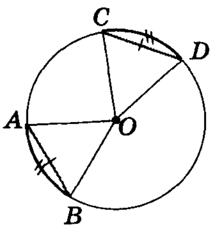


градусная мера:
$\smile AKB = \alpha$;
$\smile ANB = 360° - \alpha$.

Для любознательных

1. Петя должен был разделить окружность на две равные дуги. Он начертил окружность на листе бумаги и пошел ужинать. Пока его не было, мышка выгрызла кусочек рисунка с центром окружности. Может ли теперь Петя разделить эту окружность на две равные части?

2. Найдите геометрическое место точек середин всех хорд заданной длины данной окружности, меньших диаметра окружности.



$AB = CD$

$\Updownarrow$

$\smile AB = \smile CD$

Теорема. В одной окружности равные дуги стягиваются равными хордами.

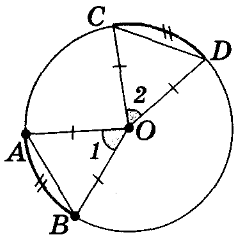


Рис. 1.13

На рисунке 1.13 дуги AB и CD – равны. Докажем равенство хорд AB и CD.

Доказательство

По условию $\smile AB = \smile CD$, тогда $\angle 1 = \angle 2$, $OA = OB = OC = OD$ (как радиусы окружности). Тогда $\triangle AOB = \triangle COD$ (по первому признаку) и $\smile AB = \smile CD$.

Теорема доказана.

Теорема (обратная). В одной окружности равные хорды стягивают равные дуги.

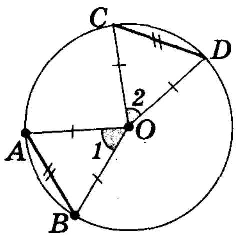


Рис. 1.14

На рисунке 1.14 хорды AB и CD – равны. Докажем равенство дуг AB и CD.

Доказательство

По условию $AB = CD$ и $OA = OB = OC = OD$ (как радиусы окружности). Тогда $\triangle AOB = \triangle COD$ (по третьему признаку) и $\angle 1 = \angle 2$, т. е. $\smile AB = \smile CD$.

Теорема доказана.

Замечание. Теоремы, доказанные нами для одной окружности, будут правильными и в случае равных окружностей.

Практическая работа 2

1. Начертите окружность и обозначьте на ней две точки.
2. Разным цветом наведите дуги, на которые делится окружность этими точками.
3. Соедините центр окружности с заданными вами точками. Измерьте образовавшиеся углы.
4. Обозначьте дуги и соответствующие им центральные углы.
5. Определите градусные меры образовавшихся дуг.
6. Разными цветами закрасьте секторы, соответствующие этим дугам, и назовите их.

Для любознательных

Всемирно известный украинский математик **Василий Петрович Ермаков** (1845–1922), профессор Киевского университета, член-корреспондент Петербургской академии наук, родился в селе Терюха Гомельской области. Он известен не только трудами по высшей математике, но и своими задачами, в том числе и геометрическими. *Попробуйте решить* одну из них.

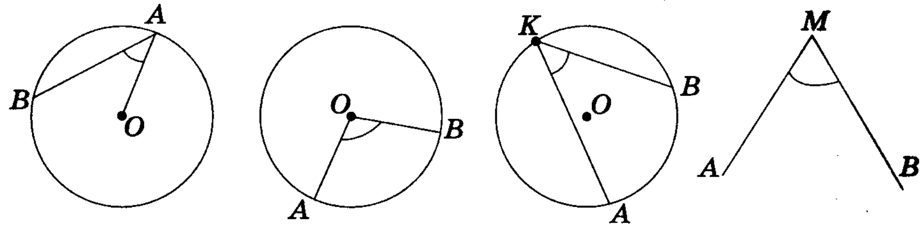
Дано две равных окружности, которые не имеют общих точек. На двух их внутренних касательных произвольным образом отметили по одной точке F и F_1. Из этих точек к каждой окружности провели еще по одной касательной. Пусть новые касательные, проведенные к одной окружности из точек F и F_1, пересекаются в точке A, а к другой – в точке B. Докажите, что:

1) прямая AB – параллельна прямой, соединяющей центры окружностей;

2) прямая, проходящая через середины отрезков FF_1 и AB, проходит и через середину отрезка, соединяющего центры данных окружностей.

Задание 2

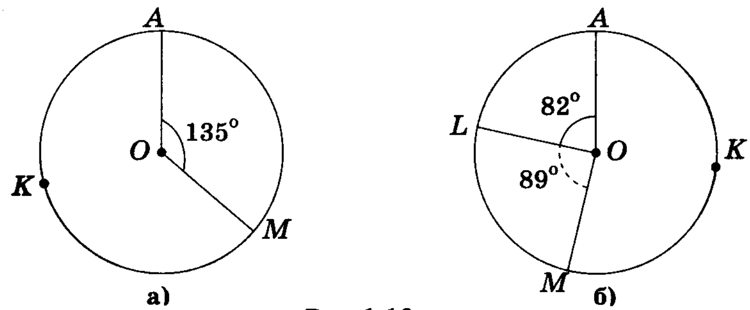
1°. Какие из углов, изображенных на рисунке 1.15, – центральные (O – центр окружности)?



а) б) в) г)

Рис. 1.15

2°. По рисунку 1.16 найдите градусную меру дуги AKM.



а) б)

Рис. 1.16

3°. С помощью только циркуля и линейки начертите дугу, градусная мера которой равна: а) 180°; б) 360°.

4. Как изменится градусная мера дуги окружности, соответствующей центральному углу 67°, если радиус окружности: а) увеличится на 5 см; б) уменьшится в 2 раза?

5. Постройте сектор, градусная мера дуги которого равна: а) 85°; б) 125°; в) 245°.

6. На сколько градусов отличаются меры двух дуг окружности, если разность градусных мер соответствующих им центральных углов равна: а) 4°; б) 120°?

7. Начертите окружность с центром O и обозначьте на ней точку A. Постройте хорду AB так, чтобы: а) $\angle AOB = 90°$; б) $\angle AOB = 60°$; в) $\angle AOB = 180°$; г) $\angle AOB = 120°$.

8°. Найдите градусные меры дуг окружности, на которые ее делит диаметр этой окружности.

9. Можно ли тремя точками разделить окружность на дуги, градусные меры которых: а) 132°, 183°, 48°; б) 56°, 204°, 100°; в) 244°, 90°, 16°?

10. На сколько секторов нужно разрезать круг, чтобы дуги, ограничивающие эти секторы, имели одинаковую градусную меру: а) 60°; б) 10°? Будут ли равны хорды, стягивающие эти дуги? Ответ обоснуйте.

11*. В окружности провели два диаметра AB и CD. Докажите, что $AD = CB$.

12*. Хорды AB и PK (рис. 1.17) равны. Докажите равенство хорд AK и PB.

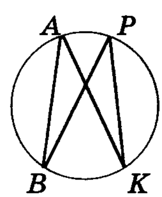


Рис. 1.17

13. Радиус окружности с центром O равен 16 см. Найдите хорду AB, если: а) $\angle AOB = 180°$; б) $\angle AOB = 60°$; в) $\angle AOB = 300°$.

14*. Треугольник ABC вписан в окружность. Сторона AB – диаметр окружности, а точка C делит дугу ACB пополам. Найдите углы треугольника ABC.

15*. Сторона AB треугольника ABC – диаметр окружности, а стороны AC и CB пересекают окружность в точках K и P соответственно. Найдите углы треугольника ABC, если точки K и P делят дугу AB на три равные части.

16*. Разделите с помощью циркуля окружность на: а) 6 равных частей; б) 3 равные части.

17. Постройте треугольник по радиусу описанной вокруг него окружности и двум его сторонам.

18. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность делится точками K и L, если $\angle FOG = 90°$, $KL = FG$, точка O – центр окружности (рис. 1.18).

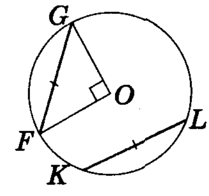


Рис. 1.18

19. Точки A и B делят окружность на две дуги. Найдите градусные меры этих дуг, если их разность равняется 160°.

20. Точки A, B и C делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 1 : 2 : 3. Найдите градусные меры этих дуг.

21. Хорда окружности равна 12 см и стягивает дугу градусной меры 60°. Найдите диаметр окружности.

22. Хорда окружности стягивает дугу градусной меры 60°. Найдите длину хорды, если диаметр окружности равен 14 см.

23*. Серединный перпендикуляр к хорде AB пересекает окружность в точках P и M. Найдите градусные меры дуг BP, AP, AM и MB, если отрезок AB из центра окружности виден под углом 120°.

24**. Хорды AB, BC и AC видны из центра окружности под углами, градусные меры которых относятся как 2 : 5 : 5. Могут ли точки A и C лежать в одной полуплоскости относительно прямой OB? Найдите градусные меры дуг, которые стягиваются этими хордами.

25**. Точки M и K лежат по одну сторону от диаметра AB. Найдите градусные меры дуг, на которые делится окружность точками A, B, M и K, если центральный угол AOM на 20° больше угла MOK, а последний вдвое меньше угла KOB. (Рассмотрите все возможные случаи.)

26**. Точки M и K лежат по одну сторону от диаметра AB. Найдите градусные меры дуг, на которые делится окружность точками A, B, M и K, если центральный угол AOM в 3 раза больше угла MOK, но в 2 раза меньше угла KOB. (Рассмотрите все возможные случаи.)

27**. Точки P и M лежат по разные стороны от диаметра CB. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность делится точками C, P, B и M, если центральный угол BOM в 2 раза меньше угла COM, а градусные меры дуг MCP и MBP относятся как 4 : 5.

28**. Через точку окружности проведены хорда и касательная. Найдите угол между ними, если хорда стягивает дугу 40°.

29**. Через точку окружности проведены хорда и касательная. Найдите градусные меры дуг, которые стягивает хорда, если угол между хордой и касательной равен 23°.

Для любознательных

1. Две вершины B и D квадрата $ABCD$ лежат на окружности, центром которой является точка A. Серединный перпендикуляр к отрезку BC пересекает данную окружность в точке M. Найдите градусную меру угла AMC.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точки C и D этих окружностей являются диаметрально противоположными точке A. Докажите, что точки D, C и B лежат на одной прямой.

§ 3. Вписанный угол

Вписанным углом называется угол (меньше 180°), вершина которого лежит на окружности, а его стороны пересекают эту окружность.

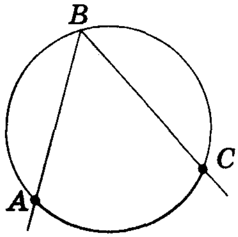


Рис. 1.19

На рисунке 1.19 $\angle ABC$ – вписанный. Он опирается на дугу AC, которая лежит между его сторонами.

Т Теорема. **Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.**

Эту теорему понимаем так: градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры центрального угла, который опирается на ту же дугу, что и вписанный угол.

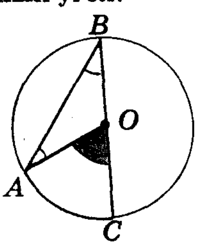


Рис. 1.20

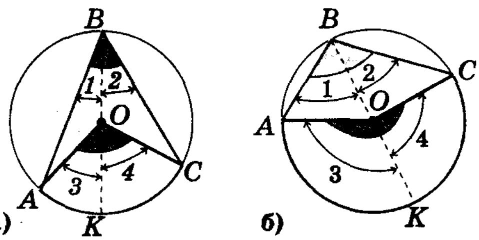
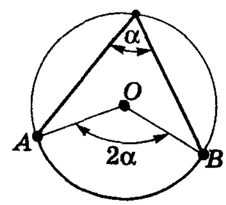
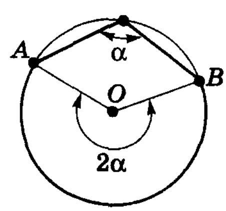


Рис. 1.21



$$\alpha = \frac{1}{2}\smile AB$$



Доказательство

Возможны три случая.

① *Центр окружности O лежит на стороне вписанного угла ABC* (рис. 1.20).

Проведем радиус OA – получим равнобедренный треугольник AOB (OA и OB – радиусы), в котором $\angle A = \angle B$. Для этого треугольника угол AOC – внешний, тогда он равен сумме двух внутренних углов, несмежных с ним, т. е. $\angle AOC = 2\angle B$. Тогда $\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\smile AC$, и утверждение теоремы выполняется.

② *Центр окружности O лежит внутри вписанного угла ABC* (рис. 1.21).

Диаметр BK делит этот вписанный угол на два угла, каждый из которых измеряется половиной соответствующего ему центрального угла (см. случай 1):

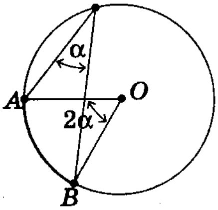
$$\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\angle 3 + \frac{1}{2}\angle 4 = \frac{1}{2}(\angle 3 + \angle 4) = \frac{1}{2}\angle AOC,$$

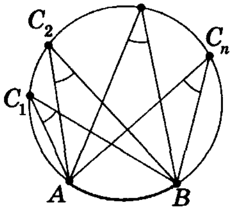
и утверждение теоремы выполняется.

Для любознательных

Окружность γ_1 пересекает диаметр AB окружности γ_2 в точке C, $AC < 0{,}5\,AB$. Общая касательная к заданным окружностям касается γ_2 в точке D. Докажите, что $CD \perp AB$.

$\alpha = \frac{1}{2} \smile AB$

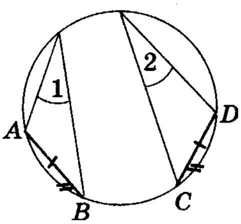




$\smile AB$ *– общая*

$\Downarrow$

$\angle C_1 = \angle C_2 = \ldots$



$AB = CD$

$\Updownarrow$

$\angle 1 = \angle 2$

③ *Центр окружности O лежит вне вписанного угла ABC* (рис. 1.22).

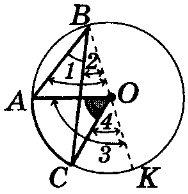


Рис. 1.22

Проведем диаметр BK.

Каждый из образовавшихся вписанных углов *1* и *2* измеряется половиной соответствующего центрального угла (см. случай 1). Тогда:

$$\angle ABC = \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}\angle 3 - \frac{1}{2}\angle 4,$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle 3 - \angle 4) = \frac{1}{2}\angle AOC,$$

и утверждение теоремы выполняется.

Теорема доказана.

C Следствие 1. **Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.**

Каждый из этих углов измеряется половиной одной и той же дуги (рис. 1.23).

C Следствие 2. **В одной окружности (равных окружностях) вписанные углы, опирающиеся на равные дуги, равны, и наоборот – равные вписанные углы опираются на равные дуги.**

Каждый из этих углов измеряется половиной дуги, градусные меры которых одинаковы (рис. 1.24).

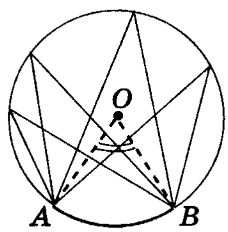


Рис. 1.23

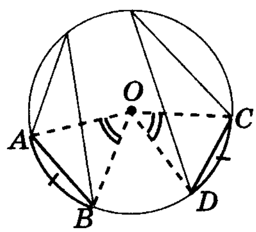
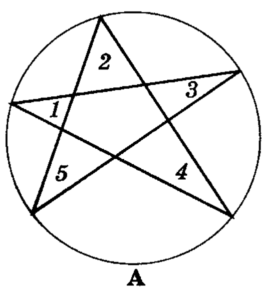


Рис. 1.24

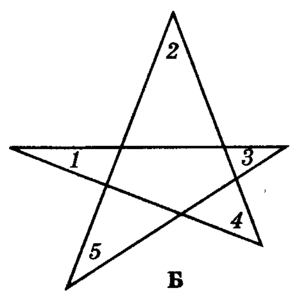
Для любознательных

1. В окружность вписали «звездочку» (рис. А). Найдите сумму углов *1*, *2*, *3*, *4* и *5*. Изменится ли значение суммы углов звездочки, если она будет семиугольной?

2. На листе бумаги нарисовали «звездочку» (рис. Б). Найдите сумму углов *1*, *2*, *3*, *4* и *5*.



А



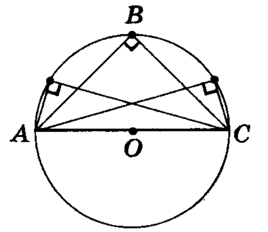
Б

$\boxed{C}$ **Следствие 3. Любой угол, опирающийся на диаметр, прямой.**

Такой угол измеряется половиной меры полуокружности $180° : 2 = 90°$ (рис. 1.25).

$\boxed{C}$ **Следствие 4. Любой прямой вписанный угол опирается на диаметр.**

Градусная мера соответствующего центрального угла AOB (рис. 1.25) равна: $90° \cdot 2 = 180°$. Тогда точки A, O и B лежат на одной прямой, AB – диаметр.



$AC = 2R$

$\Updownarrow$

$\angle ABC = 90°$

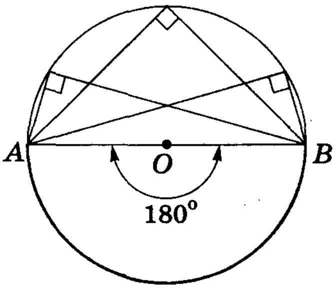


Рис. 1.25

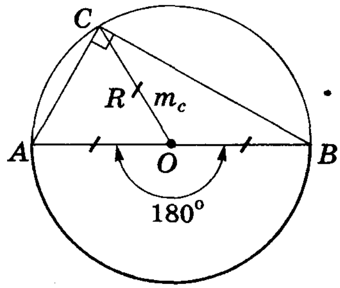
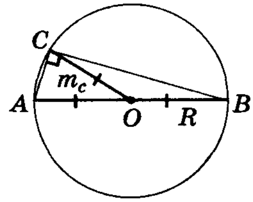


Рис. 1.26



$\angle C = 90°$

$\Downarrow$

$O \in c$,

$m_c = \frac{c}{2} = R$

$\boxed{C}$ **Следствие 5. Центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, совпадает с серединой его гипотенузы.**

Гипотенуза такого треугольника стягивает дугу градусной меры 180°, т. е. полуокружность (рис. 1.26).

$\boxed{C}$ **Следствие 6. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равняется половине этой гипотенузы.**

Медиана гипотенузы является радиусом описанной вокруг треугольника окружности, а гипотенуза – диаметром этой окружности (мал. 1.26).

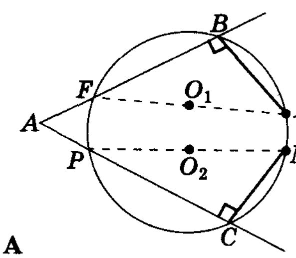
Для любознательных

Напомним: **софизм** – это умышленно ошибочное рассуждение, создающее видимость правильного.

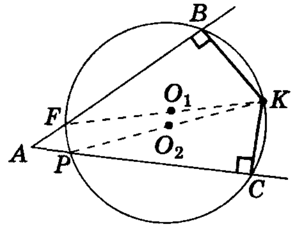
Разгадайте софизм: **любая окружность имеет два центра.**

Пусть секущие FB и PC пересекаются в точке A (рис. А). Проведем в точках B и C перпендикуляры к прямым AB и AC. Они пересекут окружность в точках K и M соответственно. Углы FBK и PCM – прямые, тогда хорды FK и PM – диаметры, а середины этих хорд – несовпадающие центры данной окружности. Утверждение доказано?!

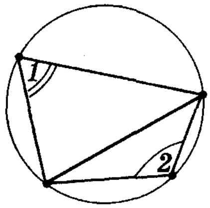
Для тех, кто считает, что точки K и M должны совпадать, т.к. углы FBK и PCM – прямые, предлагаем соответствующее «доказательство» на рисунке Б.



А



Б

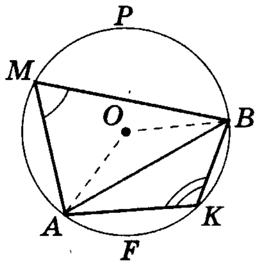


$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

Напомним обозначение:
$\in$ – «принадлежит»;
$\equiv$ – «совпадает» или «тождественное *равенство»*;
$\triangleq$ – «обозначим».

Опорная задача

Докажите, что в окружности сумма вписанных углов, опирающихся на одну и ту же хорду с вершинами по разные стороны от нее, равна 180°.



Дано: $M \in \smile APB$; $K \in \smile AFB$.
Доказать: $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$.

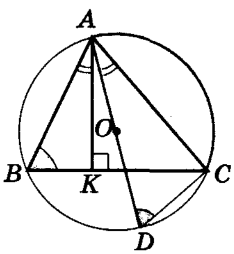
1) $\angle AMB = \frac{1}{2} \smile AFB$,

$\angle AKB = \frac{1}{2} \smile APB$ (как вписанные);

2) $\angle AMB + \angle AKB = \frac{1}{2}(\smile AFB + {}$

${} + \smile APB) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

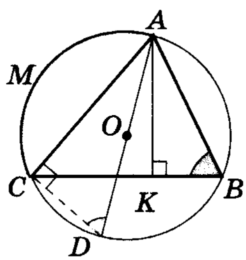
Ч. т. д.



$AK \equiv h_a$,
$AD \equiv 2R$
$\Downarrow$
$\angle CAO = \angle BAK$

Опорная задача

Докажите, если для треугольника ABC точка O – центр описанной окружности, а AK – высота, то $\angle OAC = = \angle BAK$.



Дано: $AK \perp CB$; $OA \equiv R$.
Доказать: $\angle OAC = \angle BAK$.

1) $AD \equiv 2R \to \angle DCA = 90^\circ$;
2) $\smile AMC \to \angle CDA = \angle CBA \triangleq \angle B$;
3) $\triangle CDA$ и $\triangle KBA$: $\angle OAC = 90^\circ - \angle B = = \angle BAK$.
Ч. т. д.

Мы рассмотрели случай расположения центра описанной окружности O внутри треугольника ABC. Другие случаи расположения центра описанной окружности рассмотрите самостоятельно.

Практическая работа 3

1. Начертите окружность, обозначьте ее центр и отметьте две точки на окружности. Цветным карандашом наведите одну из дуг окружности, ограниченную отмеченными точками.
2. Начертите центральный угол, отвечающий указанной вами дуге. С помощью транспортира измерьте градусную меру этого угла.
3. Начертите вписанный угол, опирающийся на эту самую дугу. Начертите еще несколько вписанных углов, опирающихся на эту дугу. С помощью транспортира измерьте их градусные меры и сравните с градусной мерой центрального угла. Сделайте вывод и запишите его.
4. Рассмотрите другую дугу окружности, наведите ее другим цветом и выполните для нее задания п. 2–3.
5. Сравните градусные меры двух дуг. Сделайте вывод и запишите его.
6. Сравните градусные меры вписанных углов, опирающихся на эти две дуги. Сформулируйте вывод и запишите его.
7. Найдите сумму центральных углов, которые соответствуют вашим дугам, и сумму двух вписанных углов, опирающихся на них. Сравните их.

Задание 3

1°. Какие углы AOB на рисунке 1.27 являются вписанными?

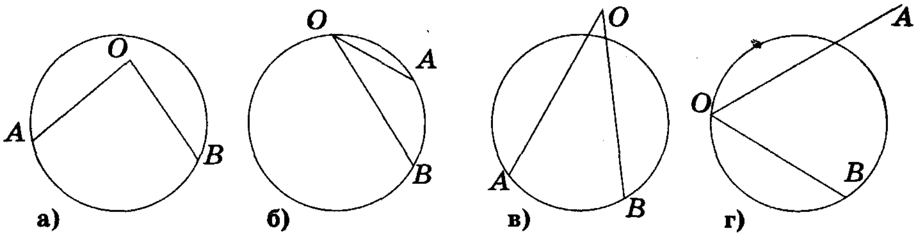


Рис. 1.27

2°. Точка O – центр окружности. Найдите градусную меру угла α по рисунку 1.28.

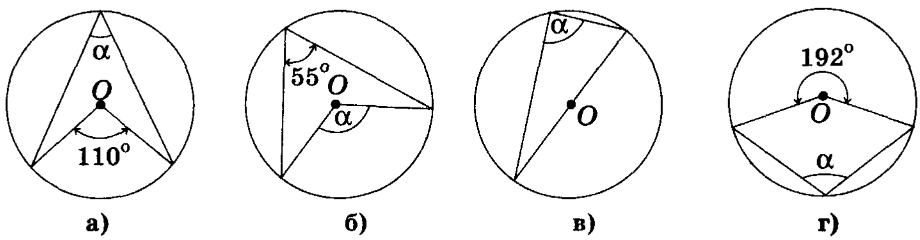


Рис. 1.28

3°. Вычислите градусную меру угла, вписанного в окружность, если соответствующий ему центральный угол равен: а) 48°; б) 143°; в) 180°; г) 322°; д) β.

4°. Вычислите градусную меру центрального угла окружности, если соответствующий ему вписанный угол равен: а) 13°; б) 90°; в) 128°; г) 87°; д) α.

5°. Найдите градусную меру вписанного угла ABC, если дуга AC, на которую он опирается, равна: а) 24°; б) 57°; в) 90°; г) 126°; д) 180°.

6. Найдите углы треугольника KMS по рисунку 1.29, если $KM = MS$, O – центр окружности, $\angle KOS = 242°$.

7. По рисунку 1.30 найдите градусную меру угла AOC, если центры окружностей на рисунках 1.30-а и 1.30-б – точки O и B соответственно.

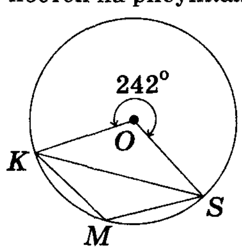


Рис. 1.29

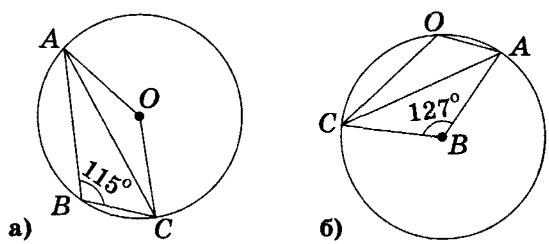


Рис. 1.30

8. Точка M окружности и ее центр O лежат по разные стороны от хорды AB. Найдите: а) угол AMB, если $\angle AOB = 132°$; б) угол AOB, если $\angle AMB = 118°$.

9*. Точка O – центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Найдите угол ABC, если $\angle AOC = 120°$. Сколько решений имеет задача?

Для любознательных

Окружность γ_1 (центр O_1) проходит через центр O_2 окружности γ_2 ($R_2 < R_1$). Из точки C окружности γ_1 провели касательные к окружности γ_2, которые пересекают γ_1 в точках A и B. Докажите, что $AB \perp O_1O_2$.

10. Хорды AB, BC и AC видны из центра окружности под углами соответственно: **а)** 110°, 120° и 130°; **б*)** 150°, 40° и 110°. Определите углы треугольника ABC.

11. Существует ли треугольник, стороны которого видны из центра описанной вокруг него окружности под углами 30°, 60° и 80°? Ответ обоснуйте.

12°. По рисунку 1.31 найдите x.

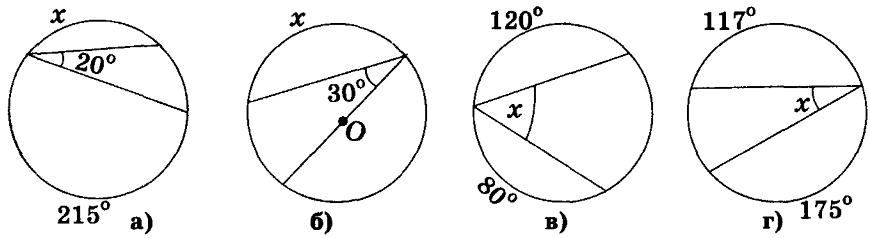


Рис. 1.31

13. Хорда делит окружность на дуги, меры которых относятся как 5 : 7. Определите градусные меры вписанных углов, опирающихся на эту хорду.

14. Точка O – центр окружности (рис. 1.32), $\angle BAC = 74°$, $\angle ACB = 54°$. Найдите: $\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle BOC$.

15*. Точки A, B, и C делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 7 : 6. Найдите углы треугольника ABC.

16. По рисунку 1.33 найдите $\angle SFT$, если точка O – центр окружности.

17. Точка O – центр окружности, $\angle ACB = 40°$ (рис. 1.34). Найдите угол ADB.

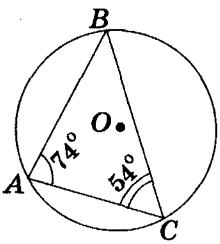


Рис. 1.32

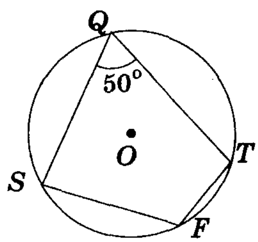


Рис. 1.33

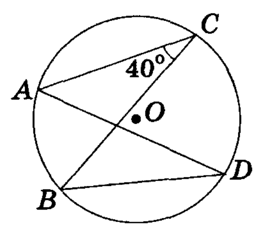


Рис. 1.34

18*. Точки B и D лежат на окружности с одной стороны хорды AC, $\angle ABC = 45°$. Найдите угол ADC.

19*. Точки K и L лежат на окружности по разные стороны хорды MN, $\angle MKN = 87°$. Найдите угол MLN.

20*. На окружности отметили точки: A, B, C, K. Хорды AB и BC взаимно перпендикулярны. Найдите углы AOC и AKC.

21*. Центральный угол AOB на 30° больше вписанного угла, опирающегося на хорду AB. Найдите угол AOB. (Рассмотрите два возможных случая.)

Для любознательных

1. За столом сидят 5 мальчиков и 6 девочек, а на столе стоит тарелка с булочками. Каждая девочка дала по одной булочке каждому знакомому мальчику. Потом каждый мальчик дал по одной булочке каждой незнакомой девочке. После этого тарелка оказалась пустой. Сколько булочек лежало на тарелке?

2. I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Докажите, что центр окружности, проходящей через точки A, B, I, лежит на прямой CI.

3. Вычислите углы равнобедренного треугольника, в котором центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно основания треугольника.

22. По рисунку 1.35 найдите угол MKL, если $\angle ABC = 35°$, а точка O – центр окружности.

23. Точка O – центр окружности, $\angle SMP = 20°$ (рис. 1.36). Найдите угол SPQ.

24*. На рисунке 1.37 точка O – центр окружности, $\angle UST = 25°$, $UT = TR$. Найдите угол UTR.

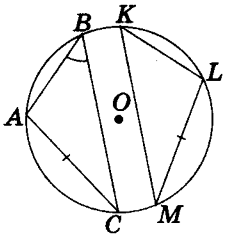


Рис. 1.35

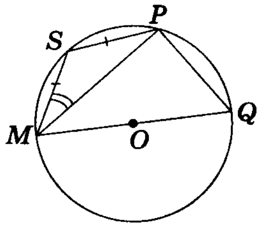


Рис. 1.36

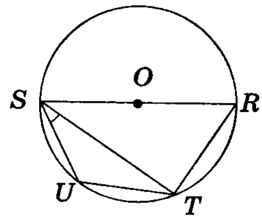


Рис. 1.37

25*. Хорда AB стягивает дугу 115°, а хорда AC – дугу 43°. Найдите угол BAC. (Рассмотрите два случая.)

26*. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 20°. Под каким углом видно каждый его катет из центра описанной окружности?

27*. На окружности последовательно размещены точки A, K, P и B. Хорда AB – диаметр, а $\angle KPA = 32°$. Найдите: а) $\angle KPB$; б) $\angle KAB$.

28*. Продолжение высоты CH прямоугольного треугольника ABC ($\angle C$ – прямой) делит дугу AB описанной вокруг этого треугольника окружности на дуги, одна из которых на 40° меньше другой. Найдите острые углы треугольника ABC.

29*. а) Докажите, что градусные меры дуг окружности, которые расположены между двумя параллельными хордами, равны. б) Будут ли равными дуги окружности, заключенные между хордой и параллельной этой хорде касательной? в) Будут ли равными дуги, заключенные между двумя параллельными касательными к окружности?

30*. Хорды AB и CK равны и параллельны, а хорды AK и CB пересекаются. Докажите, что AK и CB – диаметры.

31*. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC. На окружности между точками A и B, B и C, C и A расположены соответственно точки M, P, H. Найдите сумму углов AMB, BPC и CHA.

32*. В окружность вписан треугольник ABC. На окружности между точками A и B, B и C, C и A расположены соответственно точки K, L и T. Найдите сумму углов AKB, BLC и CTA.

33.** I и O – центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Найдите градусную меру угла C, если $\angle AIB = \angle OAB$.

34.** Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 40°. Одна из его боковых сторон – диаметр полуокружности, которая делится двумя другими сторонами данного треугольника на три части. Найдите градусные меры этих частей.

35.** Хорда AB равна радиусу окружности, а точка C расположена вне данной окружности. При этом отрезки AC и CB пересекают большую дугу окружности в точках K и H соответственно, и делят эту дугу в отношении 7 : 1 : 7. Найдите угол ACB.

Для любознательных

1. Сколько решений имеет задача: постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и медиане, проведенной из прямого угла?

2. Постройте равнобедренный треугольник по радиусу вписанной окружности и высоте, проведенной к основанию этого треугольника.

3. К двум окружностям, касающимся друг друга внешним образом в точке K, провели общую касательную K_1K_2 (K_1 и K_2 – точки касания). Найдите градусную меру угла K_1KK_2.

36*. Вокруг треугольника ABC описана окружность с центром O. Найдите угол между стороной AC и диаметром этой окружности, проведенным через точку A, если: **а)** $\angle ABC = 40°$; **б)** $\angle ABC = 140°$.

37**. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, а отрезок AH – высота. Докажите, что $\angle OAH = |\angle ABC - \angle BCA|$.

38**. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A провели секущую, которая пересекает окружности в точках K и M. Докажите, что мера угла KBM – величина постоянная для любой секущей, проходящей через точку A.

39**. Через точки A и B пересечения двух окружностей провели параллельные прямые, которые пересекают одну окружность в точках M_1 и N_1, а вторую – в точках M_2 и N_2. Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.

40**. Две окружности пересекаются в точках A и B. Продолжение хорд AC и BD первой окружности пересекают вторую окружность в точках E и P. Докажите, что CD и EP параллельны.

41*. Отложите (с помощью циркуля и линейки без делений) от заданной точки на окружности дугу, на которую будет опираться вписанный угол заданной градусной меры: **а)** 60°; б) 45°; **в)** 30°; г) α.

42*. Постройте касательную к окружности в заданной на ней точке и хорду, которая проходит через точку касания и отсекает дугу градусной меры 45°.

43*. Постройте геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

44*. Постройте прямоугольный треугольник по его высоте и медиане, проведенными к гипотенузе.

45*. Постройте прямоугольный треугольник по точкам: пересечения его высот, середине гипотенузы и основе высоты, проведенной к гипотенузе.

46**. Постройте равнобедренный треугольник по радиусу описанной окружности и: **а)** основанию; **б)** высоте, проведенной к основанию.

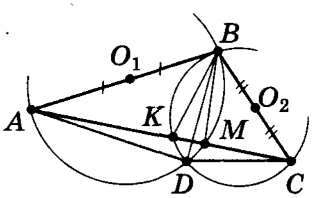
47**. Постройте геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под заданным углом.

48**. Постройте треугольник по радиусу описанной окружности, стороне и: **а)** медиане, проведенной к этой стороне; б) высоте, опущенной на эту сторону.

49**. Постройте две окружности одинакового радиуса, при пересечении которых от каждой из них отсекается дуга заданной градусной меры: **а)** 60°; б) 45°; в) 30°.

Для любознательных

Разгадайте софизм: **через две разные точки можно провести две разные прямые.**



На сторонах AB и BC треугольника ABC (см. рис.) как на диаметрах построим полуокружности, которые пересекутся в точке D. Соединим эту точку с точками A и C. Тогда $\angle ADB = \angle CDB = 90°$, как вписанные, опирающиеся на диаметр. Поэтому точки A, D и C лежат на одной прямой. А это означает, что через точки A и C провели две разные прямые?!

Первоапрельская шутка математика с сыном.

– Ты с самого утра ждал, что я тебя разыграю?
– Да, с самого утра.
– А я тебя не разыграл?
– Да.
– А ты с самого утра ждал розыгрыша?
– Ждал!
– Вот я тебя и разыграл!

§ 4. Измерение углов, образованных хордами, секущими и касательными

Теорема 1. **Угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой градусных мер дуг, на которые опираются этот угол и вертикальный ему.**

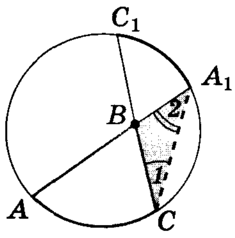
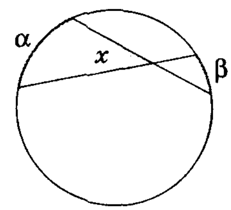


Рис. 1.38

Пусть дан угол с вершиной B внутри окружности, стороны которого пересекают окружность в точках A и C, а стороны вертикального ему угла пересекают окружность в точках A_1 и C_1 (рис. 1.38). Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile A_1C_1)$.



$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Доказательство

Угол ABC – внешний угол треугольника A_1BC, а углы AA_1C и C_1CA_1 – вписанные. Тогда

$$\angle ABC = \angle AA_1C + \angle C_1CA_1 = \frac{1}{2}\smile AC + \frac{1}{2}\smile A_1C_1,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. **Угол, вершина которого лежит вне окружности, а стороны пересекают окружность, измеряется полуразностью градусных мер двух дуг, расположенных внутри угла.**

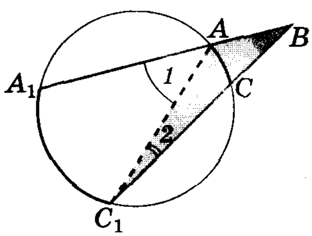
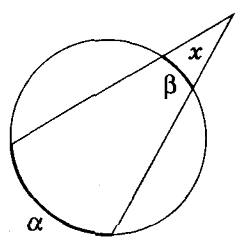


Рис. 1.39

Пусть стороны угла с вершиной B пересекают окружность в точках A, A_1 и C, C_1 соответственно (рис. 1.39). Нужно доказать, что

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile A_1C_1 - \smile AC).$$



$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Доказательство

Угол *1* – внешний угол треугольника ABC_1, при этом углы *1* и *2* – вписанные. Тогда

$$\angle 1 = \angle ABC + \angle 2,$$

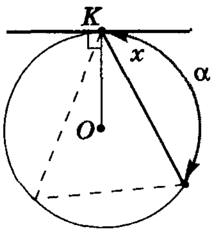
$$\angle ABC = \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}\smile A_1C_1 - \frac{1}{2}\smile AC.$$

Теорема доказана.

Для любознательных

1. В окружности провели две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD. Докажите, что: **а)** сумма градусных мер дуг AC и CD равна 180°; **б)** прямая, проходящая через точку пересечения хорд перпендикулярно к CB, делит отрезок AD пополам.

2. В треугольнике ABC угол B равен 60°, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке I. Докажите, что $ID = IE$.



$x = \frac{\alpha}{2}$

Теорема 3. Угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной градусной меры дуги, которая лежит внутри этого угла.

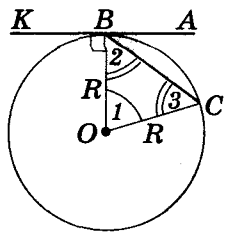


Рис. 1.40

Пусть даны: окружность, ее касательная AB и хорда BC (рис. 1.40). Нужно доказать, что

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\smile BC.$$

Доказательство

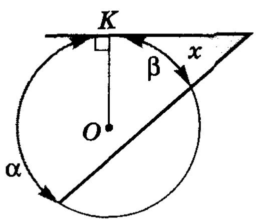
Соединим точки B и C с центром окружности O.

1) B – точка касания, OB – радиус окружности. Тогда $\angle ABO = 90°$.

2) OB и OC – радиусы окружности. Тогда $\angle 2 = \angle 3 = (180° - \angle 1) : 2$.

3) $\angle ABC = \angle ABO - \angle 2 = 90° - (180° - \angle 1) : 2 = \frac{1}{2}\angle 1$.

Теорема доказана.



$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$

Следствие 1. Угол между касательной и секущей окружности, проведенными из одной точки, измеряется полуразностью градусных мер дуг, расположенных внутри этого угла между секущей и касательной.

Согласно теореме: $\angle 2 = \angle 1 = \alpha : 2$ (рис. 1.41). Внешний угол треугольника AKB $\angle 3 = \beta : 2 = \angle 2 + x$. Тогда искомый угол $x = \angle 3 - \angle 2 = (\beta - \alpha) : 2$.

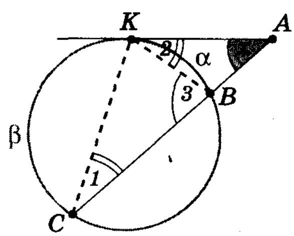


Рис. 1.41

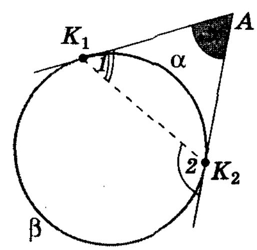
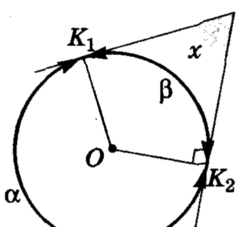


Рис. 1.42



$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$

Следствие 2. Угол между касательными, проведенными из одной точки к окружности, измеряется полуразностью градусных мер образовавшихся дуг.

Согласно теореме: $\angle 1 = \alpha : 2$, $\angle 2 = \beta : 2$ (рис. 1.42). Угол 2 – внешний угол треугольника K_1AK_2. Тогда $\angle 2 = \angle 1 + x$ и $x = \angle 2 - \angle 1 = (\beta - \alpha) : 2$.

Для любознательных

Задача талантливого итальянского самоучки, математика и изобретателя **Никколо Тартальи (1500–1557).**

Задан отрезок AB. Постройте с помощью линейки без делений и данного раствора циркуля, большего AB, равносторонний треугольник со стороной AB.

Практическая работа 4

1. Начертите окружность. Обозначьте ее центр и отметьте две точки на ней.
2. Через одну из двух отмеченных на окружности точек проведите касательную к окружности (вспомните опорную задачу № 8, стр. 253).
3. Соедините отмеченные точки хордой.
4. Цветным карандашом наведите одну из образовавшихся дуг окружности; начертите вписанный угол, который опирается на эту дугу. Другим цветом закрасьте угол между хордой и касательной, внутри которого расположена отмеченная дуга.
5. Измерьте транспортиром градусную меру вписанного угла и закрашенного угла между касательной и хордой. Если градусные меры этих углов совпали – вы выполнили практическую работу правильно. Почему?

6*. Составьте план практической работы, целью которой будет экспериментальное подтверждение формулы вычисления меры угла между пересекающимися хордами окружности.

7*. Составьте план практической работы, целью которой будет экспериментальное подтверждение формулы вычисления меры угла между двумя секущими, пересекающимися вне окружности.

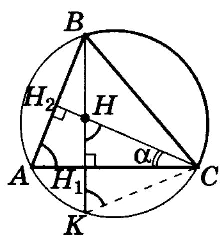
Задание 4

1. На окружности последовательно обозначили точки A, B, C и D. Секущие AB и CD пересекаются в точке P вне окружности. Найдите угол APD, если: **а)** разность градусных мер дуг AD и BC равна 90°; **б)** разность градусных мер дуг AD и BC равна 240°; **в)** $\smile BC = 20°$, $\smile DA = 130°$.
2. На окружности последовательно обозначили точки A, B, C и D. Известно, что $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 3 : 2 : 3 : 4$. Секущие AB и CD пересекаются в точке P. Найдите угол APD.
3. На окружности последовательно обозначили точки A, B, C и D. Известно, что $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 1 : 2 : 3 : 4$. Хорды AC и BD пересекаются в точке P. Найдите угол APD.
4. На окружности последовательно обозначили точки A, B, C и D. Хорды AC и BD пересекаются в точке P. Найдите $\smile AB$, если $\smile CD = 30°$, а $\angle APD = 86°$.
5. Через одну точку окружности провели хорду и касательную. Найдите угол между ними, если хорда стягивает дугу меры 40°.

Для любознательных

Опорная задача. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на окружности, описанной вокруг этого треугольника.

Решение:



1) $\angle A = \angle BKC$ (опираются на общую $\smile BC$, см. рис.).

2) $\angle KHC = \angle A$ как углы, образованные взаимно перпендикулярными сторонами.

3) $\angle KHC = \angle A = \angle BKC$, следовательно $\triangle KCH$ – равнобедренный, а CH_1 – его высота и медиана. Тогда точки H и K – симметричны относительно AC.

4) Согласно аксиомам об откладывании углов и отрезков, существует только одна точка, симметричная данной относительно заданной прямой. Тогда точка K – искомая. Ч. т. д.

Случаи прямоугольного и тупоугольного треугольников рассмотрите самостоятельно.

Решите самостоятельно такие задачи.

1. Постройте треугольник по положению его вершины, ортоцентра и центра описанной окружности вокруг этого треугольника.
2. Постройте треугольник ABC по положению его вершины A, ортоцентра H и середины стороны BC.

6. В окружности провели хорду AB и касательную к окружности в точке A. Угол между касательной и хордой равен $60°$. Найдите центральный угол, который опирается на хорду AB.
7. В окружности провели хорду AB, равную радиусу этой окружности. Найдите угол между хордой AB и касательной к этой окружности в точке A.
8. В окружности провели хорды AB и BC. Известно, что $\smile AB : \smile BC = 9 : 4$ и $BC \perp AC$. Найдите угол ABC.

9*. В окружности провели две равные хорды AB и BC. Докажите, что прямая AC параллельна касательной к окружности в точке B.

10*. На окружности отмечены точки A, B и C. Известно, что $\smile AB : \smile BC : \smile CA = 5 : 2 : 3$. В точке C к окружности провели касательную. Прямая AB пересекает касательную в точке P. Найдите угол APC.

11*. На окружности отмечены точки A и B. Известно, что градусные меры дуг окружности с концами в этих точках относятся как $5 : 3$. Найдите угол между касательными, проведенными к окружности в точках A и B.

12*. Окружность касается сторон угла. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность делится точками касания, если градусная мера заданного угла равняется: **а)** $60°$; б) γ.

13*. Докажите, что из любой точки вне окружности диаметр окружности, продолжение которого не проходит через эту точку, видно под острым углом.

14*. Докажите, что из любой точки внутри окружности диаметр окружности, продолжение которого не проходит через эту точку, видно под тупым углом.

15**. Из точки P к окружности (с центром O) провели две касательных PA и PB, а через точку B – диаметр BC. Докажите, что CA и OP – параллельны.

16**. Две окружности разных радиусов касаются друг друга внешним образом в точке M. Через точку M провели прямую, пересекающую данные окружности в точках A и B, и две касательные к окружностям в точках A и B. Докажите параллельность этих касательных.

17**. Две окружности пересекаются в точках A и B. При этом вторая окружность проходит через центр первой. Касательная ко второй окружности в точке B пересекает первую окружность в точке C. Докажите, что $AB = BC$.

18**. Через концы диаметра AB окружности провели две прямые: через точку A – касательную l; через точку B – секущую m, P – вторая точка ее пересечения с окружностью. Проведем через точку P касательную n и обозначим точки пересечения l с m и n как M и N соответственно. Докажите, что треугольник MNP – равнобедренный.

Для любознательных

1. В сумке больше одного кенгуру. Первый кенгуру сказал: «Нас тут шестеро» – и выпрыгнул из сумки. Каждую последующую минуту один из оставшихся кенгуру говорил: «Все, кто выпрыгивал раньше меня, говорили неправду» – и выпрыгивал из сумки. Сколько кенгуру сказали правду?

2. На улице Цветной в ряд стоят пять домов: синий, красный, желтый, розовый и зеленый. Дома имеют номера от 1 до 5, при этом синий и желтый – четные. Красный дом соседствует только с синим. Синий дом расположен рядом с зеленым. Какого цвета дом № 3?

3. Вася живет на 9-м этаже в доме, на каждом этаже которого расположено по 6 квартир. В доме его друга Пети на каждом этаже по 7 квартир, и живет он на 7-м этаже. При этом номера квартир Васи и Пети совпадают. Найдите номер квартир этих мальчиков.

4. Остров Мечта имеет своеобразный график погоды: в понедельник и в среду всегда идет дождь, в субботу – туман, в другие дни недели – солнце. Группа туристов хочет отдохнуть на этом острове 44 дня. В какой день недели им нужно приехать на остров, чтобы количество солнечных дней было наибольшим?

§ 5. Сегмент, вмещающий данный угол

Сегментом называют часть круга, ограниченную дугой окружности и хордой, стягивающей эту дугу.

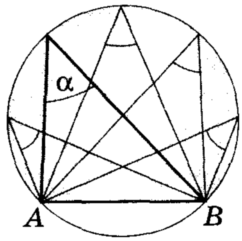


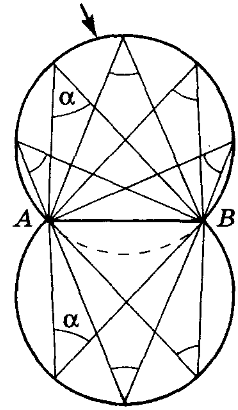
Рис. 1.43

Каждая хорда делит круг на два сегмента. Если вписанный угол обозначить как α, а дугу, на которую он опирается, – AB (рис. 1.43), то затемненный на рисунке сегмент соответствует множеству вписанных углов градусной меры α.

Докажем, что *геометрическим местом точек определенной полуплоскости относительно AB, из которых отрезок AB видно под углом α, является дуга соответствующего сегмента.* Т. е. не существует углов с вершинами не на дуге такого сегмента, которые опираются на отрезок AB и равны углу α.

Доказательство проведем от противного. Пусть существует такой угол, вершина которого M расположена внутри соответствующего сегмента или вне его (рис. 1.44). Точку пересечения прямой AM с дугой сегмента обозначим как C. Тогда $\angle ACB = \angle AMB = \alpha$, чего быть не может, так как для треугольника CMB один из этих углов является внутренним, а другой – внешним.

ГМТ, из которых $[AB]$ видно под углом α



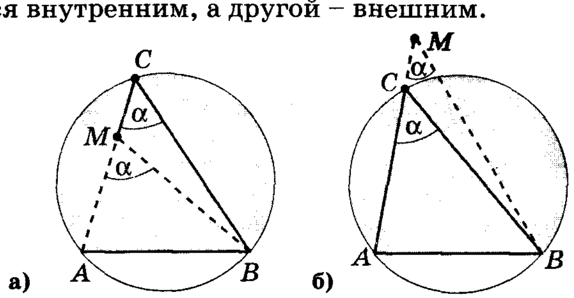


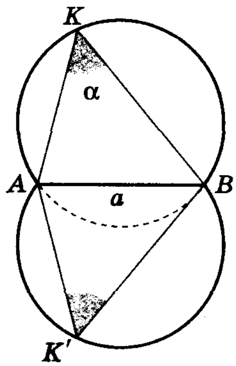
Рис. 1.44

Напомним обозначение:

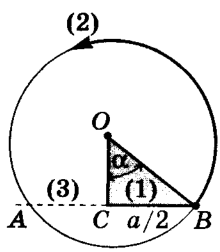
$[AB]$ – отрезок AB.

Для любознательных

1. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC, и $AB = CH$. Найдите угол ACB.
2. Отрезки AP и BK – высоты остроугольного треугольника ABC, точка H – его ортоцентр. Точку пересечения отрезков AP и BK обозначили через T. Докажите, что точки C, H, P, T лежат на одной окружности.
3. В треугольнике ABC провели высоту CH и биссектрису CK, точка N – проекция точки K на сторону BC, угол ABC равен α, отрезки HN и AC – параллельны. Найдите углы BAC и ACB.
4. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$). Окружность γ с центром O касается прямой BC в точке B и продолжения AC (за точку C) в точке D. Докажите, что точка пересечения прямых AB и DO лежит на окружности γ.
5. Окружность касается сторон AP и BP треугольника ABP в точках C и D соответственно, центр окружности лежит на стороне AB. Докажите, что $\angle CHP = \angle PHD$, где PH – высота треугольника ABP.

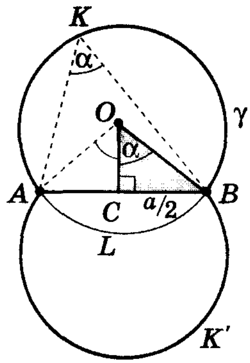


Строим $\smile AKB$ по a и α:



Опорная задача

Постройте геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под заданным острым углом.



Дано: *отрезок* a, угол α.

Построить: $\smile AKB$: $AB = a$ (*1*); $\angle AKB = \alpha$ (*2*).

План построения

1) $a \to \frac{1}{2}$.

2) $\frac{1}{2}a, \alpha \to \Delta OCB$ ($\angle OCB = 90°$, $CB = \frac{1}{2}a$, $\angle COB = \alpha$).

3) *Чертим окружность* γ *с центром* O *и радиусом* OB.

4) *Продолжим* $CB \to (CB) \cap \gamma = A$.

5) $\smile AK'B$ *– симметрична* $\smile AKB$ *относительно* AB. $\smile AKB$ и $\smile AK'B$ *– искомое ГМТ.*

Доказательство

По построению имеем: $\angle OCB = 90°$, $CB = \frac{1}{2}a$, $\angle COB = \alpha$, $OA = R = OB$, $\smile AK'B$ симметрична $\smile AKB$ относительно AB.

Доказать: (*1*) и (*2*).

1) ΔAOB: $OA = R = OB$, OC – высота, $CB = \frac{a}{2}$. Тогда ΔAOB – равнобедренный, OC – биссектриса и медиана $\to$ $\angle AOB = 2\alpha$, $AB = a$, и (*1*) выполняется.

2) $\smile ALB : \angle AOB = 2\alpha$ – центральный, $\angle AKB$ – вписанный $\to \angle AKB = \alpha$, и (*2*) выполняется для $\smile AKB$.

3) $\smile AK'B$ симметрична $\smile AKB$ относительно AB. Тогда $\smile AK'B = \smile AKB$, и (*2*) выполняется и для $\smile AK'B$.

Ч. т. д.

Самостоятельно рассмотрите случай, когда заданный угол тупой.

Для любознательных

1. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую так, чтобы ее часть, расположенная внутри окружностей, была заданной длины.

2. Через точку M внутри заданной окружности проведите хорду AB так, чтобы точка M делила ее на отрезки, разность длин которых равна длине заданного отрезка n.

3. Постройте треугольник по радиусам вписанной в него и описанной вокруг него окружностей и стороне.

4. Постройте треугольник по радиусу описанной окружности, стороне и сумме двух других сторон.

5. Постройте треугольник по точкам N_1, N_2, N_3, симметричным ортоцентру искомого треугольника относительно его сторон.

6. С помощью только линейки проведите из заданной точки перпендикуляр к диаметру заданной окружности.

Задание 5

1. Докажите, если точки B и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AD и $\angle ACD = \angle ABD$, то точки A, B, C, D принадлежат одной окружности.
2. Докажите, если точки B и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AD и $\angle ABD + \angle ACD = 180°$, то точки A, B, C, D принадлежат одной окружности.

3*. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$.

4*. Точки K и P – основания высот, проведенных к двум сторонам остроугольного треугольника, а M – середина третьей его стороны. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку KP проходит через точку M.

5*. Точка C движется по дуге окружности, которую стягивает хорда AB. Найдите траекторию инцентра треугольника ABC.

6*. Постройте точку, из которой заданные отрезки AB и BC видны под заданными углами α и β соответственно.

7*. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведенной к заданной стороне.

8*. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и медиане, проведенной к заданной стороне.

9**. Постройте треугольник по двум углам и медиане, проведенной к одной из сторон.

10**. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и радиусу вписанной окружности.

11**. Найдите геометрическое место точек, из которых заданную окружность видно под углом 60°.

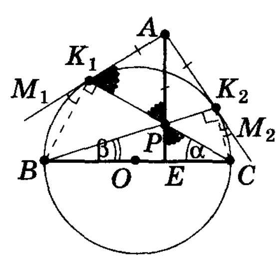
12**. Найдите геометрическое место точек, из которых касательные, проведенные к данной окружности, имеют заданную длину.

Для любознательных

Древнегреческий ученый **Архимед** (III в. до н. э.) всемирно известен своими техническими открытиями. Но не менее важны и его математические исследования, в том числе и в геометрии окружностей. Особенно много теорем об окружности он сформулировал и доказал в книге «Книга лемм»*. Вот одна из них.

Лемма Архимеда. **Если из точки A провели касательные AK_1 и AK_2 к окружности диаметра BC, а хорды CK_1 и BK_2 пересекаются в точке P, то $AP \perp BC$.**

Доказательство



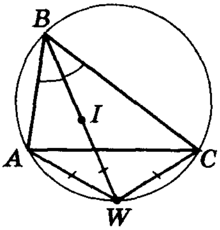
1) Пусть $\smile BK_1 = 2\alpha$, а $\smile CK_2 = 2\beta$. Тогда $\angle M_1K_1B = \alpha$, $\angle M_2K_2C = \beta$ (как углы между касательными и хордами, проведенными в точку касания); $\angle K_1AK_2 = (180° + 2\alpha + 2\beta - (180° - 2\alpha - 2\beta)) : 2 = 2\alpha + 2\beta$ (как угол между касательными, проведенными из одной точки).

2) $\angle K_1PK_2 = \angle BPC = 180° - \alpha - \beta$, $AK_1 = AK_2$. Окружность с центром A и радиусом $AK_1 = AK_2$ проходит через точку P ($\angle K_1PK_2$ будет вписанным, а $\angle K_1AK_2$ – центральным). Тогда $AK_1 = AP$ (как радиусы).

3) $AK_1 = AP$, тогда $\angle AK_1P = \angle APK_1$ и $\angle EPC = \angle APK_1 = \angle AK_1P = (180° - 90° - \alpha) = 90° - \alpha$.

4) Из $\triangle EPC$: $\angle PEC = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$. Ч. т. д.

*Замечание. ***Леммой математики называют небольшую вспомогательную теорему, которую обычно рассматривают перед доказательством основной теоремы.***

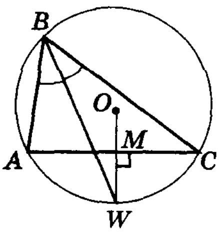


$WA = WI = WC$

§ 6. Свойство точки пересечения продолжения биссектрисы треугольника с описанной вокруг него окружностью

Теорема. Точка пересечения биссектрисы угла треугольника (при определенной его вершине) с описанной вокруг этого треугольника окружностью равноудалена от инцентра треугольника и двух других его вершин.

Пусть продолжение биссектрисы l_B треугольника ABC пересекает окружность, описанную вокруг этого треугольника, в точке W (рис. 1.45). Нужно доказать, что $WI = WA = WC$.



$WM \perp AC$

$\Downarrow$

$O \in WM$

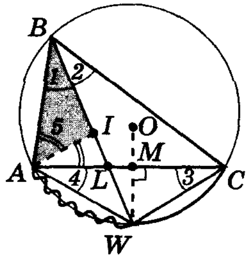


Рис. 1.45

Доказательство

1) Углы *1* и *3* – вписанные и опираются на общую дугу AW.

Тогда $\angle 1 = \angle 3 = \frac{1}{2}\angle B$.

2) Углы *2* и *4* – вписанные и опираются на общую дугу CW.

Тогда $\angle 2 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle B$.

3) $\angle 4 = \frac{1}{2}\angle B = \angle 3$, тогда $WA = WC$.

4) I – инцентр, тогда $\angle IAC = \angle 5 = \frac{1}{2}\angle A$.

5) Угол AIW – внешний угол треугольника AIB. Тогда

$\angle AIW = \angle 1 + \angle 5 = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle A = \angle IAW$.

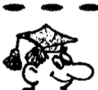
Отсюда $WI = WA = WC$.

Теорема доказана.

Трактаты Архимеда «Книга о кругах, которые касаются», «О шаре и цилиндре», «О телах вращения», «Об измерении круга» и др. имели большое значение для развития математики.

Следствие 1. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения продолжения биссектрисы треугольника с описанной вокруг него окружностью к стороне треугольника, которую пересекает эта биссектриса, проходит через центр описанной окружности.

Треугольник AWC – равнобедренный (рис. 1.45), и его высота WM является и серединным перпендикуляром к отрезку AC.

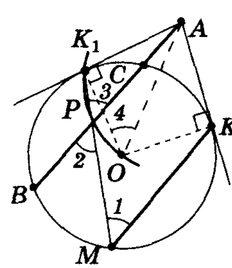


Для любознательных

Архимед был великим геометром древнего мира (см. стр. 35). Попробуйте (за предложенным рисунком) доказать такую *лемму Архимеда*.

Если из точки A провести к окружности две касательные AK_1 и AK_2 и секущую, пересекающую окружность в точках C и B, а из точки K_2 – хорду $K_2M \parallel AB$, то прямая K_1M делит хорду BC пополам.

Больше узнать об геометрических исследованиях Архимеда можно в главе VI, стр. 212.



C Следствие 2. **В неравнобедренном треугольнике биссектриса всегда расположена между его высотой и медианой, проведенными из одной вершины.**

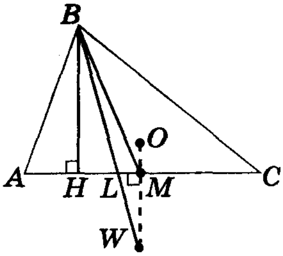
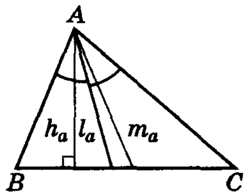


Рис. 1.46

Отрезок BW, содержащий биссектрису треугольника l_B, пересекает его сторону AC в точке L (рис. 1.46). Проекциями концов этого отрезка на прямую AC будут точки: H (основание высоты h_B) и M (середина AC). Точки B и W лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Тогда точка L будет внутренней точкой отрезка HM.

Метод вспомогательной окружности – решение задач с использованием свойств построения окружности.



$h_a \leqslant l_a \leqslant m_a$

Замечание. Обратите внимание, что утверждение о взаимном расположении высоты, медианы и биссектрисы треугольника, которые проведены из одной вершины, мы осуществили с помощью *дополнительного построения окружности*. Такой метод называют ***методом вспомогательной окружности***.

Задание 6

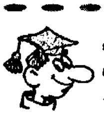
1. Отрезки AH и AK – высота и биссектриса треугольника ABC соответственно, а O – центр окружности, описанной вокруг этого треугольника. Докажите, что AK – биссектриса угла OAH.
2. Пусть W_a, W_b, W_c – точки пересечения продолжения биссектрис равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) с описанной вокруг этого треугольника окружностью. Докажите, что $AW_a = CW_c$.
3. Докажите, что центр окружности, проходящей через две вершины треугольника, и его инцентр принадлежат окружности, описанной вокруг данного треугольника.
4. Пусть W_a, W_b, W_c – точки пересечения продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC с описанной вокруг этого треугольника окружностью. Докажите, что: а) равенство $AW_a = BW_b = CW_c$ – признак того, что треугольник ABC – правильный; б) инцентр треугольника ABC является ортоцентром треугольника $W_aW_bW_c$; в) $AW_A = BW_B = CW_C > P_{\triangle ABC}$.
5. Высота, биссектриса и медиана треугольника, проведенные из одной вершины, делят угол треугольника при этой вершине на четыре равные части. Найдите углы данного треугольника.
6. Высота и медиана треугольника, проведенные из одной вершины, делят угол треугольника при этой вершине на три равные части. Найдите углы данного треугольника.
7. Постройте треугольник ABC по положению его трех точек: вершины A, середины стороны BC и точке пересечения биссектрисы угла A со стороной BC.
8. Постройте треугольник по его высоте, биссектрисе и медиане, проведенными из одной вершины искомого треугольника.
9. Постройте треугольник по точкам пересечения его биссектрис с описанной вокруг этого треугольника окружностью.

Для любознательных

Воспользовавшись *методом вспомогательной окружности*, решите задачу. Через некоторую точку плоскости провели три прямые так, что угол между любыми двумя из них равен 60°. Докажите, что основания перпендикуляров, проведенных из произвольной точки плоскости к этим прямым, являются вершинами равностороннего треугольника.

Задания для повторения главы I

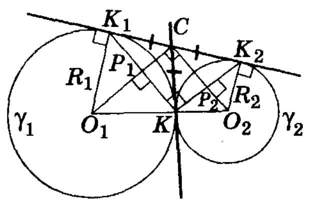
1°. Чему равна градусная мера полного угла?
2°. Дайте определение центрального угла.
3°. Зависит ли градусная мера центрального угла от радиуса окружности?
4°. В каких пределах изменяется градусная мера центрального угла?
5°. Как определяют градусную меру дуги окружности?
6°. Сформулируйте: **а)** теорему о дугах, которые стягивают равные хорды; **б)** теорему, обратную предыдущей. Справедливы ли эти теоремы в случае разных окружностей с одинаковыми радиусами?
7. Докажите теоремы п. 6.
8°. Какой угол называется вписанным?
9°. Сформулируйте теорему о мере вписанного угла.
10. Докажите теорему п. 9.
11°. Сформулируйте следствия теоремы п. 9.
12*. Как найти градусную меру угла между:
а) касательной и хордой, проведенной через точку касания;
б) двумя пересекающимися хордами окружности;
в) двумя секущими одной окружности;
г) секущей и касательной одной окружности;
д) двумя касательными к одной окружности?
13. Хорда делит окружность на две дуги так, что градусная мера одной в 4 раза больше градусной меры другой дуги. Найдите: **а)** градусные меры обеих дуг; **б)** градусные меры вписанных углов, опирающихся на эти дуги.
14. В окружность вписали равносторонний треугольник. Под каким углом из центра окружности видно: **а)** сторону этого треугольника; **б*)** отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника?
15. Точки A, B, C делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 1 : 2 : 3. Найдите: **а)** углы треугольника ABC; **б*)** на какие части делит большую дугу окружности продолжение соответствующей высоты треугольника.
16*. Найдите угол: **а)** BKC по рисунку 1.47; **б)** AOD по рисунку 1.48; **в)** CAK по рисунку 1.49; **г)** AKE по рисунку 1.50; **д)** GFT по рисунку 1.51.



Для любознательных

Опорная задача *о двух касающихся окружностях.*

К двум касающимся окружностям провели общую внешнюю и общую внутреннюю касательные. **Докажите, что: а) внутренняя касательная делит отрезок внешней касательной (ограниченный точками касания) пополам; б) угол, образованный хордами окружностей с концами в точках касания, — прямой; в) угол, образованный отрезками, соединяющими центры окружностей с точкой пересечения касательных, — прямой.**



Дано: K_1K_2 и CK – *общие касательные* к γ_1 и γ_2.
Доказать: а) $K_1C = CK_2$, б) $\angle O_1CO_2 = 90°$; в) $\angle K_1KK_2 = 90°$.

1) K_1C и CK – касательные к γ_1; K_2C и CK – касательные к γ_2. Тогда $K_1C = CK = CK_2$ и (а) доказано.
2) $\triangle K_1KK_2$: $K_1C = CK = CK_2 \to \angle K_1KK_2 = 90°$ (см. форзац 1) и (б) доказано.
3) Точки C, P_1, O_1 лежат на прямой (т. к. CP_1 и O_1P_1 – сер. пер. к K_1K_2), CO_1 – биссектриса угла K_1CK. Аналогично: CO_2 – биссектриса угла K_2CK. Тогда $\angle O_1CO_2 = 90°$ как угол между биссектрисами смежных углов, и (в) доказано.

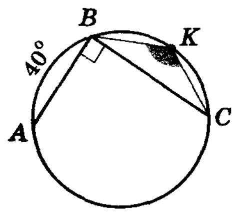


Рис. 1.47

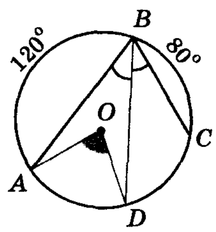


Рис. 1.48

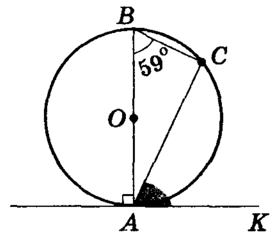


Рис. 1.49

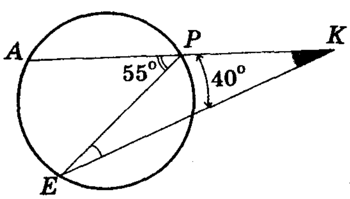


Рис. 1.50

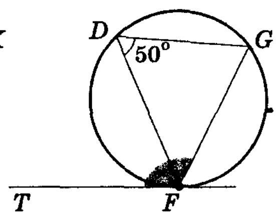


Рис. 1.51

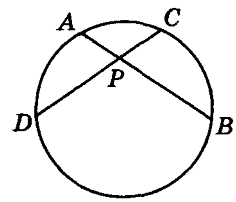


Рис. 1.52

17*. Какими могут быть углы равнобедренного треугольника, если его основание видно из центра описанной вокруг этого треугольника окружности под углом 40°?

18*. **а)** Точки касания A и B двух касательных к окружности делят окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 3. Найдите углы треугольника ABC, где C – точка пересечения касательных.

б) Угол между касательными, проведенными к окружности, в 2 раза больше угла между радиусами, проведенными в точки касания. Найдите угол между касательными.

в) Из точки M к окружности провели две касательных MA и MB (A и B – точки касания). Отрезок, соединяющий центр окружности и точку M, пересекает окружность в точке K. Угол AMB в 2 раза меньше угла AKB. Найдите угол AMB.

г) Угол между касательными к окружности в 2 раза больше вписанного угла, который опирается на дугу, ограниченную точками касания. Найдите угол между касательными.

19*. **а)** Хорды AB и CK пересекаются в точке P, при этом $AP = PC$. Докажите, что $BP = PK$. **б)** Равные хорды AB и CD пересекаются в точке P (рис. 1.52). Докажите, что $PC = PA$.

20. Докажите, что: **а*)** на рисунке 1.53 $\angle APC = \angle BPD$; **б**)** на рисунке 1.54 $AB \perp DC$.

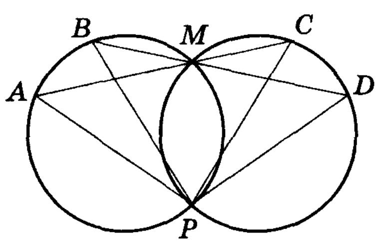


Рис. 1.53

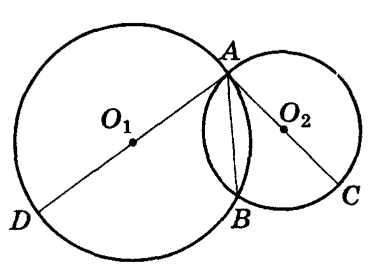


Рис. 1.54

21*. Постройте касательную к заданной окружности параллельно заданной прямой.

Готовимся к тематической аттестации № 1

Вариант I

1. Точки A и B делят окружность на две дуги, одна из которых на 210° больше другой. Найдите:
   (1 б.) **а)** градусные меры этих дуг;
   (1 б.) **б)** угол, под которым хорду AB видно из центра окружности;
   (1 б.) **в)** меры вписанных углов, опирающихся на хорду AB;
   (2 б.) **г)** углы треугольника ABC, где CA и CB – касательные.
2. (3 б.) Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 56°, а его боковая сторона является диаметром полуокружности. Найдите градусные меры дуг, на которые две другие стороны треугольника делят эту полуокружность.
3. (4 б.) Хорды AB и CD равны. Концы этих хорд соединили отрезками прямых – новыми хордами. Докажите, что одна из пар этих хорд, AC и BD или BC и AD, – параллельны.

Вариант II

1. Точки A и B делят окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 3. Найдите:
   (1 б.) **а)** градусные меры этих дуг;
   (1 б.) **б)** угол, под которым хорду AB видно из центра окружности;
   (1 б.) **в)** меры вписанных углов, опирающихся на хорду AB;
   (2 б.) **г)** углы треугольника ABC, где CA и CB – касательные.
2. (3 б.) Хорда AB делит окружность на две дуги. На одной из них отметили точки C и D так, что углы CAB и ABD равны. Докажите, что хорды AB и CD параллельны.
3. (4 б.) Диаметр окружности AB перпендикулярен к хорде CD. Точка M окружности не совпадает ни с точкой C, ни с точкой D. Докажите, что лучи MA и MB – биссектрисы углов, образованных при пересечении прямых MC и MD.

Для любознательных

Аполлоний Пергский (прим. 262–190 гг. до н. э.), автор многих математических работ, был младше Архимеда лет на 25. Из его 8 книг о теории кривых до нас дошли первые четыре в греческом оригинале, пятая, шестая и седьмая – в арабском переводе, восьмая восстановлена по рассказам о ней. Именно в последней Аполлоний Пергский рассматривал задачи на построение окружности:

«Дано три фигуры, каждая из которых либо точка, либо прямая, либо окружность. Постройте окружность, которая проходит через каждую из заданных точек, касается каждой из заданных прямых и каждой из заданных окружностей».

Решите несколько таких задач.

1. Постройте окружность, которая проходит через три заданные точки.
2. Постройте окружность, которая касается трех заданных попарно непараллельных прямых. (Сколько решений имеет задача?)
3. Постройте окружность, которая касается двух данных параллельных прямых и проходит через заданную точку между ними.
4. Постройте окружность, которая касается двух данных параллельных прямых и данной окружности.
5. Постройте окружность, которая касается двух данных концентрических окружностей и проходит через заданную точку на одной из них.
6. Постройте окружность, которая касается двух данных концентрических окружностей и проходит через заданную точку между ними.

МНОГОУГОЛЬНИКИ. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

В этой главе мы вспомним общие свойства многоугольников и остановимся на изучении четырехугольников, в том числе и уже знакомых вам: параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата и трапеции. Каждый из них имеет ряд интересных и важных свойств. Из всех этих свойств мы будем изучать только некоторые – именно те, что необходимы для дальнейшего изучения геометрии.

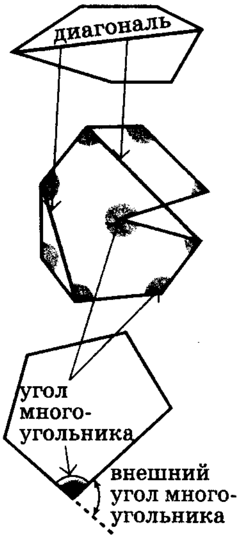
Вы познакомитесь с понятием площади плоской геометрической фигуры. Пусть вас не удивляет слово «познакомитесь». Вы решали задачи на вычисление площади геометрических фигур еще в младшей школе и, казалось бы, знаете, что такое площадь. Но так ли это в действительности? Попробуйте ответить на вопрос: «Что такое площадь?» и вы поймете, что это не так уж и просто.

§ 7. Многоугольники и их свойства

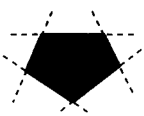
С понятиями *ломаная* и *многоугольник* вы уже знакомы. Напомним, что:

- ***Многоугольником*** **называется внутренняя часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной не пересекающей саму себя.**
- Звенья такой ломаной называются *сторонами* многоугольника, а вершины ломаной – *вершинами* многоугольника.
- *Периметр* многоугольника – сумма длин всех его сторон.
- *Диагонали* многоугольника – отрезки, соединяющие две несоседние вершины многоугольника (например, AC на рис. 2.1).

Если число сторон *много*угольника известно, то *«много»* → *«число»*: *пяти*угольник, *сто*угольник…



- *Угол многоугольника* (*его еще называют внутренним*) – угол с вершиной в вершине многоугольника, стороны его содержат две соседние (смежные) стороны многоугольника, а сам угол содержит многоугольник (рис. 2.2). *Внешний угол* многоугольника – угол, смежный углу многоугольника (рис. 2.3).
- Многоугольники бывают *выпуклыми* и *невыпуклыми* (см. поле). **У выпуклого многоугольника нет ни одного угла, превышающего 180°.** Мы будем изучать свойства именно выпуклых многоугольников.
- *Правильным* называют многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.
- *Одноименными* называют многоугольники с одинаковым числом вершин.
- *Вписанным в окружность* называют многоугольник, у которого все вершины лежат на окружности.
- *Описанным вокруг окружности* называют многоугольник, все стороны которого касаются окружности.



выпуклый

невыпуклый

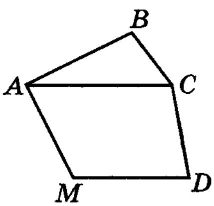


Рис. 2.1

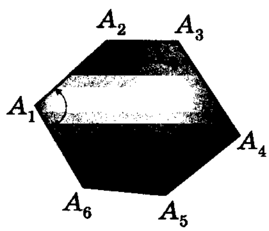


Рис. 2.2

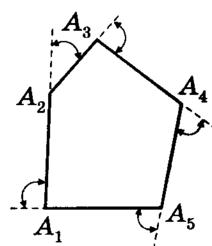
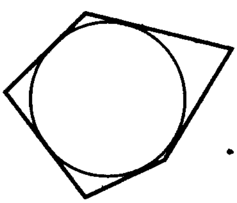


Рис. 2.3

СВОЙСТВА МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Свойство 1. **Любая сторона многоугольника меньше суммы всех его других сторон.**

Это свойство непосредственно следует из уже знакомого вам утверждения, что кратчайший путь между двумя точками – по прямой. Докажем это.



Описанный многоугольник

Теорема. **Длина отрезка прямой, соединяющего две точки, меньше длины любой ломаной с концами в этих точках.**

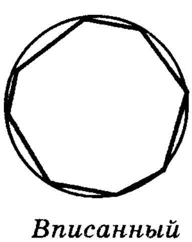
Доказательство

1) Отметим на плоскости точку B, не принадлежащую заданной прямой MN, и соединим точки M и N ломаной MBN (рис. 2.4).

Для треугольника MBN выполняется неравенство

$$MB + BN > MN,$$

и для ломаной из двух звеньев утверждение теоремы доказано.



Вписанный многоугольник

2) Обозначим на плоскости точку C, не принадлежащую прямым BM, BN и MN (рис. 2.5). Соединив ее с точками M и N, получим ломаную $MBCN$.

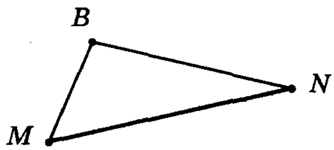


Рис. 2.4

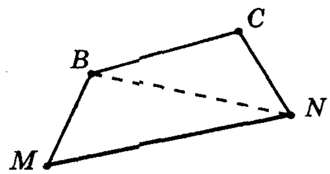


Рис. 2.5

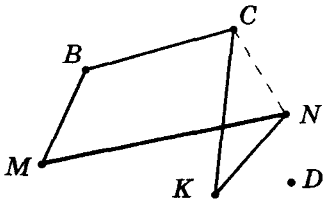
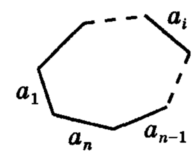


Рис. 2.6



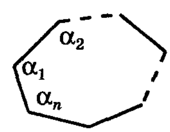
$a_i < a_1 + \dots + a_{i-1} +$
$+ a_{i+1} + \dots + a_n$

Из неравенства для сторон треугольника BCN имеем: $MB + (BC + CN) > MB + BN > MN$, и утверждение теоремы выполняется для трех звеньев.

3) Последовательно увеличивая число вершин ломаной (рис. 2.6) – аналогично предыдущему, получим правильность утверждения теоремы для ломаной с любым количеством звеньев, соединяющей точки M и N.

Свойство 2

Т Теорема. **Сумма градусных мер углов выпуклого многоугольника, который имеет n вершин, равна $180°(n-2)$.**



$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n =$
$= 180°(n-2)$

Доказательство

Соединим одну из вершин данного многоугольника со всеми другими его вершинами (рис. 2.7) – получим $(n-3)$ диагоналей, которые делят многоугольник на $(n-2)$ треугольников. Сумма углов многоугольника равна сумме углов этих треугольников, т. е. $180°(n-2)$.

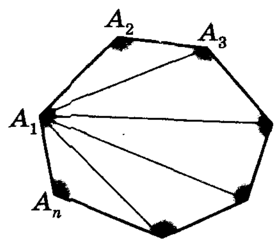


Рис. 2.7

Теорема доказана.

Свойство 3

С Следствие. **Сумма градусных мер внешних углов многоугольника (по одному при каждой из вершин) равна 360°.**

Сумма градусных мер внутреннего и внешнего углов многоугольника при одной вершине равна 180° (как сумма смежных углов). Всего таких пар будет n (рис. 2.8). Тогда сумма градусных мер внешних углов многоугольника равна: $n \cdot 180° - 180°(n-2) = 2 \cdot 180° = 360°$.

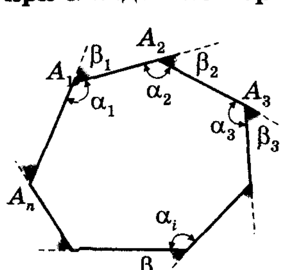
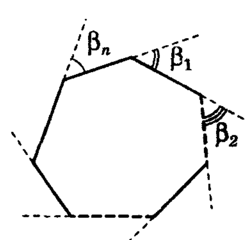
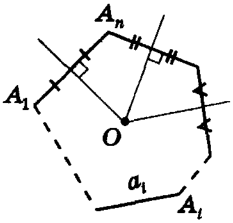


Рис. 2.8



$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n =$
$= 360°$

$A_1 ... A_n$ – *вписанный*



Серединные перпендикуляры к сторонам пересекаются в одной точке O.

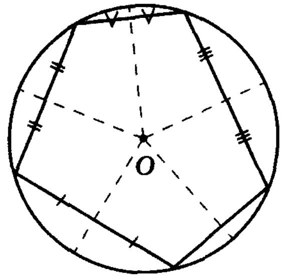
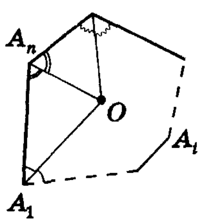


Рис. 2.9

Свойство 4. **Многоугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда серединные перпендикуляры ко всем его сторонам пересекаются в одной точке. Эта точка – центр окружности (рис. 2.9).**

Это свойство следует из того факта, что серединный перпендикуляр к отрезку – геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка. (Т. е. все точки, равноудаленные от концов отрезка, лежат на его серединном перпендикуляре. И наоборот, каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов.)

$A_1 ... A_n$ – *описанный*



Биссектрисы всех углов пересекаются в одной точке O.

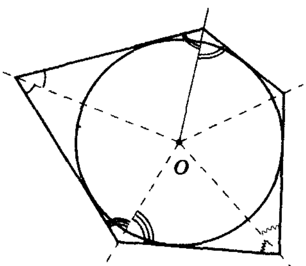


Рис. 2.10

Свойство 5. **Многоугольник можно описать вокруг окружности тогда и только тогда, когда биссектрисы всех его углов пересекаются в одной точке. Эта точка – центр окружности (рис. 2.10).**

Это свойство следует из того факта, что биссектриса угла – геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла. (Т. е. все точки угла, равноудаленные от его сторон, лежат на биссектрисе угла. И наоборот, каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.)

Практическая работа 5

1. Начертите выпуклый пятиугольник; обозначьте его вершины; сравните длину каждой из его сторон с суммой длин других сторон. Запишите соответствующие неравенства.
2. Начертите невыпуклый пятиугольник; обозначьте его вершины; сравните длину каждой из его сторон с суммой длин других сторон. Запишите соответствующие неравенства.
3. Начертите произвольный многоугольник, число вершин которого больше 5, и обозначьте его вершины; сравните длину каждой из его сторон с суммой длин других сторон. Запишите соответствующие неравенства.
4. Запишите вывод.

Практическая работа 6

1. Начертите выпуклые n-угольники для $n = 5; 6; 7; 8$.

Для любознательных

1. Даны два правильных треугольника. Разрежьте их на наименьшее число частей так, чтобы из них можно было сложить шестиугольник.

2. Даны четыре равных правильных шестиугольника. Разрежьте их на наименьшее число частей так, чтобы из них можно было сложить правильный шестиугольник.

2. Выполните соответствующие измерения и заполните таблицу.

Число вершин	5	6	7	8
Сумма градусных мер внутренних углов				
Сумма градусных мер внешних углов (по одному при каждой вершине)				

3. Проверьте правильность выполненных измерений и расчетов с помощью формул для суммы внутренних и суммы внешних углов выпуклого многоугольника.

4*. Начертите невыпуклые четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник. Выполните соответствующие измерения и заполните таблицу.

Число вершин	4	5	6
Сумма градусных мер внутренних углов			
Сумма градусных мер внешних углов (по одному при каждой вершине)			

Какой вывод вы можете сделать?

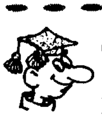
Практическая работа 7

Заполните таблицу значений меры внутреннего и внешнего углов правильного n-угольника.

Число вершин	3	4	5	6	8	12	n
Внутренний угол							
Внешний угол							

Практическая работа 8*

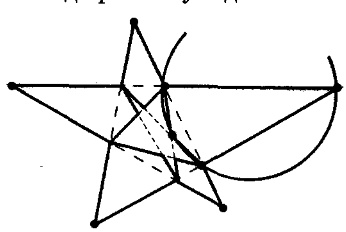
1. Начертите выпуклый пятиугольник.
2. Проведите все диагонали, которые выходят из одной вершины, запишите их число. Потом проведите все диагонали пятиугольника и посчитайте их. Во сколько раз последнее число отличается от предыдущего?
3. Начертите выпуклые шестиугольник, семиугольник и восьмиугольник. Для каждого из них выполните задание п. 2.
4. Заполните соответствующую таблицу. Какой вывод можно сделать?



Для любознательных

1. Петя сложил стандартный лист бумаги 5 раз, каждый раз – по оси симметрии образовавшегося прямоугольника. Потом он вырезал внутри последнего прямоугольника дырку и развернул бумагу. Сколько дырок он увидел?

2. Существует ли пятиугольная звезда с таким свойством: вокруг любого из ее окрашенных четырехугольников (см. рис.) можно описать окружность?



3. Докажите: если стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ равны по 1, то радиус окружности, описанной вокруг одного из треугольников ACE и BFD, не превышает 1.
Совет. Воспользуйтесь методом от противного.

4. Семиугольник $A_1 \ldots A_7$ вписан в окружность. При этом центр этой окружности расположен внутри семиугольника. Докажите, что сумма углов при вершинах A_1, A_3 и A_5 меньше 450°.

Задание 7

1°. Найдите сумму углов выпуклого: **а)** девятиугольника; **б)** двенадцатиугольника; **в)** двадцатиугольника.

2°. Сколько вершин имеет выпуклый многоугольник, если сумма его углов равна: **а)** 1620°; **б)** 720°?

3°. Сколько вершин имеет многоугольник, каждый угол которого равен: **а)** 135°; **б)** 140°?

4. Попробуйте начертить: **а)** пятиугольник, имеющий четыре острых угла; **б)** шестиугольник, имеющий пять острых углов.

5. Верно ли утверждение, что среди углов выпуклого четырехугольника найдется хоть один прямой или тупой угол?

6. Многоугольник имеет четыре острых угла. Докажите, что он невыпуклый.

7. Какое наибольшее число: **а)** острых углов; **б)** прямых углов может иметь выпуклый многоугольник?

8. Могут ли все углы многоугольника быть тупыми?

9. Может ли выпуклый многоугольник иметь: **а)** наибольший угол в 107°; **б)** каждый угол по 165°?

10. Все стороны выпуклого пятиугольника равны между собой. Два угла, прилежащие к одной его стороне, – прямые. Найдите градусные меры остальных углов.

11*. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике найдутся два угла, прилежащие к одной его стороне, сумма градусных мер которых превышает 180°.

12*. Сколько вершин имеет выпуклый многоугольник, у которого: **а)** три угла по 80°, а все остальные по 150°; **б)** три угла прямые, а остальные по 150°; **в)** каждый угол не превышает 120°; **г)** три угла по 113°, а остальные равны между собой и их градусная мера – целое число?

13*. На каждой стороне выпуклого многоугольника взяли по одной точке и последовательно их соединили. Докажите, что периметр образованного многоугольника меньше периметра данного многоугольника.

14*. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого пятиугольника больше его периметра.

15.** Докажите, что большая диагональ выпуклого четырехугольника больше хотя бы одной из его сторон.

16.** Внутри выпуклого многоугольника лежит отрезок MN. Докажите, что длина отрезка MN не превышает наибольшую сторону или наибольшую диагональ многоугольника.

17.** Докажите, что в выпуклом шестиугольнике с равными углами: **а)** стороны попарно параллельны; **б)** разности противолежащих сторон равны между собой.

18.** Докажите, что в выпуклом пятиугольнике с равными углами нет параллельных сторон.

Для любознательных

1. Квадратный лист бумаги разрезали на 6 частей, каждая из которых имеет форму выпуклого многоугольника. Пять из этих частей потерялись, а та, что осталась, имеет форму правильного восьмиугольника. Можно ли по этой части восстановить размеры исходного квадрата?

2. «Крестики-нулики-3» – игра в «крестики-нулики», в которой выигрывает тот, кто первым поставит 3 свои знака (нулик или крестик) на одной прямой. На бумаге в клеточку нарисуйте многоугольник (с наименьшим числом клеточек) такой, чтобы, играя на нем в «крестики-нулики-3», тот, кто начинает игру, всегда выигрывал. Укажите «стратегию» этого игрока.

§ 8. Понятие площади и ее основные свойства

Так что же такое «площадь»? Здравый смысл подсказывает, что это понятие можно ввести не только для плоских геометрических фигур, а и для пространственных, например, таких как цилиндр или сфера. Но в этом параграфе мы будем рассматривать только плоские геометрические фигуры.

Площадь – это число, которое ставится в соответствие ограниченной со всех сторон плоской фигуре и имеет следующие свойства:

1) площадь фигуры – число неотрицательное;

2) площади равных фигур – равны;

3) если фигуру разделили на части, то площадь фигуры равна сумме площадей этих частей;

4) за единицу площади принимается площадь квадрата со стороной, равной единице измерения; единица площади равна единице измерения в квадрате (кв. ед.).

Например, площадь квадрата со стороной 1 м равна одному квадратному метру (1 м^2); площадь квадрата со стороной 1 локоть равна одному локтю в квадрате.

Понятно, что из *этих свойств следует*:

1) если фигура содержит другую фигуру, то площадь первой не меньше площади второй фигуры;

2) площадь квадрата со стороной n единиц измерения ($n > 0$) равна n^2 кв. ед.

Заметим, что квадрат, сторона которого равна n единиц измерения, – не единственная фигура, которая имеет площадь n^2 кв. ед. Например, из приведенных свойств площади следует, что площадь прямоугольного треугольника ABC (рис. 2.11) тоже равна n^2 кв. ед.

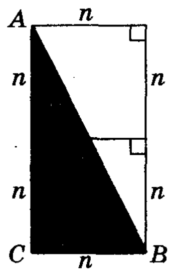
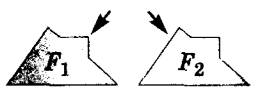


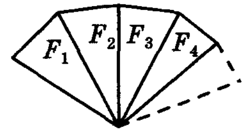
Рис. 2.11

Фигуры, которые имеют равные площади, называются равновеликими.

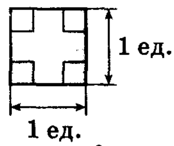
Можно совместить



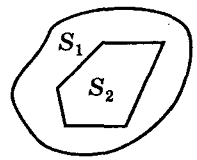
$F_1 = F_2 \Rightarrow S_1 = S_2$



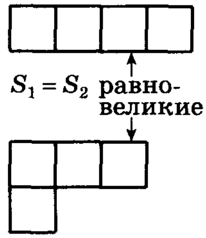
$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$



$S = 1$ ед^2



$S_2 < S_1$



Практическая работа 9

1. Начертите на бумаге и вырежьте два равных прямоугольных треугольника. С помощью этих треугольников-шаблонов начертите: равнобедренный треугольник, прямоугольник, параллелограмм. Сравните площади полученных фигур. Как называются эти фигуры?
2. Перерисуйте в тетрадь фигуры рисунка 2.12 в масштабе 4 : 1 (4 клеточки тетрадного листа соответствуют 1 клеточке рисунка 2.12). Сравните площади этих фигур.
3. Перерисуйте в тетрадь фигуры рисунка 2.13. Найдите их площади.

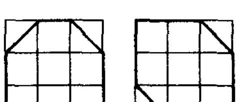


Рис. 2.12

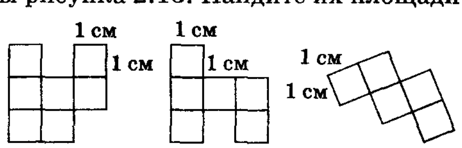


Рис. 2.13

Задание 8

1°. Найдите площади фигур F_1, F_2, F_3, F_4, изображенных на рисунке 2.14, если площадь фигуры F равна 1.

2°. Восстановите запись:

а) 1 см^2 = ... мм^2, 200 дм^2 = ... м^2, 1 га = 100 ...;

б) 40 000 см^2 = ... м^2, 13 дм^2 = ... см^2, 4 ... = 400 см^2.

3°. Сколько квадратов с периметром 100 см содержится в 1 м^2?

4°. Есть ли среди прямоугольников с площадью 32 см^2 такой, который можно разрезать на два одинаковых квадрата? Какие размеры такого прямоугольника?

5°. Как разрезать прямоугольный треугольник на две равновеликие части?

6. Как разрезать прямоугольник, изображенный на рисунке 2.15, на три неравные равновеликие части? Предложите несколько способов разрезания.

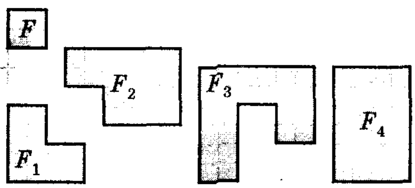


Рис. 2.14

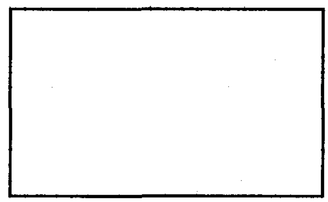


Рис. 2.15

7. На рисунке 2.16: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, точки D, C и M лежат на одной прямой, $DC = CM$. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

8. На стороне AD четырехугольника $ABCD$ построили треугольник ADE так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и N. При этом точка M – середина отрезка AE. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

9*. Площадь квадрата равна Q. Каждую его вершину соединили отрезком с серединой одной из сторон квадрата (см. рис. 2.17). Установите форму четырехугольника, ограниченного проведенными отрезками, и найдите его площадь.

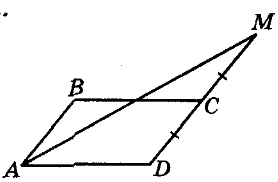


Рис. 2.16

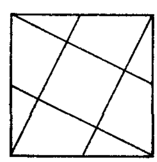


Рис. 2.17

10*. Разрежьте два равных квадрата на части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

11.** Разделите квадрат на 3 части так, чтобы из них можно было сложить тупоугольный треугольник.

12.** Прямоугольник 4×9 разделите на две равные части, из которых можно сложить квадрат.

Для любознательных

Знак S или s, которым традиционно обозначают площадь или поверхность фигуры, – первая буква латинского слова *superficies* – «поверхность».

Вычисление площади фигуры еще называют ***квадратурой***. Этот термин происходит от латинского *quadratura*, что означает «придать квадратную форму». У древних египтян квадратура определенной фигуры сводилась к построению равновеликого квадрата.

§ 9. Площадь прямоугольника

Докажем основную теорему этой главы.

Т Теорема (о площади прямоугольника). **Если стороны прямоугольника равны a и b, то его площадь равна произведению ab.**

Т. е. для площади прямоугольника выполняется известное вам равенство $S = ab$, где a и b – **длины сторон** этого прямоугольника, **измеренные в одинаковых единицах длины.**

Доказательство

Возможны три случая: a и b – натуральные числа; a и b – рациональные числа; a и b – иррациональные числа.

СЛУЧАЙ 1: *a и b – натуральные числа.*

Тогда прямоугольник можно разделить на $a \cdot b$ единичных квадратов (рис. 2.18). Площадь прямоугольника равна сумме площадей этих квадратов, т. е. $S = a \cdot b$, и утверждение теоремы выполняется.

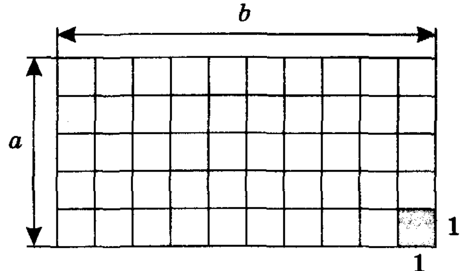


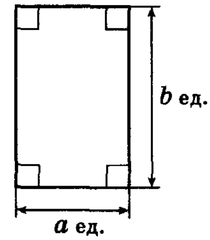
Рис. 2.18

СЛУЧАЙ 2: *a и b – рациональные числа.*

В этом случае числа a и b можно представить в виде дробей, в числителе и знаменателе которых стоят натуральные числа. Пусть число n – общий знаменатель этих дробей, тогда:

$$a = \frac{k}{n} = k \cdot \frac{1}{n} \text{ (ед. изм.)} \quad \text{и} \quad b = \frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} \text{ (ед. изм.)},$$

где k, m, n – натуральные числа.



$S = a \cdot b$ ед^2

a, b – произвольные положительные числа

Мнение, что способность к математике встречается реже, чем способность к другим наукам, – это только иллюзия, которую породили те, кто берется за математику непоследовательно и небрежно.

И.Ф. Гербарт

Для любознательных

Если многоугольник разрезать на части и из них сложить, без зазоров и наложения частей, новый многоугольник (см. № 11–12, стр. 48), то такие многоугольники называют *равносоставленными* (см. стр. 55). Понятно, что эти многоугольники будут равновеликими.

1. Прямоугольник со сторонами 10 см и 12 см разрежьте на части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

2. Два квадрата размерами 3×3 и 1×1 разрежьте на части так, чтобы из них можно было сложить один квадрат.

3. Решите предыдущую задачу для двух произвольных квадратов.

4. Дан квадрат размером 7×7. Разрежьте его на пять частей так, чтобы из них можно было сложить три квадрата размерами 2×2, 3×3 и 6×6. Сделайте это несколькими способами.

Тогда сторону прямоугольника, длина которой равна a, можно разделить на k равных частей по $\frac{1}{n}$ ед. изм.; а сторону b – на m равных частей по $\frac{1}{n}$ ед. изм. (рис. 2.19). Всего имеем $k \cdot m$ квадратов. Площадь прямоугольника равна сумме площадей этих квадратов:

$$S = km\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{n} = ab.$$

Идеал математики – создать вычисление, облегчающее рассуждения в любой сфере мышления.

А.Н. Уайтхерд

Утверждение теоремы выполняется.

Рис. 2.19

СЛУЧАЙ 3: *a и b – иррациональные числа.*

В этом случае числа a и b можно подать в виде бесконечных десятичных дробей. Округлим каждое из них с избытком и недостатком, оставив при этом одинаковое число знаков после запятой:

$$a_2 < a < a_1 \quad \text{и} \quad b_2 < b < b_1.$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 – рациональные. Тогда площади прямоугольников с длинами сторон a_1, b_1 и a_2, b_2 равны $S_1 = a_1 \cdot b_1$ и $S_2 = a_2 \cdot b_2$ соответственно (случай 2).

Для любознательных

Во времена Паскаля (XVI в.) математику чаще всего называли геометрией. Как-то 12-летний **Блез Паскаль** спросил у отца, Этьена Паскаля, что такое «геометрия». Этьен Паскаль, не придавая своим словам особого значения, сказал, что геометрия – это такая себе теория, изучающая способы начертания фигур и указывающая на соотношения между их элементами. Через некоторое время отец увидел, что сын сосредоточенно размышляет над сложенными из палочек треугольниками. Как оказалось, Блез как раз заканчивал доказательство открытого им интересного факта: в любом треугольнике сумма всех трех углов составляет два прямых угла. Тогда Этьен открыл шкаф с книгами и дал Блезу «Начала» Евклида. 13-летний Блез одолел ее как захватывающий роман. Вскоре Блеза Паскаля допустили к участию в заседаниях Парижского научного общества (позже на базе этого общества была создана Парижская академия наук).

Понятно, что прямоугольник с длинами сторон a_1 и b_1 содержит прямоугольник с длинами сторон a и b, а последний содержит прямоугольник с длинами сторон a_2 и b_2 (рис. 2.20). Тогда для площадей этих прямоугольников выполняются неравенства $S_2 < S < S_1$ и $a_2b_2 < S < a_1b_1$.

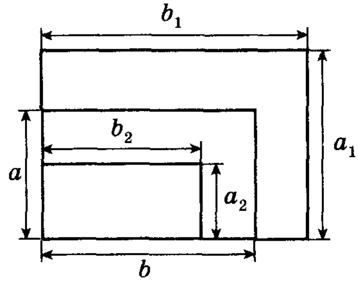


Рис. 2.20

Последнее неравенство будет правильным всегда, сколько бы знаков при округлении мы не оставили бы. Чем больше число этих знаков – тем меньше различия между значениями площадей трех прямоугольников.

Таким образом, в этом случае с произвольной точностью площадь прямоугольника приближается к числу $a \cdot b$.

Утверждение теоремы выполняется.

В природе мера – главный инструмент познания. Наука начинается тогда, когда начинается измерение.

Д.И. Менделеев

Проиллюстрируем приведенные выше размышления для третьего случая, пользуясь математическим рассчетом.

Пусть предложенные округления были проведены до n-го знака после запятой. Тогда числа a_1, a_2, b_1, b_2 равны

$$a_1 = \frac{k}{10^n},\ a_2 = \frac{k-1}{10^n},\ b_1 = \frac{m}{10^n},\ b_2 = \frac{m-1}{10^n}$$

и последнее неравенство имеет вид

$$\frac{(k-1)(m-1)}{10^{2n}} < S < \frac{km}{10^{2n}}.$$

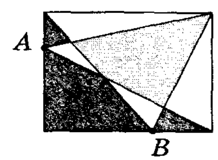
Из двойного неравентсва $\frac{k-1}{10^n} < a < \frac{k}{10^n}$ получим, что

$$10^n a < k < 10^n a + 1.$$

Для любознательных

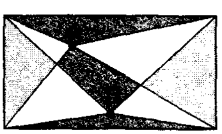
1. На соседних сторонах прямоугольника отметили по точке, которые соединили с его вершинами (рис. А). Докажите, что сумма площадей цветных частей равна площади серых частей.

А



2. В прямоугольнике отметили две произвольные точки A и B. Эти точки соединили с вершинами прямоугольника, как показано на рисунке Б. Докажите, что сумма площадей цветных частей равна сумме площадей серых частей.

Б



Аналогично получим,что $10^n b < m < 10^n b + 1$. Тогда

$$\frac{(10^n a-1)(10^n b-1)}{10^{2n}} < S < \frac{(10^n a+1)(10^n b+1)}{10^{2n}},$$

или после раскрытия скобок,

$$ab - \frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} < S < ab + \frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}.$$

Отсюда

$$-\frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} < S - ab < \frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}$$

и, тем более,

$$-\frac{a+b}{10^n} - \frac{1}{10^{2n}} < S - ab < \frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}.$$

> Смелость разума присуща всем математикам. Математик не любит, когда ему о чем-то рассказывают, – до всего он хочет додуматься сам.
>
> *В. Сойер*

Последнее неравенство можно записать в виде

$$|S - ab| < \frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}.$$

В левой части последнего неравенства – неотрицательная величина, равная нулю только в случае $S = ab$.

Если $S \neq ab$, то левая часть этого неравенства – некоторое положительное число, не зависящее от n. Правую часть неравенства выбором достаточно большого значения n можно сделать меньше этого фиксированного числа, чего быть не может. Тогда неравенство выполняется только при $S = ab$.

Что и требовалось доказать.

Практическая работа 10

1. Начертите прямоугольник, стороны которого обозначьте как a и b.
2. Достройте этот прямоугольник до квадрата со стороной $a + b$ (рис. 2.21).
3. Запишите выражение для вычисления площади этого квадрата.
4. Из каких частей состоит полученный квадрат? Запишите выражения для вычисления площадей этих фигур.
5. Допишите равенство $(a + b)^2 = \ldots$.
6. Какую формулу вы получили?
7. Перерисуйте фигуры, изображенные на рисунке 2.22, в тетрадь. Запишите формулы для вычисления площадей этих фигур.

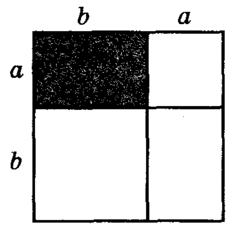


Рис. 2.21

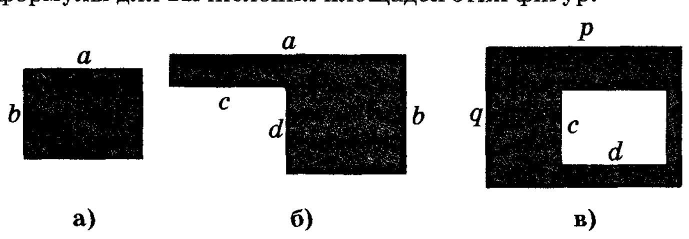


Рис. 2.22

Задание 9

1°. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна:

а) 1,5 см; б) $\frac{2}{3}$ см; в) $3\sqrt{2}$ см.

2°. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна:

а) 160 см^2; б) 12 м^2; в) 1,69 дм^2.

3°. Вычислите площадь прямоугольника со сторонами:

а) $a = 5$ см, $b = 4$ см; б) $a = \frac{3}{4}$ м, $b = \frac{1}{2}$ м; в) $a = \sqrt{6}$ см, $b = 4\sqrt{5}$ см.

4. Как изменится площадь прямоугольника, если: **а)** каждую его сторону увеличить в 3 раза; **б)** одну пару противолежащих сторон уменьшить в 5,5 раза; **в)** одну пару противолежащих сторон увеличить в $\sqrt{2}$ раза, а другую уменьшить в 2 раза?

5. Вычислите длины сторон прямоугольника, если его площадь равна 120 см^2, а одна из его сторон: **а)** на 2 см больше другой; **б)** в 1,2 раза меньше другой.

6. Найдите стороны прямоугольника, если его площадь равна 60 см^2, а периметр – 38 см.

7. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 50 см, а стороны относятся как 1 : 4.

8. Стороны прямоугольника относятся как 5 : 4, а его площадь равна 9680 см^2. Вычислите периметр этого прямоугольника.

9*. Точка диагонали квадрата удалена от его двух сторон на 2,8 см и 4,7 см. Найдите его площадь.

10*. Вычислите площадь прямоугольника $ABCD$, изображенного на рисунке 2.23, если BP – биссектриса угла B.

11*. Биссектрисы двух углов прямоугольника, прилегающих к одной его стороне, делят противолежащую (указанной стороне) сторону на 3 части, длина каждой из которых 12 см. Найдите площадь прямоугольника.

12*. Площади квадрата и прямоугольника равны. Сторона квадрата – 24 см, а одна из сторон прямоугольника – 12 см. Найдите другую сторону прямоугольника.

13. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке 2.24.

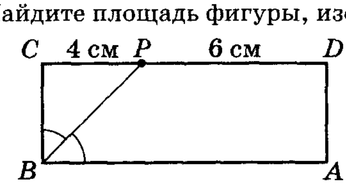


Рис. 2.23

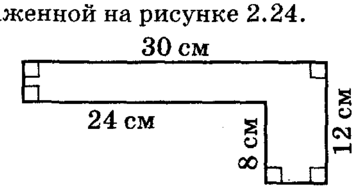


Рис. 2.24

14. В прямоугольнике $AFED$ вырезали прямоугольник $BGHC$ так, как показано на рисунке 2.25. Вычислите площадь фигуры $ABGHCDEF$, если $AB = 10$ см, $CD = 8$ см, $FE = 24$ см, $AF = 10$ см, $BG = 8$ см.

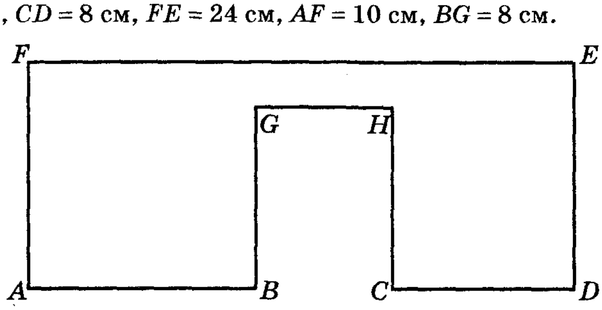


Рис. 2.25

15*. В прямоугольнике $ABCD$ точка E – точка пересечения биссектрис углов A и D. Найдите площадь фигуры $ABCDE$, если $AB = 12$ см, $BC = 20$ см.

16*. Найдите площадь квадрата: **а)** описанного вокруг окружности радиуса r; **б)** вписанного в окружность радиуса R.

17. Сколько нужно кафельных плиток прямоугольной формы со сторонами 20 см и 30 см, чтобы обложить часть стены, имеющую размеры $3 \times 2{,}5$ м?

18. Два участка земли оградили заборами одинаковой длины. Первый участок имеет форму прямоугольника со сторонами 220 м и 160 м, а другой – форму квадрата. Площадь какого из участков больше и на сколько?

19. Пшеничное поле имеет форму прямоугольника со сторонами 450 м и 250 м. Ширина хедера комбайна равна 4,6 м. Какую площадь поля скосит комбайн за 5 «кругов» («круг» – 1 обход комбайном всех сторон прямоугольного поля)?

20*. Ось симметрии диагонали прямоугольника делит его сторону на две части: 13 см и 12 см. Найдите площадь прямоугольника.

21*. Вычислите площадь прямоугольника, периметр которого равен 70 см, а диагональ – 27 см.

22*. Найдите площадь прямоугольника, периметр которого равен 64 см, а радиус описанной окружности – 12 см.

23*. Периметр квадрата (в метрах) и его площадь (в квадратных метрах) записываются одинаковыми числами. Найдите площадь квадрата.

24*. Дано три параллельных прямых, средняя из которых удалена от крайних на расстояния a и b. Найдите площадь квадрата, три вершины которого лежат на этих прямых.

25.** Найдите отношение площадей частей, на которые прямоугольник разделяется биссектрисой его угла, если: **а)** стороны прямоугольника относятся как 3 : 4; **б)** перпендикуляр, опущенный из вершины угла прямоугольника делит его диагональ в отношении 9 : 16.

26.** Даны три параллельных прямых, средняя из которых удалена от крайних на расстояния a и b. Найдите площадь квадрата, три вершины которого лежат на этих прямых.

27.** Диагонали трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) пересекаются в точке O. Площади треугольников AOB и COD равны соответственно S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

Для любознательных

Не всегда представления об измерении геометрических величин было таким, как теперь. Не всегда правила вычисления площадей давали истинные результаты.

Например, площадь треугольника вычисляли как произведение основания и половины боковой стороны. Так делали древние вавилоняне и египтяне (1500–2500 лет тому назад). Сравнительно недавно (400–500 лет тому назад) так вычисляли площадь треугольника и на Руси. Площадь четырехугольника неправильной формы вавилоняне вычисляли как произведение полусумм противолежащих сторон.

В средние века, чтобы вычислить площадь треугольника, основание и высота которого были равны целому числу n, находили сумму членов натурального ряда чисел от 1 до n. Т. е. площадь считали равной $\frac{n(n+1)}{2}$. Откуда произошел такой способ вычисления площади указанного треугольника, вы видите на рисунке.

§ 10. Общие сведения о четырехугольнике

Напомним:

– *четырехугольником* называется многоугольник, имеющий четыре вершины (и четыре стороны);

– *четырехугольник* может быть *выпуклым* (рис. 2.26) или *невыпуклым* (рис. 2.27);

– *диагонали* четырехугольника – отрезки, соединяющие две несмежные его вершины (на рисунках 2.26 и 2.27 – отрезки AC, BD).

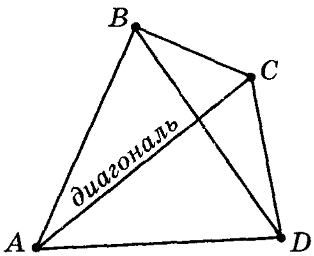


Рис. 2.26

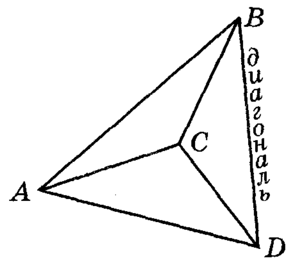
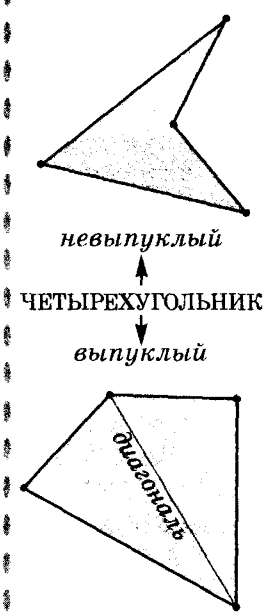


Рис. 2.27



Далее мы будем изучать свойства выпуклых четырехугольников.

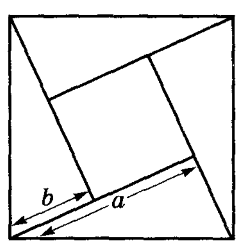
Для любознательных

Равносоставленные многоугольники (см. стр. 49) **являются равновеликими**. Этим пользовались еще в древности для доказательства математических утверждений, в том числе и *теоремы Пифагора*: «В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$».

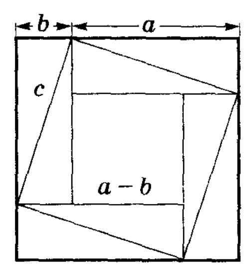
Существует много доказательств теоремы Пифагора, в которых квадраты, построенные на катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника, разрезаются так, чтобы каждой из частей квадрата, построенного на гипотенузе, соответствовала часть одного из квадратов, построенных на катетах. Например, в книге «Венок знаний» индийского математика **Бхаскара** (1114–1185) приводится «доказательство» теоремы Пифагора в виде чертежа с подписью «Смотри!» (рис. **А** и **Б**).

Попробуйте восстановить доказательства теоремы Пифагора, предложенные Бхаскара, на этих рисунках.

А



Б



Следует подчеркнуть, что *такие рассуждения нельзя считать доказательством, если мы не докажем равенства во всех парах соответствующих частей*. Как правило, в таких задачах это сделать несложно, но при большом количестве разрезаний такое доказательство требует немало времени.

Свойство 1. **Любая из сторон четырехугольника меньше суммы трех его других сторон.**

Правильность этого утверждения следует из свойства многоугольника: любая сторона многоугольника меньше суммы всех его других сторон (см. стр. 42).

Свойство 2

Т Теорема. **Сумма внутренних углов четырехугольника равна 360°.**

Напомним: изучаем выпуклые четырехугольники

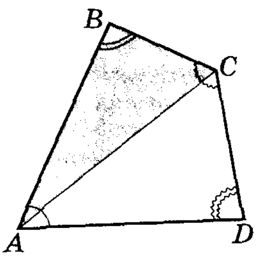


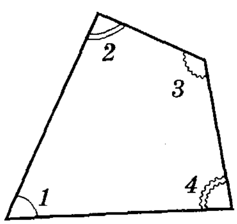
Рис. 2.28

Доказательство

Диагонали четырехугольника делят его на два треугольника. Например, на рисунке 2.28 диагональ AC делит четырехугольник $ABCD$ на треугольники ABC и ACD. Тогда сумма внутренних углов четырехугольника равна сумме углов этих треугольников, т. е. $180° \cdot 2 = 360°$.

Теорема доказана.

С Следствие 1. **Не существует четырехугольника, у которого все углы острые или все углы тупые.**



$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360°$

Утверждение легко доказывается от противного.

1) Пусть существует четырехугольник, у которого градусная мера каждого из углов больше 90°. Тогда сумма всех углов этого четырехугольника больше, чем $90° \cdot 4$, т. е. не равна 360°, что противоречит теореме. Следовательно, не существует четырехугольника, у которого все углы тупые.

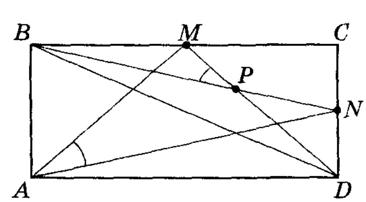
2) Пусть существует четырехугольник, у которого градусная мера каждого из углов меньше 90°. Тогда сумма всех углов этого четырехугольника меньше, чем $90° \cdot 4$, т. е. не равна 360°, что противоречит теореме. Следовательно, не существует четырехугольника, у которого все углы острые.

Для любознательных

1. Орехи разложили в виде квадрата (рис. **А**). Покажите, что их можно разместить в виде двух равносторонних треугольников со сторонами, равными: стороне квадрата и на единицу меньше стороны квадрата.

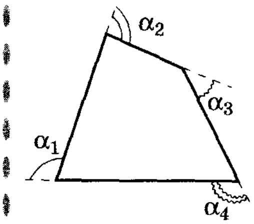
А

Б



2. В прямоугольнике $ABCD$ (рис. **Б**) точка M – середина стороны BC, точка N – середина стороны CD, P – точка пересечения отрезков DM и BN. Докажите, что $\angle MAN = \angle BPM$.

Следствие 2. Сумма внешних углов четырехугольника (по одному при каждой вершине) равна 360°.



$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=360°$

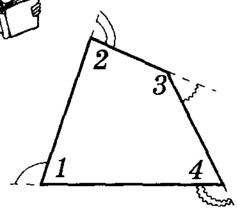


Рис. 2.29

Сумма внешних углов четырехугольника – это сумма смежных углов этого четырехугольника (рис. 2.29):

$(180°-\angle 1)+(180°-\angle 2)+(180°-\angle 3)+$ $+(180°-\angle 4)=180°\cdot 4-(\angle 1+\angle 2+$ $+\angle 3+\angle 4)=180°\cdot 4-360°=360°.$

ВИДЫ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Среди множества выпуклых четырехугольников *выделяют такие виды четырехугольников.*

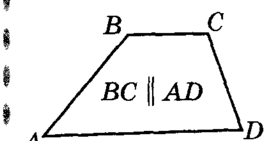
ТРАПЕЦИЯ – четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие непараллельны (рис. 2.30).

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ – четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны (рис. 2.31).

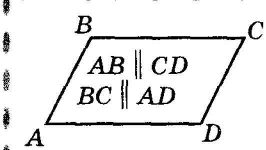
РОМБ – параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 2.32).

ПРЯМОУГОЛЬНИК – параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 2.33).

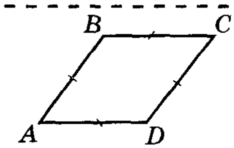
КВАДРАТ – прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 2.34).



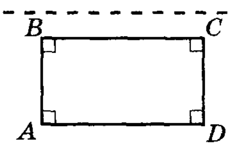
трапеция



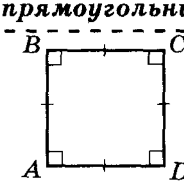
параллелограмм



ромб



прямоугольник



квадрат

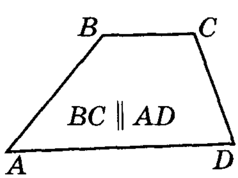


Рис. 2.30

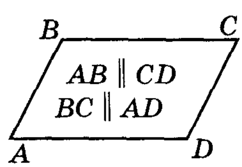


Рис. 2.31

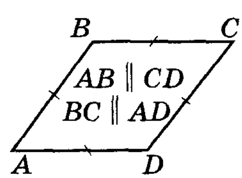


Рис. 2.32

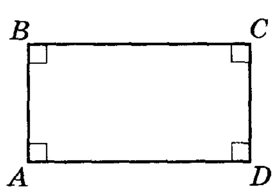


Рис. 2.33

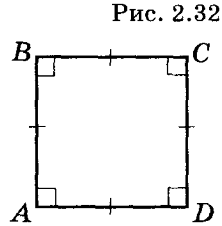
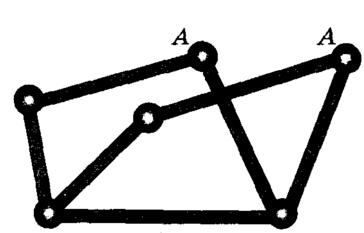


Рис. 2.34

Для любознательных

В отличие от треугольника, который три заданных отрезка формирует единственно возможным образом, контур четырехугольника не является жесткой «конструкцией». Представьте себе четыре планки, которые соединили с помощью шарниров (см. рис.). Форма такой фигуры изменяется, если «потянуть», например, за вершину A.



Практическая работа 11

1. Поставьте на листе бумаги 4 точки так, чтобы никакие 3 из них не лежали на одной прямой.
2. Соедините эти точки отрезками так, чтобы получился четырехугольник. Какой четырехугольник вы получили – выпуклый или невыпуклый?
3. Измерьте длины сторон полученного четырехугольника. Сравните длину наибольшей из его сторон с суммой длин других трех сторон. Сформулируйте вывод (сославшись на соответствующую теорему).
4. Начертите выпуклый четырехугольник. Обозначьте его вершины; проведите в нем диагонали и назовите их.
5. Измерьте транспортиром углы выпуклого четырехугольника и вычислите сумму градусных мер его углов. Сделайте вывод.
6. Начертите невыпуклый четырехугольник. Измерьте транспортиром углы этого четырехугольника и вычислите сумму их градусных мер. Сделайте вывод.

Задание 10

1°. Какие фигуры на рисунке 2.35:
а) не являются четырехугольниками;
б) являются выпуклыми четырехугольниками?

2°. Среди четырехугольников на рисунке 2.35 найдите: трапецию; параллелограмм; ромб.

3°. Существует ли четырехугольник с длинами сторон: а) 2 см, 2 см, 3 см и 6 см; б) 1 см, 3 см, 5 см и 9 см; в) 5 см, 17 см, 3 см и 7 см? Почему?

4. Найдите стороны четырехугольника, если:
а) его периметр равен 6 см, а одна из сторон больше других трех соответственно на 3 мм, 4 мм, 5 мм;
б) его периметр равен 66 см, а одна из сторон больше второй на 8 см и на столько же меньше третьей, а четвертая – в 3 раза больше второй.

5*. Сделайте схематический рисунок четырехугольника, у которого:
а) три стороны равны;
б) две противолежащие стороны равны;
в) все стороны равны.

6°. Существует ли четырехугольник, углы которого составляют: а) 45°, 65°, 87°, 32°; б) 123°, 98°, 111°, 156°?

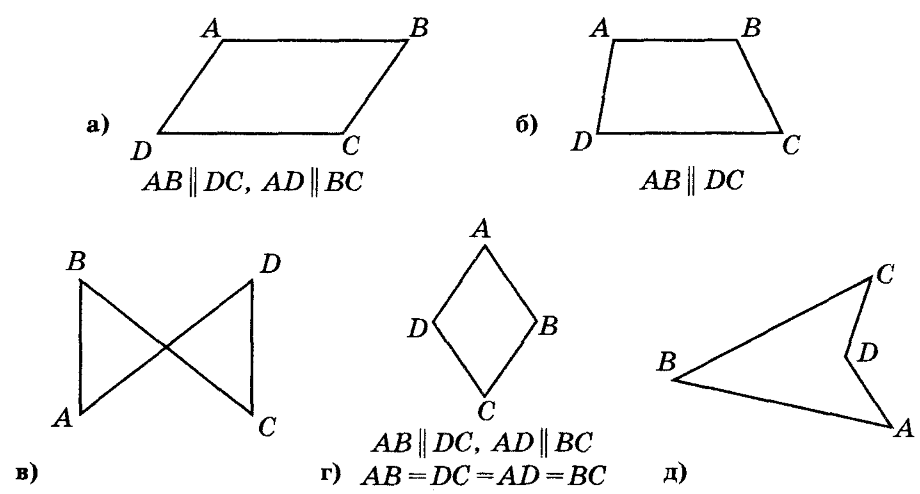


Рис. 2.35

7. Существует ли четырехугольник, у которого:
а) три угла прямые, а четвертый – острый;
б) один из углов равен сумме трех других?

8. Какое в четырехугольнике может быть наибольшее количество углов: а) острых; б) тупых; в) прямых?

9*. Может ли выпуклый четырехугольник иметь угол, больше развернутого?

10**. В выпуклом четырехугольнике три острые угла равны между собой. В каких пределах может изменяться градусная мера: а) каждого из них; б) четвертого угла?

11°. Все углы четырехугольника равны между собой. Найдите их.

12°. Найдите углы четырехугольника $ABCD$ (рис. 2.36).

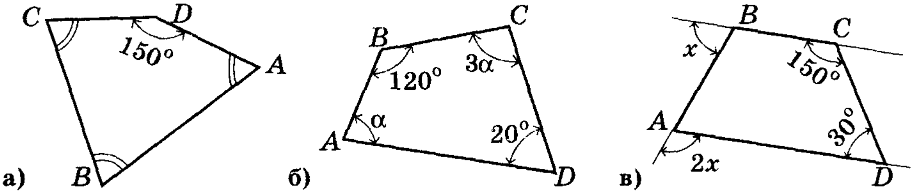


Рис. 2.36

13°. Найдите углы четырехугольника $KLMN$, если о них известно, что:
а) $\angle K = \angle L$, $\angle M = \angle N$, $\angle K = 2\angle N$;
б) градусные меры углов пропорциональны числам 1, 2, 4, 5.

14. Найдите углы четырехугольника $FGHL$, если о них известно, что:
а) $\angle F = 70°$, угол G в 1,5 раза больше угла F, а угол L – на 85° меньше угла H; б) $\angle F = 90°$, а угол G в 2 раза больше угла H, градусная мера которого составляет 70 % от градусной меры угла F.

15**. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle B = 100°$, $\angle ABD = 50°$, $\angle CAD = 60°$. Найдите углы ACD, BCD и CDA.

16**. Найдите угол α (рис. 2.37).

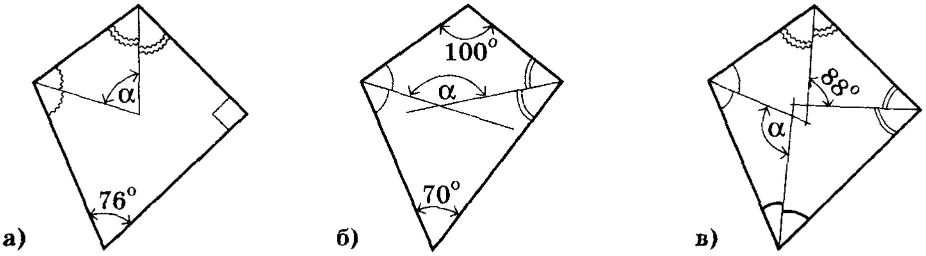


Рис. 2.37

Для любознательных

1. Двое по очереди ломают шоколадку размером 6×8. За один ход можно сделать прямолинейный разлом любого из уже образовавшихся кусочков (вдоль углубления). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков выиграет: первый или второй? Почему?

2. Решите предыдущую задачу в случае исходного размера шоколадки 5 × 5.

3. Игра в шахматы часто заканчивается «в ничью». Может ли окончиться «в ничью» игра «в поддавки»?

4. От квадрата отрезали прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Докажите, что сумма углов, под которыми видно из трех оставшихся вершин квадрата отрезок, по которому провели разрез, равна 90°.

17*. Могут ли биссектрисы двух смежных углов четырехугольника быть параллельными?

18*. Сделайте схематический рисунок четырехугольника, у которого: **а)** биссектрисы противолежащих углов параллельны; **б)** биссектрисы двух противолежащих углов лежат на одной прямой.

19.** Докажите, что если биссектрисы двух противолежащих углов четырехугольника параллельны или лежат на одной прямой, то два других угла – равны.

20*. Сделайте схематический рисунок четырехугольника, у которого: **а)** прямые, которым принадлежат противоположные стороны, – параллельны; **б)** прямые, которым принадлежат противоположные стороны, – перпендикулярны; **в)** каждая из диагоналей больше любой из его сторон; **г)** каждая из диагоналей меньше любой из его сторон.

21*. Докажите, что:
а) длина отрезка, соединяющего две точки на противоположных сторонах выпуклого четырехугольника, меньше периметра этого четырехугольника; **б)** в выпуклом четырехугольнике диагональ меньше его полупериметра.

22*. Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь такого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей.

23.** Докажите, что:
а) сумма отрезков, которые соединяют середины противолежащих сторон выпуклого четырехугольника, меньше его периметра; **б)** в выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей больше суммы двух его противоположных сторон; **в)** сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше его полупериметра и меньше периметра.

24.** Диагональ AC делит вторую диагональ четырехугольника $ABCD$ на две равные части. Докажите: если $AB > AD$, то $BC < DC$.

25.** Два противолежащих угла выпуклого четырехугольника – тупые. Докажите, что диагональ, соединяющая вершины этих углов, меньше второй диагонали.

26.** Постройте четырехугольник по: **а)** сторонам и одной из диагоналей; **б)** сторонам и одному из углов.

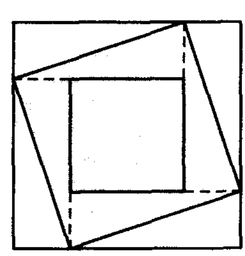
27.** Постройте четырехугольник $ABCD$ по углам A и B, сторонам AB и AD, сумме сторон BC и CD.

Для любознательных

1. В четырехугольнике провели диагонали. Какое наибольшее число прямых углов может быть на соответствующем рисунке?

2. Существует ли правильный многоугольник, длина одной диагонали которого равна сумме двух из остального множества его диагоналей?

3. В выпуклом четырехугольнике $MPKH$: $\angle M + \angle P = 180°$, $\angle MKH = \angle KMP$. На сторонах MH и PK отметили точки A и B так, что $PB = PA$. Отрезок AB проходит через точку пересечения диагоналей заданного четырехугольника. Докажите, что $HP \perp AB$.



4. Восстановите квадрат $ABCD$ по: **а)** его центру и двум точкам на параллельных сторонах (эти две точки не лежат на одной прямой с центром квадрата); **б)** вершине A и двум точкам на сторонах квадрата, которые не содержат вершину A; **в)** четырем точкам – по одной на каждой стороне квадрата.

5. На рисунке: площадь наибольшего квадрата равна 16 кв. ед., а наименьшего – 4 кв. ед. Найдите площадь цветного квадрата.

§ 11. Вписанные и описанные четырехугольники

ВПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

Напомним, **четырехугольник называют вписанным в окружность, если все его вершины лежат на окружности** (рис. 2.38). Эту *окружность* называют *описанной вокруг данного четырехугольника*. **Центр такой окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров ко всем сторонам четырехугольника** (см. стр. 44, свойство 4).

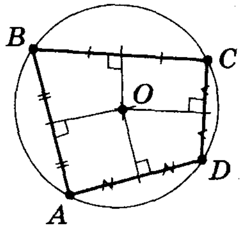
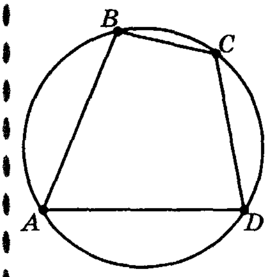


Рис. 2.38

Правильным будет и обратное утверждение (см. § 7). **Если серединные перпендикуляры, проведенные ко всем сторонам четырехугольника, пересекаются в одной точке, то вокруг него можно описать окружность.**



ABCD – вписанный четырехугольник

$\Downarrow$

$\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

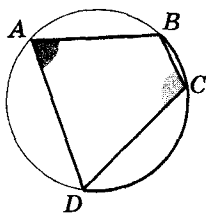


Рис. 2.39

Теорема 1. **Сумма противолежащих углов вписанного четырехугольника равна 180°.**

Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности (рис. 2.39). Докажем, что $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$.

Доказательство

1) $\angle A = \frac{1}{2} \smile DCB$; $\angle C = \frac{1}{2} \smile DAB$ как вписанные.

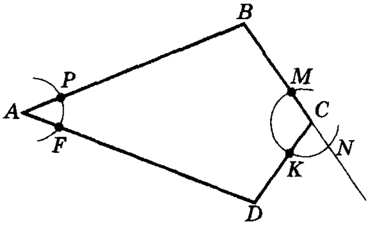
Тогда $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\smile DCB + \smile DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

2) Сума всех внутренних углов четырехугольника равна 360°. Тогда $\angle B + \angle D = 360^\circ - (\angle A + \angle C) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$.

Теорема доказана.

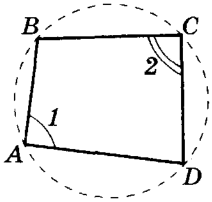
Для любознательных

Арабский математик **Хасан Ибн Гайтем** (XI в.) предложил такой способ определения того, что вокруг четырехугольника можно описать окружность, используя только циркуль. Одним и тем же раствором циркуля с центрами в противоположных вершинах A и C четырехугольника $ABCD$ провести дуги. Обозначить точки пересечения этих дуг со сторонами четырехугольника и продолжения одной из них так, как показано на рисунке.



Если $|KN| = |PF|$, то четырехугольник $ABCD$ – вписанный; если приведенное равенство не выполняется – то вокруг $ABCD$ нельзя описать окружность.

Обоснуйте или опровергните метод Хасана Ибн Гайтема.

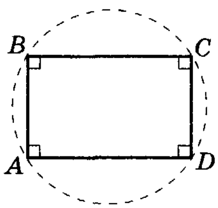


$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

$\Downarrow$

ABCD – вписанный

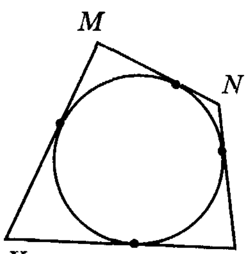
Напомним обозначение: $\notin$ – не принадлежит.



ABCD – прямоугольник

$\Downarrow$

ABCD – вписанный



KMNQ – описанный четырехугольник

ПТ Теорема 2 (обратная к теореме 1). **Если сумма двух противолежащих углов четырехугольника равна 180°, то вокруг него можно описать окружность.**

Пусть сумма углов A и C четырехугольника $ABCD$ равна 180°. Проведем окружность γ через точки A, B и D. Нужно доказать, что вершина C лежит на этой окружности.

Доказательство

Проведем его от противного. Пусть $C \notin \gamma$ (рис. 2.40) и прямая DC пересекает окружность в точке K. По теореме 1 $\angle A + \angle K = 180^\circ = \angle A + \angle C$. Тогда $\angle K = \angle C$. При этом для треугольника BCK один из этих углов – внутренний, а другой – внешний, т. е. такое равенство невозможно.

Теорема доказана.

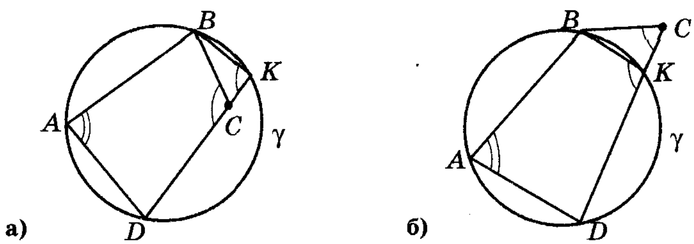


Рис. 2.40

С Следствие. **Вокруг прямоугольника всегда можно описать окружность.**

ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

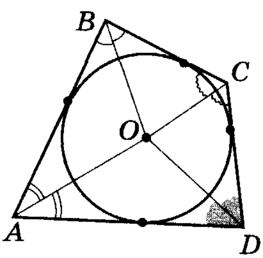


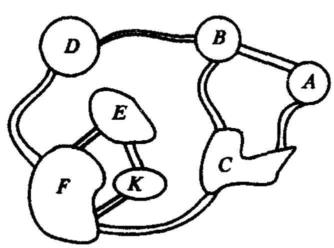
Рис. 2.41

Напомним: четырехугольник называют *описанным* вокруг окружности, если все его стороны касаются окружности (рис. 2.41). Т. е. *окружность вписывают в четырехугольник*. **Центр такой окружности – точка пересечения биссектрис всех внутренних углов четырехугольника** (см. стр. 44, свойство 5).

Правильным будет и обратное утверждение (см. § 7): **если биссектрисы всех углов четырехугольника пересекаются в одной точке, то в него можно вписать окружность.**

Для любознательных

На море 7 островов, которые соединены мостами так, как показано на рисунке. На какой остров следует доставить путешественников (катером или вертолетом), чтобы они могли обойти все острова и притом пройти по каждому из мостов, их соединяющих, только один раз? С какого острова нужно будет забрать туристов?



Теорема 3. Суммы противолежащих сторон четырехугольника, описанного вокруг окружности, равны.

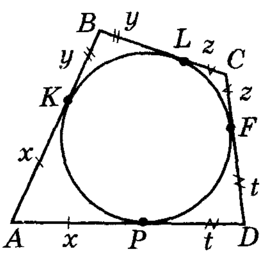


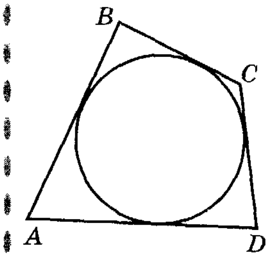
Рис. 2.42

Пусть в четырехугольник $ABCD$ вписана окружность. Докажем, что
$$AB + CD = BC + AD.$$

Доказательство

Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны. Обозначим длины соответствующих отрезков как x, y, z и t (рис. 2.42). Тогда $AB + CD = (x + y) + (z + t) = (x + t) + (y + z) = AD + BC$.

Теорема доказана.



$ABCD$ – описанный
$\Downarrow$
$BC + AD = AB + CD$

Теорема 4 (обратная к теореме 3). **Если в выпуклом четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.**

Пусть для четырехугольника $ABCD$ выполняется соотношение $AB + CD = BC + AD$. Докажем, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Доказательство

Проведем его от противного. Пусть окружность касается трех сторон данного четырехугольника и не касается его четвертой стороны CD (рис. 2.43).

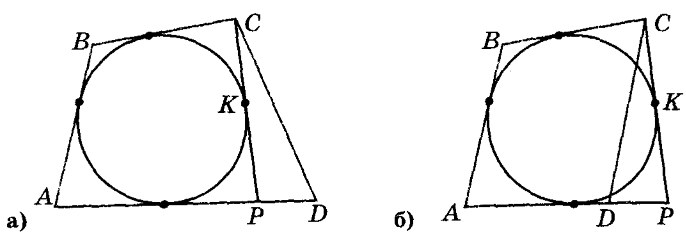
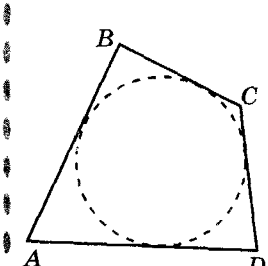


Рис. 2.43



$AD + BC = AB + CD$
$\Downarrow$
$ABCD$ – описанный

1) Из точки C проведем к этой окружности касательную, которая пересечет прямую AD в точке P. Согласно прямой теореме получим, что $AB + CP = BC + AP$.

2) $AB + CD = BC + AD$ и $AB + CP = BC + AP$. Отнимем от первого равенства второе (или наоборот). Тогда $|CD - CP| = |AD - AP|$, т. е. $|CD - CP| = PD$, что противоречит неравенству для сторон треугольника CDP.

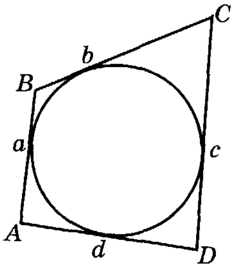
Вывод: точки P и D совпадают. Теорема доказана.

Напомним обозначение: $|AB|$ – длина отрезка AB.

Следствие. **В ромб всегда можно вписать окружность.**

Для любознательных

Говорят, что Магомет чертил, не отрывая руки, магический знак, изображающий два полумесяца (см. рис.). Попробуйте сделать это и вы.



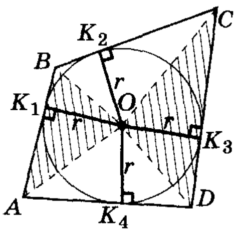
$S_{ABCD} = p \cdot r$

$p \triangleq (a+b+c+d):2$

$r = \dfrac{S}{p}$

Опорная задача

Площадь описанного четырехугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в него окружности.



Дано: *K_1, K_2, K_3, K_4 – точки касания.*
Доказать: $S = pr$.

1) $S = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle DOA}$.
2) K_1, K_2, K_3, K_4 – точки касания, тогда $OK_1 \perp AB$, $OK_2 \perp BC$, $OK_3 \perp CD$, $OK_4 \perp AD$ и $OK_1 = OK_2 = OK_3 = OK_4 = r$.

3) $S = \frac{1}{2}\,ar + \frac{1}{2}\,br + \frac{1}{2}\,cr + \frac{1}{2}\,dr = \frac{1}{2}\,r\,(a+b+c+d) = pr$.

Ч. т. д.

Практическая работа 12

1. Начертите окружность. Отметьте на окружности 4 точки и соедините их (последовательно) отрезками.
2. Измерьте транспортиром углы полученного четырехугольника и вычислите суммы градусных мер его противолежащих углов. Сравните их и сделайте вывод.
3. Начертите окружность. Используя угольник и линейку, проведите касательные к этой окружности так, чтобы образовался описанный четырехугольник.
4. Измерьте стороны полученного четырехугольника. Вычислите суммы противоположных его сторон. Сделайте вывод.

Практическая работа 13

1. Используя циркуль, транспортир, угольник и линейку, изобразите четырехугольник, вписанный в окружность, у которого:
   а) два угла, прилегающие к одной стороне, равны;
   б) два противолежащих угла равны;
   в) две противолежащие стороны параллельны;
   г) противолежащие стороны равны.
2. Используя циркуль, транспортир, угольник и линейку, изобразите четырехугольник, описанный вокруг окружности, у которого:
   а) два угла, прилегающие к одной стороне, равны;
   б) две противолежащие стороны равны;
   в) диагонали образуют с одной из сторон равные углы;
   г) диагонали образуют с двумя противолежащими сторонами прямые углы.

Задание 11

1°. По рисункам 2.44 – 2.46 найдите углы четырехугольников.

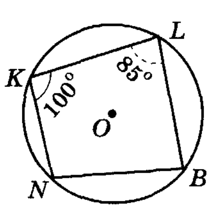


Рис. 2.44

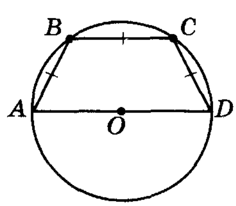


Рис. 2.45

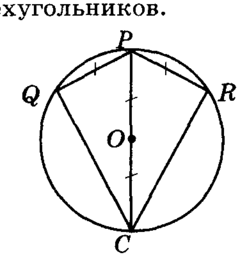


Рис. 2.46

2°. Можно ли описать окружность вокруг четырехугольника, если его углы, расположенные последовательно, равны:
а) 72°, 105°, 108°, 75°;
б) 138°, 44°, 52°, 126°;
в) 56°, 112°, 124°, 82°?

3. Можно ли описать окружность вокруг произвольного:
а) прямоугольника;
б) квадрата?

4. AC и BD – диаметры одной окружности. Докажите, что $ABCD$ – прямоугольник.

5. У четырехугольника $ABCD$ $\angle ABD = \angle ACD$. Можно ли его вписать в окружность?

6°. По рисункам 2.47 и 2.48 найдите неизвестные стороны четырехугольников.

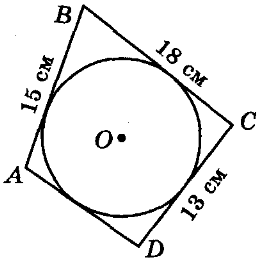
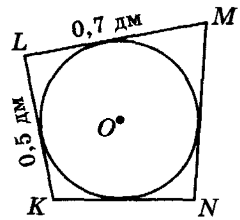


Рис. 2.47



$KN=KL$

Рис. 2.48

7°. Сумма двух противолежащих сторон описанного четырехугольника равна 15 см. Найдите периметр этого четырехугольника.

8. Можно ли вписать окружность в произвольный: а) прямоугольник; б) квадрат; в) ромб?

9. Длины трех сторон AB, BC и CD описанного четырехугольника $ABCD$, периметр которого равен 96 см, относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите длины всех сторон этого четырехугольника.

Для любознательных

Сказка от Реймонда М. Смалиана «Принцесса или тигр»

В некотором королевстве правил король-логик. Как-то он захватил в плен много принцев, принцесс и тигров и решил устроить следующие соревнования.

1. Первый день. Король сообщил пленному принцу, что в каждой из двух комнат находятся или тигр, или принцесса, а может быть и так, что в обеих комнатах разместили по одному тигру, или наоборот – по принцессе. «Что же мне делать, если в обеих комнатах тигры?» – спросил принц. – «Считай, что не повезло!» – ответил король. «А если там по принцессе?» – поинтересовался принц. – «Считай, что повезло, – сказал король и добавил: – Главное, читай таблички на дверях этих двух комнат. **На какой-то из них правда, а на другой – ложь»**. На дверях комнат висели таблички с надписями:

I. *В этой комнате принцесса, а в другой – тигр.*	II. *В одной из этих комнат принцесса; и, кроме того, в одной из этих комнат сидит тигр.*

Какую из дверей вы бы открыли, если бы были на месте принца?

2. Второй день. Для следующего пленного король подготовил такие надписи на дверях:

I. *Хотя бы в одной из этих комнат находится принцесса.*	II. *Тигр сидит в другой комнате.*

При этом король объявил: **или оба утверждения правильные, или оба – ложные**. Какую из комнат выбрать принцу?

10°. Можно ли вписать окружность в четырехугольник, длины последовательно расположенных сторон которого равны:
а) 7 см, 3 см, 5 см, 9 см; **б)** 12 дм, 10 дм, 8 дм, 7 дм; **в)** 3 м, 20 м, 5 м, 7 м?

11. Можно ли вписать окружность в четырехугольник, длины последовательно расположенных сторон которого относятся как: **а)** 1 : 2 : 5 : 4; **б)** 2 : 7 : 5 : 1; **в)** 3 : 5 : 4 : 2; **г)** 12 : 4 : 3 : 2?

12*. Длины сторон описанного четырехугольника равны 2 см, 1 см, 3 см и 4 см, а радиус вписанной окружности – 1,3 см. Найдите площадь этого четырехугольника.

13*. Точка O – центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$. Найдите площадь этого четырехугольника, если: **а)** его периметр равен 10 см, а радиус вписанной окружности – 2 см; **б)** площади треугольников ABO и CDO равны 14 см^2 и 12 см^2.

14. Докажите для вписанного четырехугольника $ABCD$: **а)** $\angle ABD = \angle ACD$; **б)** $\angle CAD = \angle CBD$; **в)** $\angle BCA = \angle BDA$; **г)** $\angle BAC = \angle BDC$.

15*. Каким должен быть четырехугольник, чтобы углы между биссектрисами внутреннего и внешнего его углов с общей вершиной были одинаковыми для всех вершин четырехугольника? Какая градусная мера таких углов?

16*. Докажите, что биссектрисы углов трапеции при пересечении образуют четырехугольник, вокруг которого можно описать окружность.

17.** Докажите, что угол A вписанного четырехугольника $ABCD$ равен его внешнему углу при вершине C.

18.** В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Биссектрисы углов A и C пересекают окружность в точках E и P. Докажите, что прямая EP проходит через центр заданной окружности.

19.** Докажите, что биссектриса угла вписанного четырехугольника при определенной вершине пересекает биссектрису внешнего угла при противоположной вершине в точке, лежащей на описанной вокруг этого четырехугольника окружности.

20.** Докажите, что биссектрисы внешних углов любого выпуклого четырехугольника ограничивают четырехугольник, в который можно вписать окружность.

21.** В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M, а сторон AD и BC – в точке P. Докажите, что биссектрисы углов AMD и CPD взаимно перпендикулярны.

22.** Диагонали AC и BH вписанного четырехугольника $ABCH$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M. Докажите, что: **а)** прямая, проведенная через точку M и середину стороны AH, перпендикулярна BC; **б)** середины сторон AH, BC и основания перпендикуляров, проведенных из точки M к этим сторонам, лежат на одной окружности.

23.** Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, – взаимно перпендикулярны. Докажите, что: **а)** из отрезков AB, CD и диаметра окружности можно построить прямоугольный треугольник; **б)** прямая, проведенная из точки пересечения диагоналей перпендикулярно к BC, делит AD пополам; **в)** расстояние от точки O до AB равно половине CD.

24.** Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, – взаимно перпендикулярны. Через точки A, B, C и D провели касательные к данной окружности. Докажите, что образованный ими четырехугольник тоже является вписанным.

25.** Докажите, если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполняется равенство $CD = AD + BC$, то точка пересечения биссектрис углов A и B лежит на стороне CD. (Совет. Отложите на BC отрезок $DK = AD$.)

§ 12. Параллелограмм

Напомним, что ***параллелограмм – это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.***

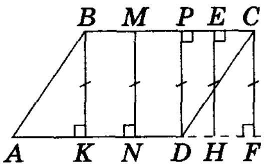
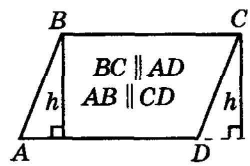


Рис. 2.49

Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, проведенный к стороне параллелограмма (или ее продолжению) из точки, лежащей на противоположной его стороне. На рисунке 2.49 – это отрезки BK, MN, PD, EH и CF.

Длина такого отрезка – *расстояние между параллельными сторонами параллелограмма.*



h – высота

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

① Теорема. **В любом параллелограмме противолежащие углы равны, а сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°.**

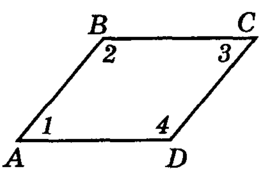


Рис. 2.50

Докажем, что у параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.50) $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$; $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 1 = 180°$.

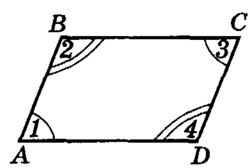
Доказательство

1) $BC \parallel AD$, AB и CD – секущие, тогда $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ (как внутренние односторонние).

2) $AB \parallel CD$, AD и BC – секущие, тогда $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ и $\angle 4 + \angle 1 = 180°$ (как внутренние односторонние).

3) $\angle 1 + \angle 2 = 180° = \angle 2 + \angle 3$ и $\angle 2 + \angle 3 = 180° = \angle 3 + \angle 4$, тогда $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$. Ч. т. д.

СВОЙСТВА:



ABCD – параллелограмм

$\Downarrow$

$\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$;

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$;

$\angle 3 + \angle 4 = 180°$;

$\angle 1 + \angle 4 = 180°$;

$\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

② Теорема. **Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.**

Пусть $ABCD$ – параллелограмм (рис. 2.51). Докажем, что $\triangle ABD = \triangle CDB$.

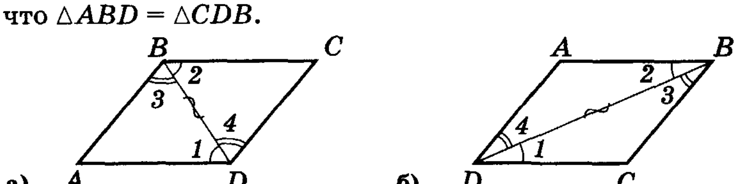


Рис. 2.51

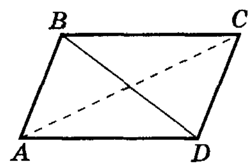
Доказательство

1) $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние разносторонние при $AD \parallel BC$ и секущей BD.

2) $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние разносторонние при $AB \parallel DC$ и секущей BD.

3) BD – общая сторона треугольников ABD и CDB.

Тогда эти треугольники равны (по второму признаку равенства). Ч. т. д.



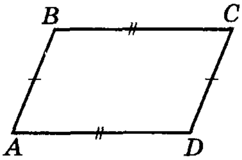
ABCD – параллелограмм

$\Downarrow$

$\triangle ABD = \triangle CDB$;

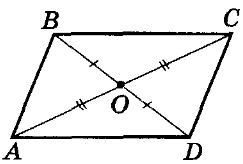
$\triangle ABC = \triangle CDA$.

СВОЙСТВА:



ABCD – параллелограмм:
AB = CD; AD = BC

③ С Следствие. **Противолежащие стороны параллелограмма равны.**



AO = OC; BO = OD

④ Т Теорема. **Диагонали параллелограмма делятся точкой их пересечения пополам.**

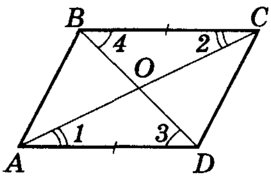


Рис. 2.52

Диагонали параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.52) пересекаются в точке O. Докажем, что $BO = OD$ и $AO = OC$.

Доказательство

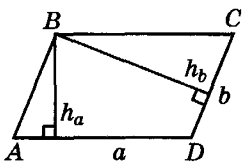
1) $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние разносторонние при $AD \parallel BC$ и секущей AC.

2) $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние разносторонние при $BC \parallel AD$ и секущей BD.

3) $AD = BC$ как противолежащие стороны параллелограмма.

Тогда, по второму признаку равенства треугольников, $\triangle AOD = \triangle COB$. А в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны: $AO = OC$, $BO = OD$.

Теорема доказана.



$S = ah_a = bh_b$

⑤ Т Теорема. **Площадь параллелограмма равна $S = ah_a$, где a – длина его стороны, h_a – длина высоты, проведенной к этой стороне.**

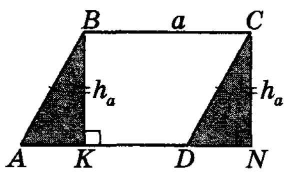


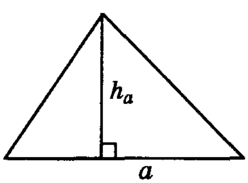
Рис. 2.53

Доказательство

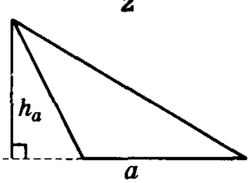
В параллелограмме $ABCD$ (рис. 2.53): $AB = DC$ – как противолежащие стороны, $BK = CN$ – как расстояние между параллельными прямыми. Тогда прямоугольные треугольники ABK и DCN равны (по гипотенузе и катету), и площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $KBCN$: $S = BC \cdot BK = ah_a$.

Теорема доказана.

С Следствие. Из последней теоремы и свойства 2 следует уже известная вам **формула для площади треугольника:** $S = \frac{1}{2}ah_a$, где a – длина стороны треугольника, h_a – длина его высоты, проведенной к этой стороне.



$S_\triangle = \frac{1}{2} a \cdot h_a$



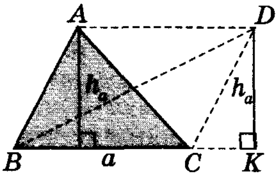


Рис. 2.54

Доказательство

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.54). Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника (свойство 2). Тогда $S_{ABC} = S_{ABCD} : 2 = (a \cdot h_a) : 2$.

Отметим, что в случае, когда высота h_a расположена вне треугольника (DK на рис. 2.54 для $\triangle BCD$), доказательство будет аналогичным (рассматриваем параллелограмм $CBAD$: $\triangle BCD = \triangle DAB$).

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Теорема 1. **Если противолежащие стороны четырехугольника попарно равны, то такой четырехугольник – параллелограмм.**

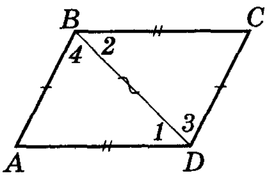


Рис. 2.55

В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 2.55) $AB = CD$ и $AD = BC$. Докажем, что $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство

1) $AB = CD$, $AD = BC$ по условию; BD – общая сторона треугольников ABD и CDB. Тогда $\triangle ABD = \triangle CDB$ (по третьему признаку). Отсюда $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (как углы равных треугольников, лежащие против равных сторон).

2) $\angle 1 = \angle 2$ – внутренние разносторонние углы при прямых CB, AD и секущей BD. Тогда $BC \parallel AD$.

3) $\angle 3 = \angle 4$ – внутренние разносторонние углы при прямых AB, CD и секущей BD. Тогда $AB \parallel CD$.

4) $BC \parallel AD$ и $AB \parallel CD$, т. е. $ABCD$ – параллелограмм.
Теорема доказана.

Теорема 2. **Если две противолежащие стороны четырехугольника равны и параллельны, то такой четырехугольник – параллелограмм.**

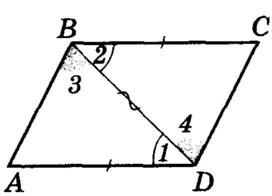


Рис. 2.56

В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 2.56) $BC = AD$ и $BC \parallel AD$. Докажем, что $ABCD$ – параллелограмм.

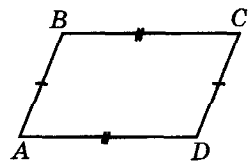
Доказательство

1) $\angle 1 = \angle 2$ – как внутренние разносторонние углы при $BC \parallel AD$ и секущей BD; $BC = AD$ по условию; BD – общая сторона треугольников ABD и CDB. Тогда $\triangle ABD = \triangle CDB$ (по первому признаку) и $\angle 3 = \angle 4$ (как углы равных треугольников, лежащие против равных сторон).

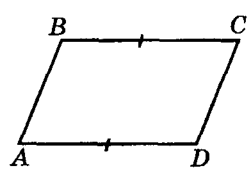
2) $\angle 3 = \angle 4$ – внутренние разносторонние углы при прямых AB, CD и секущей BD. Тогда $AB \parallel CD$.

3) $BC \parallel AD$ и $AB \parallel CD$, т. е. $ABCD$ – параллелограмм.
Теорема доказана.

ПРИЗНАКИ



$AB = CD$
$BC = AD$
$\Downarrow$
$ABCD$ – параллелограмм

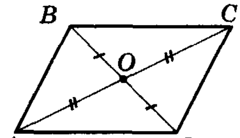


$BC = AD$
$BC \parallel AD$
$\Downarrow$
$ABCD$ – параллелограмм

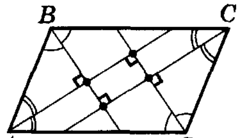
Для любознательных

Квадрат разделили на прямоугольники так, что ни одна из точек квадрата не является вершиной четырех прямоугольников. Докажите, что число точек квадрата, которые совпадают с вершинами прямоугольников, четное.

ПРИЗНАК



$AO = OC$
$BO = OD$
$\Downarrow$
ABCD – параллелограмм



ABCD – параллелограмм
$\Downarrow$
$l_A \perp l_B$; $l_A \perp l_D$;
$l_B \perp l_C$; $l_C \perp l_D$.

Теорема 3. **Если диагонали четырехугольника точкой их пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник – параллелограмм.**

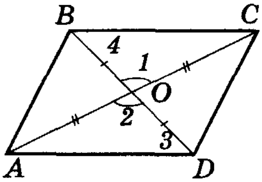


Рис. 2.57

В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD делятся точкой их пересечения O пополам (рис. 2.57). Докажем, что $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство

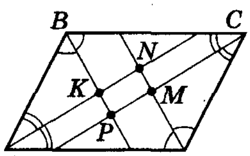
1) В треугольниках OBC и ODA: $OB = OD, AO = OC$ по условию; $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные. Тогда $\triangle AOD = \triangle COB$ (по первому признаку равенства) и $BC = AD$, $\angle 3 = \angle 4$.

2) $\angle 3 = \angle 4$ – внутренние разносторонние углы при пересечении прямых BC и AD секущей BD. Тогда $BC \parallel AD$.

3) В четырехугольнике $ABCD$: $BC = AD$ и $BC \parallel AD$, тогда $ABCD$ – параллелограмм по доказанному ранее признаку.

Теорема доказана.

Опорная задача 1



Биссектрисы углов параллелограмма ограничивают прямоугольник.

Дано: *$ABCD$ – параллелограмм*, $AK \equiv l_A$; $BP \equiv l_B$; $CM \equiv l_C$; $DN \equiv l_D$.

Доказать: *$KNMP$ – прямоугольник.*

1) $ABCD$ – параллелограмм $\to \angle A + \angle B = 180°$.

2) $AK \equiv l_A \to \angle BAK = \angle A : 2$; $BP \equiv l_B \to \angle ABK = \angle B : 2$.

3) В $\triangle ABK$: $\angle AKB = 180° - (\angle A : 2 + \angle B : 2) = 180° - (\angle A + \angle B) : 2 = 180° - 90° = 90°$.

4) $\angle PKN = \angle AKB$ как вертикальные, тогда $\angle PKN = 90°$.

5) Аналогично: $\angle KNM = \angle NMP = \angle MPK = 90°$. Ч. т. д.

Могут ли в рассмотренной выше задаче точки K, N, M, P совпадать? При каком условии?

Для любознательных

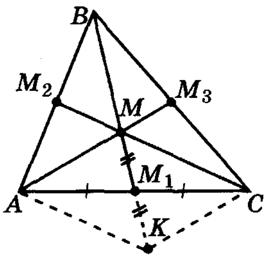
1. Обычно козы съедают все, до чего могут дотянуться. Если привязать козу веревкой длиной 10 м к некоторому колышку, то она съест всю траву в круге радиуса 10 м. А если привязать козу иначе, например, натянуть проволоку между двумя колышками и за проволоку зацепить веревку (второй конец которой привязан к ошейнику козы) так, чтобы эта веревка скользила вдоль проволоки? Какую форму в этом случае будет иметь участок луга, на котором коза съест траву? (Учтите: коза умеет прыгать через проволоку!)

2. Попробуйте «ограничить» козу параллелограммом. (Другими словами: пользуясь только колышками и веревками сделайте так, чтобы коза могла есть траву только внутри заданного вами параллелограмма.)

3. Как «ограничить» козу полукругом, привязав к ее ошейнику не больше двух веревок?

Опорная задача 2

Постройте треугольник по трем его медианам.



Дано: *отрезки k, n, p.*
Построить: *$\triangle ABC$, у которого*:
(1) $m_a = k$; *(2)* $m_b = n$; *(3)* $m_c = p$.

Анализ

Точка M пересечения медиан треугольника (центроид) делит эти медианы в отношении 2 : 1, считая от вершины. Если продолжить медиану m_b на отрезок $M_1K = \frac{m_b}{3}$, то $AM_1 = M_1C$, $MM_1 = M_1K$ и $AMCK$ – параллелограмм.

План построения

1) $k, n, p \to \frac{k}{3}, \frac{n}{3}, \frac{p}{3}$;

2) $2 \cdot \frac{k}{3}, 2 \cdot \frac{n}{3}, 2 \cdot \frac{p}{3} \to \triangle AMK \left(AM = \frac{2k}{3}, MK = \frac{2n}{3}, AK = \frac{2p}{3}\right)$;

3) $[MK] \to MM_1 = M_1K$ $(M_1 \in KM)$;

4) $[AM_1] \to M_1C = AM_1$ (продолжением);

5) $[MK] \to BM = MK$ (продолжением);

$\triangle ABC$ – искомый.

Доказательство

Имеем по построению: $\left(AM = \frac{2k}{3}, MK = \frac{2n}{3}, AK = \frac{2p}{3}\right)$,

$MM_1 = M_1K, AM_1 = M_1C, MK = BM$.

Доказать: (*1*) – (*3*).

---

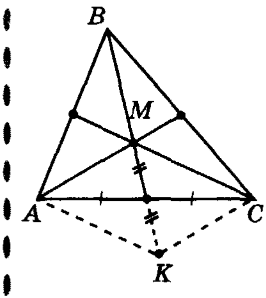
1) *По построению выполняется:* $BM_1 \equiv m_b$;

2) $MM_1 = M_1K, AM_1 = M_1C \to AMCK$ – параллелограмм и $MC = AK = \frac{2p}{3}$;

3) $BM = MK$, $MK = \frac{2n}{3}$, $MM_1 = M_1K$, $BM_1 \equiv m_b$ | M – центроид, $\to m_b = \frac{2n}{3} + \frac{n}{3} = n$, и (*2*) выполняется;

4) M – центроид, $AM = \frac{2}{3}k$, $CM = \frac{2}{3}p$ | $AM_3 \equiv m_a, AM_3 = k$, $\to CM_2 \equiv m_c, CM_2 = p$, и (*1*), (*3*) выполняются.

Ч. т. д.



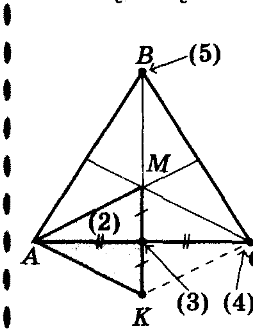
AMCK – параллелограмм!

m_a, m_b, m_c

$\Downarrow$

Строим ABC:

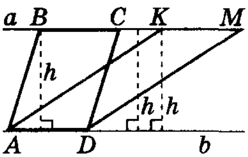
(1) $m_a \to m_a : 3$,
$m_b \to m_b : 3$,
$m_c \to m_c : 3$



§ 13. О некоторых свойствах площади треугольника, параллелограмма и опорные факты, из них вытекающие

В этом параграфе рассмотрим несколько опорных фактов, связанных с понятием площади, которые часто используют при решении задач.

Отметим, что иногда понятие площади помогает решать задачи, в формулировке которых отсутствует упоминание о площади. Тогда говорят о *методе площадей* в геометрии.



$a \| b$, $AB \| CD$, $AK \| DM$

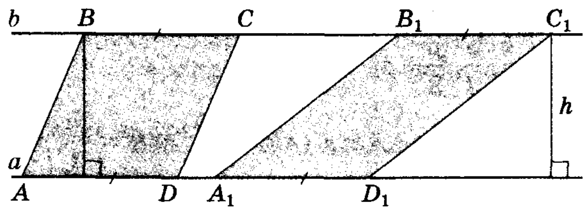
$\Downarrow$

$S_{ABCD} = S_{AKMD}$

[illegible] AD; [illegible] a и b; [illegible]

Опорная задача 1

Параллелограммы, имеющие по две равные стороны, которые лежат на общих параллельных прямых, – равновелики.



Дано: *$ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограммы*:
$(AD) \equiv (A_1D_1)$; $(BC) \equiv (B_1C_1)$; $|AD| = |A_1D_1|$.
Доказать: $S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1}$.

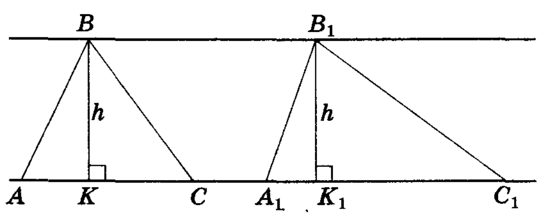
Обозначим: $(AD) \equiv (A_1D_1) \triangleq a$, $(BC) \equiv (B_1C_1) \triangleq b$.

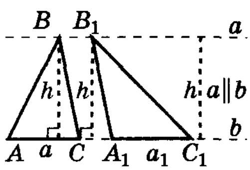
Длины сторон AD и A_1D_1 заданных параллелограммов равны, а высоты, проведенные к этим сторонам, являются расстоянием между параллельными прямыми a и b. Тогда: $S_{ABCD} = |AD| \cdot d(a; b) = |A_1D_1| \cdot d(a; b) = S_{A_1B_1C_1D_1}$.

Ч. т. д.

Опорная задача 2

Площади треугольников, имеющих равные высоты, относятся как длины сторон треугольников, к которым проведены эти высоты.





$S : S_1 = a : a_1$

Дано: $d(B; AC) = d(B_1; A_1C_1) = h$.
Доказать: $S : S_1 = AC : A_1C_1$.

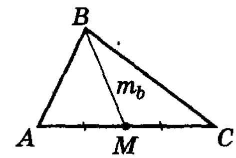
$S = \dfrac{1}{2} h \cdot AC$, $S_1 = \dfrac{1}{2} h \cdot A_1C_1$, тогда $S : S_1 = AC : A_1C_1$.

Ч. т. д.

Замечание. Из последней задачи следует:

– медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника;

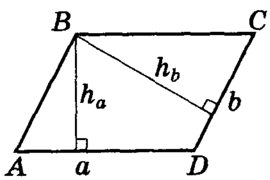
– если треугольники имеют общую (или равную) сторону и их вершины лежат на параллельной этой стороне прямой, то такие треугольники равновелики.



$S_{ABM} = S_{MBC}$

Опорная задача 3

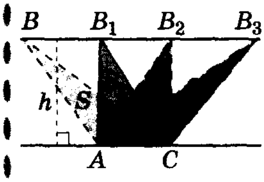
Высоты параллелограмма обратно пропорциональны длинам сторон, к которым они проведены.



Дано: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $h_a \perp a$, $h_b \perp b$.

Доказать: $h_b : h_a = a : b$.

$ABCD$ – параллелограмм. Его площадь $S = ah_a = bh_b$, откуда и следует искомое утверждение.



$AC \parallel BB_3$

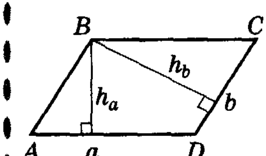
$\Downarrow$

$S = S_1 = S_2 = S_3$

Опорная задача 4

Для любого треугольника: $S = pr$; $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$,

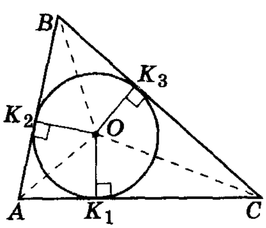
где a, b, c – длины его сторон; S – площадь; p – полупериметр; r – радиус вписанной окружности.



ABCD – параллелограмм

$\Downarrow$

$h_b : h_a = a : b$



Дано: K_1, K_2, K_3 *– точки касания.*

Доказать: $S = pr$; $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

---

1) $S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}$;

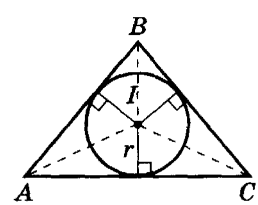
2) K_1, K_2, K_3 – точки касания, тогда $OK_1 \perp AC$, $OK_2 \perp AB$, $OK_3 \perp BC$ и $OK_1 = OK_2 = OK_3 = r$;

3) $S = \dfrac{1}{2}ar + \dfrac{1}{2}br + \dfrac{1}{2}cr = \dfrac{1}{2}r(a + b + c) = pr$;

4) $\dfrac{1}{r} = \dfrac{p}{S} = \dfrac{a}{2S} + \dfrac{b}{2S} + \dfrac{c}{2S}$. Учтем, что $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$,

имеем: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{a}{ah_a} + \dfrac{b}{bh_b} + \dfrac{c}{ch_c} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

Ч. т. д.



$S_{ABC} = r \cdot p$

$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

Для любознательных

1. В треугольник вписали полуокружность радиуса R с центром на одной из его сторон, которая касается двух других сторон треугольника, длины которых равны a и b. Найдите площадь этого треугольника.

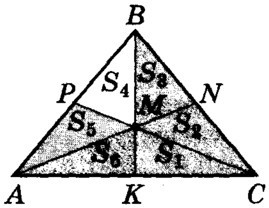
2. Точка M расположена внутри равностороннего треугольника. Докажите, что сумма расстояний от точки M до сторон треугольника не зависит от ее положения.

3. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) расположена точка M. Докажите, что площади треугольников ABM и CBM равны тогда и только тогда, когда M принадлежит медиане BK этого треугольника.

4. Решите предыдущую задачу для произвольного треугольника.

Опорная задача 5

Площадь треугольника равна S. Найдите площади треугольников, на которые делят данный треугольник его медианы.



Дано: $S_{ABC} = S$, $AN \equiv m_a$, $BK \equiv m_b$, $CP \equiv m_c$.

Найти: $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.

1) <u>В $\triangle ABC$</u>: $BK \equiv m_b \to S_{KBC} = S_{KBA} = \dfrac{S}{2}$;

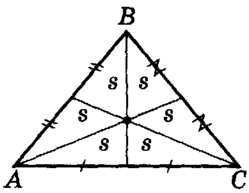
2) M – центроид $\to BM : MK = 2 : 1$;

3) <u>$\triangle AMB$ и $\triangle AMK$</u>: $BM : MK = 2 : 1$; высота, проведенная к BM и MK, – общая. Тогда $S_{AMB} = 2S_6$; $S_6 = \dfrac{S}{2} : 3$;

4) <u>$\triangle ABM$</u>: PM – медиана $\to S_{AMP} = S_{BMP}$ и $S_5 = S_4 = 2S_6 : 2 = S_6 = \dfrac{1}{6} S$.

Аналогично: $S_3 = S_2 = S_1 = \dfrac{1}{6} S$.

Ответ: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \dfrac{1}{6} S$.



$s = \dfrac{1}{6} S$

Замечание. Использованный нами в задаче 4 *метод площадей* применялся математиками и в древние времена. Так, итальянский ученый Джованни Чева (1648–1734) доказал с помощью этого метода очень полезную теорему, известную сегодня как *теорема Чевы*. С доказательством этой теоремы и следствиями из нее вы можете ознакомиться в приложении 4 главы VI.

Практическая работа 14

1. Проведите две пересекающиеся прямые m и n. Через точку, не лежащую на этих прямых, проведите две прямые, параллельные прямым m и n. Какой четырехугольник вы получили?
2. Измерьте углы полученного четырехугольника. Сравните градусные меры противолежащих углов. Найдите суммы градусных мер углов, прилежащих к одной стороне. Сформулируйте вывод.
3. Проведите диагонали вашего четырехугольника. Измерьте и сравните отрезки диагоналей, на которые они делятся точкой пересечения.

Практическая работа 15

1. Начертите произвольный треугольник ABC. На его стороне BC отметьте точку G. Через эту точку параллельно двум сторонам треугольника проведите прямые, пересекающие отрезки AB и AC в точках F и D соответственно. Определите вид четырехугольника $AFGD$.
2. Начертите равнобедренный треугольник KLM с основанием KL. Через точки K и L проведите прямые, параллельные боковым сторонам треугольника. Точку их пересечения обозначьте D. Какой фигурой является четырехугольник $KMLD$?

Для любознательных

Попробуйте доказать *методом площадей*, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и при этом делятся в отношении $2 : 1$, считая от вершины. (Совет. Докажите сначала лемму: **медиана AK треугольника ABC – геометрическое место точек M, для которых треугольники ABM и ACM равновелики.**)

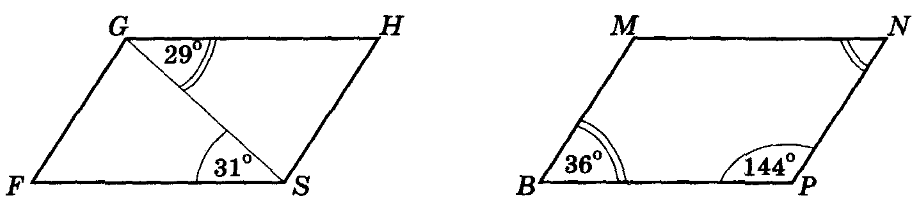
3. Начертите произвольный прямоугольный треугольник ABC. Через вершины A и B его острых углов проведите прямые, параллельные катетам. Точку их пересечения обозначьте D. Какой фигурой является четырехугольник $ACBD$?
4. Начертите произвольный треугольник FGH. На продолжении FG (за точку G) отложите отрезок $GB = FG$, а на продолжении GH (за точку G) – отрезок $GD = GH$. Определите вид четырехугольника $DBHF$.

Практическая работа 16

1. Начертите произвольный треугольник ABC. С помощью циркуля и линейки проведите через точку C прямую $n \parallel AB$. Отметьте на прямой n несколько точек C_1, C_2 ... и соедините их с точками A и B. Из точек C, C_1, C_2 ... с помощью угольника и линейки опустите перпендикуляры CH, C_1H_1, C_2H_2... на прямую AB.
2. Измерьте длины отрезков AB и C_1H_1, C_2H_2... Вычислите площади треугольников ABC, ABC_1, ABC_2 ... Сформулируйте вывод.
3. Проведите две параллельные прямые $n \parallel m$. Постройте несколько параллелограммов с общей стороной на прямой n и противоположными ей сторонами на прямой m. Проведите соответствующие измерения и вычислите площади этих параллелограммов. Сформулируйте вывод.

Задание 12

1°. Есть ли на рисунке 2.58 параллелограммы?

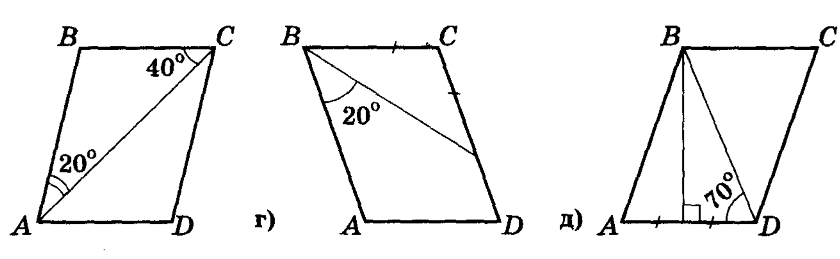


а) б)

Рис. 2.58

2°. По рисунку 2.59 определите углы параллелограмма $ABCD$.

а) $\angle B - \angle A = 30°$ б) $\angle B : \angle A = 1 : 3$



в) г) д)

Рис. 2.59

3°. Найдите углы параллелограмма $KLMN$, если: а) $\angle K = 84°$; б) $\angle K - \angle L = 55°$; в) $\angle K + \angle M = 142°$; г) $\angle K = 2\angle L$.

4. Найдите углы параллелограмма, если: а) один из его углов в 3 раза меньше другого; б) сумма двух из его углов равна $130°$; в) один из его углов на $40°$ меньше другого; г) градусные меры двух из его углов относятся как $2:3$; д) один из его углов составляет 20 % другого.

5. Существует ли параллелограмм, у которого: а) все углы острые; б) только один из углов острый; в) три угла имеют равные градусные меры?

6. Докажите, если вокруг параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм – прямоугольник.

7*. Найдите углы параллелограмма, если большая его диагональ образует со сторонами углы, градусные меры которых: а) в 3 раза меньше тупого угла; б) $16°$ і $37°$; в) α и β.

8*. На рисунке 2.60 изображены параллелограммы. Найдите угол x.

Рис. 2.60

9*. Найдите углы параллелограмма, если: а) биссектриса его угла пересекает противоположную углу сторону под углом $50°$; б) биссектриса его угла пересекает противоположную углу сторону под углом, равным одному из углов параллелограмма.

10*. Найдите углы параллелограмма, если: а) угол между двумя его высотами, проведенными из одной вершины, равен $50°$; б) высота, проведенная из одной вершины, образует с прилегающей к этой вершине стороной угол $50°$.

11. Может ли параллелограмм иметь: а) три равные стороны; б) только три равные стороны?

12. Стороны параллелограмма равны 3 см и 5 см. Может ли его большая диагональ равняться 10 см?

13. По рисунку 2.61 найдите стороны параллелограмма $ABCD$, если его периметр равен 24 см.

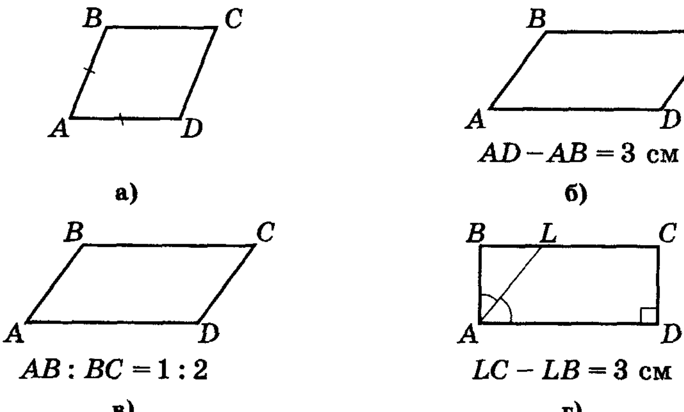


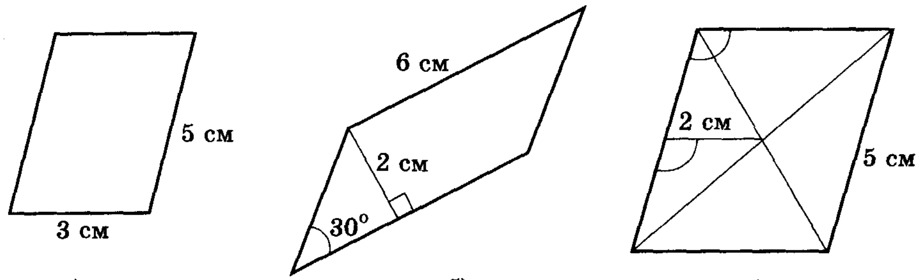
Рис. 2.61

Для любознательных

Внутри произвольного треугольника ABC отметили точку. Докажите, что сумма трех отношений расстояний от этой точки до сторон треугольника соответствующим высотам треугольника (проведенным к соответствующим сторонам) равна 1.

14. Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если: **а)** длины сторон относятся как 5 : 7; б) разность двух сторон равна 7 см; **в)** одна из сторон в 2 раза больше другой.

15. Найдите по рисунку 2.62 периметр параллелограмма.

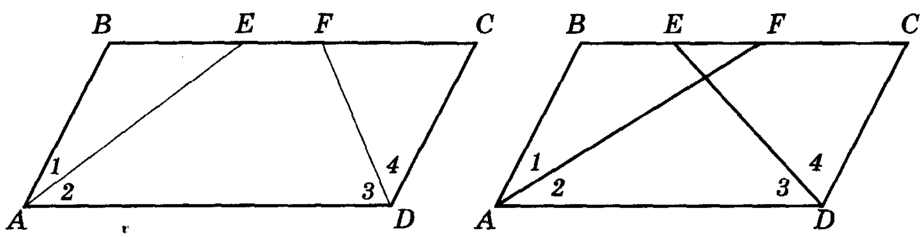


а) **б)** **в)**

Рис. 2.62

16*. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см. Из произвольной точки основания треугольника провели прямые, параллельные его боковым сторонам. Найдите периметр образованного треугольника.

17. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 2.63) $AD = 12$ см; $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$. Найдите дину отрезка EF, если: **а)** $AB = 3{,}5$ см (рис. 2.63-а); **б)** $AB = 8$ см (рис. 2.63-б).



а) **б)**

Рис. 2.63

18*. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки длиной 4 см и 6 см. Рассмотрите два случая.

19°. Обозначили: сторону параллелограмма – a; высоту, проведенную к этой стороне, – h; площадь параллелограмма – S. Найдите: **а)** S, если $a = 12$ см, $h = 8$ см; **б)** a, если $S = 34$ см^2, $h = 8{,}5$ см; **в)** a, если $S = 162$ см^2, $h = 0{,}3$ м.

20°. Диагональ параллелограмма равна 11 см и перпендикулярна к его стороне, которая равна 12 см. Вычислите площадь параллелограмма.

21. Две стороны параллелограмма равны 8 см и 10 см, а его острый угол равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

22. Острый угол параллелограмма равен 30°, а высоты, проведенные из вершины тупого угла, равны 4 см и 6 см. Найдите площадь параллелограмма.

23. Площадь параллелограмма равна 72 см^2, а длины его высот – 6 см и 8 см. Найдите периметр параллелограмма.

24*. Периметр параллелограмма равен 48 см, его площадь – 56 см^2, а одна из высот – 4 см. Найдите стороны параллелограмма и вторую высоту.

25*. Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если его высоты относятся как 5 : 7.

26.** В параллелограмме $ABCD$ стороны AB и AD равны 3,5 см и 12 см соответственно; AE и DF – биссектрисы его углов; P – точка пересечения прямых AB и DF; T – точка пересечения прямых DF и AE (рис. 2.64). Длина отрезка DP равна 10 см. Найдите: **а)** длину отрезка PT; **б)** периметр треугольника ADP; **в)** длину отрезка EF.

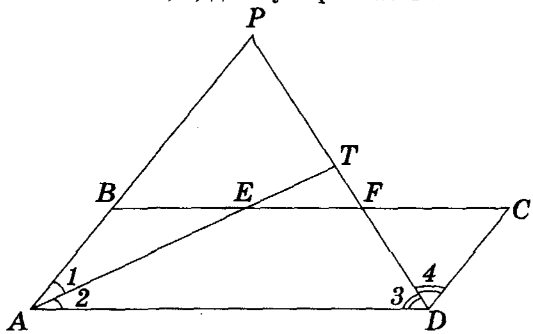


Рис. 2.64

27.** Стороны параллелограмма равны 8 см и 10 см. Найдите: **а)** отрезки, на которые биссектриса угла параллелограмма делит большую сторону; **б)** отрезок между точками пересечения биссектрис углов параллелограмма, прилегающих к большей стороне, с противолежащей его стороной; **в)** отрезок между точками пересечения биссектрис углов параллелограмма, прилегающих к меньшей стороне, с прямой, содержащей противоположную его сторону.

28*. Докажите, что биссектрисы двух противоположных углов параллелограмма параллельны или лежат на одной прямой.

29*. Докажите, что биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, взаимно перпендикулярны.

30.** Докажите, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, диагонали которого параллельны сторонам параллелограмма и равны разности двух его неравных сторон.

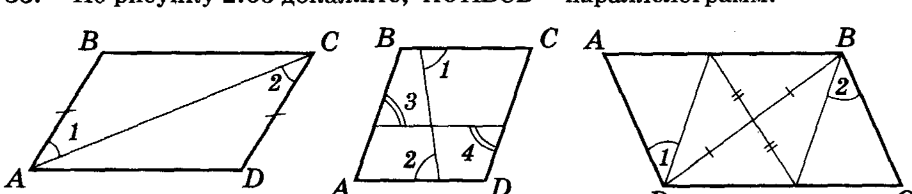
31.** Докажите, что биссектрисы внешних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник. Что можно сказать про диагонали этого прямоугольника?

32.** Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке E. Угол между EC и BD равен 80°, а $\angle BDC = 60°$. Найдите углы параллелограмма.

33.** Высота BP пересекает биссектрису угла A параллелограмма $ABCD$ в точке E. Найдите углы параллелограмма, если: **а)** $\angle BEA = 110°$; **б)** угол между биссектрисой угла A и стороной AB равен углу между высотой BP и этой же стороной.

34.** Две высоты параллелограмма пересекают его диагональ под углами 57° и 72°. Найдите углы параллелограмма.

35. По рисунку 2.65 докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.



а) **б)** **в)**

Рис. 2.65

36. $ABCD$ – параллелограмм; $BH = DF$; $CE = AG$ (рис. 2.66). Докажите, что $EFGH$ – параллелограмм.

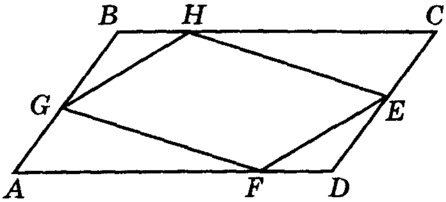


Рис. 2.66

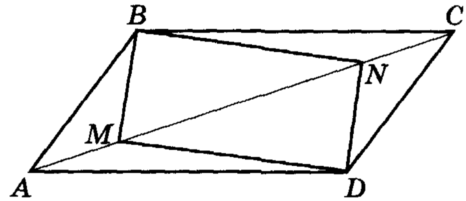


Рис. 2.67

37*. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки K, P, M и E так, что: **а)** $AK = BP = CM = DE$; **б)** $AK = AE = CP = CM$. Докажите, что четырехугольник $KPME$ – параллелограмм.

38*. Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Докажите, что $MBND$ – параллелограмм, если: **а)** $AM = CN$; **б)** $AN = CM$ (рис. 2.67).

39.** На продолжении сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки K, P, M и E так, что: **а)** $AK = BP = CM = DE$; **б)** $AK = AE = CP = CM$. Докажите, что четырехугольник $KPME$ – параллелограмм.

40*. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки K и M так, что $\angle AKB = \angle CMD$. Докажите, что четырехугольник $KBMD$ – параллелограмм.

41*. В каждой из двух концентрических окружностей провели диаметры AC и BD соответственно. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

42*. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма провели прямую. Докажите, что ее отрезок, ограниченный сторонами параллелограмма, делится точкой O пополам.

43*. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри параллелограмма до его сторон – величина постоянная для данного параллелограмма.

44.** Как определить построением точку пересечения диагоналей параллелограмма, если его вершины недоступны?

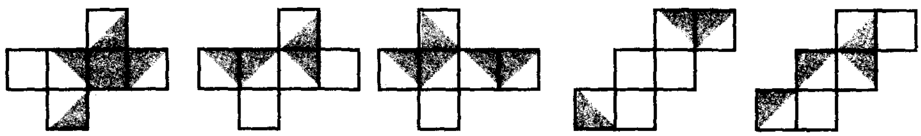
45*. Постройте параллелограмм по: **а)** двум смежным сторонам и углу между ними; **б)** двум диагоналям и углу между ними; **в)** двум неравным сторонам и диагонали.

46.** Постройте параллелограмм по: **а)** высоте и сторонам; **б)** высоте и диагоналям; **в)** углу, высоте и периметру; **г)** углу, высоте и разности двух сторон; **д)** углу, противолежащей этому углу диагонали и высоте.

Для любознательных

1. Каждую грань кубика поделили на 4 квадрата и каждый квадрат раскрасили в один из трех цветов: синий, желтый или красный так, что квадраты, имеющие общую сторону, разного цвета. Сколько при этом образовалось синих, желтых и красных квадратов?

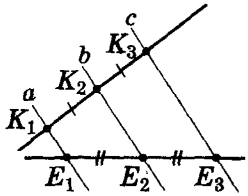
2. Какая из приведенных двухцветных разверток превращается (сгибанием) в куб, каждое ребро которого проходит по одноцветной области?



а) б) в) г) д)

§ 14. Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника

Теорема Фалеса



$a \parallel b \parallel c$

$K_1K_2 = K_2K_3$

$\Downarrow$

$E_1E_2 = E_2E_3$

Т Теорема Фалеса. **Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне два равных отрезка, то они отсекают два равных между собой отрезка и на второй стороне угла.**

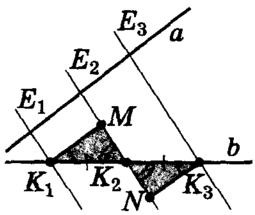


Рис. 2.68

Пусть параллельные прямые пересекают стороны угла $\angle(a;\ b)$ в точках K_1, K_2, K_3 и E_1, E_2, E_3 соответственно (рис. 2.68) и $K_1K_2 = K_2K_3$. Докажем, что $E_1E_2 = E_2E_3$.

Доказательство

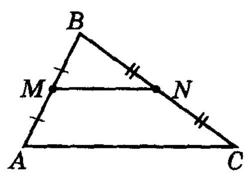
1) Проведем через K_1 и K_3 прямые, параллельные стороне a угла. Получим два параллелограмма $K_1E_1E_2M$ и $NE_2E_3K_3$.

2) $K_1M \parallel a$ и $K_3N \parallel a$, тогда $K_1M \parallel K_3N$.

3) $K_1K_2 = K_2K_3$, $\angle MK_1K_2 = \angle NK_3K_2$ (как разносторонние углы при $K_1M \parallel K_3N$ и секущей b), $\angle MK_2K_1 = \angle NK_2K_3$ (как вертикальные). Тогда $\triangle MK_2K_1 = \triangle NK_2K_3$ (по второму признаку равенства) и $K_1M = NK_3$.

4) $K_1M = NK_3$, $K_1E_1E_2M$ и $NE_2E_3K_3$ – параллелограммы. Тогда $E_1E_2 = K_1M = NK_3 = E_2E_3$.

Теорема доказана.



$MN \parallel AC$

$AM = MB$

$\Downarrow$

$BN = NC$

С Следствие 1. **Прямая, проходящая через середину одной из сторон треугольника параллельно другой его стороне, делит третью сторону этого треугольника пополам.**

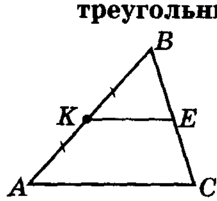


Рис. 2.69

Пусть в треугольнике ABC $AK = KB$ и $KE \parallel AC$ (рис. 2.69).

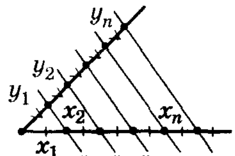
Т. е. на стороне AB угла ABC отложили $AK = KB$ и провели $KE \parallel AC$. Тогда, по теореме Фалеса, $BE = EC$.

Утверждение доказано.

Для любознательных

Древнегреческий ученый **Фалес Милетский** (VI в. до н. э.) – первый из «семи мудрецов», которые, по сути, были не только учеными, но еще и государственными деятелями, законодателями и моралистами. Им приписывают высказывания, подобные известному «познай самого себя». Фалеса Милетского считают творцом идеи математического доказательства. Про это рассказывают математики, которые жили позже Фалеса на 300 и более лет. Через них мы знакомимся с информацией о Фалесе, его математических и других достижениях. Геродот рассказывал, что Фалес предсказал солнечное затмение 585 года до н. э. Памфила, писательница эпохи Нерона (римский император I в.), по словам Диогена, утверждала, что Фалес первым описал окружность вокруг прямоугольного треугольника и что в честь этого события он принес в жертву быка.

С Следствие 2. **Если на одной стороне угла отложили равные между собой отрезки и через концы этих отрезков провели параллельные прямые, то они отсекают на другой стороне угла равные между собой отрезки.**



$a \parallel b \parallel c \parallel$

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

$\Downarrow$

$y_1 = y_2 = \ldots = y_n$

Например, если на одной стороне угла отметить точки K_1, K_2, ... так, чтобы образовались равные отрезки (рис. 2.70), и через эти точки провести параллельные между собой прямые, то на другой стороне угла получим точки E_1, E_2, ..., которые тоже будут концами равных отрезков. Заметим, что согласно теореме равные отрезки не обязательно откладывать от вершины угла.

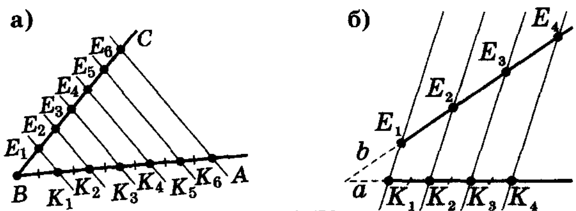
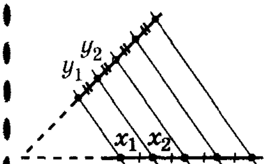


Рис. 2.70

С Следствие 3. **Если равные отрезки отложены на прямой, пересекающей другую прямую, и точка пересечения принадлежит одному из отрезков, то параллельные прямые, проведенные через концы заданных отрезков, отсекают на другой прямой равные между собой отрезки.**



$a \parallel b \parallel c \parallel$

$x_1 = x_2 = \ldots$

$\Downarrow$

$y_1 = y_2 = \ldots$

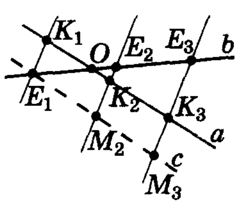


Рис. 2.71

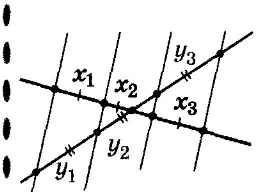
Пусть прямые a и b пересекаются в точке O.

1) Пусть на прямой a отложены два отрезка $K_1K_2 = K_2K_3$, точка O лежит на отрезке K_1K_2 (рис. 2.71). Через точки K_1, K_2 и K_3 проведем параллельные прямые, которые пересекут прямую b в точках E_1, E_2 и E_3 соответственно. Докажем, что $E_1E_2 = E_2E_3$.

Через точку E_1 проведем вспомогательную прямую $c \parallel a$. Образовались параллелограммы $E_1K_1K_2M_2$ и $M_2K_2K_3M_3$. Тогда $E_1M_2 = K_1K_2 = K_2K_3 = M_2M_3$, и по теореме Фалеса $E_1E_2 = E_2E_3$.

2) Если теперь на стороне OK_3 угла E_3OK_3 отложить равные K_2K_3 отрезки $K_3K_4 = K_4K_5 = \ldots$, провести параллельные K_3E_3 прямые, то на прямой b (согласно следствию 2) получим равные отрезки.

Утверждение доказано.



$\left\{\begin{array}{l} a \parallel b \parallel c \parallel \\ x_1 = x_2 = \ldots \end{array}\right.$

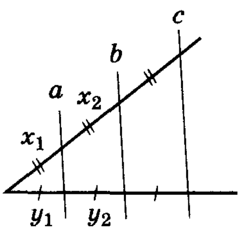
$\Downarrow$

$y_1 = y_2 = \ldots$

Для любознательных

Рассмотрите случай, когда равные отрезки откладывают на одной из двух параллельных прямых и через концы этих отрезков проводят параллельные прямые. Можно ли тогда теорему Фалеса сформулировать так: **если две любые несовпадающие прямые пересекаются параллельными прямыми и на одной из них при этом образуются равные отрезки, то и на другой из заданных прямых образуются равные между собой отрезки?**

Теорема, обратная теореме Фалеса

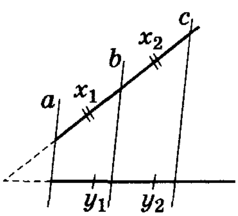


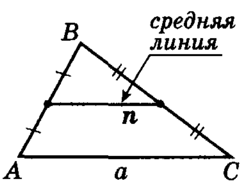
$x_1 = x_2 = \ldots$

$y_1 = y_2 = \ldots$

$\Downarrow$

$a \parallel b \parallel \ldots$





$n \parallel a$

$n = \frac{1}{2}a$

Теорема (обратная теореме Фалеса). **Если прямые отсекают на одной стороне угла равные между собой отрезки и на другой стороне угла равные между собой отрезки, то такие прямые параллельны.**

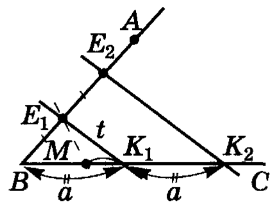


Рис. 2.72

На сторонах BA и BC угла ABC отложили отрезки: $BE_1 = E_1E_2$ и $BK_1 = K_1K_2$ (рис. 2.72). Докажем, что $E_1K_1 \parallel E_2K_2$.

Доказательство

Проведем его от противного. Пусть $BE_1 = E_1E_2$ и $BK_1 = K_1K_2$, а $E_1K_1 \nparallel E_2K_2$.

Через точку E_1 проведем прямую, параллельную E_2K_2, которая пересекает BC в точке M.

1) Пусть $BM < BK_1$. Обозначим разность длин этих отрезков через t, а длину отрезков BK_1 и K_1K_2 – как a. По теореме Фалеса $BM = MK_2$, т. е. $a - t = a + t$, чего быть не может (если $t \neq 0$).

2) Пусть $BM > BK_1$. Аналогично предыдущему случаю придем к противоречию ($a + t = a - t$).

Теорема доказана.

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Средней линией треугольника называется отрезок, который соединяет середины двух сторон этого треугольника.

Докажем следующие свойства средней линии треугольника.

Теорема. **Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника, которую она не пересекает, и равна ее половине.**

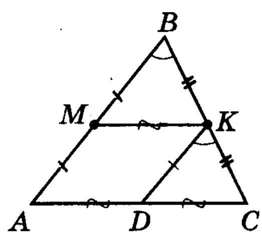


Рис. 2.73

Пусть MK – средняя линия треугольника ABC (рис. 2.73). Докажем (*1*) $MK \parallel AC$; (2) $MK = \frac{1}{2}AC$.

Доказательство

1) На сторонах угла ABC расположены отрезки $BM = MA$ и $BK = KC$. Тогда, по обратной теореме Фалеса, $MK \parallel AC$, и (*1*) доказано.

2) $MK \parallel AC$ по доказанному. Проведем $KD \parallel BA$. Тогда $AMKD$ – параллелограмм и $AM = DK$, $MK = AD$.

3) $KD \parallel BA$, BC – секущая. Тогда $\angle B = \angle DKC$ (как соответствующие).

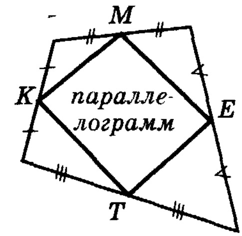
4) $BK = KC$, $MB = AM = DK$, $\angle B = \angle DKC$. Тогда $\triangle MBK = \triangle DKC$ (по первому признаку равенства) и $MK = DC$.

5) $AD = MK = DC$. Тогда $MK = \frac{1}{2}AC$.

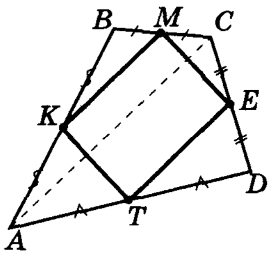
Теорема доказана.

Опорная задача 1

Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.



$KMET$ – параллелограмм *Вариньйона*



Дано: $AK = KB$; $BM = MC$; $CE = ED$; $DT = TA$.

Доказать: *$KMET$ – параллелограмм.*

Доказательство

Проведем диагональ AC.

1) KM – средняя линия в $\triangle ABC$, тогда $KM = \frac{1}{2}AC$, $KM \parallel AC$.

2) TE – средняя линия в $\triangle ADC$, тогда $TE = \frac{1}{2}AC$, $TE \parallel AC$.

3) $KM \parallel AC$, $TE \parallel AC \to KM \parallel TE$.

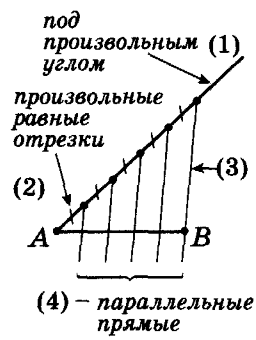
4) $KM = \frac{1}{2}AC = TE$, $KM \parallel TE \to KMET$ – параллелограмм.

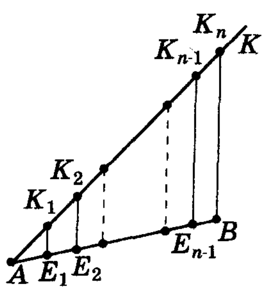
Ч. т. д.

Замечание. Такой параллелограмм называют *параллелограммом Вариньйона*.

Опорная задача 2

Разделите заданный отрезок на заданное количество равных частей.





Дано: $[AB]$.

Построить: *отрезок $x = AB : n$.*

План построения

1) Проведем $[AK)$ под произвольным углом к $[AB)$.

2) Произвольным раствором циркуля отложим на $[AK)$ отрезки: $AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3 = \ldots = K_{n-1}K_n$.

3) Проведем (K_nB).

4) Через точки K_1, K_2, K_3, …, K_{n-1} проведем прямые, параллельные (K_nB).

Эти прямые отсекают на $[AB]$ отрезки искомой длины.

Доказательство

По построению: $AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3 = \ldots = K_{n-1}K_n$; $K_1E_1 \parallel K_2E_2 \parallel \ldots \parallel K_nB$.

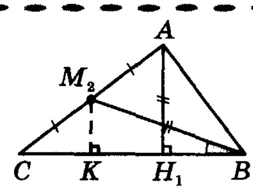
Тогда по теореме Фалеса $AE_1 = E_1E_2 = E_2E_3 = \ldots = E_{n-1}B_n$.

Ч. т. д.

Для любознательных

Решить следующую задачу вам помогут теорема Фалеса и рисунок.

В треугольнике ABC высота AH_1 равна медиане BM_2. Найдите угол CBM_2.



Практическая работа 17

1. Начертите произвольный острый угол.
2. На одной из сторон угла циркулем отложите последовательно несколько равных между собой отрезков.
3. С помощью угольника и линейки (рис. 2.74) через концы этих отрезков проведите параллельные прямые так, чтобы они пересекли другую сторону вашего угла.
4. С помощью циркуля сравните между собой длины отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на другой стороне угла. Сформулируйте вывод.

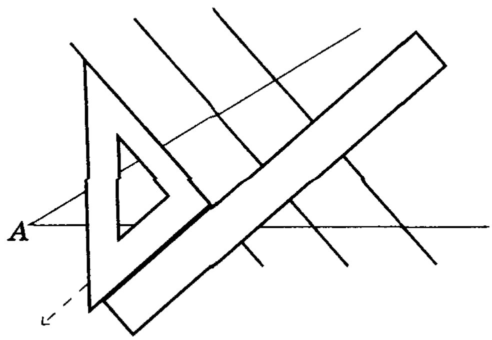


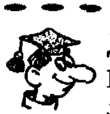
Рис. 2.74

Практическая работа 18

1. Начертите произвольный тупой угол с вершиной в точке O.
2. На одной из его сторон отложите последовательно три равных отрезка длиной 2 см каждый. Обозначьте полученные точки как A, B, C и P.
3. На другой стороне угла отложите последовательно три равных отрезка длиной 3 см каждый. Обозначьте полученные точки как A_1, B_1, C_1 и P_1.
4. Проведите прямые AA_1, BB_1, CC_1. С помощью линейки и угольника убедитесь, что эти прямые параллельны.
5. Сформулируйте вывод.

Практическая работа 19

1. Начертите произвольный треугольник ABC. Найдите с помощью циркуля и линейки середины сторон AB и BC. Обозначьте их как M и K и соедините отрезком.
2. Сравните с помощью циркуля отрезки AC и MK. Сделайте вывод.
3. Постройте произвольный прямоугольник $ABCD$. Середины его сторон обозначьте как M, N, P и Q. Измерьте длины сторон и меры углов четырехугольника $MNPQ$. Какой фигурой он является?
4. Постройте произвольный ромб $ABCD$. Середины его сторон обозначьте как M, N, P и Q. Измерьте длины сторон и меры углов четырехугольника $MNPQ$. Какой фигурой он является? В каком случае он будет квадратом?



Для любознательных

В параллелограмме $ABCD$ через точку пересечения его диагоналей O провели прямую, которая пересекает отрезки BC и AD в точках M и N соответственно. Найдите угол MBN, если $BO = ON$.

Задание 13

1°. На рисунке 2.75 прямые, пересекающие угол A, параллельны между собой. Найдите x.

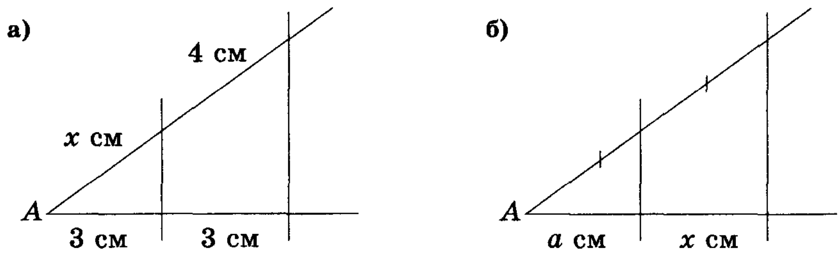


Рис. 2.75

2°. На рисунке 2.76 $AF \parallel BG \parallel CH \parallel DL$. Найдите длины отрезков OA, CD, CA, AD.

3°. На рисунке 2.77 две параллельные прямые a и b пересечены параллельными прямыми k, l и m так, что $AB = BC$. Докажите, что $A_1B_1 = BC$.

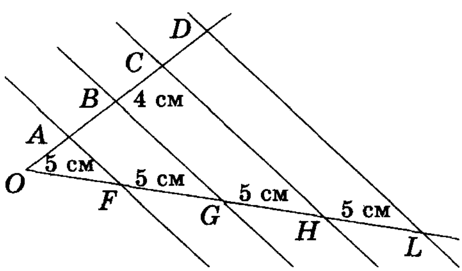


Рис. 2.76

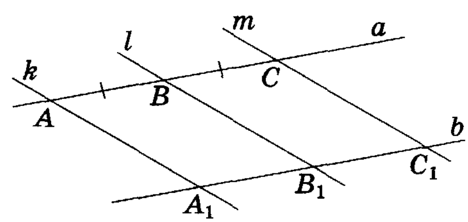


Рис. 2.77

4°. Непараллельные прямые a и b в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 соответственно пересечены параллельными прямыми k, l и m. Докажите, что $A_1B_1 =$ $= 2B_1C_1$, если $AB = 2BC$.

5. Данный отрезок разделите (построением): а) на 5 равных частей; б*) на две равные части так, чтобы одна из них была в 2 раза больше другой; в**) на два отрезка, длины которых относятся как 2 : 3.

Для любознательных

1. Постройте параллелограмм $ABCD$, если задано прямую BD и основания высот, проведенных из его вершины B.

2. Постройте параллелограмм $ABCD$ по положению его вершин A и B и расстояниям от данной точки M до вершин C и D.

3. Через точку на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ провели прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм разделен указанными прямыми на четыре параллелограмма. Два из них пересекают диагональ AC. Докажите, что два других – равновелики.

4. Точки M_1, M_2, M_3 – середины сторон BC, AC и AB неравнобедренного треугольника ABC (соответственно). Найдите угол C треугольника ABC, если центр окружности, описанной вокруг треугольника $M_1M_2M_3$, принадлежит биссектрисе этого угла.

5. Каждая из диагоналей четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника. Докажите, что этот четырехугольник – параллелограмм.

6*. На рисунке 2.78: $LFGH$ – параллелограмм, $FC = CG$, $LD = DH$. Докажите, что $LA = AB = BG$.

7°. На рисунке 2.79: $AK = KB, AL = LC, BC = 16$ см. Найдите длину отрезка KL.

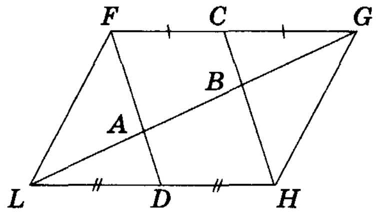


Рис. 2.78

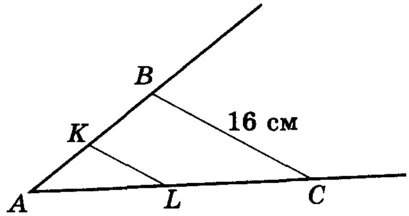


Рис. 2.79

8°. Стороны треугольника равны 4 см, 6 см, 3 см. Найдите длины средних линий этого треугольника.

9. Какой вид имеет треугольник, у которого: а) две средние линии равны между собой; б) три средние линии равны между собой; в) две средние линии взаимно перпендикулярны?

10. Найдите отношение периметров данного треугольника и треугольника с вершинами в серединах его сторон.

11. В четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно. Докажите, что середины отрезков KM и LN совпадают.

12. В треугольнике QRP середины сторон QR и RP обозначили как S и T соответственно (рис. 2.80). Найдите периметр четырехугольника $QSTP$, если $QR = 8$ см, $RP = 16$ см, $QP = 12$ см.

13. Сумма диагоналей четырехугольника равна 12 см. Найдите периметр четырехугольника с вершинами в серединах сторон заданного четырехугольника.

14.** В треугольнике ABC: CC_1, BB_1, AA_1 – медианы; $A_1A_2 \parallel BB_1$, $B_1B_2 \parallel CC_1$, $C_1C_2 \parallel AA_1$ (рис. 2.81). Докажите, что $BM_c = M_cM = MB_1$, $AM_b = M_bM = MA_1$, $CM_a = M_aM = MC_1$.

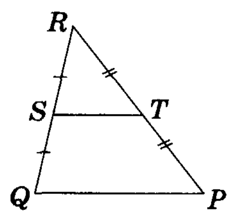


Рис. 2.80

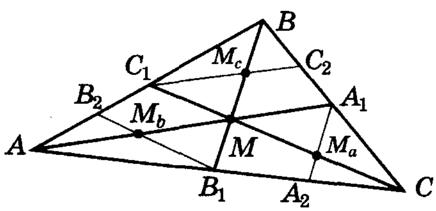


Рис. 2.81

Для любознательных

1. Вершина C треугольника ABC не поместилась на рисунке. Как построить прямую CM, где M – середина стороны AB?

2. M_1 и M_2 – середины сторон BC и AC треугольника ABC, а H_3 – основание высоты, проведенной к третьей его стороне. Докажите, что отрезок M_1M_2 принадлежит биссектрисе угла CM_1H_3.

3. В треугольнике ABC точки: M_2 – середина стороны CB, H – ортоцентр треугольника, E_1 и E_2 – середины отрезков CH и AH соответственно. Докажите, что $M_2E_1 \perp E_1E_2$.

4. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике середины диагоналей и точка пересечения прямых, соединяющих середины противолежащих сторон, лежат на одной прямой.

15.** Докажите следующий *признак равнобедренного треугольника*: **если две медианы треугольника равны, то такой треугольник – равнобедренный.** Попытайтесь найти другие признаки равнобедренного треугольника, отличные от изученных в 7 классе, и доказать их.

16*. В треугольнике ABC: M_1, M_2 и M_3 – середины сторон AB, BC, CA соответственно; H_1, H_2 и H_3 – основания высот, проведенные к этим сторонам. Докажите, что: **а)** $M_1M_2 = H_1M_3$; **б)** $M_1H_2 + M_2M_3 = AB$; **в)** $H_1M_2 = H_3M_2 = M_1M_3$.

17*. Точки A и B находятся на расстояниях 6 см и 24 см от прямой n соответственно. Найдите расстояние между серединой отрезка AB и прямой n, если точки A и B расположены относительно прямой n: **а)** в одной полуплоскости; **б)** в разных полуплоскостях.

18*. Докажите, что средняя линия треугольника меньше полусуммы сторон, которые она пересекает, но больше их полуразности.

19*. Докажите, что средняя линия треугольника делит пополам любой отрезок, соединяющий точку на стороне треугольника, которой параллельна средняя линия, с противолежащей вершиной треугольника.

20.** Из одной точки к прямой проводят наклонные. Найдите геометрическое место точек – середин этих наклонных.

21.** Высота равностороннего треугольника равна 6 см. Найдите проекцию данной высоты на другую высоту этого треугольника.

22.** Постройте треугольник по его: **а)** двум медианам и углу между ними; **б)** стороне и медианам двух других сторон; **в)** медиане одной из сторон и высотам, проведенным к двум другим сторонам; **г)** положению трех точек – середин двух сторон и основанию высоты, проведенной к третьей стороне; **д)** положению трех точек – середин двух сторон и основанию высоты, проведенной к третьей стороне.

23.** Постройте равнобедренный треугольник по: **а)** двум его неравным высотам; **б)** высоте, проведенной к основанию, и медиане боковой стороны.

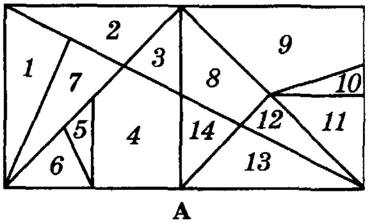
24.** Постройте прямоугольный треугольник по: **а)** гипотенузе и медиане одного из катетов; **б)** положению трех точек – вершине прямого угла и проекций середин катетов на гипотенузу.

25.** *Докажите, что в выпуклом четырехугольнике середины диагоналей и* середины двух противолежащих сторон являются вершинами параллелограмма.

Для любознательных

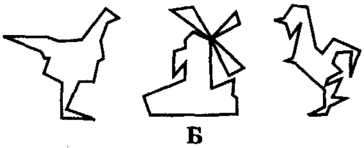
Стомахион Архимеда. Говорят, что эту игру придумал Архимед.

«Стомахион» в переводе с греческого означает «то, что вызывает злость». Попробуйте свои силы в этой игре, и вы убедитесь, что такое название дано ей не зря. Игра полна неожиданностей, развивает внимание, образное мышление и изобретательность, тренирует восприятие линий и форм. Стомахион – патриарх среди игр-головоломок. Эта игра выдержала 2000-летнее испытание временем и не устарела, как не устарели теоремы и законы Архимеда.



А

Прямоугольник, стороны которого относятся как 1 : 2, разрезали на 14 частей (рис. А). Составьте из этих частей силуэт курицы, ветряную мельницу, петуха (рис. Б). Кусочки прямоугольника можно выкладывать на стол любой стороной. При этом (согласно указаниям Архимеда) прилегание этих кусочков без зазоров друг к другу не обязательно, но обязательно при формировании картинки использование всех четырнадцати элементов стомахиона.



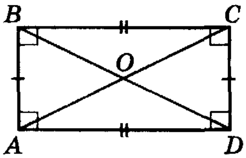
Б

§ 15. Особые виды параллелограммов – прямоугольник, ромб, квадрат

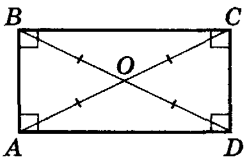
СВОЙСТВА:

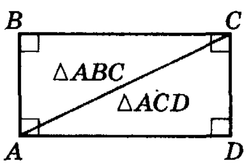
ABCD – прямоугольник

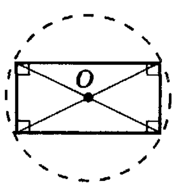
⇓



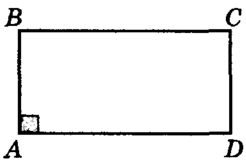
$AC = BD$







ПРИЗНАК:



ABCD – параллелограмм и $\angle A = 90°$

⇓

ABCD – прямоугольник

СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Прямоугольник имеет все свойства параллелограмма, т. е. у него:

– *противолежащие стороны равны*;
– *диагонали в точке пересечения делятся пополам*;
– *диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника.*

Добавим к этому перечню еще одно, уже известное вам, утверждение. *Площадь прямоугольника равна произведению длин двух его неравных сторон.*

Докажем еще два свойства прямоугольника.

Т Теорема 1. **Диагонали прямоугольника равны.**

На рисунке 2.82 AC и BD – диагонали прямоугольника $ABCD$. Докажем, что $AC = BD$.

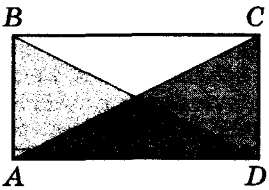


Рис. 2.82

Доказательство

В прямоугольных треугольниках ABD и DCA катет AD – общий, а катеты AB и CD – равны. Тогда $\triangle ABD = \triangle DCA$ и $AC = BD$.

Теорема доказана.

С Следствие. **Диагонали прямоугольника делят его на четыре равнобедренных треугольника.**

Т Теорема 2. **Вокруг любого прямоугольника можно описать окружность, центром этой окружности будет точка пересечения диагоналей прямоугольника.**

Доказательство этого свойства проведите самостоятельно. (Вернитесь на стр. 62 и используйте утверждение предыдущей теоремы.)

ПРИЗНАКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Т Теорема 3. **Параллелограмм, у которого один угол прямой, – прямоугольник.**

На рисунке 2.83 у параллелограмма $\angle A = 90°$. Докажем, что $ABCD$ – прямоугольник.

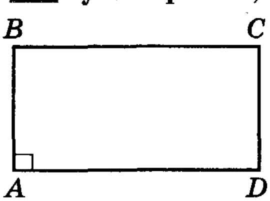


Рис. 2.83

Доказательство

$ABCD$ – параллелограмм, тогда $\angle C = \angle A = 90°$;
$\angle B = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$;
$\angle D = \angle B = 90°$ и $ABCD$ – прямоугольник.

Теорема доказана.

Теорема 4. Параллелограмм, диагонали которого равны, – прямоугольник.

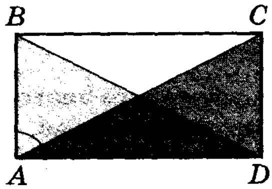


Рис. 2.84

Пусть $ABCD$ – параллелограмм, у которого $AC = BD$ (рис. 2.84). Докажем, что $ABCD$ – прямоугольник.

Доказательство

1) $AC = BD$ по условию, $AB = CD$ по свойству параллелограмма, AD – общая. Тогда $\triangle ABD = \triangle DCA$ и $\angle A = \angle D$.

2) По свойству параллелограмма $\angle A + \angle D = 180°$. Тогда $\angle A = \angle D = 180° : 2 = 90°$ (по предыдущей теореме) и $ABCD$ – прямоугольник.

Теорема доказана.

Теорема 5. Параллелограмм, вокруг которого можно описать окружность, – прямоугольник.

Доказательство этого признака проведите самостоятельно. (Совет. См. стр. 61.)

СВОЙСТВА РОМБА

Ромб имеет все свойства параллелограмма, т. е. у него:

– *противолежащие углы равны;*

– *сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°;*

– *диагонали в точке пересечения делятся пополам;*

– *площадь равна произведению длин стороны и высоты.*

Докажем еще два свойства ромба.

Теорема 6. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами углов этого ромба.

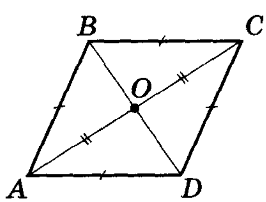


Рис. 2.85

$ABCD$ – ромб (рис. 2.85). Докажем, что: $BD \perp AC$, $AC \equiv l_A$; $AC \equiv l_C$; $DB \equiv l_B$; $DB \equiv l_D$.

Доказательство

$ABCD$ – ромб, тогда $AB = BC$, $AO = OC$. В равнобедренном треугольнике ABC медиана BO является высотой и биссектрисой. Тогда $BD \perp AC$ и $DB \equiv l_B$.

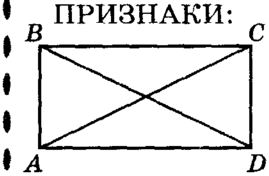
Аналогично получим: $DB \equiv l_D$; $AC \equiv l_A$; $AC \equiv l_C$.

Теорема доказана.

Теорема 7. В любой ромб можно вписать окружность, диаметр которой равен высоте ромба.

Доказательство этой теоремы проведите самостоятельно. (Совет. См. стр. 63.)

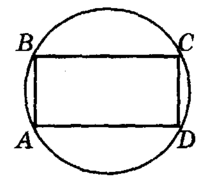
ПРИЗНАКИ:



$ABCD$ – параллелограмм и $AC = BD$

$\Downarrow$

$ABCD$ – прямоугольник



$ABCD$ – параллелограмм и $ABCD$ – вписанный

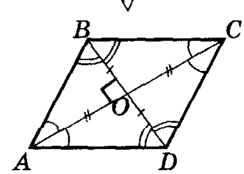
$\Downarrow$

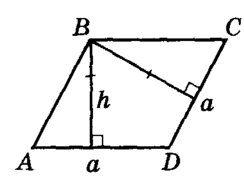
$ABCD$ – прямоугольник

СВОЙСТВА:

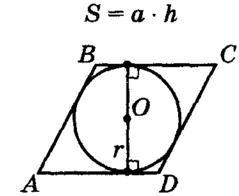
$ABCD$ – ромб

$\Downarrow$



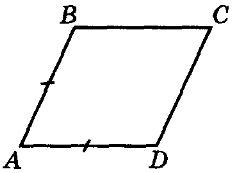


$S = a \cdot h$

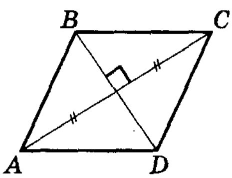


$r = \dfrac{h}{2}$

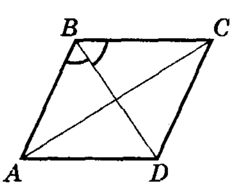
ПРИЗНАКИ:



ABCD – параллелограмм
и AB = AD
⇓
ABCD – ромб



ABCD – параллелограмм
и $AC \perp BD$
⇓
ABCD – ромб



ABCD – параллелограмм
и $BD \equiv l_B$
⇓
ABCD – ромб

ПРИЗНАКИ РОМБА

Теорема 8. **Параллелограмм, у которого две соседние стороны равны, – ромб.**

Докажите эту теорему самостоятельно.

Теорема 9. **Параллелограмм, у которого диагонали пересекаются под прямым углом, – ромб.**

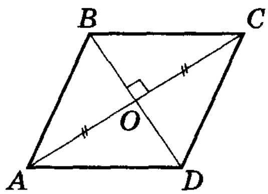


Рис. 2.86

Пусть у параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.86) $AC \perp BD$. Докажем, что $ABCD$ – ромб.

Доказательство

$AO = OC$ (по свойству параллелограмма) и $BO \perp AC$ (по условию). Тогда треугольник ABC – равнобедренный, т.е. $AB = BC$ и по предыдущему признаку $ABCD$ – ромб.

Теорема доказана.

Теорема 10. **Параллелограмм, диагональ которого является биссектрисой его угла, – ромб.**

Доказательство, аналогичное доказательству теоремы 6, проведите самостоятельно.

Теорема 11. **Параллелограмм, в который можно вписать окружность, – ромб.**

Доказательство этого признака проведите самостоятельно. (Совет. См. стр. 63.)

СВОЙСТВА КВАДРАТА

Квадрат является одновременно и прямоугольником, и ромбом. Поэтому он имеет все свойства и прямоугольника, и ромба:

– *диагонали в точке пересечения делятся пополам;*
– *диагонали пересекаются под прямым углом;*
– *диагонали являются биссектрисами углов квадрата;*
– *площадь равна произведению длин двух его сторон;*
– *вокруг квадрата всегда можно описать окружность.*

ПРИЗНАКИ КВАДРАТА

Легко доказать, что квадратом является:

– *прямоугольник, диагонали которого пересекаются под прямым углом;*
– *прямоугольник, диагональ которого является биссектрисой его угла;*
– *ромб, один угол которого прямой;*
– *ромб, диагонали которого равны.*

Предлагаем доказать эти признаки самостоятельно.

Попытайтесь сформулировать и доказать еще несколько признаков квадрата.

Для любознательных

Периметр квадрата равен 4 см. Найдите на плоскости квадрата все точки, сумма расстояний от которых до прямых, содержащих стороны квадрата, равна 6 м.

Практическая работа 20

1. Проведите две взаимно перпендикулярные прямые m и n.
2. Через точку, не принадлежащую m и n, проведите прямые, параллельные прямым m и n. Измерьте углы образовавшегося четырехугольника. Определите вид этого четырехугольника.
3. В полученном четырехугольнике проведите диагонали. Измерьте длины этих диагоналей и частей, на которые они делятся точкой их пересечения. Сформулируйте вывод.

4*. Начертите две прямые, пересекающиеся в точке O. На каждом из образовавшихся лучей, с началом в точке O, отложите четыре равных отрезка: $OA = OC = OB = OD$. Соедините точки A, B, C, D отрезками так, чтобы получился четырехугольник. Какой четырехугольник вы получили?

Практическая работа 21

1. Начертите две прямые a и b, пересекающиеся в точке A. На каждой из этих прямых отложите от точки A по одному отрезку равной длины: $AB = AD$.
2. Через точки B и D проведите прямые m и n, параллельные прямым a и b. Точку пересечения прямых m и n обозначьте как C. Измерьте стороны полученного четырехугольника $ABCD$. Сделайте вывод.
3. Проведите в четырехугольнике $ABCD$ диагонали и измерьте угол между ними. Запишите вывод.

Практическая работа 22

1. Проведите две взаимно перпендикулярные прямые m и n, пересекающиеся в точке O. На каждой из прямых m и n на одинаковом расстоянии от точки O отметьте по одной точке: K и D.
2. Через точки K и D проведите прямые a и b, параллельные прямым m и n. Точку пересечения прямых a и b обозначьте как C. Измерьте стороны и углы четырехугольника $OKCD$. Сделайте вывод.
3. В четырехугольнике $OKCD$ проведите диагонали. Измерьте длины диагоналей и частей, на которые они делятся точкой их пересечения. Сформулируйте вывод.

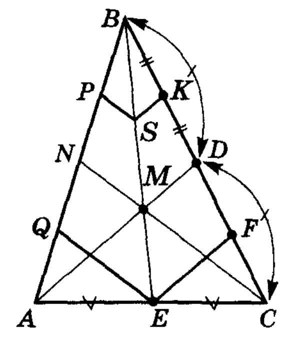
Для любознательных

Опираясь на теорему Фалеса, легко доказать, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1 (считая от вершины).

Дано: $AE = EC$; $BD = DC$; $BE \cap AD = M$;

$CM \cap AB = N$.

Доказать: $AN = BN$; $BM : ME = 2 : 1$.



Через K – середину отрезка BD – проведем $KS \parallel AD$, а затем: $EF \parallel AD$, $SP \parallel CN$, $EQ \parallel CN$ (см. рис.).

1) $AE = EC$, $FE \parallel AD \to DF = FC = \dfrac{a}{4}$ (угол DAC).
2) $BK = KD = DF$, $KS \parallel AD \parallel FE$. Тогда $BS = SM = ME$ (угол EBC) и $BM : ME = 2 : 1$.
3) $BS = SM = ME$, $SP \parallel CN \parallel EQ$. Тогда $BP = PN = NQ$ (угол ABE).
4) $AE = EC$, $EQ \parallel NC \to AQ = QN$ (угол BAC).
5) $AQ = QN = NP = PB \to AN = NB$.

Ч. т. д.

Задание 14

1°. На рисунке 2.87 изображены четырехугольники. Являются ли они прямоугольниками? Почему?

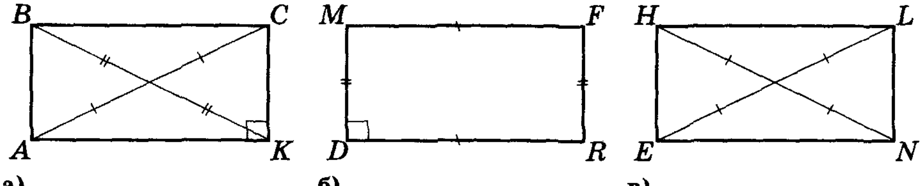


Рис. 2.87

2°. На рисунке 2.88 четырехугольники $ABCD$, $KLMN$, $RTFG$ – прямоугольники. Найдите углы x, y, z.

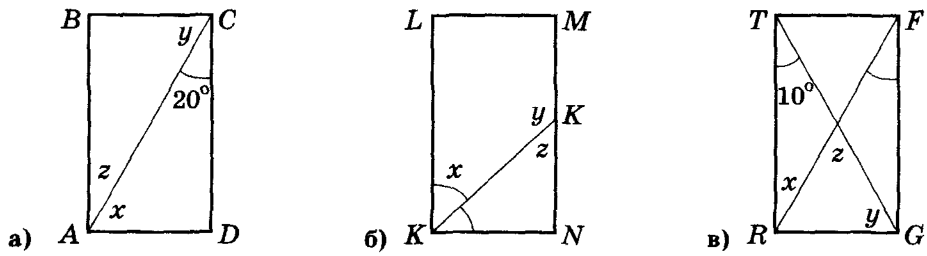


Рис. 2.88

3°. На рисунке 2.89 четырехугольник $ABCD$ – прямоугольник. Найдите угол DOC.

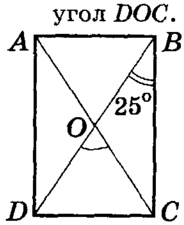


Рис. 2.89

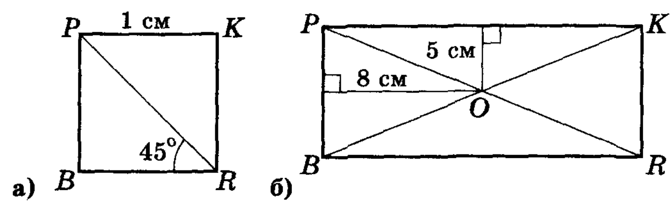


Рис. 2.90

4. В прямоугольнике диагональ образует с большей стороной угол, равный 28°. Найдите угол между диагоналями, лежащий против большей стороны прямоугольника.

5. Угол между диагоналями прямоугольника равен 72°. Какой угол образует диагональ: **а)** с меньшей стороной; **б)** с большей стороной?

6*. Существует ли такой прямоугольник, у которого тупой угол между диагоналями на 30° больше, чем угол между диагональю и большей стороной этого прямоугольника?

7*. Из вершины прямоугольника провели перпендикуляр к его диагонали. Этот перпендикуляр делит прямой угол в отношении 3 : 1. Найдите угол между этим перпендикуляром и второй диагональю.

8°. По рисунку 2.90 найдите периметр прямоугольника $PBRK$.

Для любознательных

У Марины 16 карточек: 4 синих (с), 4 красных (к), 4 зеленых (з) и 4 желтых (ж). Она хочет разложить их в квадрате (см. рис.) так, чтобы в каждом столбике и в каждой строке оказались карточки разных цветов. Сколько вариантов цвета карточки существует для клеточки, обозначенной вопросительным знаком?

с		?	
к	с		
	з		
	ж		

9°. Найдите периметр прямоугольника, если: а) длина одной стороны 2 см, а другой – в 3 раза больше; б) длина одной стороны 2 см, а диагональ образует с другой стороной угол 45°.

10°. Периметр прямоугольника равен 36 см. Найдите стороны прямоугольника, если одна из них на 6 см больше другой.

11. Периметр прямоугольника равен 48 см. Найдите стороны прямоугольника, если: а) одна из них на 4 см короче другой; б) одна сторона в 3 раза длиннее другой; в) две его стороны относятся как 2 : 3; г) расстояние между серединами противоположных сторон равно 10 см.

12. Найдите периметр прямоугольника, если: а) точка пересечения его диагоналей удалена от его сторон на 4 см и на 9 см; б) меньшая сторона прямоугольника 4 см, а биссектриса одного из углов делит противолежащую сторону на два равных отрезка.

13*. Точка пересечения диагоналей прямоугольника расположена на 5 см ближе к его большей стороне, чем к меньшей. Найдите стороны этого прямоугольника, если его периметр равен 44 см.

14. Пусть a и b – смежные стороны прямоугольника, а S – его площадь. Вычислите: а) S, если $a = 8{,}7$ см, $b = 3{,}5$ см; б) b, если $a = 24$ см, $S = 340{,}8$ см^2; в) a, если $b = 4{,}7$ см, $S = 27{,}73$ см^2.

15. Вычислите стороны прямоугольника, если они относятся как 4 : 9, а его площадь равна 144 см^2.

16*. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольного участка, если каждую из его сторон увеличить в 2 раза?

17. Докажите, что любой параллелограмм, вписанный в окружность, является прямоугольником.

18. Докажите, что диагонали вписанного в окружность прямоугольника – диаметры этой окружности.

19. Докажите, что четырехугольник является прямоугольником, если: а) у него все углы прямые; б) два противолежащих угла прямые и две противолежащие стороны равны; в) две противолежащие стороны равны и перпендикулярны третьей стороне; г) два противолежащих угла прямые и диагональ, соединяющая вершины этих углов, образует с двумя противолежащими сторонами равные углы.

20*. В прямоугольнике $ABCD$ на его диагоналях от каждой из вершин отложили равные отрезки $AM = BN = CK = DL$. Докажите, что четырехугольник $MNKL$ – прямоугольник.

21*. Докажите, что: а) биссектрисы углов прямоугольника при пересечении образуют квадрат; б) биссектрисы внешних углов прямоугольника при пересечении образуют квадрат.

22*. Докажите, что перпендикуляры, опущенные на диагонали прямоугольника из его вершин, равны.

23*. Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ провели перпендикулярную к этой диагонали прямую, которая пересекает стороны KL и MN в точках A и B соответственно. Найдите длину стороны KL, если $AB = BM = 6$ см.

24*. Через середину диагонали прямоугольника провели перпендикулярную к ней прямую, которая пересекает большую сторону под углом 60°. Отрезок этой прямой, расположенный внутри прямоугольника, равен 10 см. Найдите большую сторону прямоугольника.

25**. Серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника делит его сторону на отрезки, один из которых в 2 раза длиннее другого. Найдите градусные меры углов, на которые диагональ делит угол прямоугольника.

26**. Серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника делит его сторону на отрезки, один из которых равен меньшей стороне прямоугольника. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

27**. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ отметили такую точку K, что $\angle AKB = \angle AKD$. Найдите градусные меры этих углов, если $AD = 2AB$.

28. Постройте прямоугольник по: а) двум неравным сторонам; б) стороне и диагонали; в) диагоналям и углу между ними; г) стороне и радиусу описанной окружности; д) стороне и сумме диагоналей.

29*. Прямоугольный участок так зарос травой, что свободными остались только одна из его сторон и вершина противоположного этой стороне угла. Как найти на этом участке точку, равноудаленную от всех его вершин?

30**. Постройте прямоугольник по его диагонали и сумме двух неравных сторон.

31°. На рисунке 2.91 изображены четырехугольники. Являются ли они ромбами? Почему?

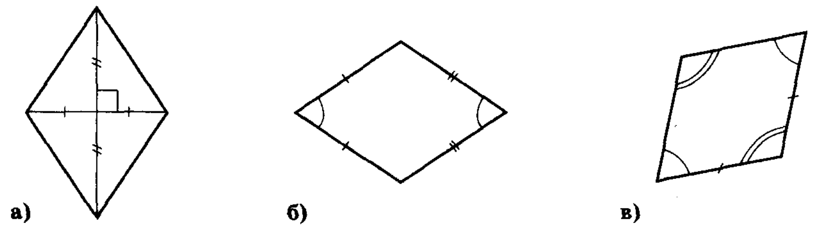


Рис. 2.91

32°. По рисунку 2.92 найдите углы ромбов.

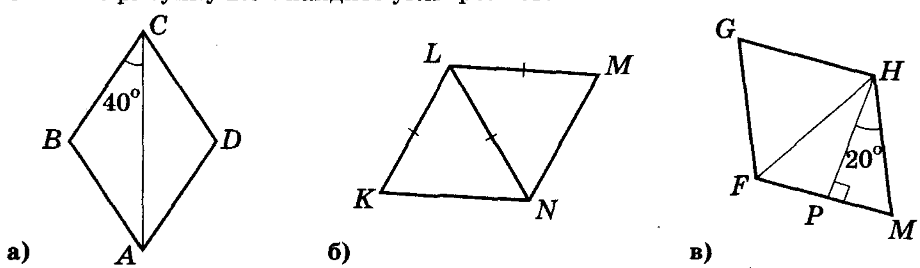


Рис. 2.92

33°. Найдите углы ромба, если: а) угол, образованный диагональю ромба с одной из его сторон, равен 30°; б) угол между одной из его диагоналей и стороной равен 75°.

34. Найдите углы, образованные диагоналями ромба и его сторонами, если: а) один из углов ромба 45°; б) одна из диагоналей равна стороне ромба.

35*. Найдите углы ромба, если: а) угол между двумя его высотами, проведенными из тупого угла, равен 70°; б) градусные меры углов, образованных диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как 4 : 5.

36*. По рисунку 2.93 найдите углы ромба $ABCD$.

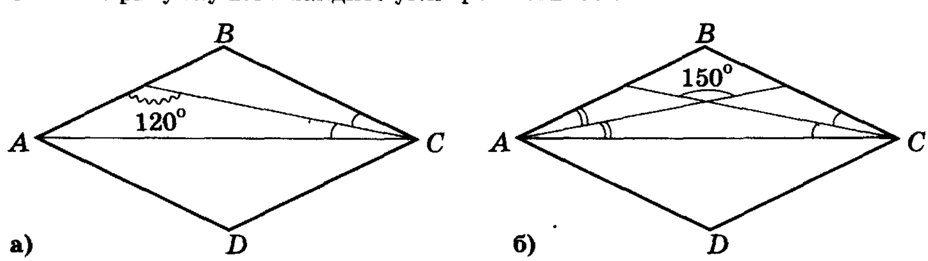


Рис. 2.93

37°. Найдите периметр ромба, если: а) длина его стороны на 6 см меньше его периметра; б) одна из его диагоналей равна 5 см и образует со стороной ромба угол 60°.

38. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам. Найдите углы ромба и его периметр, если меньшая его диагональ равна 10 см.
39. Найдите площадь ромба, если: **а)** его высота равна 2 см, а периметр – 16 см; **б)** его диагонали равны 10 см и 12 см.
40. Как изменится площадь ромба, если и его высоту, и его сторону уменьшить в 4 раза?
41. Вычислите площадь ромба, если: **а)** его сторона равна 10 см, а один из углов 150°; **б)** радиус вписанной в ромб окружности равен 5 см, а один из углов 30°.
42*. Квадрат и ромб, который не является квадратом, имеют одинаковые периметры. Сравните площади этих фигур.
43*. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами 50 см и 18 см.
44. Докажите, что высоты ромба, проведенные к соседним его сторонам, равны.
45*. Докажите следующий признак ромба. Параллелограмм, у которого высоты (проведенные из одной вершины) равны, является ромбом. Предложите еще несколько признаков ромба, отличающихся от приведенных в учебнике, и докажите их.
46. Докажите, что: **а)** четырехугольник с вершинами в серединах сторон ромба – прямоугольник; **б)** четырехугольник с вершинами в серединах сторон прямоугольника – ромб.
47. На сторонах ромба от двух его противоположных вершин отложили равные отрезки. Докажите, что концы этих отрезков (не совпадающие с вершинами ромба) являются вершинами прямоугольника.
48*. Из точки пересечения диагоналей ромба опущены перпендикуляры к сторонам ромба. Докажите, что основания этих перпендикуляров – вершины прямоугольника.
49*. Диагонали ромба относятся как 4 : 3. Найдите их длины, если площадь ромба равна 600 см^2.
50*. Докажите, что любой вписанный в окружность ромб является квадратом.
51*. Постройте ромб по: **а)** стороне и углу; **б)** стороне и диагонали; **в)** двум диагоналям.
52**. Постройте ромб по: **а)** радиусу вписанной в него окружности и стороне; **б)** диагонали и высоте; **в)** высоте и углу.
53**. В заданный треугольник впишите ромб так, чтобы он имел с треугольником общий угол, а противолежащая вершина ромба лежала на стороне треугольника.
54°. Докажите, что все четырехугольники на рисунке 2.94 – квадраты.

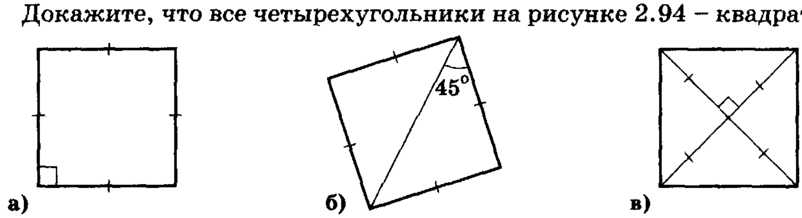


Рис. 2.94

55. Найдите периметры квадратов, изображенных на рисунке 2.95.

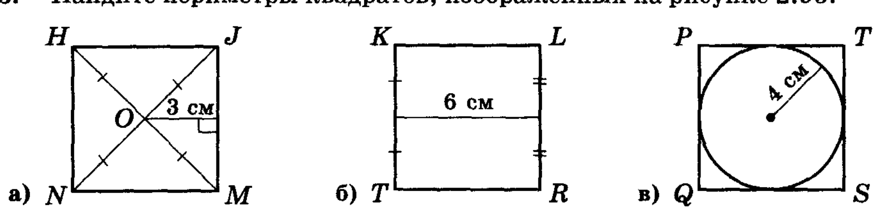


Рис. 2.95

56°. Диагональ квадрата делит его на два треугольника. Определите вид этих треугольников.

57. Диагональ квадрата равна 8 см. Найдите его площадь.

58. Периметр квадрата равен 36 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его сторон.

59*. Докажите, что середины сторон квадрата являются вершинами другого квадрата.

60*. На сторонах квадрата $ABCD$ последовательно отложили равные отрезки AM, BP, CK и DE. Докажите, что $\angle PME = \angle PKE$.

61*. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписали квадрат, две вершины которого лежат на катетах, а одна из сторон – на гипотенузе. Найдите периметр квадрата, если длина гипотенузы 9 см.

62*. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписали квадрат, одна из вершин которого совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а противоположная вершина лежит на гипотенузе. Найдите периметр квадрата, если катет треугольника равен a.

63*. Диагональ квадрата равна 5 см. Его сторона является диагональю второго квадрата. Найдите периметр второго квадрата.

64. На сторонах квадрата от двух противоположных его вершин отложили четыре равные отрезка. Докажите, что концы этих отрезков (не совпадающие с вершинами квадрата) являются вершинами прямоугольника. Найдите периметр этого прямоугольника, если диагональ квадрата равна 5 см.

65*. Из одной точки окружности провели две взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра этой окружности на 2 см и 3 см. Найдите длины этих хорд.

66*. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ отметили соответственно точки K, P, M и E так, что: **а)** $AK = BP = CM = DE$; **б)** точки K, P, M и E делят стороны квадрата в одном и том же отношении (при обходе квадрата по часовой стрелке). Докажите, что четырехугольник $KPME$ – квадрат.

67*. На продолжении сторон AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ отметили соответственно точки K, P, M и E так, что $AK = BP = CM = DE$. Докажите, что четырехугольник $KPME$ – квадрат.

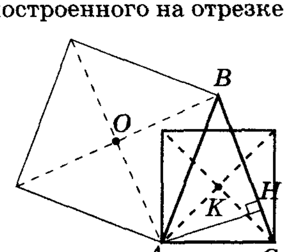
68*. Через точку пересечения диагоналей квадрата провели две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами другого квадрата.

69.** Постройте квадрат по: **а)** его центру и двум точкам на противоположных сторонах; **б)** сумме стороны и диагонали.

Для любознательных

1. Длина одной стороны прямоугольника – a целых единиц длины, а второй – b. Через концы единичных отрезков провели прямые, параллельные соответствующим сторонам прямоугольника. Получилось, что данный прямоугольник разделен на ab единичных квадратов. А сколько всего образовалось квадратов?

2. AH – высота остроугольного $\triangle ABC$, O – центр квадрата, построенного на отрезке AB вне треугольника, K – центр квадрата, построенного на отрезке AC в одной полуплоскости с точкой B (см. рис.). Лежат ли точки K, H и O на одной прямой?



3. Постройте ромб $ABCD$ по положению вершин A, B и расстоянию от заданной точки M до середины отрезка BC.

4. Вне ромба $ABCD$ построили правильный треугольник AMB. Найдите градусную меру угла CMD.

5. Решите предыдущую задачу в случае расположения точки M внутри ромба.

§ 16. Трапеция

Две стороны трапеции параллельны по определению. Эти стороны называют *основаниями* трапеции, а две остальные – *боковыми* сторонами трапеции. Например, на рисунке 2.96-а у трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, т. е. BC и AD – ее основания, а AB и CD – боковые стороны.

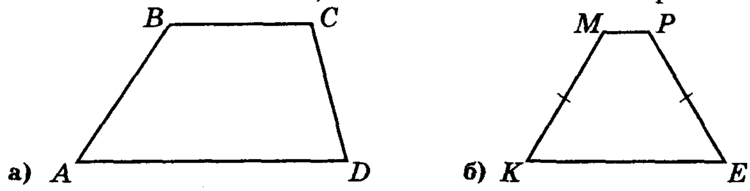


Рис. 2.96

Равнобокой или *равнобедренной* называют трапецию, у которой боковые стороны равны (рис. 2.96-б).

Прямоугольной называют трапецию, один из углов которой прямой.

Высотой трапеции называют перпендикуляр, проведенный к ее основанию из точки другого основания. Длина высоты трапеции – расстояние между ее параллельными сторонами.

Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

СВОЙСТВА ТРАПЕЦИИ

1. Сумма углов трапеции, прилежащих к одной ее боковой стороне, равна 180°.

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из свойства параллельных прямых.

2. ЯТ Теорема. **Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям, равна полусумме этих оснований и делит диагонали трапеции пополам.**

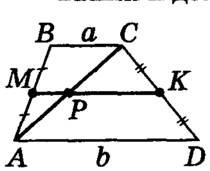


Рис. 2.97

На рисунке 2.97 отрезок MK – средняя линия трапеции $ABCD$, основания BC и AD которой обозначены как a и b соответственно. Докажем, что: (*1*) $MK \parallel a$, $MK \parallel b$; (*2*) $MK = (a + b) : 2$; (*3*) $AP = PC$.

Доказательство

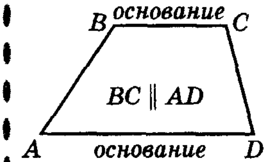
1) На сторонах угла, образованного прямыми AB и CD, отложены отрезки $AM = MB$ и $DK = KC$. Тогда (по обратной теореме Фалеса) $a \parallel MK \parallel b$ и (*1*) доказано.

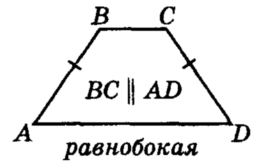
2) Рассмотрим $\angle ACD$: $MK \parallel b$, $DK = KC$. Тогда (по теореме Фалеса) $AP = PC$, т. е. средняя линия делит диагональ трапеции пополам – (*3*) доказано.

3) M, P и K – середины отрезков AB, AC и CD, т. е. MP и PK – средние линии треугольников BAC и ACD. Тогда $MK = MP + PK = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a + b)$ и (2) доказано.

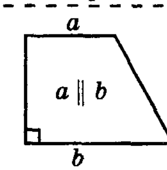
Теорема доказана.

Трапеция

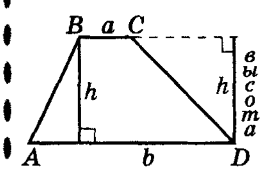




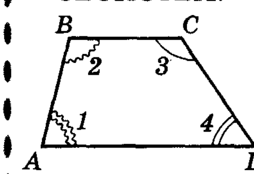
равнобокая или равнобедренная



прямоугольная



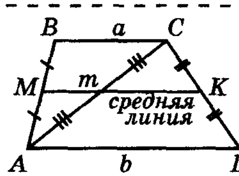
СВОЙСТВА:



ABCD – трапеция

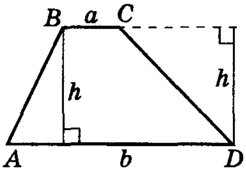
$\Downarrow$

$\angle 1 + \angle 2 = 180° = \angle 3 + \angle 4$



$m \parallel a \parallel b$

$m = \frac{a+b}{2}$



ABCD – трапеция

$S = h \cdot \dfrac{a+b}{2}$

3. **Теорема. Площадь трапеции равна произведению высоты и средней линии трапеции.**

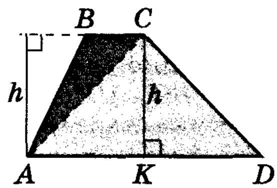


Рис. 2.98

Обозначим расстояние между основаниями AD и BC трапеции $ABCD$ как h (рис. 2.98). Докажем, что площадь трапеции S равна

$$h \cdot \frac{AD+BC}{2}.$$

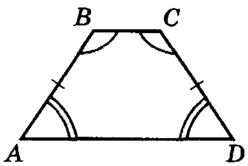
Доказательство

Диагональ AC делит трапецию на два треугольника ABC и ACD. Высотами этих треугольников, проведенными к сторонам BC и AD, будет расстояние между параллельными прямыми BC и AD. Тогда:

$$S = \frac{1}{2}\ h \cdot BC + \frac{1}{2}\ h \cdot AD = \frac{1}{2}\ h\,(AD + BC) = h \cdot \frac{AD+BC}{2}.$$

Теорема доказана.

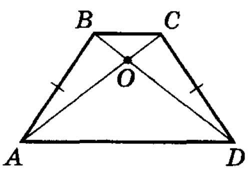
СВОЙСТВА РАВНОБОКОЙ ТРАПЕЦИИ:



$\angle A = \angle D;\ \angle B = \angle C$

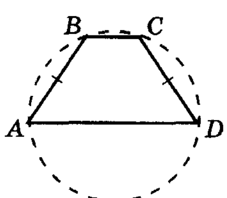
$\angle A + \angle C = 180^0$

$\angle B + \angle D = 180^0$



$AC = BD,$

$BO = OC,\ AO = OD$



$BC \parallel AD$

$AB = CD$

$\Downarrow$

ABCD – вписанная

СВОЙСТВА РАВНОБОКОЙ ТРАПЕЦИИ

Теорема. В равнобокой трапеции:

- **(1) углы, прилежащие к одному основанию, равны;**
- **(2) сумма противолежащих углов 180°;**
- **(3) диагонали равны;**
- **(4) отрезки диагоналей, соединяющие точку их пересечения с концами одного основания, равны;**
- **(5) вокруг равнобокой трапеции всегда можно описать окружность.**

У равнобокой трапеции $ABCD$: AD и BC – основания, $AB = CD$. Докажем для нее утверждения (1) – (5).

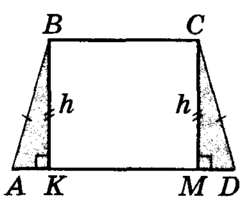


Рис. 2.99

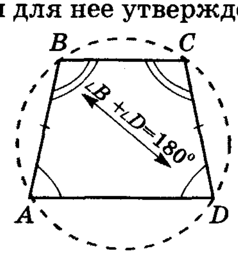


Рис. 2.100

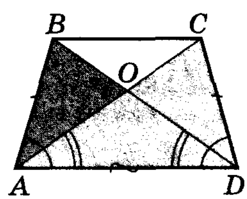


Рис. 2.101

Доказательство

Из вершин B и C трапеции проведем высоты BK и CM (рис. 2.99).

1) $ABK = DCM$ (по катету и гипотенузе). Тогда $\angle A = \angle D$. Учитывая свойство углов трапеции, $\angle B = 180° - \angle A = 180° - \angle D = \angle C$ и (1) доказано.

2) По свойству трапеции $\angle A + \angle B = 180°$, по доказанному $\angle A = \angle D$. Тогда $\angle D + \angle B = 180°$ и (2) доказано.

3) По доказанному $\angle D + \angle B = 180°$, тогда четырехугольник $ABCD$ – вписанный (рис. 2.100) и (5) доказано.

4) Проведем диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ (рис. 2.101). По первому признаку $\triangle ABD = \triangle DCA$ ($\angle A = \angle D$, $AB = CD$, AD – общая). Тогда $AC = BD$ и утверждение (3) доказано.

5) $\triangle ABD = \triangle DCA$, тогда $\angle BDA = \angle CAD$ и треугольник AOD – равнобедренный, т. е. $AO = OD$; учитывая (3), получим: $OC = AC - AO = BD - OD = OB$. Утверждение (4) доказано.

Теорема доказана.

ПРИЗНАКИ РАВНОБОКОЙ ТРАПЕЦИИ

Теорема. Если для трапеции выполняется какое-то из утверждений:

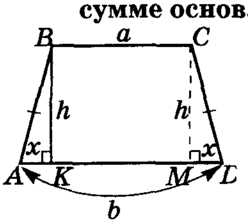
- углы, прилежащие к одному основанию, равны;
- сумма противолежащих углов 180°;
- диагонали равны;
- отрезки диагоналей, соединяющие точку их пересечения с концами одного основания, равны;
- трапеция – вписана в окружность,

то такая трапеция равнобокая.

Доказательство этой теоремы проведите самостоятельно, используя рисунки 2.99 – 2.101.

Опорная задача 1

В равнобокой трапеции высота, проведенная из конца меньшего основания, делит большее основание на отрезки, равные полуразности и полусумме оснований.



Дано: $BC \parallel AD$, $BC = a$, $AD = b$, $AB = CD$, $BK \perp AD$.

Доказать: $AK = (b - a) : 2$, $KD = (a + b) : 2$.

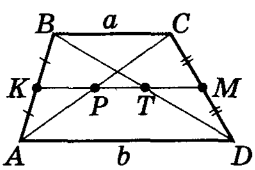
Проведем $CM \perp AD$.

1) $BK \perp AD$, $CM \perp AD$. Тогда $KBCM$ – прямоугольник и $KM = BC = a$.

2) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (по гипотенузе и катету). Тогда: $AK = MD = (b - a) : 2$, $KD = KM + MD = a + (b - a) : 2 = (a + b) : 2$. Ч. т. д.

Опорная задача 2

В трапеции с основаниями a и b ($a < b$) диагонали делят среднюю линию на отрезки, равные $\frac{a}{2}$; $\frac{b-a}{2}$; $\frac{a}{2}$.



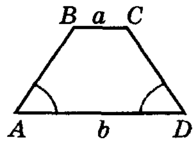
Дано: $AK = KB$, $CM = MD$, $BC = a$, $AD = b$.

Доказать: $KP = TM = a : 2$, $PT = (b - a) : 2$.

1) В треугольниках BAC и BDC отрезки KP и TM – средние линии. Тогда $KP = \frac{a}{2} = TM$.

2) KM – средняя линия трапеции. Тогда $KM = \frac{a+b}{2}$, $PT = \frac{a+b}{2} - 2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$. Ч. т. д.

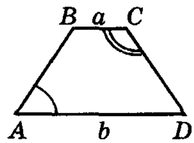
ПРИЗНАКИ:



$a \parallel b$ и $\angle A = \angle D$

$\Downarrow$

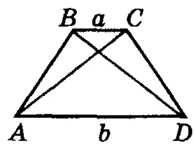
$ABCD$ – *равнобокая*



$a \parallel b$ и $\angle A + \angle C = 180°$

$\Downarrow$

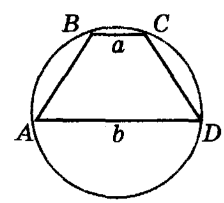
$ABCD$ – *равнобокая*



$a \parallel b$ и $AC = BD$

$\Downarrow$

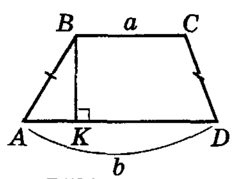
$ABCD$ – *равнобокая*



$a \parallel b$ и $ABCD$ – *вписанная*

$\Downarrow$

$ABCD$ – *равнобокая*



$BK \perp AD$

$AK = (b-a) : 2$

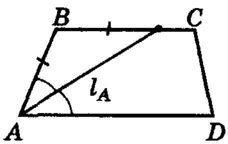
$KD = (b+a) : 2$

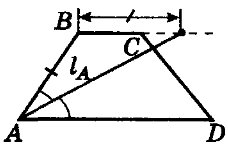
$\Updownarrow$

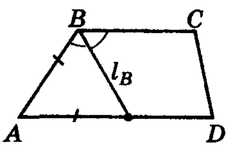
$ABCD$ *равнобокая*

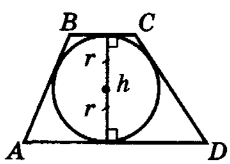
ABCD – трапеция

$\Downarrow$

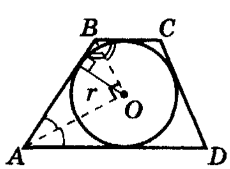








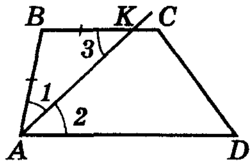
$h = 2r$

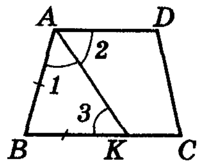


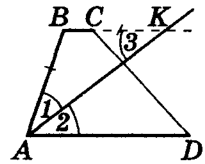
$\angle AOB = 90^\circ$

Опорная задача 3

Биссектриса угла трапеции отсекает от основания трапеции (или ее продолжения) отрезок, равный боковой стороне трапеции, прилежащей к указанному углу.







Дано: $BC \parallel AD$, $\angle 1 = \angle 2$.
Доказать: $BK = AB$.

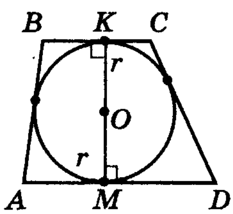
1) $BC \parallel AD \to \angle 2 = \angle 3$ (как внутренние разносторонние при секущей AK);
2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 \to AB = BK$.

Ч. т. д.

Опорная задача 4

Высота описанной трапеции равна диаметру вписанной в нее окружности.

Дано: $BC \parallel AD$, *ABCD – описанная.*
Доказать: $h = 2r$.

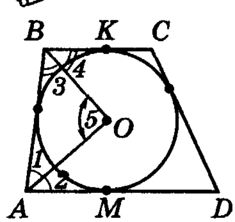


1) M и K – точки касания, O – центр вписанной окружности $\to OM \equiv r$, $OK \equiv r$, $OM \perp AD$, $OK \perp BC$;
2) $BC \parallel AD$, $(OK) \perp BC \to (OK) \perp AD$.
3) $(OM) \perp AD$ и $(OK) \perp AD$. Из одной точки к прямой можно провести только один перпендикуляр. Тогда $(OK) \equiv (OM)$ и $OK + OM = KM \equiv h = 2r$.

Ч. т. д.

Опорная задача 5

Из центра вписанной в трапецию окружности боковая сторона видна под прямым углом.



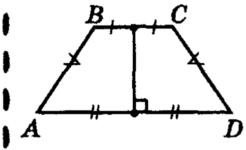
Дано: $BC \parallel AD$, *ABCD – описанная.*
Доказать: $\angle AOB = 90^\circ$.

1) $ABCD$ – описанная $\to AO \equiv l_A$, $BO \equiv l_B$ и $\angle 1 = \angle 2 = \dfrac{1}{2}\angle A$, $\angle 3 = \angle 4 = \dfrac{1}{2}\angle B$;
2) $ABCD$ – трапеция $\to \angle A + \angle B = 180^\circ$;
3) $\underline{\triangle AOB}$: $\angle 5 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3) = 180^\circ - \dfrac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180^\circ - 180^\circ : 2 = 90^\circ$.

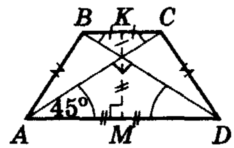
Ч. т. д.

Следующие опорные задачи предлагаются для самостоятельного решения.

ABCD – трапеция



Опорная задача 6. В равнобокой трапеции отрезок, соединяющий середины ее оснований, является высотой трапеции. Правильным есть и обратное утверждение.



$$KM = \frac{BC + AD}{2}$$

Опорная задача 7. Если диагонали равнобокой трапеции пересекаются под прямым углом, то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен ее средней линии. Правильным есть и обратное утверждение.

Опорная задача 8. Если прямые, которым принадлежат боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом, то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен полуразности этих оснований. Правильным есть и обратное утверждение.

Практическая работа 23

1. Постройте произвольный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Параллельно его стороне BC проведите прямую, пересекающую другие стороны треугольника. Точки пересечения обозначьте буквами K и L так, чтобы образовалась трапеция $CKLB$. Какого вида эта трапеция? Из концов верхнего основания проведите высоты трапеции. Сделайте вывод.
2. Постройте произвольный равнобедренный треугольник и проведите прямую, пересекающую треугольник, параллельно его основанию. Как называется образовавшийся четырехугольник? Почему? Измерьте длины боковых сторон и градусные меры углов четырехугольника. Проведите в нем диагонали и измерьте их длину. Сделайте вывод.

Задание 15

1°. Углы при одном из оснований трапеции равны 68° и 74°. Найдите градусные меры остальных углов трапеции.

2°. Один из углов трапеции равен 57°. Найдите все остальные углы трапеции, если: а) трапеция равнобокая; б) трапеция прямоугольная.

3. Углы при одной боковой стороне трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) относятся как 1 : 2, а при другой боковой стороне – как 1 : 3. Найдите углы трапеции, если: а) к большему основанию прилегают острые углы; б) к большему основанию прилегают острый и тупой углы.

4. Трапеция вписана в окружность. Найдите ее углы, если один из них равен 54°.

5. Существует ли трапеция с углами: а) 136°, 34°, 60°, 130°; б) 136°, 44°, 92°, 88°?

6. Могут ли градусные меры углов трапеции быть пропорциональны числам: а) 6, 3, 4, 2; б) 8, 7, 13, 12?

7. Найдите углы трапеции $ABCD$ по рисунку 2.102.

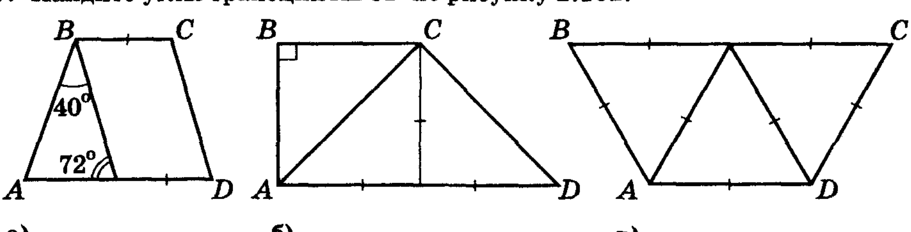


Рис. 2.102

8*. В равнобокой трапеции диагональ является биссектрисой острого угла и перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.

9*. Высота равнобокой трапеции в 2 раза меньше ее боковой стороны. Найдите углы трапеции.

10*. Верхнее основание прямоугольной трапеции равно ее меньшей боковой стороне и в 2 раза меньше второго основания. Найдите угол между большей боковой стороной и меньшей диагональю трапеции.

11*. Найдите высоту равнобокой трапеции, если ее основания равны 10 см и 4 см, а один из углов равен 135°.

12*. В прямоугольной трапеции один из углов 120°, а длина оснований – 4 см и 8 см. Найдите длину меньшей диагонали.

13*. Какой фигурой на рисунке 2.103 является четырехугольник $KLMN$, если: **а)** $AK = KN$, $AL = LM$; б) $AK = 2KN$, $AL = 2LM$? Вычислите его периметр, если $AN = 10$ см, $AM = 12$ см, $MN = 8$ см.

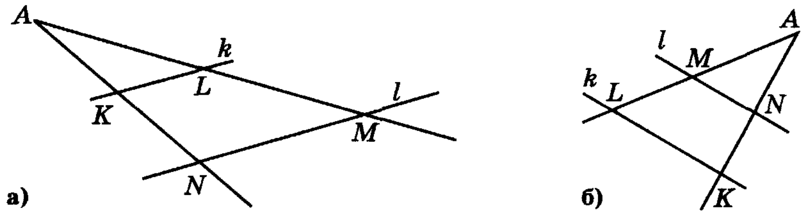


Рис. 2.103

14°. Найдите длину средней линии трапеции, если ее основания равны: **а)** 2 см и 6 см; б) 12 см и 18 см.

15. Найдите неизвестное основание трапеции, если: **а)** средняя линия трапеции равна 5 см, а одно из ее оснований – 2 см; б) одно из оснований трапеции равно 4 см, а средняя линия на 1 см меньше этого основания; **в)** одно из оснований трапеции равно 4 см, а средняя линия на 1 см меньше неизвестного основания.

16. Найдите основания трапеции, если: **а)** основания трапеции относятся как 1 : 3, а средняя линия равна 10 см; б) основания трапеции относятся как 3 : 5, а их разность равна 4 см.

17. Основания трапеции равны 10 см и 4 см. Найдите длины отрезков, на которые средняя линия делится диагоналями трапеции.

18*. Периметр описанной трапеции равен 28 см, а отрезок средней линии трапеции, расположенный между ее диагоналями, равен 3 см. Найдите основания трапеции.

19*. Найдите отношение оснований трапеции, если диагонали делят ее среднюю линию на: **а)** три равных отрезка; б) в отношении 2 : 1 : 2.

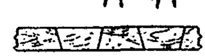
20. Основания трапеции равны 2 см и 8 см. Каждую из боковых сторон трапеции поделили на n равных частей и соответствующие точки соединили непересекающимися отрезками. Найдите длины этих отрезков, если: **а*)** $n = 4$; б**) $n = 3$.

21*. Найдите периметр равнобокой трапеции, если один из ее углов равен 60°, а основания равны 15 см и 49 см.

Для любознательных

Крышки столов для детского садика имеют форму равнобокой трапеции. Благодаря этому из них можно составить круг (рис. **А**). Если же каждый второй стол повернуть на 180°, то образуется сплошной (прямой) ряд (рис. **Б**). Определите, будут ли в последнем случае параллельными крайние (свободные) края крышек столов.

А



Б

22. Боковая сторона описанной равнобокой трапеции равна 7 см. Найдите: а) периметр трапеции; б) длину средней линии трапеции.

23*. Средняя линия вписанной трапеции равна 6 м. Найдите периметр трапеции и длины ее боковых сторон, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность.

24. Длины сторон трапеции равны 2 см, 2 см, 2 см и 4 см. Найдите радиус описанной вокруг нее окружности.

25*. В равнобокой трапеции один из углов равен 60°, боковая сторона – 24 см, а сумма оснований – 44 см. Найдите основания трапеции.

26*. В равнобокой трапеции основания равны 10 см и 4 см. Найдите высоту трапеции, если известно, что диагонали ее взаимно перпендикулярны.

27*. Основания прямоугольной трапеции равны 8 см и 16 см. Найдите ее площадь, если: а) меньшая диагональ трапеции является биссектрисой ее прямого угла; б) большая диагональ трапеции является биссектрисой ее прямого угла.

28.** Тупой угол прямоугольной трапеции равен 120°, а меньшая диагональ и большая боковая сторона – 12 см. Найдите среднюю линию трапеции.

29**. Средняя линия равнобокой трапеции равна 5 см, а отрезок средней линии, ограниченный диагоналями, – 3 см. Найдите площадь трапеции, если: а) прямые, содержащие боковые стороны трапеции пересекаются под прямым углом; б) диагонали трапеции взаимно перпендикулярны.

30.** Средняя линия трапеции равна 5 см, а отрезок, соединяющий середины ее оснований, – 3 см. Углы при большем основании равны 30° и 60°. Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

31**. Докажите, что в равнобокой трапеции середины оснований и диагоналей являются вершинами ромба, периметр которого равен сумме боковых сторон этой трапеции.

32.** Сумма углов при большем основании трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

33**. Диагонали трапеции пересекаются под прямым углом. Высота трапеции равна ее средней линии. Докажите, что трапеция равнобокая.

34.** Докажите, что биссектрисы двух углов трапеции, прилежащих к одной ее боковой, пересекаются на средней линии этой трапеции.

35.** В заданную трапецию можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на боковых сторонах этой трапеции как на диаметрах, касаются друг друга.

36**. Одна из боковых сторон трапеции равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на второй боковой стороне трапеции.

37.** Постройте трапецию по: а) четырем ее сторонам; б) ее основаниям, высоте и диагонали; в) ее основаниям, боковой стороне и диагонали; г) трем сторонам и диагонали; д) высоте, боковым сторонам и диагонали; е) высоте, средней линии и диагонали.

Для любознательных

Как из прямоугольника вырезать ромб наибольшей площади?

Решите несколько задач известного украинского математика М.В. Остроградского (1801–1862).

1. В данную окружность впишите треугольник, каждая сторона которого (или их продолжение) проходит через одну из заданных трех точек.

2. В данную окружность впишите треугольник, две стороны которого проходят через заданные две точки, а третья сторона параллельна заданной прямой.

3. В данную окружность впишите четырехугольник, каждая сторона которого (или их продолжение) проходит через одну из четырех заданных точек.

Задания для повторения главы II

1°. Какая фигура называется многоугольником (четырехугольником)? Какие отрезки называются его диагоналями? Чему равна сумма углов многоугольника (четырехугольника)?

2°. Изобразите выпуклый и невыпуклый многоугольники. Какое свойство для длин сторон многоугольников вы знаете?

3°. Какой многоугольник называется вписанным? Чему равна сумма противолежащих углов вписанного четырехугольника?

4°. Какой многоугольник называется описанным? Чему равна сумма противолежащих сторон описанного четырехугольника?

5°. Что вы знаете о центре окружности, описанной (вписанной) в многоугольник?

6. Вокруг какого многоугольника можно описать окружность? В какой многоугольник можно вписать окружность?

7°. Какой четырехугольник называется трапецией (параллелограммом, прямоугольником, ромбом, квадратом)? Какой отрезок называют высотой трапеции (параллелограмма, ромба)?

8. Сформулируйте свойства параллелограмма (прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции) и докажите их.

9. Сформулируйте признаки параллелограмма (прямоугольника, ромба, квадрата) и докажите их.

10. Дайте определение равнобедренной трапеции. Сформулируйте и докажите ее свойства. Сформулируйте и докажите признаки равнобедренной трапеции.

11.** Придумайте и докажите, отличающиеся от предложенных в учебнике, признаки параллелограмма (прямоугольника, ромба, квадрата, равнобокой трапеции).

12. Сформулируйте теорему Фалеса и следствия из нее. Сформулируйте обратную теорему Фалеса.

13. Правда ли, что среди углов выпуклого четырехугольника всегда найдется хотя бы один неострый угол?

14. Три угла четырехугольника равны 28°, 62°, 70°. Может ли он быть выпуклым?

15*. Три угла выпуклого четырехугольника острые. Докажите, что среди них есть хотя бы один угол больше 60°.

16.** В четырехугольнике $ABCD$: $\angle A = \angle B = 100°$, $\angle ABD = 40°$, $\angle CAD = 60°$. Найдите угол ACD.

17. Существует ли четырехугольник, длины сторон которого равны 1 см, 2 см, 3 см и 6 см?

18. Можно ли вписать в окружность четырехугольник, стороны которого (при последовательном рассмотрении) равны: **а)** 5 см, 6 см, 7 см и 8 см; **б)** 11 см, 7 см, 6 см и 10 см?

19*. **а)** Можно ли вписать в окружность четырехугольник, стороны которого (при последовательном рассмотрении) относятся как 3 : 4 : 5 : 6? **б)** Стороны описанного четырехугольника (взятые последовательно) относятся как 3 : 4 : m : 6. Найдите m.

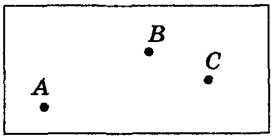
Для любознательных

1. Даны три точки A, B и C – вершины равнобокой трапеции (рис. А). Постройте трапецию.

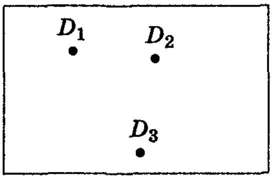
Замечание. Задача настолько проста, что вы, наверное, не стали ее решать. Интересно, а подумали ли вы о том, что задача имеет три решения?

2. Даны три точки D_1, D_2 и D_3 (рис. Б) – вершины трех равнобоких трапеций. Известно, что другие три вершины этих трапеций (A, B и C) общие. Постройте эти трапеции.

Сколько решений имеет задача?



А



Б

20. Докажите, что на рисунке 2.104 изображены параллелограммы.

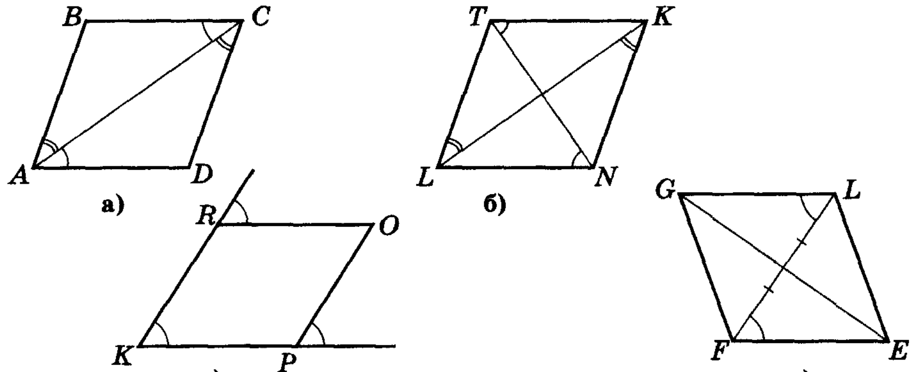


Рис. 2.104

21. Докажите, что на рисунке 2.105 изображены ромбы.

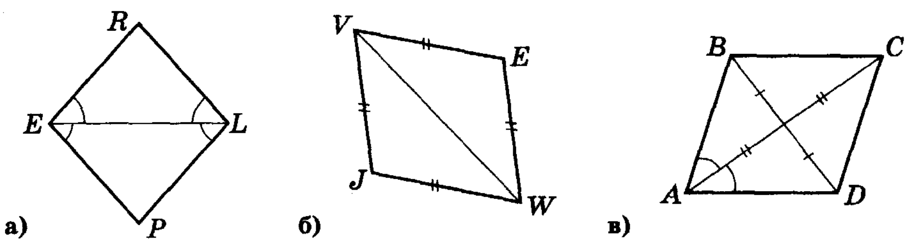


Рис. 2.105

22. Докажите, что на рисунке 2.106 изображены прямоугольники.

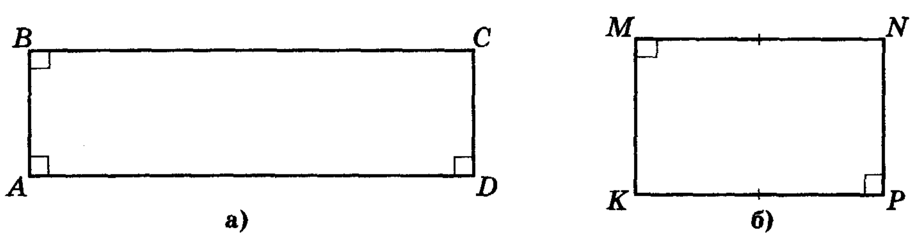


Рис. 2.106

23. Можно ли утверждать, что на рисунке 2.107 изображены параллелограммы?

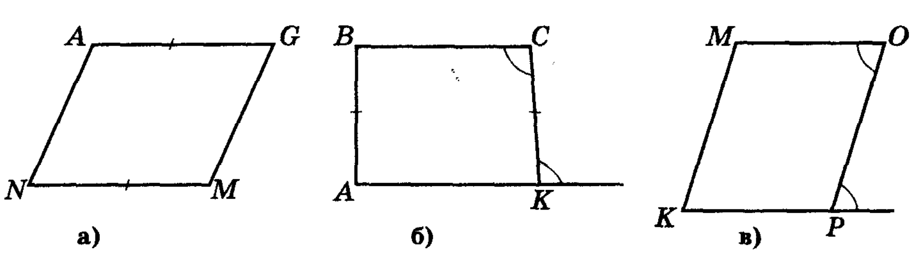


Рис. 2.107

Для любознательных

Сгибанием бумаги выделите из прямоугольного треугольника квадрат так, чтобы один из его углов совмещался с прямым углом данного треугольника, а вершина противолежащего угла квадрата лежала на гипотенузе треугольника.

24. Найдите углы параллелограмма, если: а) один его угол равен 27°; б) градусные меры двух его углов относятся как 2 : 3.

25. Найдите углы параллелограмма, если угол между его высотами, проведенными из одной вершины, равен 40°.

26. Биссектриса угла параллелограмма пересекает его противоположную сторону под углом 37°. Найдите углы параллелограмма.

27. Найдите стороны параллелограмма, периметр которого равняется 28 см, если: а) одна сторона больше другой на 4 см; б) одна сторона в 2,5 раза длиннее другой; в) стороны относятся как 2 : 3.

28*. В параллелограмме $ABCD$ проведены биссектрисы углов A и B, пересекающиеся в точке F. Докажите, что треугольник ABF прямоугольный.

29. Периметр треугольника, образованного средними линиями треугольника ABC, равен 12 см. Найдите периметр треугольника ABC.

30. Найдите: а) высоту ромба со стороной 10 см и тупым углом 150°; б) площадь прямоугольника, если биссектрисы двух его углов, прилегающих к одной стороне, делят противоположную ей сторону на отрезки 3 см, 5 см и 3 см; в) диагонали четырехугольника, образованного биссектрисами углов прямоугольника со сторонами 3 см и 6 см.

31*. Периметр параллелограмма равен 48 см. Биссектриса одного из его углов делит параллелограмм на две фигуры, разница периметров которых равна 6 см. Найдите стороны параллелограмма.

32. Два угла трапеции равны: а) 74° и 74°; б) 45° и 120°. Найдите остальные углы.

33. Найдите углы трапеции, если: а) трапеция прямоугольная, а один ее угол равен 100°; б) трапеция равнобокая, а один ее угол равен 45°.

34. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (рис. 2.108) диагональ $AC \perp CD$ и $AC = CD$. Найдите $\angle BCD$.

35*. В трапеции $ABCD$ (рис. 2.109) $AB = BC = CD$ и $AC \perp CD$. Найдите $\angle B$ и $\angle D$.

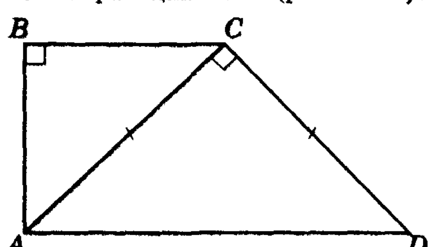


Рис. 2.108

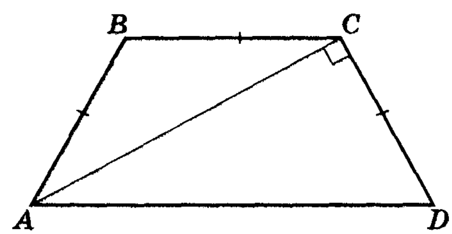


Рис. 2.109

36*. Боковые стороны трапеции равны меньшему ее основанию, а угол между диагональю и основанием равен 30°. Найдите углы трапеции.

Для любознательных

1. Через точку, заданную внутри острого угла, проведите прямую так, чтобы ее отрезок, расположенный внутри данного угла, делился заданной точкой пополам.

2. Внутри острого угла дано две точки M и P. Постройте на сторонах угла точки A и B так, чтобы периметр четырехугольника с вершинами в точках M, P, A и B был наименьшим.

3. Диагонали вписанного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Из точки их пересечения провели перпендикуляры ко всем сторонам четырехугольника. Докажите, что основания этих перпендикуляров и середины сторон четырехугольника лежат на одной окружности.

4. Докажите: если отрезок, соединяющий середины двух противолежащих сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других его сторон, то такой четырехугольник является или параллелограммом, или трапецией.

37. Боковая сторона равнобокой трапеции, описанной вокруг окружности, равна 2 см. Найдите периметр трапеции.

38. В трапеции $ABCD$ (рис. 2.110) $AM = MB = CN = ND$ и $BK \perp AD$, $AK = 3$ см, $DA = 7$ см. Найдите MN.

39*. В трапеции $ABCD$ (рис. 2.111) $AM = MB = CN = ND$, $\angle BAC = \angle CAD$, $MK = 3$ дм, $KN = 5$ дм. Найдите периметр трапеции.

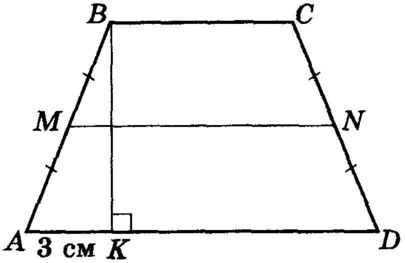


Рис. 2.110

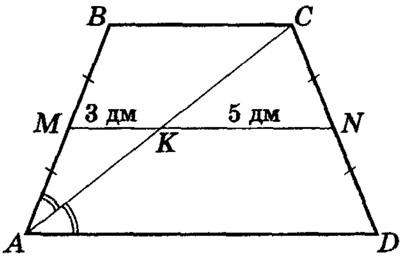


Рис. 2.111

40*. Боковую сторону трапеции разделили на равные отрезки $BM = MP = PR = RA$; притом: $MN \parallel PQ \parallel RS \parallel AD$; $BC = 15$ см; $AD = 23$ см *(рис. 2. 112). НайдитеMN, PQ и RS.*

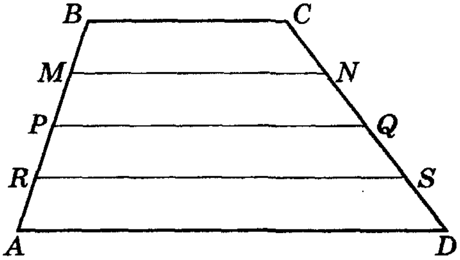


Рис. 2.112

41*. Средняя линия описанной трапеции делится ее диагоналями на три равные отрезка длиной 1,5 см каждый. Найдите основания и периметр трапеции.

42*. В равнобокой трапеции $ABCD$ провели диагонали AC и BD. Докажите, что $\angle ABD = \angle ACD$.

43*. Диагонали равнобокой трапеции делят ее на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилегающие к боковым сторонам трапеции, равны.

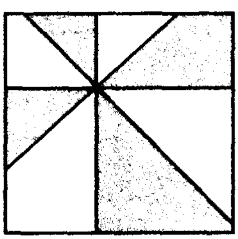
44*. Средняя линия MN трапеции $ABCD$ пересекает диагональ AC в точке P, а диагональ BD – в точке Q. Докажите, что $MP = NQ$.

45**. Постройте четырехугольник $ABCK$ по углам A и B, сторонам AB и AK и сумме двух его других сторон.

46**. Точка пересечения диагоналей четырехугольника равноудалена от всех его сторон. Определите вид четырехугольника.

Для любознательных

Через точку внутри квадрата провели прямые, параллельные его сторонам и диагоналям (см. рис.). Докажите, что сумма площадей незакрашенных частей квадрата равна сумме площадей закрашенных его частей.



В переводе с латинского языка «квадрат» означает «четырехугольный».

Готовимся к тематической аттестации № 2

Вариант I

1. (2 б.) Один из углов параллелограмма равен 57°. Найдите все его остальные углы.
2. (2 б.) Одна из сторон прямоугольника на 4 см меньше другой. Найдите площадь этого прямоугольника, если его периметр равен 16 см.
3. (2 б.) Боковая сторона равнобокой трапеции равна 3 см, а ее средняя линия – 5 см. Найдите периметр трапеции.
4. (3 б.) Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 8 см и 6 см, а градусные меры двух его углов относятся как 1 : 5.
5. (3 б.) В прямоугольной трапеции диагональ является биссектрисой тупого угла, а ее длина в два раза больше меньшего основания. Найдите углы трапеции.

Вариант II

1. (2 б.) Два угла трапеции равны 32° и 116°. Найдите ее остальные углы.
2. (2 б.) Периметр квадрата равен 28 см. Найдите его площадь.
3. (2 б.) Средняя линия равностороннего треугольника равна 45 мм. Найдите периметр этого треугольника.
4. (3 б.) Найдите площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 4 см и 6 см, а один из углов – 135°.
5. (3 б.) В параллелограмме $ABCD$ $\angle B = 120°$. Биссектриса угла ABD делит сторону AD на две равные части. Найдите периметр параллелограмма, если $BD = 5$ см.

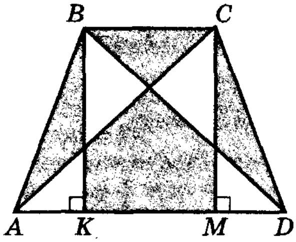
Для любознательных

1. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники ABO и CDO – равновеликие.

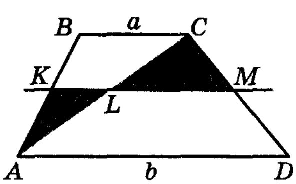
2. В равнобокой трапеции провели диагонали и высоты из вершин верхнего основания (рис. А). Докажите, что сумма площадей незакрашенных частей трапеции равна сумме площадей закрашенных ее частей.

3. В трапеции $ABCD$: $BC \parallel AD$, $BC = a$, $AD = b$ (рис. Б). На каком расстоянии от AD нужно провести прямую KM, параллельную основаниям трапеции, чтобы сумма площадей треугольников AKL и LMC была наименьшей (L – точка пересечения KM и AC)?

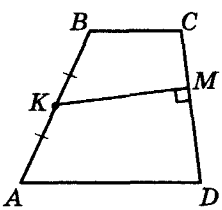
4. Из середины одной боковой стороны трапеции к другой ее боковой стороне провели перпендикуляр (рис. В). Докажите, что площадь трапеции равна произведению этого перпендикуляра на длину боковой стороны, к которой провели перпендикуляр.



А



Б



В

Всемирно известный гений Альберт Эйнштейн, которого в детстве учителя считали тупоголовым, но настойчивым ребенком, сумел в своей теории относительности объединить геометрию, оптику, механику и электромагнетизм.

Глава III
ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

[illegible]

§ 17. Пропорциональные отрезки

Рассмотрим две пары чисел a, b и c, d. Говорят, что эти пары пропорциональны, если их отношения равны, т. е. имеет место равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Само это равенство называют *пропорцией*.

Пропорции использовали еще в древние и средние века. Определенные типы задач и сегодня решают с помощью пропорций.

Пропорции и пропорциональность использовали и используют не только в математике, но и еще, например, в химии, архитектуре, искусстве и т. д.

Пропорция

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\Downarrow$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

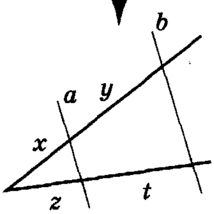
$$\frac{a \cdot d}{b} = c$$

$$a = \frac{c \cdot b}{d}$$

Для любознательных

Слово «пропорция» происходит от латинского *proportio*, что означает «соразмерность, определенное отношение частей между собой».

Теория подобия основывается на теореме о пропорциональных отрезках – *обобщенной теореме Фалеса*

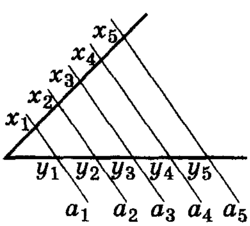


$a \parallel b$

$\Downarrow$

$\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$,

$\frac{x}{z} = \frac{y}{t}$



$a_1 \parallel a_2 \parallel a_3 \parallel \dots \parallel a_n$

$\Downarrow$

$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$

Т е о р е м а (обобщенная теорема Фалеса, или теорема о пропорциональных отрезках). **Параллельные прямые, пересекающие угол, отсекают на его сторонах пропорциональные отрезки.**

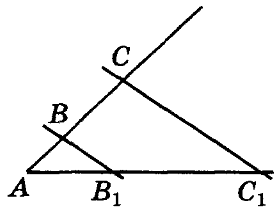


Рис. 3.1

Пусть параллельные прямые пересекают одну сторону угла A в точках B и C, а вторую – в точках B_1 и C_1 (рис. 3.1). Докажем, что

$$BC : AB = B_1C_1 : AB_1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Воспользуемся методом от противного.

Пусть $(BC : AB) \neq (B_1C_1 : AB_1)$.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $(BC : AB) < (B_1C_1 : AB_1)$.

Отметим на стороне AC угла A точку M так, чтобы $BM : AB = B_1C_1 : AB_1$ (рис. 3.2).

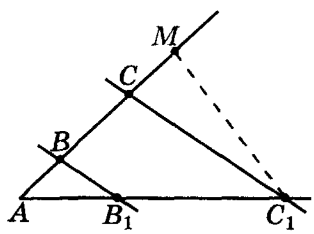


Рис. 3.2

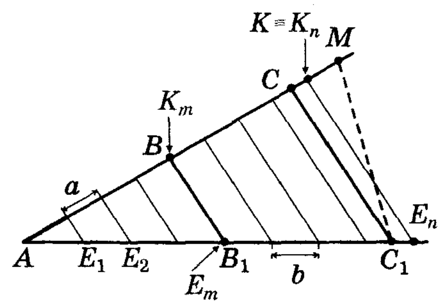


Рис. 3.3

1) Разделим отрезок AB на равные части так, чтобы длина одной такой части a была меньше CM (рис. 3.3).

2) На луче BM (от точки B) будем откладывать отрезок a, пока конец K такого отрезка не окажется на отрезке CM (рис. 3.3). Отрезок AK содержит целое число n отрезков a. Обозначим их правые концы как $K_1, \dots, K_n$ ($K_m \equiv B$, $K_n \equiv K$).

3) Через точки $K_1, \dots, K_n$ проведем прямые, параллельные BB_1. Эти прямые пересекут вторую сторону угла в точках $E_1, \dots, E_n$ (рис. 3.3). По теореме Фалеса $AE_1 = E_1E_2 = \dots. = E_{n-1}E_n \triangleq b$.

4) Отрезок AB содержит m отрезков a, а отрезок AB_1 – m отрезков b:

$AB = m \cdot a, AB_1 = m \cdot b;$

$BK_n = (n - m) \cdot a, B_1E_n = (n - m) \cdot b.$

5) Тогда: $\frac{BK_n}{AB} = \frac{n-m}{m} = \frac{B_1E_n}{AB_1}$,

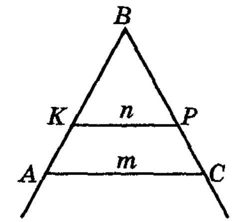
но $\frac{BK_n}{AB} < \frac{BM}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} < \frac{B_1E_n}{AB_1}$. Пришли к противоречию.

Напомним обозначение: $\triangleq$ – «обозначим как»; $\equiv$ – «совпадает» или «тождественно равно».

СЛУЧАЙ 2. $(BC : AB) > (B_1C_1 : AB_1)$.

В этом случае изменим обозначение точек: B на B_1 и C на C_1 – получим случай 1.

Вывод: наше предположение было ложным, и утверждение теоремы выполняется.



$$n \parallel m$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{KB}{AB} = \frac{BP}{BC}$$

С Следствие 1. **Параллельные прямые, пересекающие угол, отсекают от него треугольники. Стороны этих треугольников, содержащие данный угол, пропорциональны.**

На рисунке 3.4 $KP \parallel AC$. По теореме:

$$\frac{AK}{KB} = \frac{CP}{PB}.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства по 1. Тогда:

$$\frac{AK+KB}{KB} = \frac{CP+PB}{PB}, \text{ т. е. } \frac{AB}{KB} = \frac{CB}{BP}.$$

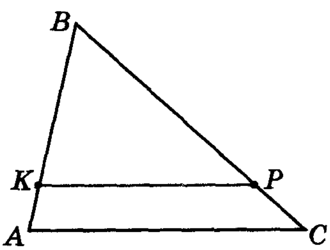


Рис. 3.4

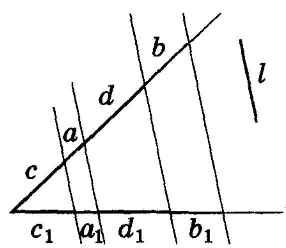
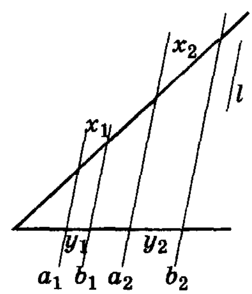


Рис. 3.5



$$a_1 \parallel l \parallel b_1$$
$$a_2 \parallel l \parallel b_2$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \text{const}$$

С Следствие 2. **Если даны угол и прямая l (не параллельная сторонам угла), то любые две прямые, пересекающие этот угол параллельно l, отсекают на его сторонах отрезки, отношение которых постоянно (для данного угла и данной прямой l).**

Например, на рисунке 3.5 проведенные прямые пересекают угол параллельно l.

Согласно теореме $\frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{b}{b_1}$, т. е. $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$.

Для любознательных

До XVI в. пропорции записывались словами (полностью или сокращенно). Делались попытки ввести специальные обозначения для пропорций.

Например, в рукописи XII в., найденной в Индии, пропорция 10 : (163/60) = 4 : (163/150) записана так, как показано на рисунке А.

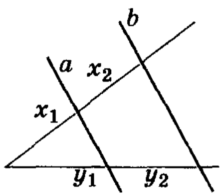
В средние века математики исламских стран, которые писали на арабском языке справа налево, использовали для записи пропорций три точки. Например, пропорцию 7 : 12 = 84 : 144 они записывали так, как показано на рисунке Б.

10	163	4	163
1	60	1	150

А

144 ∴ 84 ∴ 12 ∴ 7

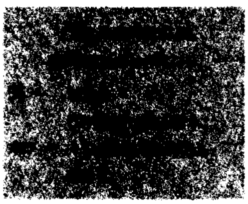
Б



$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$$

$$\Downarrow$$

$$a \parallel b$$



Известный древнегреческий математик Фалес (VI в. до н. э.) прославился как человек, который привнес логику в геометрию, введя в нее доказательство. Если раньше геометры удовлетворялись ответом на вопрос «как», то Фалес ставил вопрос «почему».

$a : b = c : x$

Четвертый пропорциональный

Теорема (обратная к обобщенной теореме Фалеса). **Если на сторонах угла (от его вершины) отложить пропорциональные отрезки и через их концы провести прямые, то эти прямые будут параллельны между собой.**

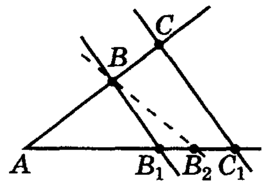


Рис. 3.6

На сторонах угла A (рис. 3.6) отложены отрезки, длины которых удовлетворяют соотношению

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AB_1}{B_1C_1} \Leftrightarrow \frac{AB}{AB_1}=\frac{BC}{B_1C_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AB_1}{AC_1}.$$

Докажем, что $BB_1 \parallel CC_1$.

Доказательство

Воспользуемся методом от противного. Пусть $BB_1 \nparallel CC_1$.

Через точку B проведем прямую, параллельную CC_1, которая пересекает сторону угла AC_1 в точке $B_2 \neq B_1$.

1) $BB_2 \parallel CC_1$, тогда $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB_2}{AC_1}$.

2) $\dfrac{AB_2}{AC_1}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB_1}{AC_1}$, тогда $AB_2 = AB_1$, чего быть не может.

Предположение ложно, тогда $BB_1 \parallel CC_1$.

Теорема доказана.

Отрезок x называется четвертым пропорциональным трех данных отрезков a, b и c, если выполняется соотношение $a : b = c : x$.

Следствие. Докажите самостоятельно такое следствие обобщенной теоремы Фалеса.

Если задано две прямые, которые пересекаются параллельными прямыми, то на заданных прямых отсекаются пропорциональные отрезки.

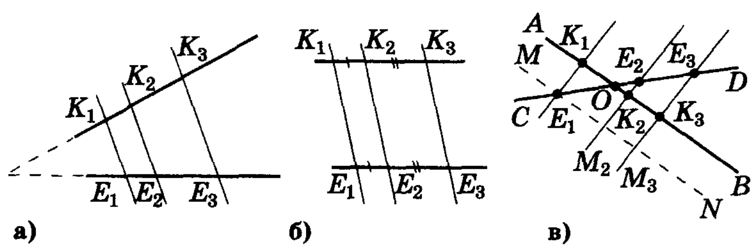


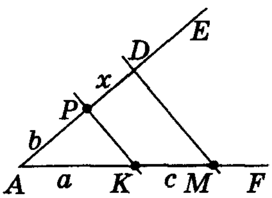
Рис. 3.7

Рассмотрите случаи: заданные прямые не параллельны (рис. 3.7-а); заданные прямые параллельны (рис. 3.7-б); заданные прямые пересекаются, и точка их пересечения лежит между параллельными прямыми (рис. 3.7-в).

Опорная задача 1

ПОСТРОЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ОТРЕЗКА

По данным отрезкам a, b, c построить отрезок x, длина которого равняется $x = \dfrac{cb}{a}$.



Дано: a, b и c.
Построить: $x = \dfrac{cb}{a}$.

План построения
1) $\angle FAE$ – произвольный.
2) На $[AE)$ откладываем $AP = b$.
3) На $[AF)$ откладываем $AK = a$, $KM = c$.
4) Строим $MD \parallel KP$; $x = PD$ – искомый.

Доказательство

Имеем по построению: $AK = a$; $KM = c$; $AP = b$; $MD \parallel KP$.

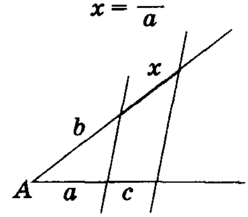
Тогда по обобщенной теореме Фалеса:

$$a : b = c : x \text{ и } x = \frac{cb}{a}.$$

Ч. т. д.

ЧЕТВЕРТЫЙ ПРОПОРЦИО-НАЛЬНЫЙ:

$x = \dfrac{cb}{a}$

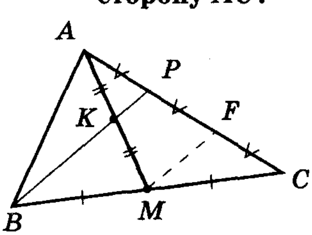


$\angle A$ – произвольный

[redacted]

Опорная задача 2

Точка K делит медиану AM треугольника ABC пополам. В каком отношении прямая BK делит сторону AC?



Дано: $BM = MC$, $AK = KM$.
Найти: $AP : PC$.

Проведем $MF \parallel BP$.

1) Рассмотрим $\angle MAC$:
$\left.\begin{array}{l} AK = KM \\ KP \parallel MF \end{array}\right| \to AP = PF$
(по теореме Фалеса).

2) Рассмотрим $\angle ACB$:
$\left.\begin{array}{l} BM = MC \\ BP \parallel MF \end{array}\right| \to PF = FC.$

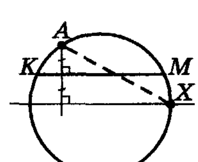
Имеем: $AP = PF = FC$. Тогда $AP : PC = 1 : 2$.

Ответ: $AP : PC = 1 : 2$.

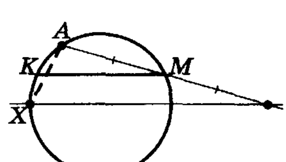
Для любознательных

Точка A лежит на окружности, MK – хорда этой окружности. Найдите на заданной окружности такую точку X, чтобы хорда MK делила хорду AX пополам.

Решить эту задачу двумя способами вам помогут рисунки А и Б соответственно.



А



Б

Практическая работа 24

1. Начертите острый угол с вершиной в точке A.
2. На одной из сторон угла отложите от его вершины последовательно отрезки: $AB = 2$ см, $BC = 4$ см.
3. С помощью угольника и линейки (см. практическую работу 17) через концы отрезков проведите параллельные прямые так, чтобы они пересекали вторую сторону угла в точках B_1 и C_1.
4. Измерьте линейкой отрезки AB_1, AC_1, B_1C_1, BB_1, CC_1.
5. Сравните отношения: а) $\frac{AB}{AC}$, $\frac{AB_1}{AC_1}$ и $\frac{BB_1}{CC_1}$; б) $\frac{AB}{AB_1}$ и $\frac{BC}{B_1C_1}$. Сформулируйте вывод.

Задание 16

1°. Найдите отношение отрезков AB и CD, если их длины равны соответственно 18 см и 24 см. Изменится ли это отношение, если длины отрезков выразить в дециметрах?

2°. Найдите x из пропорции:

а) $\frac{x}{75}=\frac{7}{3}$; б) $\frac{21}{x}=\frac{3}{2}$; в) $2\frac{1}{2} : 0{,}6x - 1{,}1 : 0{,}5$; г) $4\frac{1}{3} : 0{,}2x = 1{,}3 : 0{,}3$.

3°. Точка M делит отрезок AB на два таких отрезка, что $AM : MB = 1 : 2$. Найдите $AM : AB$ и $MB : AB$.

4. Точки C и D делят отрезок AB на три таких отрезка, что $AC : CD : DB = 2 : 3 : 1$. Найдите: а) $AD : DB$; б) $CD : DB$; в) $CB : AC$; г) $AB : CD$.

5°. Параллельные прямые k и l пересекают стороны угла BOB_1 (рис. 3.8). Найдите длину отрезка OA_1, если $AO = 4$ см, $AB = 6$ см, $A_1B_1 = 8$ см.

6°. По рисунку 3.9 найдите отношения: а) $OA : AB$; б) $OA : OB$; в) $OB : AB$, если прямые, пересекающие стороны угла, параллельны.

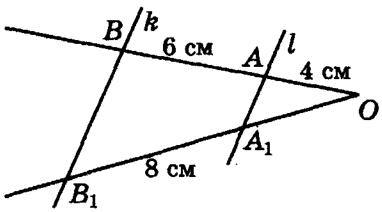


Рис. 3.8

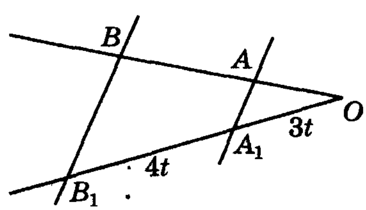


Рис. 3.9

7°. Стороны угла A пересекли параллельными прямыми a и b (рис. 3.10). Найдите длину отрезка BC, если $AD = 8$ см, $ED = 6$ см, $AB = 4$ см.

8. На рисунке 3.11 $AF \parallel BG \parallel CH$. Найдите отношения отрезков: а) $OF : FG : GH$; б) $OF : FH$; в) $OG : GH$.

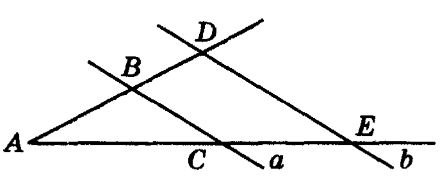


Рис. 3.10

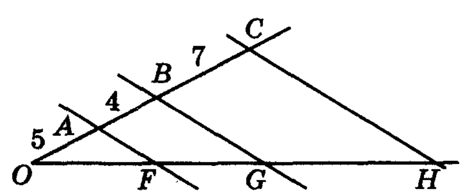


Рис. 3.11

9. Прямые m, n, p параллельны между собой (рис. 3.12). Найдите длины отрезков KM и PC, если $AM = 2$ см, $AN = 3$ см, $NP = BK = 6$ см.

10. По рисунку 3.13 найдите x.

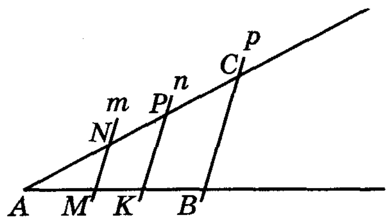


Рис. 3.12

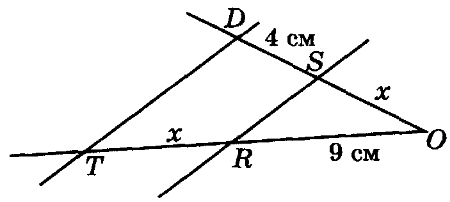
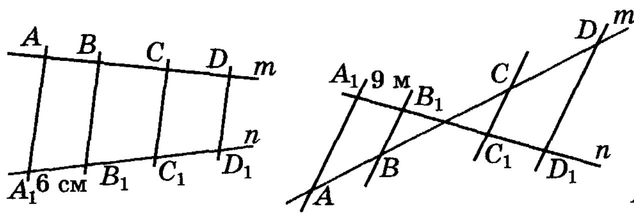


Рис. 3.13

11*. Прямые m и n пересекают параллельные прямые (рис. 3.14). Найдите длины отрезков B_1C_1 и C_1D_1, если $AB : BC : CD = 3 : 6 : 5$.

12**. Найдите длину отрезка DE (рис. 3.15), если: а) $AB = 2$ см, $BD = 1$ см, $BC = 1$ см; б) $AB = 6$ см, $BD = 4$ см, $DE - BC = 2$ см. (Совет. Через точку C проведите вспомогательную прямую, параллельную AD.)



а) б)

Рис. 3.14

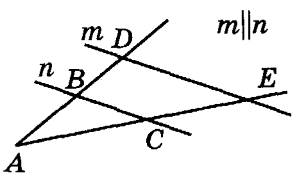


Рис. 3.15

13**. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки M и P так, что $AM : AB = 3 : 4$ и $AP : AC = 3 : 4$. Найдите длину отрезка MP, если $BC = 10$ см.

14**. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки M и N так, что $BM : BA = BN : BC = 1 : 3$. Точки D и E делят сторону AC на три равные части ($AD = DE = EC$). Докажите, что $MD = NE$.

15**. Точка M делит медиану AA_1 треугольника ABC так, что $MA_1 = 2AM$. В каком отношении прямая BM делит сторону AC этого треугольника?

16**. Прямая BB_1 делит сторону AC треугольника ABC в отношении $1 : 3$, считая от вершины C. В каком отношении она делит медиану AA_1?

17**. Медиана BM делит высоту AH треугольника ABC в отношении $3 : 1$, считая от вершины. В каком отношении эта высота делит медиану?

18**. По заданным отрезкам a, b, c, d, e постройте отрезки: а) $a^2 : b$; б) $abc : de$.

Для любознательных

1. Дана прямая l и три точки, которые не лежат на ней и на одной прямой. Проведите (построением) через заданные точки параллельные между собой прямые, отсекающие на прямой l равные отрезки.

2. Постройте параллелограмм $ABCD$ по положению трех его точек – по середине стороны AD и серединам высот, проведенным из вершины B.

3. Вершина A треугольника ABC перемещается так, что длина медианы CK не изменяется. Какую линию при этом описывает вершина A?

§ 18. Подобие треугольников

Два треугольника называются подобными, если у них равны углы, а против равных углов лежат пропорциональные стороны.

В подобных треугольниках называют:
- *соответственными углами* – равные углы;
- *соответственными вершинами* – вершины равных углов;
- *соответственными сторонами* – стороны, лежащие против равных углов.

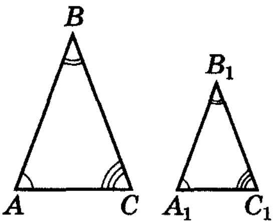


Рис. 3.16

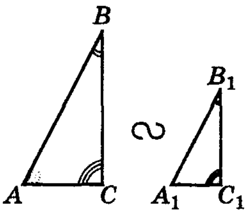
Подобие треугольников принято обозначать знаком «∽».

Например, на рисунке 3.16 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. Соответственные углы этих треугольников равны: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$; соответственными вершинами являются вершины: A и A_1, B и B_1, C и C_1; соответственные стороны этих треугольников пропорциональны:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}.$$

Обозначим отношение соответственных сторон этих треугольников через k. Его называют *коэффициентом подобия треугольника* $A_1B_1C_1$ относительно треугольника ABC. Тогда: $A_1B_1 = k \cdot AB$, $B_1C_1 = k \cdot BC$, $C_1A_1 = k \cdot CA$.

Мы только что сформулировали определение подобных треугольников. А то, что такие треугольники существуют, утверждается в следующей теореме – основной теореме в геометрии подобных треугольников.



$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

если:

$\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$

$\angle C = \angle C_1$

и

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=k$$

Соответственные:
AB и A_1B_1,
AC и A_1C_1,
BC и B_1C_1;
A и A_1,
B и B_1,
C и C_1.

Для любознательных

Лемма Архимеда (см. стр. 34, 35) *«о перпендикулярах на секущую»*

Окружность и перпендикуляры, проведенные из концов диаметра на секущую, отсекают на ней равные отрезки.

Доказательство

Возможны два случая: диаметр и секущая пересекаются внутри окружности (рис. А); секущая пересекает продолжение диаметра (рис. Б).

СЛУЧАЙ 1.

Пусть диаметр AB и секущая CD пересекаются внутри окружности (с центром O) в точке K (рис. А).

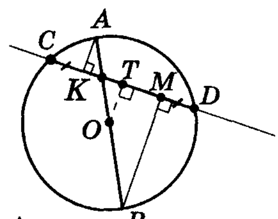
1) $OT \perp CD$, $AK \perp CD$, $BM \perp CD$.
Тогда $CT = TD$.

2) $AK \parallel OT \parallel MB$ и $KT : TM = AO : OB$ (см. стр. 81); $AO = OB$ как радиусы $\to KT = TM$.

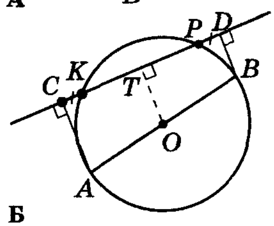
3) $CK = CT - KT = TD - TM = MD$.

СЛУЧАЙ 2.

В этом случае (рис. Б) равенство $CK = PD$ доказывается аналогично. Убедитесь в этом самостоятельно.



А



Б

Теорема (*основная теорема подобия треугольников*). **Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от этого угла подобные треугольники.**

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

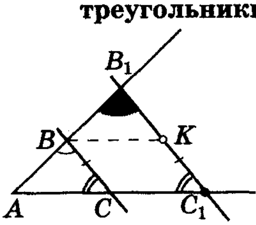


Рис. 3.17

На рисунке 3.17 угол A пересекают параллельные прямые: $BC \parallel B_1C_1$. Докажем, что углы треугольников ABC и AB_1C_1 равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

Доказательство

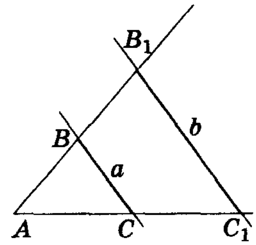
1) Равенство углов следует из свойства параллельных прямых.

2) $BC \parallel B_1C_1$, тогда по следствию из обобщенной теоремы Фалеса: $AB_1 : AB = AC_1 : AC$.

3) Через точку B проведем $BK \parallel AC_1$ (рис. 3.17). Тогда $BC = KC_1$ как стороны параллелограмма $CBKC_1$.

4) Угол AB_1C_1 пересекают параллельные прямые BK и AC_1. Тогда $B_1C_1 : KC_1 = AB_1 : AB$ и, учитывая, что $KC_1 = BC$, получим, что: $B_1C_1 : BC = AB_1 : AB = AC_1 : AC$ (см. п. (2)).

Теорема доказана.



$a \parallel b$

$\Downarrow$

$\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$

Практическая работа 25

1. Вырежьте из бумаги четыре равных треугольника.
2. Один из них оставьте без изменения, а от остальных отрежьте части, которые отсекаются прямыми, параллельными каждой из трех сторон треугольника (рис. 3.18).

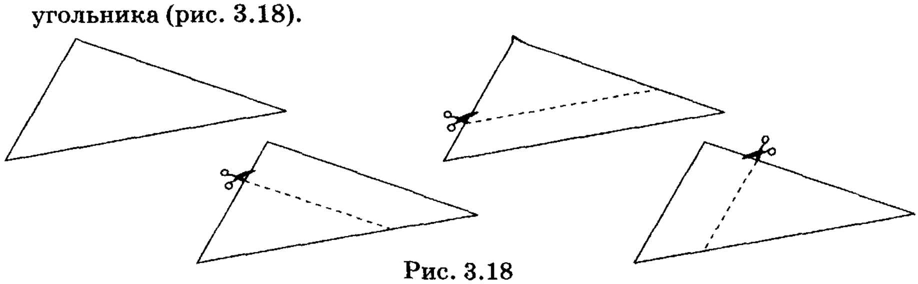


Рис. 3.18

3. Сравните углы трех полученных треугольников с углами первого треугольника. Сделайте вывод.
4. Измерьте длины сторон двух из этих треугольников. Сравните отношения длин их соответственных сторон. Сделайте вывод.

Для любознательных

1. Одна из диагоналей четырехугольника является диаметром окружности, описанной вокруг этого четырехугольника. Докажите, что проекции противолежащих сторон этого четырехугольника на его вторую диагональ, не являющуюся диаметром окружности, равны между собой.

2. Вокруг треугольника описана окружность. Докажите, что проекция диаметра, перпендикулярного к одной из сторон треугольника на вторую сторону этого треугольника, равна третьей его стороне.

3. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC треугольника в точке K. Вневписанная окружность (см. «Словарик» и стр. 255) касается стороны BC этого треугольника в точке T. Докажите, что $CT = BK$.

Задание 17

1°. Подобны ли треугольники ABC и EDF, если $\angle A = 106°$, $\angle B = 34°$, $\angle E = 106°$, $\angle F = 40°$, $AC = 4,4$ см, $AB = 5,2$ см, $BC = 7,6$ см, $DE = 15,6$ см, $DF = 22,8$ см, $EF = 13,2$ см?

2°. На рисунке 3.19 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $A_1B_1 : AB = 1 : 2$. Найдите x, y, z.

3°. На рисунке 3.20 $\triangle FGH \backsim \triangle F_1G_1H_1$. Найдите x, y.

4. Треугольники KLM и $K_1L_1M_1$ – подобны. $KL = 6$ см, $L_1M_1 = 21$ см, $K_1M_1 = 24$ см, $K_1L_1 : KL = 3 : 1$. Найдите стороны треугольника KLM.

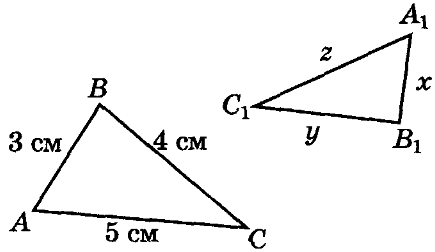


Рис. 3.19

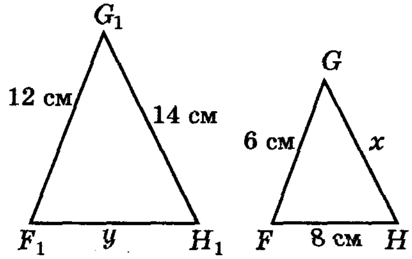


Рис. 3.20

5°. Стороны угла O пересекают параллельные прямые a и b (рис. 3.21). Найдите стороны треугольника AOB, если $OA = 4$ см, $OA_1 = 6$ см, $OB_1 = 8$ см, $A_1B_1 = 5$ см.

6. Прямые GH и KL параллельны (рис. 3.22). Сторона GH треугольника FGH равна 18 см. Найдите сторону KL треугольника FKL, если: а) $FG : FK = 2 : 3$; б) $FG : GK = 2 : 3$.

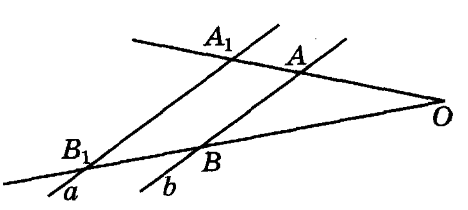


Рис. 3.21

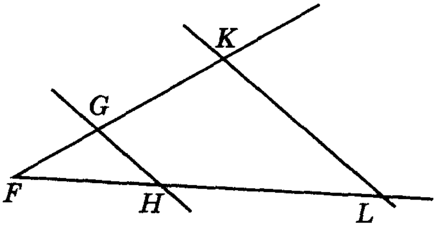


Рис. 3.22

7. Стороны одного треугольника равны 2 см, 4 см и 5 см, а наименьшая средняя линия подобного ему треугольника равна 3 см. Найдите стороны второго треугольника.

8. На рисунке 3.23 найдите подобные треугольники и пары соответственных сторон.

9. В треугольник BKL вписан ромб $ABCD$ (рис. 3.24). Докажите подобие треугольников: а) AKD и BKL; б) CDL и BKL.

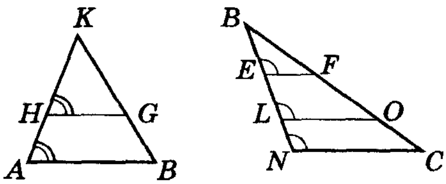


Рис. 3.23

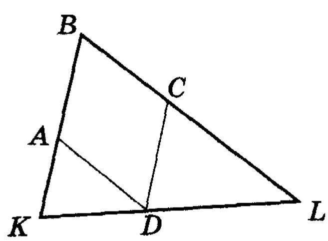


Рис. 3.24

10. На рисунке 3.25 треугольники KLN и $K_1L_1N_1$ – подобны, $n : k : l = 6 : 7 : 8$, $k_1 - n_1 = 4$ см. Найдите k_1, n_1, l_1.

11. На рисунке 3.26 треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ – подобны, $c : a : b = 6 : 7 : 8$, $x + y = 70$ м. Найдите x, y, z.

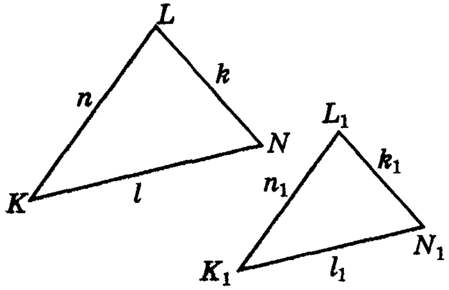


Рис. 3.25

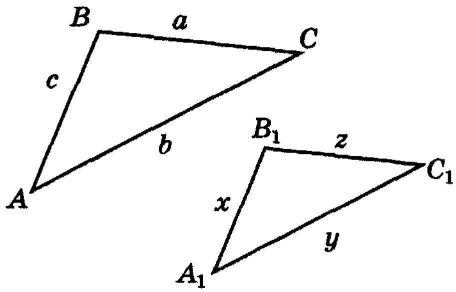


Рис. 3.26

12. На рисунке 3.27 $MN \parallel GH$. Найдите FG.

13. На рисунке 3.28 $OS \parallel LM$. Найдите LM, OM.

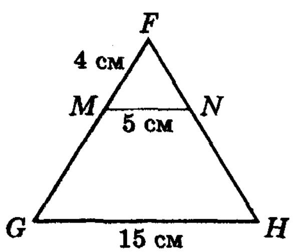


Рис. 3.27

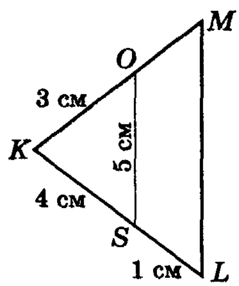


Рис. 3.28

14*. Дано треугольник ABC. Точка M лежит на отрезке AB, точка N лежит на отрезке BC. $MN \parallel AC$, $BN = 3$ см, $MA = 3$ см, $NC = 2$ см, $AC = 10$ см. Найдите MN и MB.

15*. Прямые $AB \parallel DC \parallel KL$, $FK : FD : FA = 1 : 4 : 5$, $AB = 30$ см, $FC = 40$ см, $FK = 10$ см (рис. 3.29). Найдите периметр четырехугольника $KLCD$.

16*. Сколько пар подобных треугольников на рисунке 3.30, если $AL \parallel DR$?

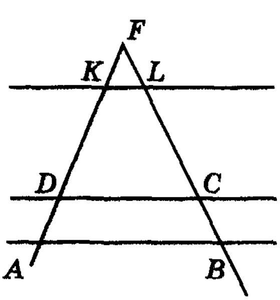


Рис. 3.29

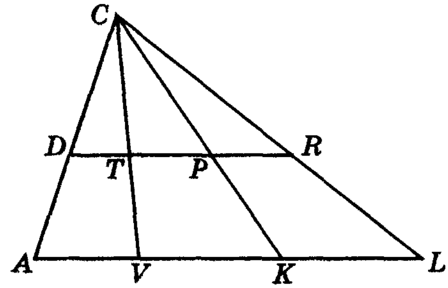


Рис. 3.30

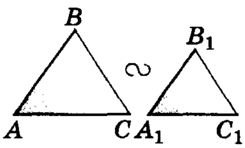
17*. Точки K и M лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно. Прямые KM и BC параллельны. Докажите, что медиана, проведенная к стороне BC треугольника ABC, делит отрезок KM пополам.

§ 19. Признаки подобия треугольников

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема 1. Если угол одного треугольника равен углу второго треугольника, а стороны треугольников, образующие этот угол, пропорциональны, то такие треугольники подобны.

I ПРИЗНАК



$\angle A = \angle A_1$

$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$

$\Downarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 3.31), в которых углы при вершинах A и A_1 равны, $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$.

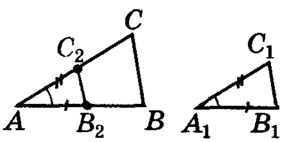


Рис. 3.31

Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Доказательство

1) От точки A на сторонах AB и AC треугольника ABC отложим отрезки $AB_2 = A_1B_1$ и $AC_2 = A_1C_1$ соответственно. Тогда $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (по первому признаку равенства).

2) $\dfrac{AB_2}{AB} = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{AC_2}{AC}$, тогда по обратной теореме к обобщенной теореме Фалеса $B_2C_2 \parallel BC$.

3) $B_2C_2 \parallel BC$, тогда по основной теореме подобия треугольников $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

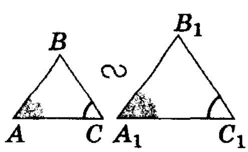
Теорема доказана.

ВТОРОЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема 2. Если два угла одного треугольника равны двум углам второго треугольника, то такие треугольники подобны.

Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 3.32), в которых $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

II ПРИЗНАК



$\angle A = \angle A_1; \angle C = \angle C_1$

$\Downarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

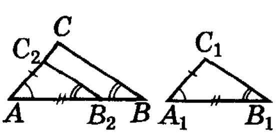


Рис. 3.32

Доказательство

1) От точки A на сторонах AB и AC треугольника ABC отложим отрезки $AB_2 = A_1B_1$ и $AC_2 = A_1C_1$ соответственно. Тогда $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (по первому признаку равенства).

2) $\angle B = \angle B_1 = \angle B_2$, тогда $B_2C_2 \parallel BC$ (углы B_2 и B – соответственные при прямых B_2C_2, BC и секущей AB).

3) $B_2C_2 \parallel BC$, тогда по основной теореме подобия треугольников $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

ТРЕТИЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ТП **Теорема 2. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам второго треугольника, то такие треугольники подобны.**

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (мал. 3.33), в которых $\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{A_1C_1}{AC}\triangleq k$.

Докажем, что эти треугольники подобны.

Доказательство

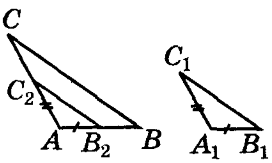


Рис. 3.33

Заданное отношение сторон треугольников обозначено через k.

1) От точки A на сторонах AB и AC треугольника ABC отложим отрезки $AB_2=A_1B_1$ и $AC_2=A_1C_1$ соответственно. Тогда $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$ (по первому признаку подобия).

2) $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$, тогда

$$\frac{B_2C_2}{BC}=\frac{AB_2}{AB}=\frac{A_1B_1}{AB}=k.$$

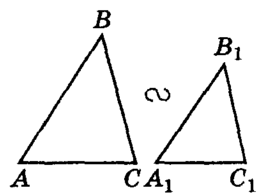
3) $\dfrac{B_2C_2}{BC}=k=\dfrac{B_1C_1}{BC}$, откуда: $B_2C_2=B_1C_1$.

Тогда треугольники AB_2C_2 и $A_1B_1C_1$ равны (по трем сторонам).

4) $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

III ПРИЗНАК



$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$$

Замечание. *Полезно обратить внимание* на то, что способ доказательства всех трех признаков подобия треугольников одинаков: откладываем на сторонах угла большего треугольника отрезки, равные двум соответствующим сторонам меньшего треугольника; получаем вспомогательный треугольник, подобный большему, и доказываем его равенство меньшему треугольнику.

Для любознательных

1. Дано: прямую l и точки A, B, C, лежащие на другой прямой ($[AB]\neq[BC]$). Постройте параллельные прямые, которые проходят через эти точки и на прямой l отсекают отрезки: а) сумма которых равна заданному отрезку b; б) разность которых равна заданному отрезку b.

2. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC и его вершины B и A провели прямые до пересечения с противоположными сторонами треугольника в точках A_1 и B_1. Докажите, что: а) A_1B_1 и AB – параллельны; б) прямая CC_1 делит отрезок A_1B_1 пополам.

3. Через точку P продолжения медианы CC_1 треугольника ABC и его вершины B и A провели прямые до пересечения с продолжением противоположных сторон треугольника в точках A_1 и B_1. Докажите, что: а) A_1B_1 и AB – параллельны; б) прямая CC_1 делит отрезок A_1B_1 пополам.

4. Прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с точкой пересечения прямых AB и CD, делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону BC.

Практическая работа 26

1. Постройте два равных угла B и B_1.
2. На сторонах углов B и B_1 отложите отрезки BA, BC и B_1A_1, B_1C_1 соответственно так, чтобы $B_1A_1 = 1{,}5\ BA$, $B_1C_1 = 1{,}5\ BC$.
3. Соедините точки A и C, A_1 и C_1. Измерьте отрезки AC и A_1C_1 и углы BAC и $B_1A_1C_1$. Сделайте вывод.

Задание 18

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1°. Подобны ли треугольники на рисунке 3.34? Почему?

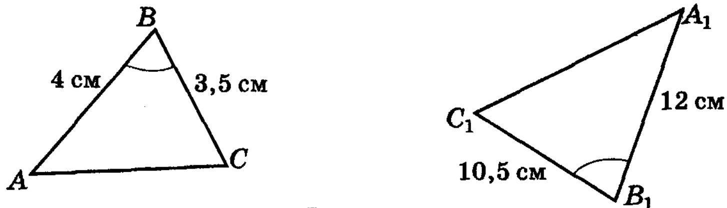


Рис. 3.34

2°. На рисунке 3.35 найдите подобные треугольники. Объясните свой выбор.

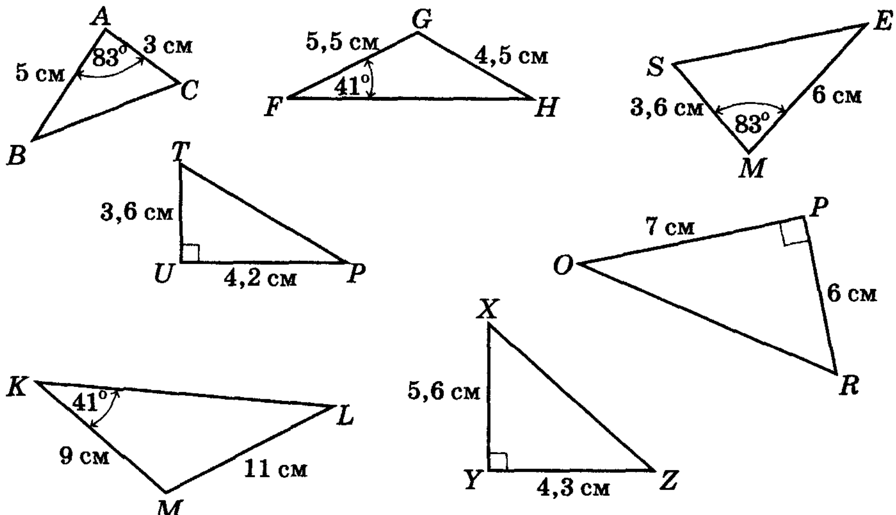


Рис. 3.35

Для любознательных

1. Докажите подобие произвольного треугольника и треугольника, образованного прямыми, проходящими через вершины данного треугольника параллельно его сторонам. Найдите отношение радиусов окружностей, описанных вокруг этих треугольников, и расположение центров этих окружностей.
2. Найдите отношение радиусов окружностей, вписанных в произвольный треугольник и треугольник с вершинами в серединах сторон первого. Как расположены центры этих окружностей?
3. Прямая CE пересекает сторону AB треугольника ABC в точке M и делит медиану AK этого треугольника пополам в точке E. Найдите отношение площадей треугольников CEK и CMB.
4. Докажите, что в остроугольном треугольнике точка пересечения высот является центром окружности, вписанной в треугольник с вершинами в основаниях высот данного треугольника.

3°. Дано: $\angle O = \angle M$, $\dfrac{MH}{ON} = \dfrac{MA}{OK} = 2{,}5$; $AH = 12$ см (рис. 3.36).

Найдите длину отрезка KN.

4. У двух равнобедренных треугольников углы при вершинах равны. Боковая сторона и основание одного из них равны 56 см и 30 см. Основание второго треугольника равно 45 см. Найдите остальные стороны этого треугольника.

5*. По рисунку 3.37 найдите LM, если $\dfrac{KL}{PK} = \dfrac{KM}{OK} = 2$.

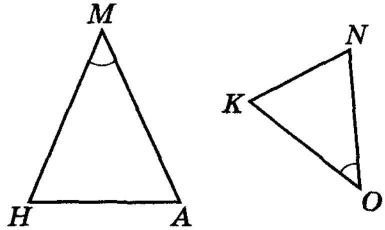


Рис. 3.36

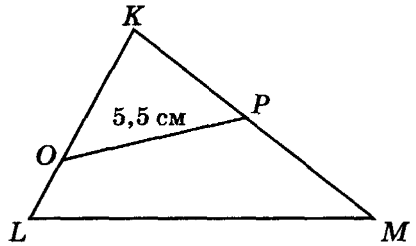


Рис. 3.37

6*. На рисунке 3.38 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

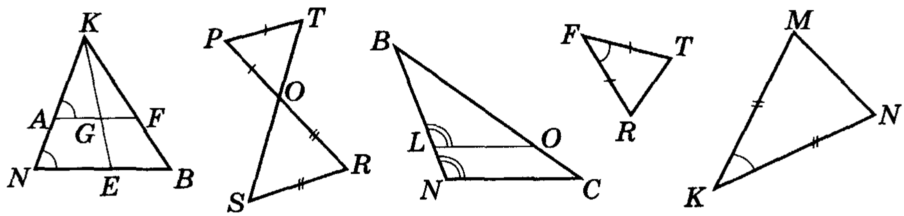


Рис. 3.38

7. Подобны ли треугольники AHM и ABC на рисунке 3.39? Почему?

8. Дано, что $\triangle KON \sim \triangle COB$ (рис. 3.40). Докажите, что $KN \parallel BC$.

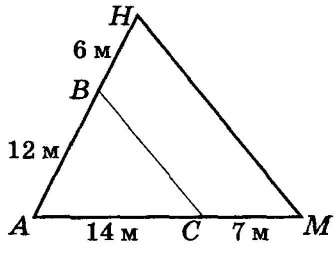


Рис. 3.39

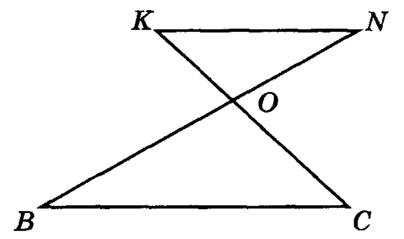


Рис. 3.40

9*. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $\dfrac{AO}{CO} = \dfrac{BO}{DO}$. Докажите, что $ABCD$ – трапеция или параллелограмм.

Для любознательных

1. Обязательно ли два треугольника равны, если равны их две стороны?
2. Восстановите параллелограмм по одной из его сторон, высоте, проведенной к этой стороне, и углу между диагоналями.

10*. Дан параллелограмм $MOKN$ (рис. 3.41). Докажите, что $\triangle OFH \sim \triangle KFN$.

11*. У параллелограмма $MOKN$ точка F лежит на стороне OK и $OF : FK = 1 : 3$ (рис. 3.41). Найдите: а) $OH : HM$; б) $OH : OM$.

12**. В треугольнике ABC провели медиану AM (рис. 3.42). $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $\triangle ALD \sim \triangle ABC$.

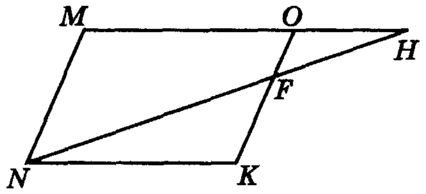


Рис. 3.41

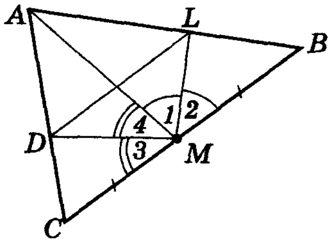


Рис. 3.42

13**. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площадь треугольника CDO равна среднему пропорциональному площадей треугольников BOC и AOD. Докажите, что $ABCD$ – трапеция или параллелограмм.

Практическая работа 27

1. Начертите два острых угла (обозначьте их α, β) и два отрезка AB и A_1B_1 так, чтобы $AB = 2A_1B_1$.
2. Постройте два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ по двум углам ($\angle A = \angle A_1 = \alpha$; $\angle B = \angle B_1 = \beta$) и стороне ($AB$ и A_1B_1), смотрите рисунок 3.43.

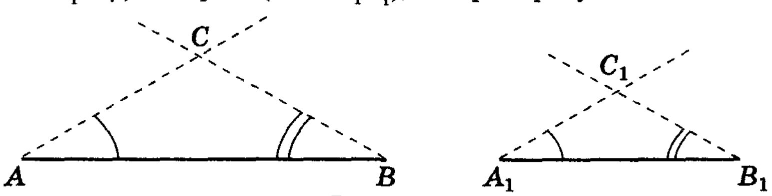


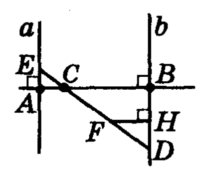
Рис. 3.43

3. Измерьте отрезки AC, A_1C_1, BC и B_1C_1.
4. Вычислите $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$. Сделайте вывод.

Для любознательных

Разгадайте софизм: **часть отрезка равна самому отрезку.**

Пересечем произвольную прямую в точках A и B прямыми a и b, перпендикулярными к этой прямой (см. рис.). Проведем прямую ED, которая пересечет: прямую a в точке E, отрезок AB в точке C, прямую b в точке D.



1) $\triangle CBD \sim \triangle CAE$. Тогда $BD : AE = CB : AC$, $BD : AE = (AB - AC) : AC$.

2) $FH \parallel AB$ по построению. Тогда $\triangle CBD \sim \triangle FHD$.
Отсюда: $BD : HD = BC : FH$, $BD : HD = (AB - CA) : FH$.

3) Из полученных соотношений находим BD:
$BD = (AE \cdot (AB - AC)) : AC = (HD \cdot (AB - CA)) : FH$;
$AE \cdot FH \cdot AB - AE \cdot FH \cdot AC = AC \cdot HD \cdot AB - AC^2 \cdot HD$.

4) Прибавим к обеим частям последнего равенства разность $AE \cdot FH \cdot AC - HD \cdot AB \cdot AC$, приведем подобные слагаемые и вынесем за скобки общий множитель: $AB\,(AE \cdot FH - AC \cdot HD) = AC\,(AE \cdot FH - AC \cdot HD)$.
Получаем: $AB = AC$?!

Задание 19

ВТОРОЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1°. Подобны ли треугольники на рисунке 3.44? Для подобных треугольников найдите соответственные стороны.

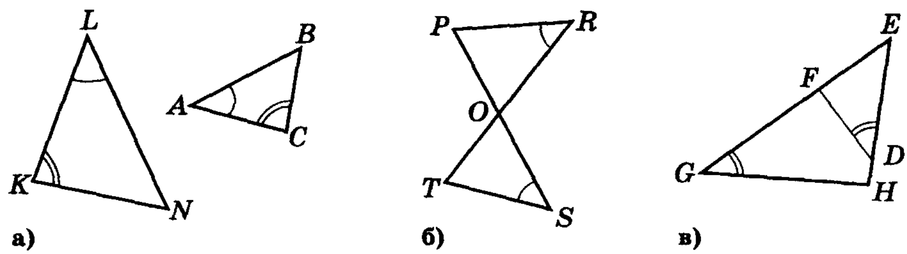


Рис. 3.44

2°. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ – подобны (рис. 3.45).

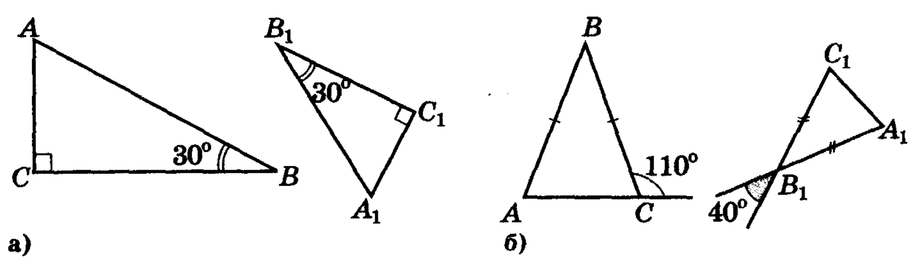


Рис. 3.45

3. Найдите пары подобных треугольников и запишите пропорциональность соответственных сторон (рис. 3.46).

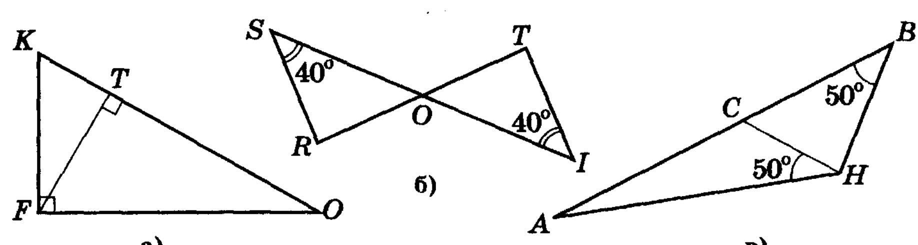
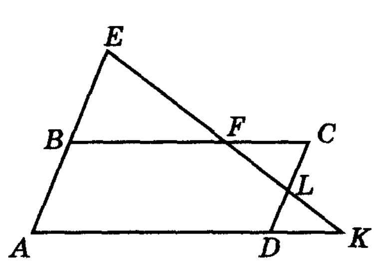


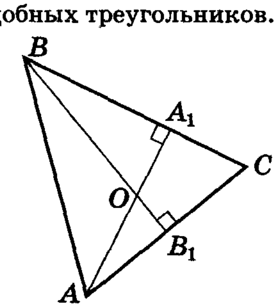
Рис. 3.46

4. На рисунке 3.47 $ABCD$ – параллелограмм. Докажите, что $\triangle BEF \sim \triangle DLK$.

5. На рисунке 3.48 найдите четыре пары подобных треугольников.



Мал. 3.47



Мал. 3.48

6*. Точки A и B удалены от прямой l на 2 см и 6 см. Точка M лежит на отрезке AB и $AM : MB = 2 : 3$. Найдите расстояние от точки M до прямой l, если: а) l пересекает AB; б) l не пересекает AB.

7. На рисунке 3.49 $MN \perp BC$, $NC \parallel AB$. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle MCN$.

8*. $ABCD$ – параллелограмм, $MP \parallel NQ$ (рис. 3.50). Докажите, что $\triangle APM \sim \triangle CNQ$.

9**. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$, при этом $AM : MB = 1 : 2$ и $AN : ND = 3 : 2$. Отрезки DM и CN пересекаются в точке K. Найдите отношение $DK : KM$.

10**. На рисунке 3.51 $AD = DC$, $BE = EC$. Докажите, что CC_1 – медиана в $\triangle ABC$.

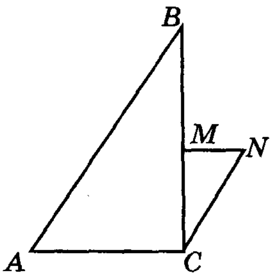


Рис. 3.49

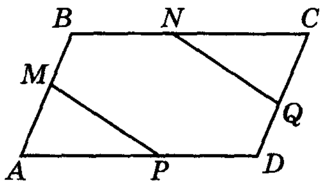


Рис. 3.50

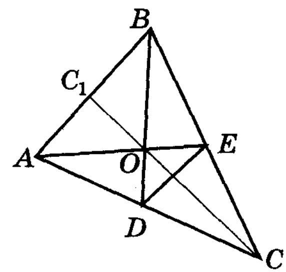


Рис. 3.51

11. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AH и BP. Докажите подобие треугольников BCP и ACH.

12**. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AH и BP. Докажите подобие треугольников HPC и ABC.

13*. Точка M – середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Найдите, в каком отношении: а) AM делит диагональ BD; б) BD делит AM.

14*. Точка P лежит на диагонали BD параллелограмма $ABCD$, $BP : PD = 1 : 4$. В каком отношении прямая AP делит сторону BC?

15**. Две окружности касаются внешним образом. Прямая, проходящая через точку касания, образует в окружностях хорды, длины которых относятся как 13 : 5. Найдите радиусы этих окружностей, если расстояние между их центрами равно 36 см.

Практическая работа 28

1. Постройте треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ по трем сторонам так, чтобы $AB = 2{,}5\,A_1B_1$, $BC = 2{,}5\,B_1C_1$, $AC = 2{,}5\,A_1C_1$.
2. Измерьте углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Сделайте вывод.

Задание 20

ТРЕТИЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1°. Докажите подобие треугольников MNO и BCA (рис. 3.52 и 3.53).

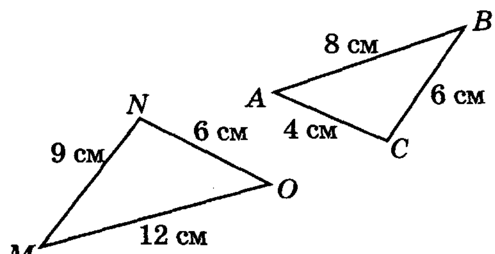


Рис. 3.52

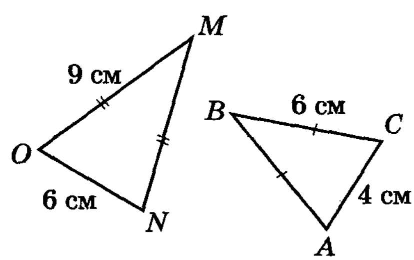


Рис. 3.53

2°. На рисунке 3.54 найдите пары подобных треугольников.

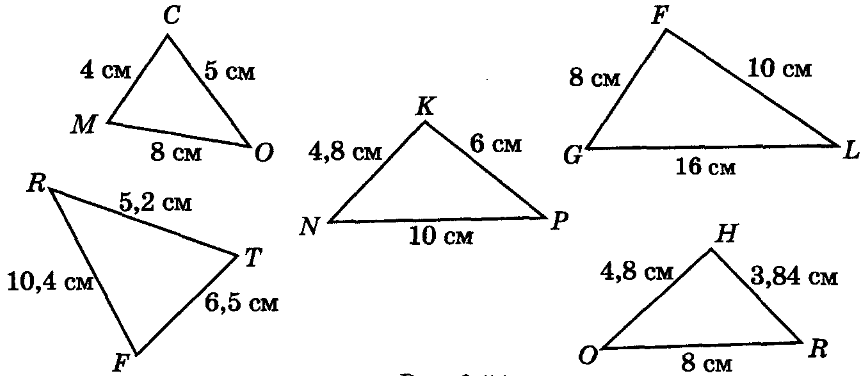


Рис. 3.54

3. Подобны ли треугольники KLM и OPR? Для подобных треугольников найдите коэффициент подобия:

а) $KL = 3{,}1$ см, $LM = 2{,}8$ см, $KM = 5{,}4$ см,
$OP = 4{,}65$ см, $PR = 8{,}1$ см, $OR = 4{,}2$ см;

б) $KL = 3{,}78$ м, $LM = 5{,}04$ м, $KM = 7{,}4$ м,
$OP = 2{,}4$ м, $PR = 1{,}8$ м, $OR = 3{,}5$ м.

4. Стороны треугольников пропорциональны числам 3, 4, 6. Найдите длины сторон подобного треугольника, если наименьшая его сторона равна 18 см.

5. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:

а) $AB : BC : AC = 4 : 5 : 8$, а $A_1B_1 = 20$ см, $B_1C_1 = 25$ см, $A_1C_1 = 40$ см.

б) $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$, а $A_1B_1 = 5$ м, $B_1C_1 = 7{,}5$ м, $A_1C_1 = 12$ м.

6.** Докажите подобие треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC, если $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = AM : A_1M_1$, где A_1M_1 и AM – медианы этих треугольников.

7*. Докажите подобие треугольников, образованных: а) средними линиями подобных треугольников; б) из медиан подобных треугольников.

8.** На рисунке 3.55 $AB = BC = CD = AD$, $BE = m$, $DF = n$. Найдите AB.

9.** $ABCD$ – ромб, $BL = 66$ мм, $BK = 33$ мм (рис. 3.56). Найдите x.

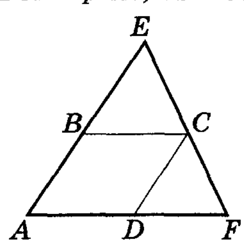


Рис. 3.55

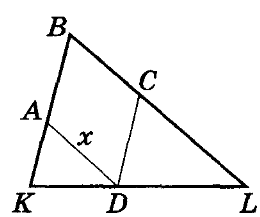


Рис. 3.56

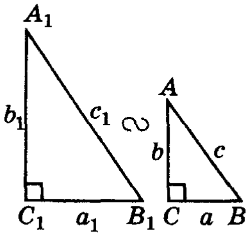
Для любознательных

1. Постройте треугольник по двум углам и сумме радиусов вписанной и описанной окружностей. Совет: постройте два произвольных подобных треугольника (по двум углам), постройте в них центры вписанной и описанной окружностей и найдите радиусы этих окружностей. У вас будут два соответственных отрезка – суммы радиусов вписанной и описанной окружностей двух подобных треугольников. Сравните отношение длин этих отрезков с отношением длин соответственных сторон двух ваших треугольников. Как вы думаете, зачем был дан этот совет?

2. Из точки вне окружности проведите секущую так, чтобы окружность делила ее пополам.

§ 20. Признаки подобия прямоугольных треугольников

Опираясь на признаки подобия треугольников, можно сразу сформулировать два признака подобия прямоугольных треугольников.



⇓

если

[redacted]

или

[redacted]

или

[redacted]

1. *Если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.*

2. *Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.*

Третий признак подобия прямоугольных треугольников требует отдельного доказательства.

3. Теорема. **Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.**

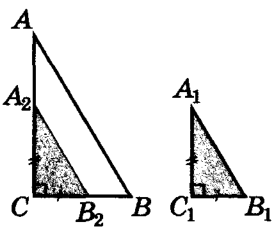


Рис. 3.57

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – треугольники, у которых углы C и C_1 – прямые и $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{C_1B_1}{CB}$. (рис. 3.57).

Докажем, что эти треугольники подобны.

Доказательство

Обозначим заданное отношение сторон треугольников через k.

1) От вершины C на сторонах CB и CA треугольника ABC отложим отрезки $CB_2 = C_1B_1$ и $CA_2 = C_1A_1$ соответственно. Тогда $\triangle A_2B_2C \backsim \triangle ABC$ (по первому признаку подобия).

2) $\triangle A_2B_2C \backsim \triangle ABC$, тогда $\frac{A_2B_2}{AB}=\frac{CB_2}{CB}=\frac{C_1B_1}{CB}=k$.

3) $\frac{A_2B_2}{AB}=k=\frac{A_1B_1}{AB}$, т. е. $A_2B_2 = A_1B_1$.

Тогда $\triangle A_2B_2C = \triangle A_1B_1C_1$ (по гипотенузе и катету).

4) $\triangle ABC \backsim \triangle A_2B_2C = \triangle A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

Для любознательных

1. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC отмечены соответственно точки D и E так, что DE параллельна прямой, проведенной через основания двух высот заданного треугольника. Найдите длину отрезка BD, если $AD = 6$ см, $AE = 5$ см, $EC = 7$ см.

2. Докажите, что для остроугольного треугольника ABC (H – ортоцентр этого треугольника, R – радиус описанной окружности, а S – его площадь) выполняется соотношение: $BC \cdot AH + AC \cdot BH + AB \cdot CH = 4S$.

Практическая работа 29

1. Начертите прямоугольный треугольник. Из произвольной точки гипотенузы проведите перпендикуляры к его катетам. Измерьте длины сторон полученных треугольников и сравните их с длинами сторон заданного вами треугольника. Сделайте вывод.
2. Начертите прямоугольный треугольник. Из произвольной точки одного из катетов проведите перпендикуляр к его гипотенузе. Измерьте длины сторон полученных треугольников и сравните их с длинами сторон заданного вами треугольника. Сделайте вывод.

Задание 21

1°. Докажите подобие треугольников SOP и KRF (рис. 3.58).

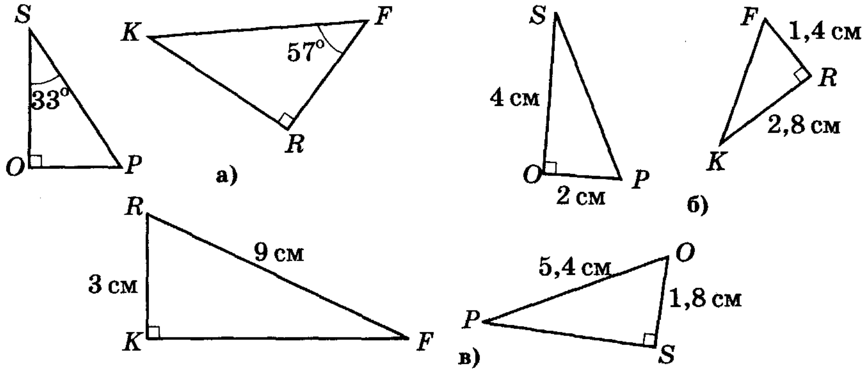


Рис. 3.58

2°. На рисунке 3.59 найдите подобные треугольники.

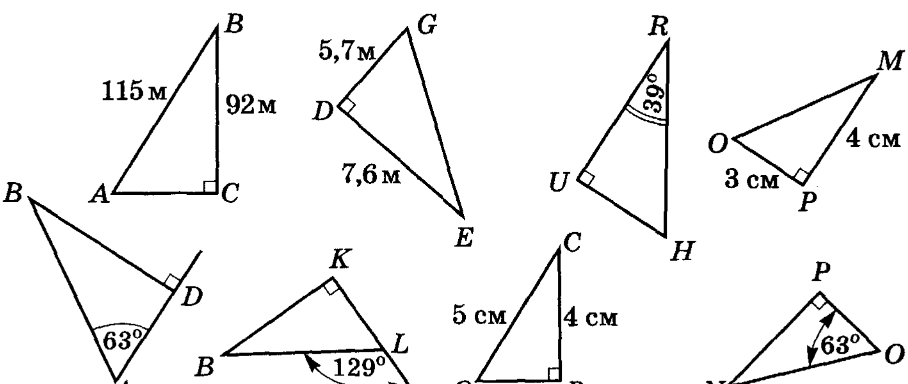


Рис. 3.59

Для любознательных

Известный швейцарский математик **Якоб Штейнер** (1796–1863) 14 лет преподавал математику в школе. Он много времени уделял одаренным ученикам, составлял для них интересные геометрические задачи. Штейнер утверждал, что именно геометрия углубляет и оттачивает мышление. Попробуйте решить одну из его задач.

Дана окружность и прямая, которая проходит через центр этой окружности. При помощи только линейки проведите из данной точки перпендикуляр к заданной прямой, если точка расположена: **а)** вне окружности; **б)** внутри окружности; **в)** на окружности.

3. В прямоугольном треугольнике провели высоту из вершины прямого угла. Сколько подобных треугольников образовалось на рисунке?
4. Разрежьте прямоугольный треугольник на три подобных треугольника.
5. Разрежьте прямоугольник на четыре подобных треугольника.
6. По рисунку 3.60 найдите OL.

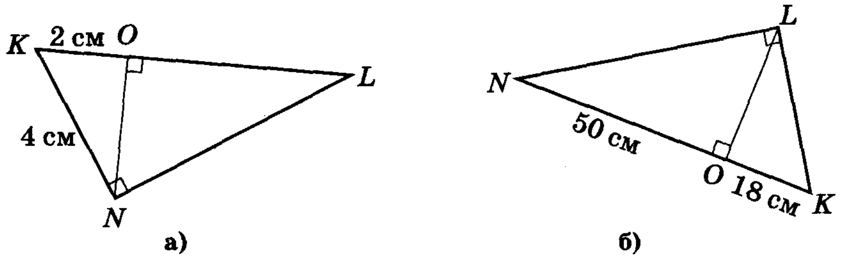


Рис. 3.60

7*. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла провели высоту CH. Найдите: а) CH, BC и AC, если $HA = 25$ см, $BH = 16$ см; б) BH, BA и BC, если $AC = 12$ м, $HA = 6$ м; в) HA, AB и AC, если $BC = 8$ мм, $BH = 4$ мм.

8**. Докажите, что квадраты катетов относятся как их проекции на гипотенузу.

9**. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3 : 4, а гипотенуза равна 5 см. Найдите отрезки, на которые высота, проведенная с вершины прямого угла, делит гипотенузу.

10**. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3 : 2. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 12 см. Найдите длину медианы, проведенной к гипотенузе.

11*. Высота прямоугольного треугольника, проведенная с вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 11 см больше второго. Найдите гипотенузу этого треугольника, если его катеты относятся как 6 : 5.

12*. В прямоугольном треугольнике со сторонами 5 см, 12 см и 13 см с середины большего катета опущен перпендикуляр на гипотенузу. Найдите стороны образовавшегося треугольника.

13**. В параллелограмме $ABCD$: $FN \perp AD$, $AB = 2$ см, $BF = 5$ см, $BC = 9$ см (рис. 3.61). Найдите BK.

14*. В параллелограмме $AMHR$: $P_{AMHR} = 45$ дм, $\dfrac{HP}{HO} = \dfrac{2}{3}$ (рис. 3.62). Найдите AM и AR.

Для любознательных

Умеете ли вы мыслить логически? (Решите без карандаша и бумаги.)

1. Вдоль улицы расположено 100 домов. Мастера попросили изготовить все номера домов, от 1 до 100. Подсчитайте, сколько цифр «9» ему надо изготовить.

2. Предположим, что и у вас, и у меня одинаковая сумма денег. Сколько денег я должен вам дать, чтобы у вас было на 10 грн. больше, чем у меня?

3. В шкафу лежит несколько пар синих и красных носков. Известно, что минимальное количество носков, которое надо взять из шкафа (с закрытыми глазами), чтобы из них гарантированно можно было составить хотя бы одну пару носков одного цвета, совпадает с минимальным количеством носков, которые надо взять из шкафа (с закрытыми глазами), чтобы из них гарантированно можно было составить разноцветную пару. Сколько пар носков в шкафу?

15*. У ромба $ABCD$ на рисунке 3.63: $OH \perp AD$, $AH = 24$ см, $HD = 6$ см. Найдите отношение AC и BD.

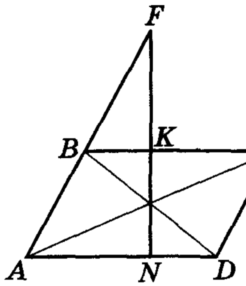


Рис. 3.61

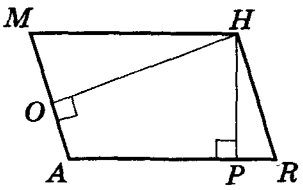


Рис. 3.62

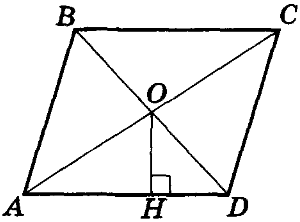


Рис. 3.63

16. По рисунку 3.64 найдите AD.

17*. $AMOK$ – трапеция, $AM = OK$, $AO \perp OK$, $AH = 8$ см, $HO = 4$ см (рис. 3.65). Найдите MO и AK.

18*. На рисунке 3.66 $ABCD$ – трапеция, $BD \perp BC$, $AD = 12$ см, $LC = 4$ см. Найдите AB и CD.

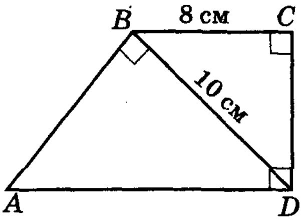


Рис. 3.64

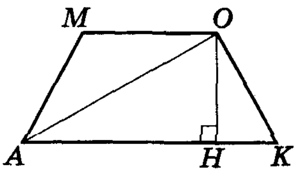


Рис. 3.65

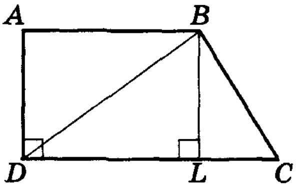


Рис. 3.66

19**. Докажите, что длина диаметра окружности, вписанной в равнобокую трапецию, равна среднему пропорциональному длин ее оснований.

20**. Постройте два отрезка, квадраты длин которых относятся как 3 : 2.

Для любознательных

Американский профессор **Реймонд М. Смаллиан** предлагает задачи, в которых персонажи некой страны делятся на такие группы: *рыцари* – всегда говорят правду; *лжецы* – всегда лгут; *оборотни* – иногда говорят правду, а иногда лгут.

1. Вы встретили трех жителей этой страны: A, B и C. Известно, что среди них есть только один оборотень. Беседуя с вами, они сказали следующее.

A: Я – оборотень.

B: Я – оборотень.

C : Среди нас не более чем один рыцарь.

Проведите полную классификацию A, B и C.

2. На этот раз A и B заявили следующее.

A: Хотя бы один из нас врет.

B: C – рыцарь.

Известно, что только один из них оборотень. Кто?

3. Предположим, что некая девушка мечтает выйти замуж только за богатого рыцаря. Как богатому рыцарю только одной фразой убедить девушку в том, что он является и богатым, и рыцарем?

§ 21. Свойства подобных треугольников

СВОЙСТВА

$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$

$\Downarrow$

1) $P_1 = kP$

$h_{a_1} = kh_a$

$m_{a_1} = km_a$

$l_{a_1} = kl_a$

...

$\uparrow$

ВСЕ

соответственные линейные елементы – пропорциональны

2) $S_1 = k^2S$

(1) Отношение периметров двух подобных треугольников равно их коэффициенту подобия.

Действительно, если $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, то длину каждой из сторон одного треугольника можно записать как произведение длины соответственной стороны другого треугольника на коэффициент подобия треугольников. Отсюда и получаем указанное свойство подобных треугольников.

(2) Т Теорема. **Отношение высот подобных треугольников, проведенных к соответственным сторонам, равно коэффициенту подобия этих треугольников.**

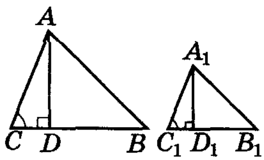


Рис. 3.67

Пусть $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $AD \perp CB$ и $A_1D_1 \perp C_1B_1$ (рис. 3.67).

Нужно доказать, что $\dfrac{AD}{A_1D_1} = \dfrac{CB}{C_1B_1}$.

Доказательство

1) $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, тогда $\angle C = \angle C_1$.

2) $\angle D = \angle D_1 = 90°$ и $\angle C = \angle C_1$, тогда треугольники CAD и $C_1A_1D_1$ подобны.

3) $\triangle CAD \backsim \triangle C_1A_1D_1$, тогда $\dfrac{AD}{A_1D_1} = \dfrac{CA}{C_1A_1} = \dfrac{CB}{C_1B_1}$.

Теорема доказана.

(3) С Следствие. **Площади подобных треугольников относятся как квадраты их коэффициента подобия.**

По теореме $\dfrac{AD}{A_1D_1} = \dfrac{CB}{C_1B_1} = k$, где k – коэффициент подобия треугольников. Тогда отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равно

$$\left(\frac{1}{2}AD \cdot CB\right) : \left(\frac{1}{2}A_1D_1 \cdot C_1B_1\right) = k \cdot k = k^2.$$

(4) Соответственные элементы подобных треугольников пропорциональны, и их отношение равно коэффициенту подобия этих треугольников.

Несложно доказать (сделайте это самостоятельно), что в подобных треугольниках не только отношение высот к соответственным сторонам, но и отношения биссектрис соответственных углов, медиан соответственных сторон, радиусов вписанных окружностей, радиусов описанных окружностей являются постоянной величиной, равной коэффициенту подобия этих треугольников.

Замечание. В 9-м классе мы докажем, что произвольные соответственные элементы подобных треугольников пропорциональны.

Практическая работа 30

1. Начертите остроугольный треугольник ABC. Постройте его биссектрису BL, высоты AH, BK и медиану CM. Измерьте их длины.
2. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC. Как вы это сделали? По какому признаку ваши треугольники подобны? Найдите коэффициент подобия этих треугольников.
3. Постройте в треугольнике $A_1B_1C_1$ биссектрису B_1L_1, высоты A_1H_1, B_1K_1 и медиану C_1M_1. Измерьте их длины.
4. Найдите отношения соответственных биссектрис, высот, медиан (рассмотренных ранее) треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Сравните полученные отношения с коэффициентом подобия этих треугольников. Сделайте вывод.
5. Вычислите площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, найдите их отношение. Сделайте вывод.

6*. Начертите два подобных тупоугольных треугольника. Проведите в этих треугольниках соответственные высоты и выполните работу, аналогичную пп. 2, 5.

Практическая работа 31

1. Начертите треугольник ABC. Определите положение центров его вписанной и описанной окружностей. Как вы это сделали?
2. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC. По какому признаку ваши треугольники подобны? Найдите коэффициент подобия этих треугольников.
3. Определите положение центров вписанной и описанной окружностей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.
4. Найдите длины радиусов вписанных и описанных окружностей треугольников. Как вы это сделали?
5. Вычислите отношение радиусов соответственных окружностей треугольников и сравните их значение с коэффициентом подобия этих треугольников.

Для любознательных

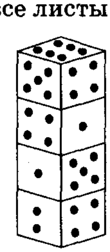
1. Четыре одинаковых игральных кубика расположены так, как показано на рисунке А. Сколько точек на нижней грани нижнего кубика?

2. Каждую грань кубика разделили на четыре квадрата и каждый квадрат покрасили в один из трех цветов: синий, желтый и красный так, что квадраты с общей стороной окрашены в разные цвета. Сколько при этом образовалось синих, желтых и красных квадратов?

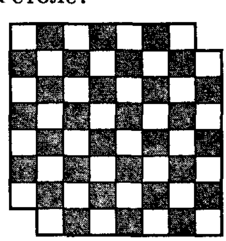
3. Можно ли разместить на шахматной доске (размер одной клеточки 1×1) 31 косточку домино (размером 1×2) так, чтобы они не перекрывались и осталось только две свободные клеточки в двух противоположных углах доски (см. рис. Б)?

4. Фигура, изображенная на рисунке В, состоит из трех равных квадратов. Разрежьте эту фигуру на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат с квадратным отверстием внутри него.

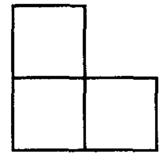
5. На стол положили несколько одинаковых прямоугольных листов бумаги. Оказалось, что верхний лист закрывает больше половины каждого из остальных листов. Можно ли тогда воткнуть иголку так, чтобы она проколола все листы, лежащие на столе?



А



Б



В

Практическая работа 32

1. Начертите треугольник ABC. Проведите в нем средние линии.
2. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого равны средним линиям треугольника ABC.
3. Определите, подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$? Как вы это сделали? Если ваши треугольники подобны, определите их коэффициент подобия.
4. Проведите через вершины треугольника ABC прямые, параллельные сторонам этого треугольника. Точки пересечения прямых обозначьте как A_2, B_2, C_2.
5. Определите, подобны ли треугольники ABC и $A_2B_2C_2$? Как вы это сделали? Если ваши треугольники подобны, определите их коэффициент подобия.
6. Определите, подобны ли треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$? Как вы это сделали? Если ваши треугольники подобны, определите их коэффициент подобия.
7. Найдите длины радиусов окружностей, описанных вокруг полученных треугольников, вычислите их отношения. Сравните значения этих отношений с соответствующими коэффициентами подобия.

Задание 22

1°. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Стороны AB и A_1B_1 соответственно равны 2,4 м и 72 см. Найдите отношение периметров треугольников.

2°. Стороны треугольника равны 12 см, 18 см и 20 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 20 см.

3. Треугольники SRT и $S_1R_1T_1$ на рисунке 3.68 подобны, $c : a : b = 6 : 7 : 8$, периметр треугольника $S_1R_1T_1$ равен 42 см. Найдите a_1, c_1, b_1.

4*. На рисунке 3.69 $ABCD$ – квадрат, $FH = 5$ см, $TO = 3$ см. Найдите BC.

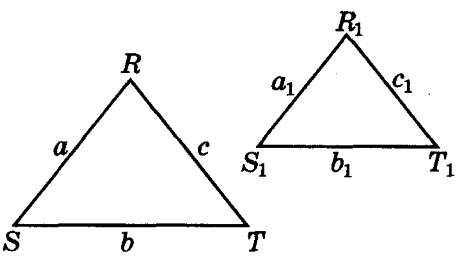


Рис. 3.68

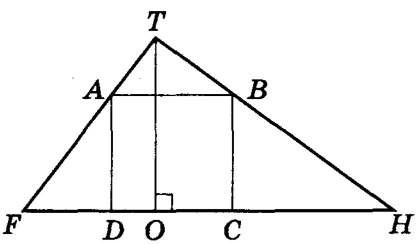


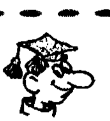
Рис. 3.69

5*. В трапеции $ABCD$ через точку пересечения ее диагоналей E провели высоту MN. В каком отношении точка E делит высоту MN, если основания трапеции равны 7,1 см и 13,49 см?

6°. Площади двух подобных треугольников равны 75 см^2 и 375 см^2. Одна из сторон второго треугольника равна 9 см. Найдите соответственную сторону первого треугольника.

7°. AB и FG – соответственные стороны подобных треугольников ABC и FGH. $AB = 3$ см, $FG = 9$ см. Найдите площадь треугольника ABC, если высота HN треугольника FGH равна 4,5 см.

8. Стороны AB и AC треугольника ABC соответственно равны 3 см и 4 см. Как относятся площади треугольников, на которые: а) медиана стороны BC делит треугольник ABC; б**) биссектриса угла A делит этот треугольник?



Для любознательных

1. Какие треугольники можно разрезать на два подобных между собой треугольника?
2. Постройте треугольник по двум углам и сумме всех его медиан.

9*. По рисунку 3.70 найдите отношение площадей треугольников ABC и ANM.

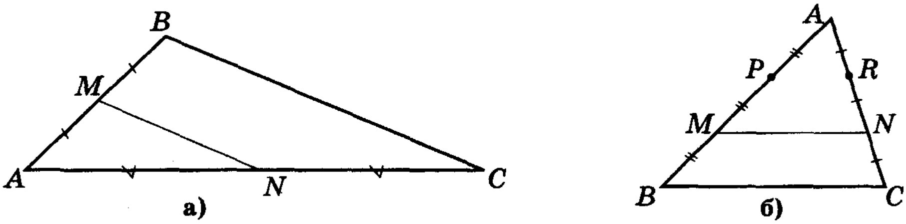


Рис. 3.70

10. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, а их соответственные стороны относятся как 3 : 4. Площадь треугольника ABC больше площади треугольника $A_1B_1C_1$ на 14 см^2. Найдите площади треугольников.

11**. Через середину стороны BC (точку M) параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1 см^2, и его вершину A провели прямую, пересекающую диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырехугольника $OMCD$.

12**. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и N так, что прямые MC и NC делят параллелограмм на три равновеликие части. Найдите MN, если $BD = a$.

13**. Прямые, параллельные стороне треугольника, делят другую его сторону на три равные части. Найдите площадь треугольника.

14**. Точки K и M лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC, $AK : KB = 3 : 2$, $BM : MC = 3 : 1$. Через точку B провели прямую l, параллельную AC. Прямая KM пресекает l в точке P, а AC – в точке N. Найдите BP и CN, если $AC = a$.

15**. На стороне BC треугольника ABC отметили точку D так, что $BD : AB = DC : AC$. Докажите, что AD – биссектриса треугольника ABC.

16**. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

17**. Через точку внутри треугольника провели три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых – треугольники площадью S_1, S_2, S_3. Найдите площадь данного треугольника.

Для любознательных

Продолжение сказки «Принцесса или тигр» (см. стр. 65).

1. На третий день король объявил, что утверждения на табличках или оба истинные, или оба ложные. Надписи были такими.

I. Или в этой комнате сидит тигр, или принцесса в другой комнате	II. Принцесса в другой комнате

Двери какой комнаты должен открыть пленный принц?

2. День четвертый. «До сих пор все принцы выкручивались! – сказал король. – Но сегодня я придумал нечто чрезвычайно интересное. Если в комнате I спрятана принцесса, то утверждение на дверях этой комнаты будет истинным, а если тигр, то – ложным. А вот с комнатой II все будет наоборот: утверждение на ее дверях ложное, если в ней сидит принцесса, и истинное, если там спрятан тигр». Объявив это очередному принцу, король указал на новые надписи на дверях комнат.

I. В обеих комнатах находятся принцессы	II. В обеих комнатах находятся принцессы

Какую из комнат вы посоветуете выбрать принцу?

§ 22. Практические задачи на применение подобия

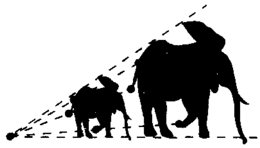


Рис. 3.71

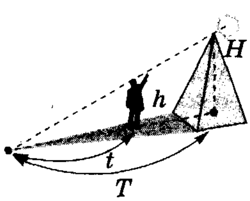
Почти все дети пользуются свойством подобия, когда перерисовывают картинку с увеличением (рис. 3.71). Пропорциональностью сторон подобных треугольников пользуются в физике, астрономии, мореплавании, архитектуре, картографии и др.

Измерительные работы на местности

Пропорциональность сторон подобных треугольников для измерения недоступного расстояния, наверное, первым применил *Фалес Милетский* (прим. 624–548 гг. до н. э.), когда измерил высоту египетской пирамиды по длине своей собственной тени.

И сегодня мы, опираясь на свойство подобия, можем определять *недоступные расстояния*.

Например, чтобы **определить высоту** дерева или пирамиды, не обязательно лезть на них с рулеткой. Действительно, если тень от дерева (неизвестной высоты H) равна T, тень от палки высоты h равна t, то из подобия треугольников (рис. 3.72) получим: $\frac{H}{h}=\frac{T}{t}$ и $H=h\cdot\frac{T}{t}$.



$$\frac{H}{h}=\frac{T}{t}$$

$$H=\frac{hT}{t}$$

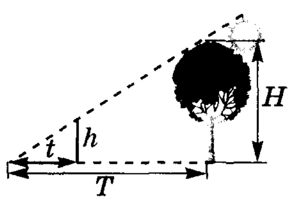


Рис. 3.72

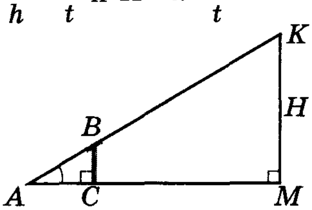


Рис. 3.73

Чтобы не зависеть от погоды и иметь возможность измерять высоту предметов и в хмурые дни, можно воспользоваться колышком с планкой, которая поворачивается (рис. 3.73). (Планка помогает зафиксировать направление луча BK, под которым из B видно K.) Из подобия треугольников ABC и AKM получаем:

$$\frac{H}{BC}=\frac{AM}{AC} \text{ и } H=BC\cdot\frac{AM}{AC}.$$

Например, если на рисунке 3.73 длина колышка $BC = 1$ м, расстояние $AC = 3{,}2$ м, а $AM = 6{,}4$ м, то искомая высота $H = 1 \cdot 6{,}4 : 3{,}2$ м ≈ 2 м.

Если вы знаете свой рост h, то определить высоту столба или дерева можно, воспользовавшись зеркалом (рис. 3.74). Известно, что при отражении луча света угол падения *2* равен углу отражения *1*. Поэтому треугольники ACD и KPD подобны, и $\frac{H}{h}=\frac{DK}{AD}$. Тогда $H=h\frac{DK}{AD}$.

Такое измерение не будет очень точным. (Почему – попробуйте выяснить сами, воспользовавшись рисунком 3.74.)

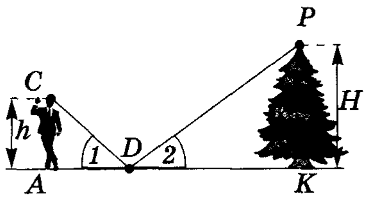


Рис. 3.74

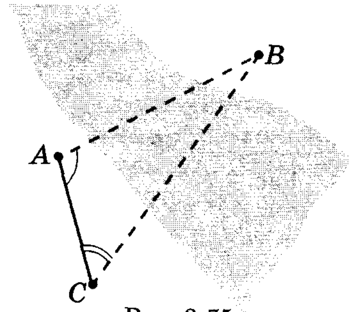


Рис. 3.75

Геометрия – это искусство хорошо измерять.

П. Раме, XVI в.

Теперь мы можем найти и **расстояние до недоступной** точки B (рис. 3.75). Для этого на местности отметим отрезок AC и измерим углы BCA и BAC. На листе бумаги построим треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $\angle A = A_1$, $\angle C = C_1$. Имеем:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, AB = AC \cdot \frac{A_1B_1}{A_1C_1}.$$

Для упрощения рассчетов удобно строить треугольник $A_1B_1C_1$ в масштабе 1 : 1000.

Тогда $AB = A_1B_1 \cdot \dfrac{AC}{A_1C_1} = A_1B_1 \cdot 1000$, т. е., измерив длину отрезка A_1B_1 в миллиметрах, мы сразу получим длину расстояния AB в метрах.

Ни одна наука, существующая для того, чтобы облегчить или украсить жизнь, без геометрии не могла бы не только развиваться и усовершенствоваться, но даже и появиться.

Феофан Прокопович, XVIII в.

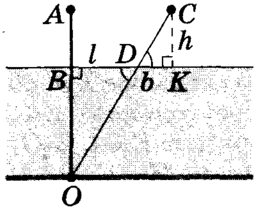


Рис. 3.76

Воспользовавшись свойством подобия треугольников, можно измерить глубину пруда, если в нем растет камыш. Стебель камыша AO (рис. 3.76) отклоним вдоль поверхности воды на l см и измерим расстояние от конца стебля C до поверхности воды ($CK = h$) и длину проекции отрезка DC стебля, который остался над водой, на поверхность воды ($DK = b$). Прямоугольные треугольники DBO и DKC подобны.

Тогда $\dfrac{OB}{CK} = \dfrac{BD}{DK}$, $\dfrac{OB}{h} = \dfrac{l}{b}$.

Отсюда искомая глубина пруда OB равна $\dfrac{lh}{b}$.

Пропорциональный циркуль

На подобии треугольников основано использование пропорционального (делительного) циркуля, с помощью которого можно быстро разделить заданный небольшой отрезок на несколько равных частей.

Геометрия – владычица поисков разума.

М. В. Ломоносов, XVIII в.

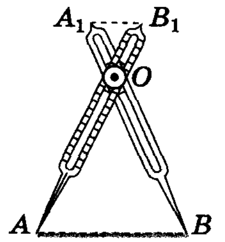


Рис. 3.77

Этот прибор состоит из двух одинаковых ножек (рис. 3.77) AB_1 и BA_1 с заостренными концами. Вдоль ножек сделаны прорези, по которым можно перемещать винт и закреплять его в том или ином месте ножек. Ножки можно раздвигать или сближать вращением вокруг винта.

Допустим, что нужно разделить отрезок AB на три равные части. Для этого закрепим винт в такой точке O, чтобы расстояние AO было в три раза больше расстояния OB_1 (это легко сделать при помощи меток, нанесенных вдоль прорези). Затем установим раствор циркуля так, как показано на рисунке 3.77. Тогда из подобия треугольников AOB и A_1OB_1 получим: $A_1B_1 : AB = OB_1 : OA = 1 : 3$.

Осталось повернуть циркуль и трижды отложить на AB отрезок A_1B_1.

Поперечный масштаб

Мы пользуемся свойствами подобия, когда определяем расстояния на местности по карте, учитывая ее масштаб.

Для более точных измерений расстояний по карте или плану используют способ, который называется поперечным масштабом.

Среди равных разумов – при других равных условиях – преимущество имеет тот, кто знает геометрию.

Блез Паскаль, XVII в.

Стороны квадрата $AOKD$ (рис. 3.78-а) содержат 10 отрезков, принятых за единицу измерения (например, длиной 0,5 см). Через точки деления на стороне AD проводят прямые, параллельные противоположной стороне квадрата. Каждую точку деления на стороне DK соединяют с точками деления стороны AO со смещением на одно деление (рис. 3.78-а).

В треугольнике EKO отрезки, параллельные EO, образуют 9 треугольников, подобных треугольнику EKO (рис. 3.78-б). Понятно, что длины отрезков E_1O_1, E_2O_2, ..., E_9O_9 равны соответственно 1 : 10, 2 : 10, ..., 9 : 10 длины отрезка EO, т. е. единицы измерения. Теперь с помощью циркуля или прозрачной бумаги с соответствующими метками можно измерять расстояния на карте или плане с точностью до 0,1 единицы измерения (у нас – до 0,05 см).

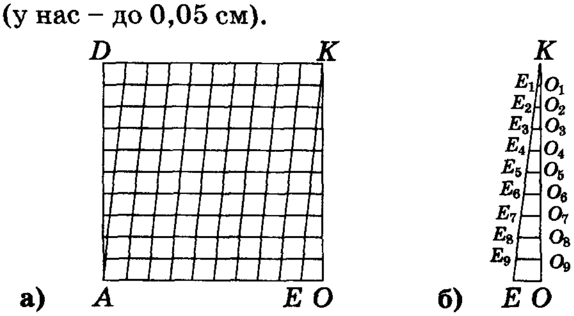


Рис. 3.78

§ 23. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора

Теорема. **Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два подобных треугольника. Каждый из этих треугольников подобен заданному прямоугольному треугольнику.**

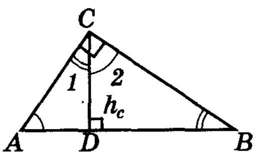


Рис. 3.79

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, у которого угол C – прямой, CD – высота (рис. 3.79). Нужно доказать: (*1*) $\triangle ADC \sim \triangle ACB$; (*2*) $\triangle CDB \sim \triangle ACB$; (*3*) $\triangle ADC \sim \triangle CDB$.

Доказательство

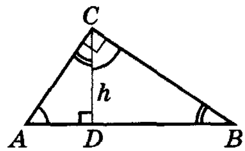
1) В прямоугольных треугольниках ADC и ACB угол A – общий, тогда $\triangle ADC \sim \triangle ACB$. Утверждение (*1*) доказано.

2) В прямоугольных треугольниках CDB и ACB угол B – общий, тогда $\triangle CDB \sim \triangle ACB$. Утверждение (*2*) доказано.

3) В прямоугольных треугольниках ACB и ADC: $\angle B = 90° - \angle A = \angle 1$. (Аналогично: $\angle 2 = \angle A$.)

4) В прямоугольных треугольниках ADC и CDB $\angle 1 = \angle B$, тогда $\triangle ADC \sim \triangle CDB$. Утверждение (*3*) доказано.

Теорема доказана.



$\triangle ADC \sim \triangle ACB$
$\triangle CDB \sim \triangle ACB$
$\triangle ADC \sim \triangle CDB$

Следствие 1. **В прямоугольном треугольнике выполняются соотношения: (*1*) $b^2 = b_c c$; (*2*) $a^2 = a_c c$; (*3*) $h_c^2 = a_c b_c$, где a_c и b_c – проекции катетов a и b на гипотенузу c** (рис. 3.80).

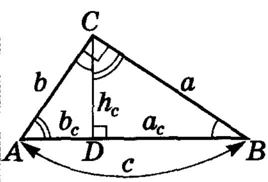
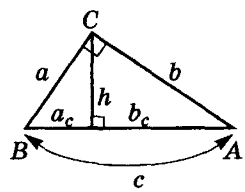


Рис. 3.80

Эти соотношения формулируют еще и так:

- *высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, – среднее пропорциональное (среднее геометрическое) проекций катетов на гипотенузу;*
- *катет прямоугольного треугольника – среднее пропорциональное (среднее геометрическое) гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.*



$h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$

$a = \sqrt{a_c \cdot c}$

$b = \sqrt{b_c \cdot c}$

⇑

среднее геометрическое, или среднее пропорциональное

Для любознательных

Вспомните практическую работу № 30 (стр. 133) и решите такие задачи.

1. Будет ли подобным данному треугольник, построенный из его медиан?
2. Две высоты треугольника ABC равны n и m. Длины двух сторон треугольника, подобного треугольнику ABC, тоже равны n и m. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь подобного ему треугольника равна S.
3. Постройте треугольник по трем его высотам. (Не забудьте доказать, что построенный вами треугольник – искомый.)

Геометрия имеет два сокровища: одно из них – Пифагорова теорема, а второе – деление отрезка в среднем и крайнем отношениях... Первое из них можно сравнить с мерой золота, а второе похоже на драгоценный камень.

И. Кеплер, XVI–XVII вв.

Все три соотношения следуют непосредственно из подобия треугольников, указанных в теореме.

1) Треугольники ADC и ACB подобны. Тогда напротив их равных углов лежат пропорциональные стороны:

$$\frac{b}{c}=\frac{b_c}{b}.$$

Отсюда получаем соотношение (1).

2) Треугольники CDB и ACB подобны. Тогда напротив их равных углов лежат пропорциональные стороны:

$$\frac{a}{c}=\frac{a_c}{a}.$$

Отсюда получаем соотношение (2).

3) Треугольники ADC и CDB подобны. Тогда напротив их равных углов лежат пропорциональные стороны:

$$\frac{b_c}{h_c}=\frac{h_c}{a_c}.$$

Отсюда получаем соотношение (3).

С Следствие 2. **ТЕОРЕМА ПИФАГОРА. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.**

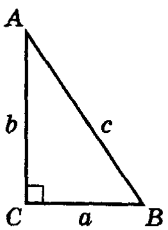
Из предыдущего следует:

$a^2 + b^2 = a_c c + b_c c = (a_c + b_c)\, c = c^2.$

Замечание. Мы доказали знаменитую ТЕОРЕМУ ПИФАГОРА! Вы, наверное, удивлены, что доказательство теоремы, которую доказывали разные геометры различными способами на протяжении двух тысячелетий, теоремы, которую считают *памятником культуры человечества*, заняло у нас в учебнике лишь строку.

Проблемы, которые возникали у древних геометров при доказательстве этой теоремы, объясняются отсутствием у них алгебраического аппарата. Они четко понимали отношение отрезков, но произведение отрезков для них не имело геометрического смысла. Переход от равенства отношений к равенству произведений (основное свойство пропорции) – то, что сегодня делает каждый школьник, был невозможен для древних геометров. Теорему Пифагора они формулировали как равенство площадей (см. стр. 54, 55, 211).

Теорема Пифагора



$c^2 = a^2 + b^2$

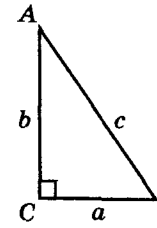
Для любознательных

1. В прямоугольном треугольнике провели высоту к его гипотенузе. В два треугольника, на которые эта высота разделила заданный треугольник, вписали окружности радиусов r_1 и r_2. Найдите радиус окружности, вписанной в данный прямоугольный треугольник.

2. Числа h_1, h_2 и h_3 – длины высот треугольника. Докажите, что если выполняется равенство $(h_1 : h_2)^2 + (h_1 : h_3)^2 = 1$, то этот треугольник прямоугольный.

3. Докажите *обобщенную теорему Пифагора*. Если в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) провести высоту CD, то для трех произвольных соответственных элементов треугольников ABC, ACD и CBD (l_c, l_b и l_a) выполняется равенство $l_c^2 = l_b^2 + l_a^2$.

ПТ Теорема (обратная теореме Пифагора). **Если в треугольнике со сторонами a, b и c выполняется равенство $c^2 = a^2 + b^2$, то этот треугольник прямоугольный и прямой угол расположен напротив стороны c.**



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$\Downarrow$$
$$\angle C = 90^\circ$$

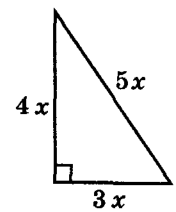
Доказательство

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a и b. По теореме Пифагора квадрат его гипотенузы равен $a^2 + b^2$, т. е. гипотенуза этого треугольника равна c.

По третьему признаку равенства треугольников этот прямоугольный треугольник равен заданному условием теоремы. Тогда соответственный угол заданного треугольника – прямой.

Теорема доказана.

С Следствие 1. **Треугольник с длинами сторон в 3, 4 и 5 единиц измерения – прямоугольный.** (Его называют египетским.)



египетский

Замечание. Единицы измерения могут быть любыми!

С Следствие 2. **Треугольники с длинами сторон, пропорциональными тройкам чисел $\{3;\ 4;\ 5\}$, $\{5;\ 12;\ 13\}$, $\{8;\ 15;\ 17\}$, $\{7;\ 24;\ 25\}$..., – прямоугольные.** (Как продолжить этот ряд, см. стр. 204.)

ОПОРНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

Опорная задача 1

Даны два отрезка a и b. Постройте отрезки:

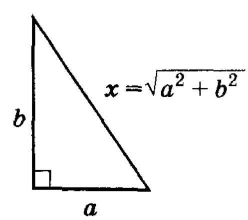
а) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; **б)** $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

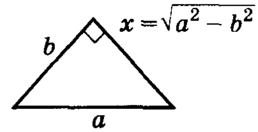
Решение

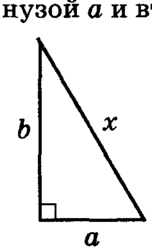
Построения основаны на теореме Пифагора:

а) x – гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b;

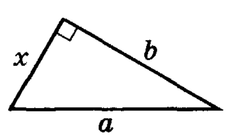
б) x – катет прямоугольного треугольника с гипотенузой a и вторым катетом b.







а)



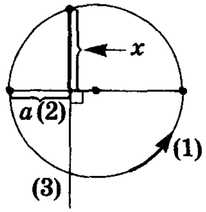
б)

Для любознательных

Диаметр окружности AB равен 1. На нем отложили отрезок AC, длина которого равна $a < 1$, и провели хорду AD длины b. Через точку C провели перпендикулярную к AB прямую, пересекающую AD в точке E, а из точки D – перпендикуляр DF к AB. Оказалось, что $AE = AF$. Докажите, что численно $a = b^3$.

СТРОИМ:

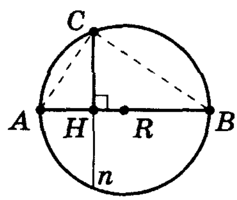
$x=\sqrt{a\cdot b}$



$R=\dfrac{a+b}{2}$

Опорная задача 2

Построение среднего геометрического двух заданных отрезков.



Даны два отрезка a и b. Постройте отрезок $x=\sqrt{ab}$.

Анализ

Высота прямоугольного треугольника, проведенная к его гипотенузе, равна среднему геометрическому отрезков, на которые она делит гипотенузу. Значит, надо построить прямоугольный треугольник с гипотенузой $a + b$.

План построения

1) a, $b \to$ отрезок $a + b$;
2) $a + b \to$ отрезок $(a + b) : 2$;
3) окружность радиуса $R = (a + b) : 2$; проводим диаметр AB;
4) на AB отложим $AH = a$;
5) прямую $n \perp AB$ в точке H, n пересекает окружность в точке C.

Отрезок CH – искомый.

Доказательство

Имеем по построению: $R = (a + b) : 2$, $AB = 2R$, $AH = a$, $CH \perp AB$.

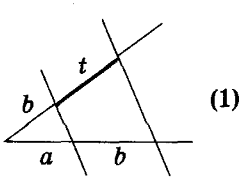
Доказать: $CH = \sqrt{ab}$.

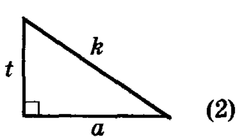
1) $AB = 2R \to \angle ACB = 90°$;
2) $AB = 2R$, $R = (a + b) : 2$, $AH = a \to HB = (a + b) - a = b$;
3) $\triangle ACB\,(\angle C = 90°)$: $CH \perp AB, AH = a, HB = b \to CH = \sqrt{ab}$.

Ч. т. д.

СТРОИМ x:

$x^2=\sqrt{a^4+b^4}$





$x=\sqrt{a\cdot k}$ (3)

Опорная задача 3

Даны два отрезка a и b. Постройте отрезок x, такой, чтобы $x^2=\sqrt{a^4+b^4}$.

Анализ $a^4+b^4=a^2\left(a^2+\dfrac{b^4}{a^2}\right)$; $x^2=a\sqrt{a^2+\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^2}$.

План построения

1) a; $b \to t=\dfrac{b^2}{a}$ (см. опорную задачу построения четвертого пропорционального на стр. 113);

2) a; $t \to k=\sqrt{a^2+t^2}$; 3) a; $k \to x=\sqrt{ak}$.

Доказательство проведите самостоятельно.

Для любознательных

1. Дан отрезок, длина которого равна 1. Постройте отрезки длиной $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$. Укажите способ построения отрезка $\sqrt{n}$.
2. Даны отрезки a, b, c, d. Постройте двумя способами отрезок x:

а) $x=\sqrt{a^2-b^2}$; б) $x=\sqrt{a^2-2b^2}$; в) $x=\sqrt[4]{abcd}$; г) $x=\sqrt[4]{a^4+3b^4}$.

Задание 23

1°. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 6 см и 8 см; б) 4 см и 7 см; в) $5a$ и $12a$.

2°. Найдите катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза и второй катет соответственно равны: а) 15 см и 9 см; б) 8 см и 4 см; в) c и a.

3°. Найдите: а°) диагонали прямоугольника со сторонами 5 см и 12 см; б°) сторону ромба с диагоналями 4 м и 3 м; в°) высоту равностороннего треугольника со стороной 12 см; г°) диагональ квадрата со стороной 6 см; д*) высоту треугольника со сторонами 10 см, 13 см и 13 см.

4°. Основание равнобедренного треугольника равно 60 см, а высота, опущенная на боковую сторону, – 72 см. Найдите периметр треугольника.

5. Найдите высоту и радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника, если его сторона равна a.

6. Большая диагональ и большая основа прямоугольной трапеции соответственно равны 13 см и 12 см. Найдите высоту трапеции.

7. Найдите высоту трапеции со сторонами 10 см, 10 см, 10 см и 26 см.

8. В ромб, диагональ которого делит его на два равносторонних треугольника, вписана окружность с радиусом $\sqrt{3}$ м. Найдите сторону ромба.

9. Найдите неизвестный элемент прямоугольного треугольника по рисунку 3.81.

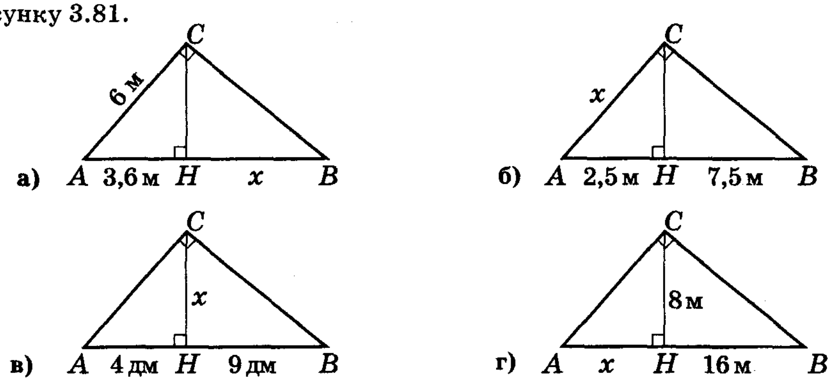


Рис. 3.81

10. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу треугольника с катетами 5 см и 12 см.

11. Высота прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{3}$ см и делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 6 см больше второго. Найдите катеты треугольника.

12. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 20 м, а высота, проведенная к ней, – 9,6 м. Найдите катеты.

13. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если: а) один из катетов равен 4 см, а проекция второго катета на гипотенузу – 1,8 см; б) один из катетов равен 15 см, а проекция второго на гипотенузу равна 16 см.

14. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 12 см и образует с одним катетом угол вдвое меньше, чем с другим. Найдите катеты треугольника.

15. Основания прямоугольной трапеции равны 6 см и 8 см. Один из углов трапеции равен 120°. Найдите диагонали трапеции.

16**. Основание высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, удалено от катетов на 3 см и 4 см. Найдите длину гипотенузы.

17*. В равнобедренную трапецию вписана окружность с радиусом 2 см. Найдите стороны трапеции, если ее площадь равна 20 см^2.

18*. Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами 13 см, 14 см и 15 см.

19*. Найдите высоту трапеции с основаниями 4 дм и 14 дм и боковыми сторонами 6 дм и 8 дм.

20.** В прямоугольном треугольнике высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, относятся как 40 : 41. Найдите отношение его катетов.

21*. Медианы, проведенные к катетам, равны a и b. Найдите гипотенузу.

22.** Медиана, проведенная к гипотенузе треугольника, равна среднему пропорциональному его катетов. Найдите углы треугольника.

23*. Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности между суммой катетов и гипотенузы.

24*. Найдите катеты прямоугольного треугольника, длины которых относятся как 20 : 21, а разность между радиусом описанной и вписанной окружностей 17 см.

25*. Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, равен 5 см, а площадь треугольника – 24 см^2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

26*. Концы большей боковой стороны прямоугольной трапеции удалены от центра вписанной в нее окружности на 15 см и 20 см. Найдите периметр трапеции.

27.** Центр вписанной в равнобедренную трапецию окружности удален от одной из его вершин на 6 см. Найдите периметр трапеции, если точка касания окружности делит боковую сторону трапеции в отношении 9 : 16.

28.** В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла провели медиану CM и высоту CH. Найдите гипотенузу, если $CM : CH = 5 : 4$, а $MH = 3$ см.

29.** Две окружности с радиусами R и r касаются внешним образом в точке A. К ним проведена общая внешняя касательная, которая касается окружностей в точках B и C. Найдите: **а)** BC; **б)** расстояние от точки A до прямой BC.

30.** Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 см и 15 см, а общая хорда равна 24 см. Найдите расстояние между центрами окружностей.

31.** Диагонали трапеции равны 4 см и 3 см, а отрезок, который соединяет середины оснований, – 2,5 см. Найдите площадь трапеции.

32.** Диагонали вписанного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что полусумма квадратов его сторон равна квадрату диаметра окружности.

33.** В треугольнике ABC катет $AC = 1$ см, $BC = 7$ см. В треугольнике BMH (рис. 3.82) $BH = 4$ см, $HM = 3$ см. Найдите угол ABM.

34.** На рисунке 3.83 изображен прямоугольник, который разбит на 6 равных квадратов. Найдите угол ABC.

35.** В прямоугольном треугольнике (рис. 3.84) катет AC в три раза длиннее катета AB. Точки K и M делят катет AC на три равные части. Докажите, что сумма углов AKB, AMB и ACB равна 90°.

36.** Пользуясь утверждением задачи 32, докажите, что на рисунке 3.85 углы AFE и GDC равны.

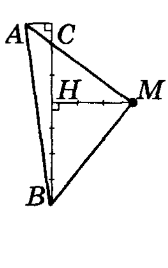


Рис. 3.82

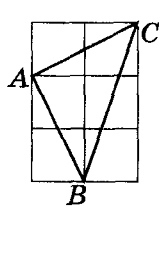


Рис. 3.83

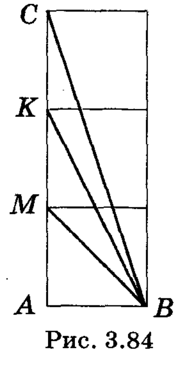


Рис. 3.84

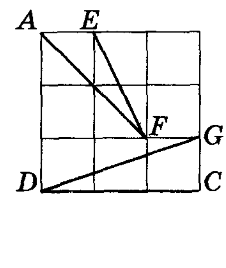


Рис. 3.85

§ 24. Метод подобия и метрические соотношения в окружности. Свойства биссектрисы треугольника

Метод подобия – использование подобия треугольников, образованных дополнительными построениями.

Теорема 1. **Если через точку внутри окружности проведены хорды, то произведение отрезков каждой из хорд, на которые она делится заданной точкой, – величина постоянная для данной окружности.**

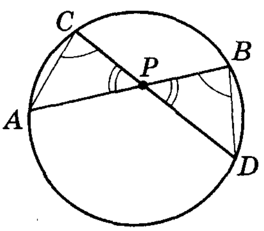
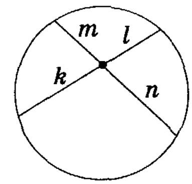


Рис. 3.86



$m \cdot n = k \cdot l$

Через точку P внутри окружности, изображенной на рисунке 3.86, проведены хорды AB и CD. Докажем, что $CP \cdot PD = AP \cdot PB$.

Доказательство

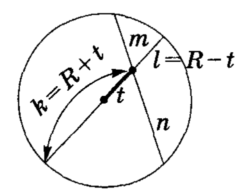
1) $\angle CPA = \angle BPD$ (как вертикальные), $\angle ACD = \angle ABD$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу AD). Тогда $\triangle ACP \sim \triangle DBP$.

2) Треугольники ACP и DBP – подобны, тогда их соответственные стороны пропорциональны: $\frac{CP}{PB} = \frac{AP}{PD}$. Тогда $CP \cdot PD = AP \cdot PB$.

Теорема доказана.

Следствие. **Если через точку внутри окружности провести диаметр и хорду, то квадрат расстояния от этой точки до центра окружности $t^2 = R^2 - m \cdot n$** (R – радиус окружности, m и n – отрезки хорды, на которые ее делит данная точка – рис. на поле.)

По теореме: $(R + t)(R - t) = mn$, $t^2 = R^2 - mn$.



$m \cdot n = R^2 - t^2$

$t^2 = R^2 - m \cdot n$

Теорема 2. **Если из точки вне окружности к ней провели касательную и секущую, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.**

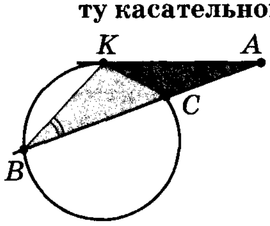


Рис. 3.87

На рисунке 3.87 AB – секущая, AK – касательная. Докажем, что $AB \cdot AC = AK^2$.

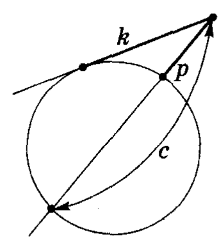
Доказательство

1) $\angle KBC = \smile KC : 2$ (как вписанный); $\angle AKC = \smile KC : 2$ (как угол между касательной и хордой, проведенной в точку касания, см. стр. 30). Тогда $\angle KBC = \angle AKC$.

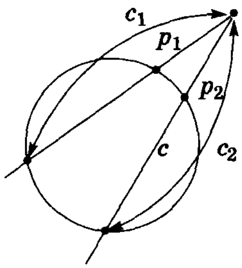
2) Рассмотрим $\triangle BKA$ и $\triangle KCA$: $\angle A$ – общий, $\angle KBC = \angle AKC$. Тогда эти треугольники подобны.

3) $\triangle BKA \sim \triangle KCA$, тогда их соответственные стороны пропорциональны: $\frac{AC}{AK} = \frac{AK}{AB}$. Отсюда $AB \cdot AC = AK^2$.

Теорема доказана.



$k^2 = p \cdot c$



$p_1 \cdot c_1 = p_2 \cdot c_2$

[redacted]

С Следствие. **Для секущих окружности, проведенных из одной точки, произведение секущей на ее внешнюю часть – величина постоянная для заданной окружности.**

Т Теорема 3. **Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.**

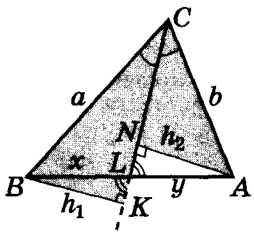


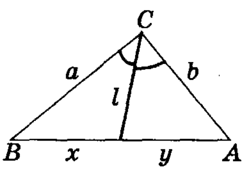
Рис. 3.88

В треугольнике ABC (рис. 3.88) CL – биссектриса угла C. Докажем, что $\frac{BL}{LA}=\frac{BC}{AC}$.

Доказательство

Проведем $BK \perp CL$ и $AN \perp CL$.

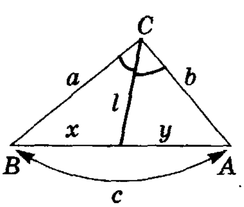
1) Углы BLK и NLA равны (как вертикальные), тогда прямоугольные треугольники BKL и ANL подобны и $\frac{h_1}{h_2}=\frac{x}{y}$ ($x \triangleq BL$, $y \triangleq LA$).



$x:y=a:b$

2) Углы BCL и NCA равны (по условию), тогда прямоугольные треугольники BCK и ACN подобны и $\frac{h_1}{h_2}=\frac{a}{b}$.

3) $\frac{x}{y}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{a}{b}$. Теорема доказана.



$x=\frac{ac}{a+b}$

$y=\frac{bc}{a+b}$

С Следствие 1. **Биссектриса угла C треугольника ABC делит его сторону c на отрезки, длины которых равны:**

$x=\frac{ac}{a+b}$ **– прилежащий к стороне a;**

$y=\frac{bc}{a+b}$ **– прилежащий к стороне b** (рис. 3.89).

По теореме для треугольника ABC выполняется:

$\frac{x}{c-x}=\frac{a}{b}$. Тогда $x=\frac{ac}{a+b}$ и $y=c-x=\frac{bc}{a+b}$.

Для любознательных

1. В треугольнике ABC: AL_1 – биссектриса, I – инцентр. Сравните отрезки AI и IL_1.

2. Докажите, если все биссектрисы треугольника точкой пересечения делятся в одинаковом отношении, то этот треугольник равносторонний.

3. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны BC в точке K. Докажите, что отрезок AK больше диаметра этой окружности.

4. Докажите, что высота треугольника больше диаметра вписанной в этот треугольник окружности.

5. Постройте прямоугольный треугольник по его гипотенузе, если известно, что его инцентр делит биссектрису прямого угла в отношении 2 : 1.

С Следствие 2. **В треугольнике ABC инцентр I делит биссектрису CL_c в отношении $CI : IL_c = (a + b) : c$** (рис. 3.89).

По теореме из $\triangle CBL_c$ (рис. 3.89) получаем:

$$\frac{CI}{IL_c} = \frac{a}{x} = a : \frac{ac}{a+b} = \frac{a+b}{c}.$$

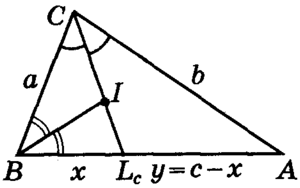


Рис. 3.89

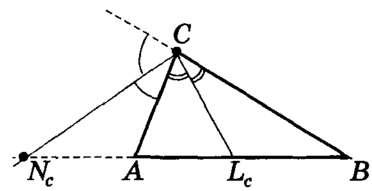
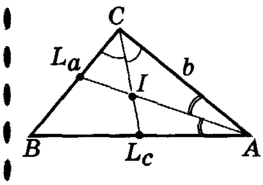
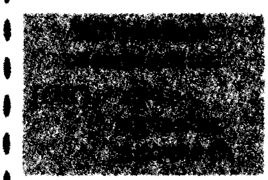


Рис. 3.90



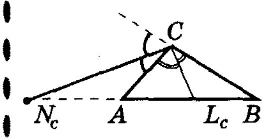
$$\frac{CI}{IL_c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{AI}{IL_a} = \frac{c+b}{a}$$



ТТ Теорема 4. **Биссектриса CN_c внешнего угла треугольника ABC отсекает на луче $[BN_c)$ отрезки BN_c и AN_c, соответственно пропорциональные сторонам BC и AC** (рис. 3.90).

Докажите самостоятельно, что $BN_c : AN_c = BC : AC$. (Рассмотрите отношение площадей треугольников N_cCA и N_cCB, учитывая, что точка N_c равноудалена от прямых AC и BC, т. к. принадлежит биссектрисе угла, образованного ими.)



$$\frac{BN_c}{AN_c} = \frac{BC}{AC} = \frac{BL_c}{AL_c}$$

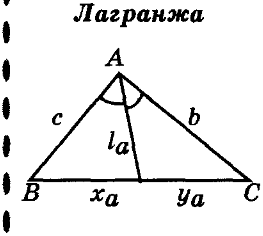
С Следствие. **Геометрическое место точек C, для которых $BC : AC = k$ (постоянная $k \neq 1$, A, B – фиксированные точки), – окружность с центром на прямой AB.** Эта окружность называется ***окружностью Аполлония*** в честь Аполлония Пергского (см. с. 40).

Окружность Аполлония – ГМТ, для которых $BC : AC = \text{const} \neq 1$, где A и B – фиксированные точки. Центр $O \in (AB)$.

Достаточность следует непосредственно из теоремы 4. Точки N_c и L_c не изменяют положения для произвольной точки C, которая удовлетворяет отношению. При этом $\angle N_cCL_c = 90°$ (как угол между биссектрисами смежных углов), т. е. точка C принадлежит окружности с диаметром N_cL_c.

Необходимость: *для произвольной точки C окружности с диаметром N_cL_c выполняется равенство $BC : AC = k$.* Предлагаем доказать это (от противного) самостоятельно.

Формула Лагранжа



$$l_a^2 = bc - x_a y_a$$

$$l_c^2 = ab - x_c y_c$$

$$l_b^2 = ac - x_b y_b$$

ТТ Теорема 5 (формула Лагранжа). **Квадрат биссектрисы треугольника равен разности произведения сторон, которые образуют соответствующий угол, и произведения частей, на которые она делит третью сторону треугольника.**

Применим *метод вспомогательной окружности.* Опишем вокруг $\triangle ABC$ окружность и продолжим биссектрису CL угла C до пересечения с ним в точке W (рис. 3.91). Пользуясь обозначениями, указанными на рисунке 3.91, докажем: $l_c^2 = ab - xy$.

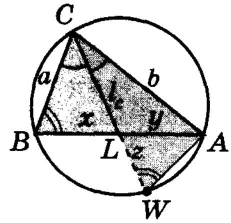


Рис. 3.91

Доказательство

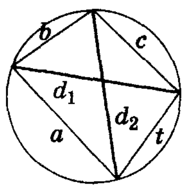
1) Углы CBA и CWA опираются на одну дугу CA, тогда они равны.

2) $\angle BCL = \angle WCA$, $\angle CBL = \angle CWA$, тогда $\triangle CBL \sim \triangle CWA$ и

$$\frac{l_c + z}{a} = \frac{b}{l_c}.$$

3) $l_c^2 + l_c z = ab$. По свойству хорд окружности (см. стр. 145) $l_c z = xy$. Теорема доказана.

Теорема Птолемея



$d_1 \cdot d_2 = b \cdot t + a \cdot c$

Теорема 6 (теорема Птолемея). **В любом вписанном в окружность четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных его сторон.**

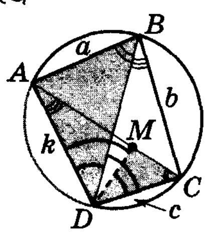


Рис. 3.92

Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ (рис. 3.92) проведем диагонали AC, BD и докажем, что $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$.

Доказательство

Отложим от DC угол CDM, равный углу ADB ($M \in AC$).

1) $\angle ABD = \angle ACD$ ($\smile AD$ – общая), $\angle ADB = \angle CDM$.

Тогда $\triangle ADB \sim \triangle CDM$ и $\dfrac{CM}{c} = \dfrac{a}{DB}$.

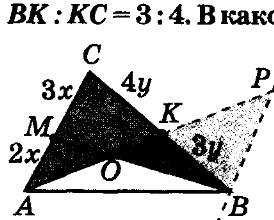
2) $\angle DAC = \angle DBC$ ($\smile DC$ – общая), $\angle ADM = \angle BDC$.

Тогда $\triangle ADM \sim \triangle BDC$ и $\dfrac{AM}{k} = \dfrac{b}{DB}$.

3) $AC = CM + AM = \dfrac{ac + kb}{DB}$, $AC \cdot BD = ac + kb$. Ч. т. д.

Опорная задача 1

На стороне AC треугольника ABC взяли точку M, а на стороне BC – точку K так, что $AM : MC = 2 : 3$, $BK : KC = 3 : 4$. В каком отношении AK делит отрезок BM?



Дано: $AM : MC = 2 : 3$,
$BK : CK = 3 : 4$.
Найти: $BO : OM$.

Проведем через точку B прямую $n \parallel AC$, $n \cap AK = P$.

1) $AM : MC = 2 : 3$, $AM = \dfrac{2}{5} AC$;

2) $\triangle BKP \sim \triangle CKA$ (по двум углам), тогда

$$\frac{BP}{AC} = \frac{BK}{KC} = \frac{3}{4} \text{ и } BP = \frac{3}{4} AC;$$

3) $\triangle BPO \sim \triangle MOA$, тогда $\dfrac{BO}{OM} = \dfrac{BP}{AM} = \dfrac{\frac{3}{4} AC}{\frac{2}{5} AC} = \dfrac{15}{8}$.

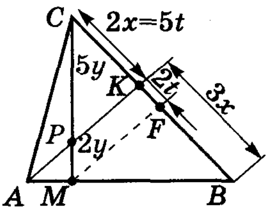
Ответ: 15 : 8.

Вдохновение нужно в поэзии, как и в геометрии.

А. С. Пушкин

Опорная задача 2

На стороне AB треугольника ABC отметили точку M, а на стороне BC – точку K так, что $CK : KB = 2 : 3$, а точка пересечения отрезков AK и CM делит CM в отношении $5 : 2$, считая от вершины. В каком отношении точка M делит сторону AB?



Дано: $CK : KB = 2 : 3$;
$CP : PM = 5 : 2$.
Найти: $AM : MB$.

Проведем $MF \parallel AK$.
1) $CK : KB = 2 : 3$, $CK \triangleq 2x$, $KB = 3x$.
2) $\underline{\angle MCB\ (PK \parallel MF)}$: $CK : KF = CP : PM = 5 : 2$; $CK \triangleq 5t$, $KF = 2t$.
3) $CK = 2x = 5t \to x = 2{,}5t$ и $FB = 3x - 2t = 3 \cdot 2{,}5t - 2t = 5{,}5t$.
4) $\underline{\angle ABC\ (MF \parallel AK)}$: $AM : MB = KF : FB = 2 : 5{,}5 = 4 : 11$.

Ответ: $4 : 11$.

Полезно помнить: при поиске отношения отрезков в треугольнике *могут оказать помощь* прямые, параллельные рассматриваемым отрезкам.

Задание 24

1. Найдите на рисунке 3.93 подобные треугольники. Ответ обоснуйте.
2. Из точки A к окружности проведена секущая AB и касательная AC (рис. 3.94). Какие из полученных треугольников подобные? Ответ обоснуйте.
3. На рисунке 3.95 найдите подобные треугольники.

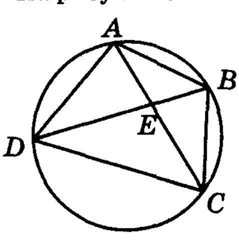


Рис. 3.93

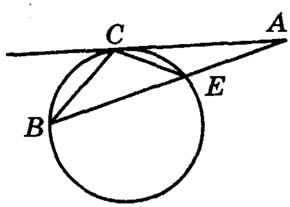


Рис. 3.94

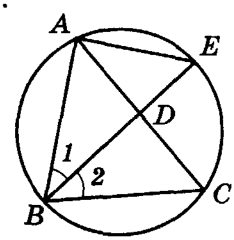


Рис. 3.95

4. Две хорды окружности пересекаются. Отрезки одной хорды равны 24 см и 14 см. Один из отрезков другой хорды равен 28 см. Найдите длину этой хорды.
5. Из точки окружности провели перпендикуляр на диаметр. Найдите длину перпендикуляра, если отрезки диаметра равны 12 см и 3 см.

Для любознательных

1. В окружности с радиусом R провели две взаимно перпендикулярные хорды AB и CP. Докажите, что $AC^2 + BP^2 = 4R^2$.

2. На боковых сторонах трапеции, как на диаметрах, построены окружности. Докажите, что отрезки касательных, проведенных из точки пересечения диагоналей трапеции к указанным окружностям, равны между собой.

3. На продолжении хорды KL окружности с центром O взяли точку A, из которой к нему проведены две касательные AP и AQ; M – середина отрезка PQ. Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$.

4. Постройте окружность, которая проходит через две данные точки и касается: а) заданной окружности; б) заданной прямой (*это задачи Аполлония Пергского*, см. стр. 40).

6. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M. $AM = 3$ дм, $BM = 4$ дм, $CM = 6$ дм. Найдите MD и площадь четырехугольника $ABCD$.

7*. В окружность радиуса r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма высоты, проведенной к основанию, и основания равна диаметру. Найдите указанную высоту.

8*. Диагональ AC вписанного четырехугольника $ABCD$ – биссектриса угла BAD. Найдите BC, если BD делит AC на отрезки 16 см и 4 см.

9*. Точка M лежит внутри окружности радиуса R и удалена от его центра на расстояние d. Хорда AB проходит через точку M. Найдите произведение $AM \cdot BM$.

10*. Точка P удалена от центра окружности на 7 см. Радиус окружности равен 11 см. Через точку P проведена хорда длиной 18 см. Найдите отрезки, на которые точка P делит хорду.

11**. Точка M лежит вне окружности радиуса R и удалена от его центра на расстояние d. Через точки A, B окружности и точку M проведена секущая. Найдите произведение $AM \cdot BM$.

12*. Из внешней точки окружности проведена секущая длиной 12 см и касательная, которая составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Найдите длину касательной.

13*. Из точки A проведены две секущие, которые пересекают окружности: одна в точках B и C, другая – в D и E. Известно, что $AB = 7$ см, $BC = 7$ см, $AD = 10$ см. Найдите DE.

14*. Касательная к окружности равна 20 см, а самая большая секущая, проведенная из той же точки, равна 50 см. Найдите радиус окружности.

15**. В квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{5}$ см вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E. Найдите хорду, которая принадлежит прямой AE.

16**. Две окружности пересекаются в точках A и B. Хорды AC и AD проведены в окружностях так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB, если $CB = a$, $BD = b$.

17**. Докажите, что прямая, которая проходит через точки пересечения двух окружностей, делит пополам их общую касательную.

18*. В треугольнике биссектриса угла с длинами 9 см и 6 см разделила третью сторону на два отрезка, один из которых – 6 см. Найдите: а) длину третьей стороны; б) длину биссектрисы.

19*. Хорды AB и CD пересекаются в точке M. Биссектриса угла BMD пересекает хорду BD в точке K. Найдите отрезки BK и KD, если $BD = 3$ см, а площади треугольников BCM и AMD относятся как 1 : 4.

Для любознательных

Головоломки Реймонда М. Смаллиана.

1. Человек смотрит на портрет. Его спрашивают: «Чей портрет вы рассматриваете?». Человек отвечает: «В семье я рос один – как перст один. Но все же отец того, кто на портрете, – сын моего отца!». О чьем портрете идет разговор? (Внимание! Ответ, что на портрете изображен тот же человек, который на него смотрит, – неправильный.)

2. Допустим, что в первой задаче человек, который рассматривал портрет, дал такой ответ: «В семье я рос один – как перст один. Но сын того, кто на портрете, – сын моего отца!» О чьем портрете шел разговор?

3. О населении некоторого города известно: 1) Среди его жителей нет двух людей с одинаковым количеством волосков на голове. 2) Ни у одного жителя этого города не растет на голове ровно 518 волосков. 3) Жителей в этом городе больше, чем волосков у любого из них. Каким может быть наибольшее число жителей этого города?

20.** Катеты треугольника равны 15 см и 20 см. Из вершины прямого угла провели биссектрису и высоту. На какие отрезки разделилась гипотенуза?

21*. Найдите длину биссектрисы прямоугольного треугольника с катетами 4 см и 6 см, проведенной из вершины прямого угла.

22.** Докажите, что если две биссектрисы внутренних углов треугольника равны, то он равнобедренный.

23.** Докажите, если для некоторой точки E на стороне BC треугольника ABC имеет место равенство $BE : CE = AB : AC$, то AE – биссектриса треугольника.

24.** Точка M лежит на стороне AB треугольника ABC ($AB : AC = 3 : 1$) и делит ее в отношении $AM : MB = 7 : 2$. В каком отношении отрезок CM делит биссектрису AP этого треугольника?

25.** В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 3 : 2. Найдите периметр этого треугольника, если радиус вписанной окружности равен $4\sqrt{5}$ мм.

26.** Точки K, P и M, H принадлежат сторонам AB и AC треугольника ABC соответственно. Прямые KM, PH и BC параллельны. Из вершины угла A проведена биссектриса. Докажите, что она делит отрезки KM и PH в одинаковом отношении.

27.** В прямоугольном треугольнике биссектриса делит гипотенузу в отношении 7 : 9. В каком отношении делит гипотенузу высота?

28.** В прямоугольном треугольнике ABC с катетом $BC = 6$ см и гипотенузой $AB = 10$ см проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B, которые пересекают соответственно катет и его продолжение в точках D и E. Найдите длину DE.

29.** Точки A_1 и B_1 принадлежат соответственно сторонам OA и OB угла AOB (градусная мера угла AOB не равна 180°), и выполняется равенство $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$. Докажите, что точки A, A_1, B, B_1 принадлежат одной окружности.

30.** В треугольнике ABC с длинами сторон a, b и c провели биссектрису AK. Найдите длину отрезка биссектрисы, заключенного между вершиной A и точкой пересечения его биссектрис.

31.** Точка M лежит на продолжении хорды AB. Докажите, что если для некоторой точки окружности C выполняется равенство $MC^2 = MA \cdot MB$, то MC – касательная к окружности.

Для любознательных

1. Докажите *лемму Архимеда* (см. стр. 36, 116, 212, 214) *о перпендикулярных прямых.*

Если две хорды окружности взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения на отрезки a и b, c и d соответственно, то сумма квадратов этих отрезков равна квадрату диаметра окружности.

Сколько способов доказательства вы можете предложить?

2. В окружности с радиусом R провели две хорды, которые пересекаются в точке M под прямым углом. Найдите сумму квадратов хорд, если расстояние от точки M до центра окружности равно n.

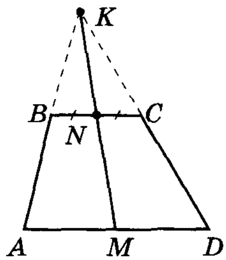
3. Докажите, что если два отрезка AB и CD делятся точкой пересечения K так, что $AK \cdot KB = CK \cdot KD$, то через точки A, B, C и D можно провести окружность.

4. В центре квадратного пирога лежит изюминка. От пирога можно отрезать треугольный кусок по прямой, которая пересекает две его соседние стороны в точках, которые не являются вершинами квадрата; от остатка пирога можно аналогичным образом отрезать следующий кусок и т. д. Можно ли получить треугольный кусок пирога с изюминкой?

§ 25. Метод подобия в опорных задачах трапеции

Опорная задача 1

Докажите, что точка пересечения продолжения боковых сторон трапеции и середины ее оснований лежат на одной прямой.



Дано: $BC \parallel AD$; $BN = NC$;
$KN \cap AD = M$.
Доказать: $AM = MD$.

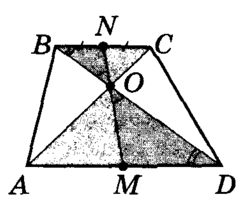
1) $\underline{\angle AKM \text{ и } \angle MKD}$: $BC \parallel AD$, тогда $\triangle BKN \sim \triangle AKM$ и $\triangle NKC \sim \triangle MKD$.
Отсюда:

$$\frac{BN}{AM}=\frac{KN}{KM}=\frac{NC}{MD};$$

2) $\dfrac{BN}{AM}=\dfrac{NC}{MD}$, $BN = NC \to AM = MD$. Ч. т. д.

Опорная задача 2

Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции и середины ее оснований лежат на одной прямой.



Дано: $BC \parallel AD$; $BN = NC$;
$NO \cap AD = M$.
Доказать: $AM = MD$.

1) $BC \parallel AD$, BD – секущая $\to \angle NBO = \angle ODM$;
2) $\angle NBO = \angle ODM$; $\angle NOB = \angle DOM$ (вертикальные) $\to \triangle NBO \sim \triangle MDO$;
3) аналогично: $\triangle NOC \sim \triangle MOA$;
4) $\triangle NBO \sim \triangle MDO$ и $\triangle NOC \sim \triangle MOA \to \dfrac{BN}{MD}=\dfrac{NO}{OM}=\dfrac{NC}{AM}$;
5) $\dfrac{BN}{MD}=\dfrac{NC}{AM}$, $BN = NC \to AM = MD$.
Ч. т. д.

Для любознательных

1. Диаметр окружности радиуса R разделен точками на 4 равные части. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до указанных точек деления (включая и концы диаметра) является величиной постоянной для данной окружности.

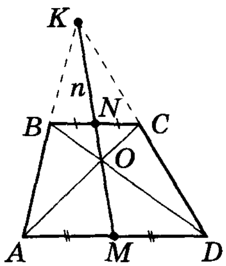
2. Диаметр окружности радиуса R разделили на n равных частей. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до указанных точек деления (включая и концы диаметра) является величиной постоянной для данной окружности.

3. Две окружности радиусов r_1 и r_2 касаются друг друга внешним образом. Найдите длину их общей касательной и радиус окружности, касательной к ней и к данным окружностям.

4. Три окружности попарно касаются друг друга в точках A, B, C (A – точка касания первых двух окружностей). Докажите, что точки пересечения прямых AB и AC с третьей окружностью и центр третьей окружности лежат на одной прямой.

Опорная задача 3

Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжения боковых сторон трапеции и середины ее оснований лежат на одной прямой.



Дано: $BC \parallel AD$; $BN = NC$; $AM = MD$.

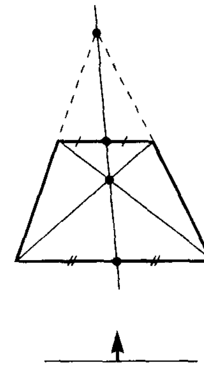
Доказать: $\{K; N; O; M\} \in n$.

Обозначим прямую KN через n.

1) $\{K; N\} \in n \to \{K; N; M\} \in n$ – по опорной задаче 1;

2) $\{K; N\} \in n \to \{N; O; M\} \in n$ – по опорной задаче 2.

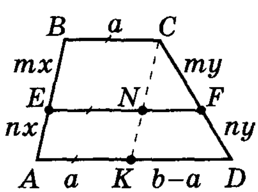
Тогда $\{K; N; O; M\} \in n$. Ч. т. д.



четыре точки лежат на одной прямой

Опорная задача 4

Прямая, параллельная основаниям трапеции, делит ее боковую сторону в отношении $m : n$, считая от меньшего основания. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если длины ее оснований равны a и b ($a < b$).



Дано: $EF \parallel BC \parallel AD$; $BC = a$; $AD = b$; $BE : EA = m : n$.

Найти: EF.

---

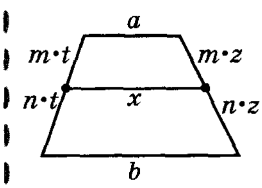
1) $\angle(AB; CD)$: $EF \parallel BC \parallel AD \to$ $\to BE : EA = CF : FD = m : n$;

2) $CK \parallel AB$ по построению, $BC \parallel AD \to$ $\to BC = EN = AK = a$, $KD = b - a$;

3) $CF = my$, $CD = (n+m)y$, $EF \parallel AD \to \triangle CNF \sim \triangle CKD$ с $k = \dfrac{m}{n+m}$;

4) $\triangle CNF \underset{k}{\sim} \triangle CKD \to NF : KD = k$ и $NF = KD\dfrac{m}{n+m}$;

5) $EF = EN + NF = a + \dfrac{(b-a)m}{n+m} = \dfrac{an+bm}{n+m}$. Ч. т. д.



$$\frac{x \parallel a}{\Downarrow}$$

$$x = \frac{an + bm}{m + n}$$

Для любознательных

Вашему вниманию предлагаются задачи на построение **Якоба Штейнера** (см. стр. 129), которые он предлагал студентам Берлинского университета во время своих лекций. В этих задачах **построение надо провести только с помощью линейки** без делений. Попробуйте решить эти задачи и вы. Но не забудьте доказать, что вы построили именно ту фигуру, которая требовалась по условию задачи.

1. На прямой заданы три точки A, B, C, при этом B делит отрезок AC пополам. Через произвольную точку K ($K \notin (AC)$) проведите прямую, параллельную (AC).

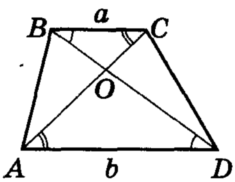
2. Даны два параллельных отрезка. Разделите один из них пополам.

3. Даны две параллельные прямые. Проведите через данную точку, не лежащую на этих прямых, третью прямую, параллельную данным.

4. Даны: вспомогательная окружность, произвольная прямая AB и точка, не принадлежащая (AB). Проведите через заданную точку прямую, параллельную (AB).

Опорная задача 5

Точка пересечения диагоналей трапеции делит каждую из этих диагоналей на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

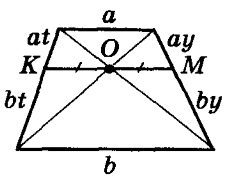


Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC = a$; $AD = b$.

Доказать: $BO : OD = CO : OA = a : b$.

$\triangle BOC \sim \triangle DOA$ (по двум углам), тогда $BO : OD = CO : OA = a : b$. Ч. т. д.

$x \parallel a$



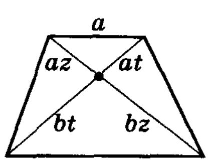
$KO = OM$

$KM = \dfrac{2ab}{a+b}$

↑

в любой трапеции

↓



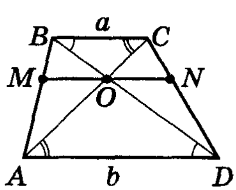
Опорная задача 6

Отрезок, параллельный основаниям трапеции, с концами на ее боковых сторонах, проходит через точку пересечения диагоналей этой трапеции. Докажите, что:

а) этот отрезок делит боковые стороны трапеции на отрезки, пропорциональные прилежащим основаниям;

б) этот отрезок точкой пересечения диагоналей делится пополам;

в) длина этого отрезка равна отношению удвоенного произведения оснований трапеции к сумме этих оснований.



Дано: $MN \parallel BC \parallel AD$; $BC = a$; $AD = b$.

Доказать:

(1) $BM : MA = CN : ND = a : b$.

(2) $MO = ON$.

(3) $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$.

---

1) $MN \parallel BC \parallel AD$, тогда по обобщенной теореме Фалеса и опорной задаче 5: $BM : MA = CN : ND = BO : OD = a : b$ и (1) доказано.

2) $MN \parallel BC$, тогда $\triangle ABC \sim \triangle AMO$, $\triangle DBC \sim \triangle DON$.

3) $\triangle ABC \sim \triangle AMO$: $\dfrac{MO}{a} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{b}{a+b} \to MO = \dfrac{ab}{a+b}$.

$\triangle DBC \sim \triangle DON$: $\dfrac{ON}{a} = \dfrac{ND}{CD} = \dfrac{b}{a+b} \to ON = \dfrac{ab}{a+b} = MO$

и (2) доказано.

4) $MN = 2MO = \dfrac{2ab}{a+b}$ и (3) доказано.

Для любознательных

Через вершину B трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$) провели прямую $BK \parallel CD$ ($K \in AC$). Докажите, что треугольники ABC и KCD – равновеликие.

Задание 25

1. Основы трапеции равны a и b ($a < b$). Найдите отношение, в котором диагонали этой трапеции делят отрезок с концами в серединах ее оснований.
2. Основы трапеции равны 3 см и 6 см. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного боковыми сторонами трапеции.
3. В равнобедренной трапеции длины оснований равны 4 см и 6 см. Найдите длину отрезка с концами в точках касания к боковым сторонам окружности, которая вписана в эту трапецию.
4. Одна из диагоналей трапеции делится их точкой пересечения на отрезки 2 см и 4 см. Меньшее из оснований трапеции равно 4 см. Найдите большее основание трапеции.
5. Непараллельные стороны трапеции продолжили до их пересечения и через полученную точку провели прямую, параллельную основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей трапеции, если длины ее оснований равны a и b ($a < b$).
6. Площадь трапеции равна 27 м^2, основания – 8 м и 16 м. Найдите площади треугольников, на которые трапецию делят ее диагонали.
7. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точки M и N – середины оснований, прямая MN образует равные углы с прямыми AB и CD. Докажите, что эта трапеция равнобедренная.
8. Длины оснований трапеции относятся как 2 : 5. Параллельно основаниям трапеции провели прямую, которая делит ее боковую сторону в отношении 1 : 2. Найдите отношения площадей двух частей трапеции, на которые указанная прямая разделила трапецию.
9. Основания трапеции равны 2 см и 4 см. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям, который делит данную трапецию на две равновеликие части.
10. Параллельно основаниям трапеции проведите прямую так, чтобы ее отрезок, который находится внутри трапеции, делился ее диагоналями на три равные части.

Для любознательных

О поездке известного французского энциклопедиста Дидро в Россию по приглашению Екатерины II рассказывают следующее.

Дидро был атеистом, не скрывал своих убеждений и настоятельно их пропагандировал. Императрица считала его высказывания любопытными, но один из ее вельмож посоветовал остановить атеистические выступления Дидро. Найти способ, как предупредить резкие высказывания Дидро, попросили знаменитого математика **Леонарда Эйлера**. Леонард Эйлер, гений, который открыл человечеству новое направление математики, был человеком глубоко религиозным и имел неплохое чувство юмора. Эйлер известил Дидро, что ему удалось найти доказательство существования Бога и с этим доказательством он с удовольствием ознакомит Дидро в присутствии всего императорского двора. Дидро согласился на дискуссию.

И вот на следующий день самые уважаемые вельможи по приглашению Екатерины II собрались за огромным столом. Эйлер, пользуясь тем, что Дидро совсем не знал математики, поднялся и, глядя в глаза своему оппоненту, загробным голосом произнес: «**А** в квадрате минус **В** в квадрате равно **А** минус **В**, умноженное на **А** плюс **В**. Отсюда следует, что Бог существует. Вы согласны?» Зазвучал общий смех, а Дидро растерялся. Тут же он попросил императрицу позволить ему вернуться во Францию.

Задания для повторения главы III

1. Сформулируйте обобщенную теорему Фалеса.
2. Сформулируйте обратную теорему Фалеса.
3°. Какие треугольники называются подобными?
4°. Сформулируйте основную теорему подобия треугольников.
5°. Сформулируйте признаки подобия треугольников.
6. Докажите основную теорему подобия.
7°. Сформулируйте признаки подобия прямоугольных треугольников.
8°. Сформулируйте свойства подобных треугольников.
9. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве высоты прямоугольного треугольника.
10. Сформулируйте следствия из теоремы о высоте прямоугольного треугольника. Какое из них называется теоремой Пифагора?
11°. Треугольники RTF и $R_1T_1F_1$ – подобны. $RT = 8$ см, $R_1T_1 = 16$ см, $T_1F_1 = 18$ см, $R_1F_1 = 20$ см. Найдите TF и RF.
12. Треугольники ABC и A_1B_1C – подобны (рис. 3.96). Периметр треугольника $A_1B_1C_1$ равен 105 см. Найдите x, y, z.
13. По рисунку 3.97 найдите периметр треугольника FKL.

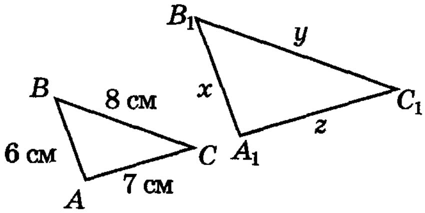


Рис. 3.96

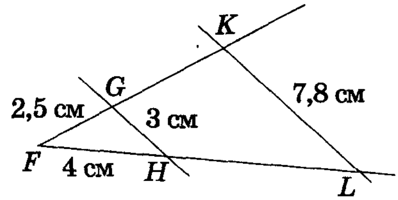


Рис. 3.97

14°. На рисунке 3.98 найдите подобные треугольники. Вычислите неизвестные стороны треугольников.

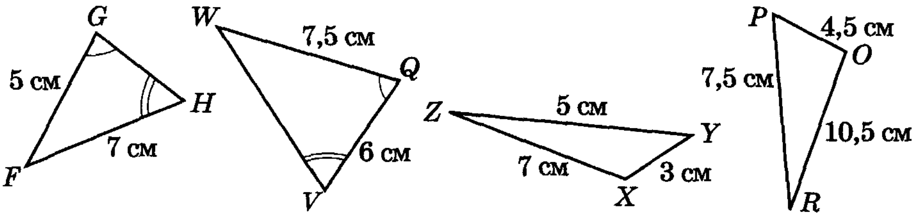


Рис. 3.98

15. На рисунке 3.99 – $AK \perp AB$, $AE \perp AC$. Докажите, что $\triangle AKE \sim \triangle ABC$.
16. $ABCD$ – трапеция (рис. 3.100). Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle DCA$.

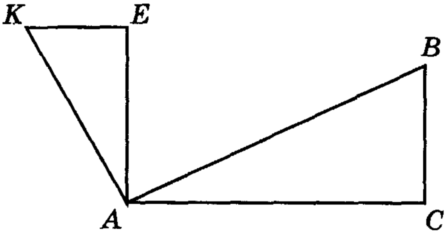


Рис. 3.99

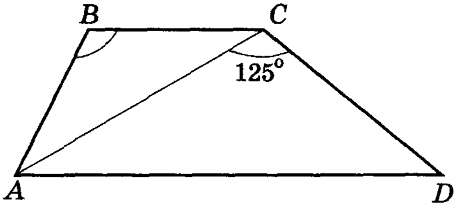


Рис. 3.100

17. На рисунке 3.101 $ABCD$ – параллелограмм. 1) Докажите, что $\triangle ABN \sim \triangle CBF$. 2) Найдите отношения $AN : FC$ и $AD : AB$, если $BN : BF = 2 : 3$.

18. По рисунку 3.102 найдите длину отрезка AB.

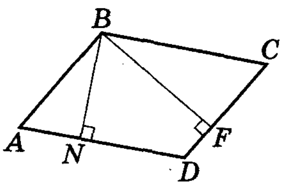


Рис. 3.101

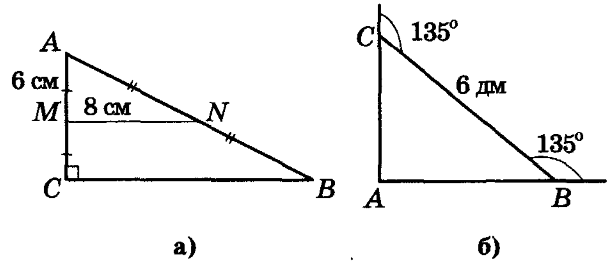


Рис. 3.102

19°. Найдите неизвестные элементы прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) на рисунке 3.103.

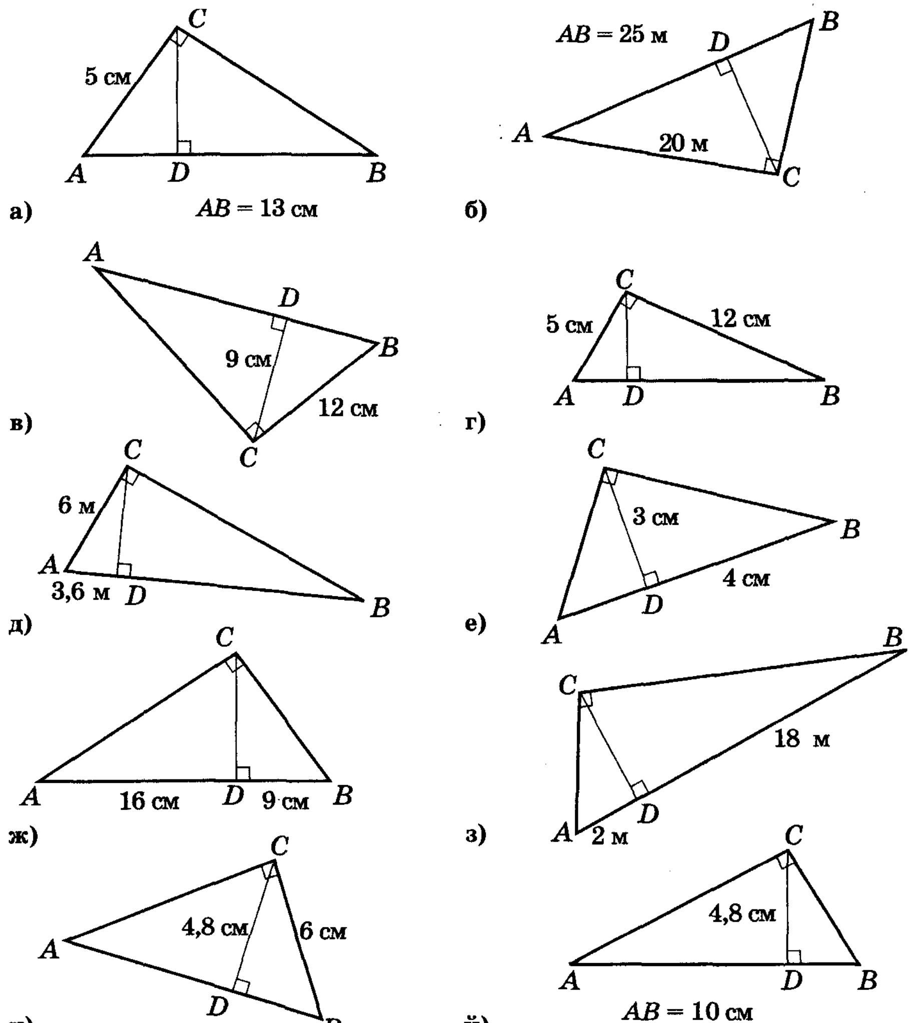


Рис. 3.103

20°. Найдите длину отрезка AP по рисунку 3.104.

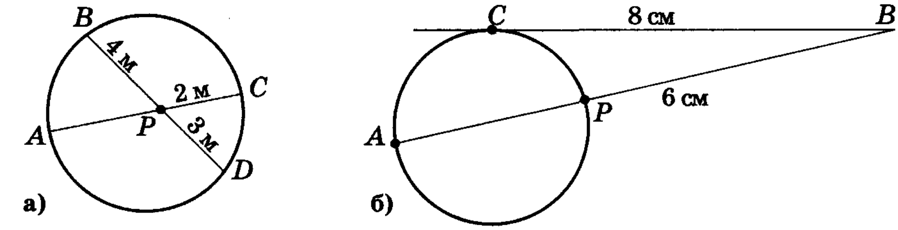


Рис. 3.104

21. Треугольник ABC прямоугольный (рис. 3.105), $\angle C = 90°$. Найдите x.

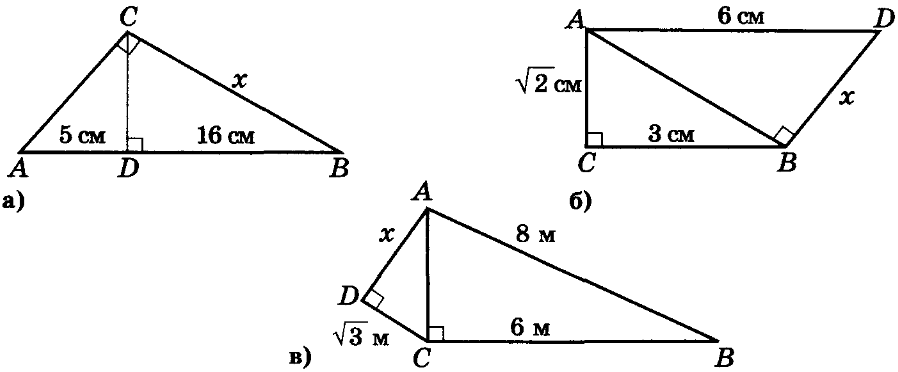


Рис. 3.105

22. Периметр прямоугольника равен 56 см. Одна из его сторон равна 16 см. Вычислите длину диагоналей прямоугольника.

23*. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит катет на отрезки 4 см и 5 см. Найдите стороны треугольника.

24*. Проекции катетов прямоугольного треугольника на его гипотенузу равны 2 см и 4 см. Найдите длины сторон этого треугольника.

25*. Основание равнобедренного треугольника равно 24 см, а медиана боковой стороны – 19,5 см. Найдите длины боковых сторон треугольника.

26*. Найдите радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3 см, а один из катетов – 10 см.

27*. Окружность, центр которой лежит на основании равнобедренного треугольника, касается боковых сторон этого треугольника. Найдите радиус данной окружности, если длина основания треугольника равна 8 см, а высота, проведенная к основанию, – 3 см.

28*. Найдите площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной a (все вершины квадрата лежат на сторонах треугольника).

29*. В середине круга, радиус которого равен 15 см, отметили точку M на расстоянии 13 см от центра. Через точку M провели хорду длиной 18 см. Найдите длины отрезков, на которые точка M делит эту хорду.

30*. Из точки вне заданной окружности провели к ней секущую и касательную. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью – 32 см. Найдите радиус окружности, если секущая удалена от его центра на 5 см.

31*. Из точки вне окружности провели к ней касательную и секущую. Длина касательной на 8 см больше внутреннего отрезка секущей и на 20 см меньше внешнего. Найдите длину касательной.

32*. Диагональ прямоугольной трапеции и ее боковая сторона равны между собой. Найдите длину средней линии трапеции, если длины боковых сторон равны 2 см и 4 см.

33*. Найдите длину диагоналей и боковой стороны равнобокой трапеции с основаниями 20 см и 12 см, если центр описанной вокруг этой трапеции окружности лежит на одном из ее оснований.

34.** Хорда окружности равна 10 см. Через один ее конец провели касательную к окружности, а через другой – секущую, параллельную касательной. Найдите радиус окружности, если длина внутреннего отрезка секущей равна 12 см.

35.** В прямоугольном треугольнике провели биссектрису острого угла. Отрезок, который соединяет основание этой биссектрисы с точкой пересечения медиан, перпендикулярен катету. Найдите углы треугольника.

36.** К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см, провели касательную, параллельную основанию треугольника. Найдите длину отрезка касательной, который находится внутри треугольника.

37.** Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки, длины которых равны m и n. Докажите, что площадь заданного прямоугольного треугольника равна mn.

38.** В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а сумма квадратов биссектрис острых углов равна m^2. Найдите расстояние между концами биссектрис, принадлежащих катетам.

39.** В прямоугольный треугольник вписана полуокружность, центр которой лежит на гипотенузе и делит ее на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найдите радиус этой полуокружности и площадь треугольника.

40.** На каждой медиане треугольника взята точка, которая делит медиану в отношении 3 : 1, если считать от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих точках меньше площади заданного треугольника?

41.** Точки касания вписанной в трапецию окружности делят одну боковую сторону на отрезки 9 см и 16 см, а другую – в отношении 4 : 9. Найдите основания трапеции.

42.** Площадь равнобокой трапеции, описанной вокруг окружности, равна 8 см^2. Определите периметр трапеции, если угол при ее основании равен 30°.

43.** В равнобокую трапецию вписана окружность радиуса R. Одно из оснований трапеции меньше ее высоты в два раза. Найдите площадь трапеции.

Готовимся к тематической аттестации № 3

Вариант I

1. (2 б.) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 4$ см. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если $A_1B_1 = 11{,}2$ см.
2. (1 б.) Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны 6 см и 5 см.
3. (2 б.) Диагональ прямоугольника больше одной из его сторон на 1 см. Найдите эту диагональ, если периметр прямоугольника равен 34 см.
4. (3 б.) Найдите боковую сторону равнобокой трапеции, основания которой равны 14 см и 18 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.
5. (4 б.) Точки касания вписанной в равнобедренную трапецию окружности делят боковую сторону на отрезки 3 см и 12 см. Найдите площадь трапеции.

Вариант II

1. (2 б.) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. $A_1B_1 = 3$ см, $B_1C_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 7$ см. Найдите периметр треугольника ABC, если $BC = 13$ см.

2. (1 б.) Найдите катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза и другой катет соответственно равны 9 см и 5 см.

3. (2 б.) Диагональ прямоугольника больше одной из его сторон на 4 м. Найдите эту диагональ, если периметр прямоугольника равен 28 м.

4. (3 б.) Найдите высоту равнобокой трапеции, основания которой равны 5 см и 13 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

5. (4 б.) Средняя линия описанной равнобокой трапеции равна 20 см. Расстояние от центра вписанной в нее окружности до вершины меньшего основания равно 10 см. Найдите радиус этой окружности.

Для любознательных

1. В треугольнике ABC со сторонами a, b, c через точку пересечения биссектрис I проведены прямые, параллельные сторонам этого треугольника. Найдите длины отрезков этих прямых, которые отсекаются сторонами треугольника.

2. Биссектриса AL пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точках K и P (считая от вершины A). Какой из отрезков длиннее: AK или PL?

3. Биссектрисы AK и BP треугольника ABC пересекаются в точке I и делятся ею в отношении $AI : IK = 3 : 2$ и $BI : IP = 5 : 3$. Найдите отношение сторон треугольника ABC.

4. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки 8 см и 10 см. Найдите стороны треугольника, если центр вписанной в него окружности делит эту биссектрису в отношении 3 : 2, считая от вершины треугольника.

5. В равнобедренном треугольнике ABC высота AK вдвое меньше его биссектрисы CL. Найдите углы треугольника ABC.

6. В треугольнике ABC через середину M_1 стороны BC и инцентр I провели прямую, которая пересекает высоту AH_1 в точке E. Докажите, что отрезок AE равен радиусу окружности, вписанной в треугольник ABC.

7. Докажите, что для произвольного треугольника ABC выполняется соотношение $AI \cdot IW = 2Rr$, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей, точка I – инцентр треугольника, а W – точка пересечения окружности, описанной вокруг треугольника ABC, с прямой AI.

8. На стороне BC квадрата $ABCD$ отметили точку K. Биссектриса угла ADK пересекает сторону AB в точке M. Докажите, что $DK = KC + AM$.

9. На стороне BC правильного треугольника ABC отметили точку D и на отрезке CD, как на стороне, построили равносторонний треугольник CDE (вне треугольника ABC). Точки K и M – середины отрезков AD и BE соответственно. Докажите, что треугольник CKM – правильный.

10. Впишите в данную окружность два равных треугольника с взаимно перпендикулярными сторонами.

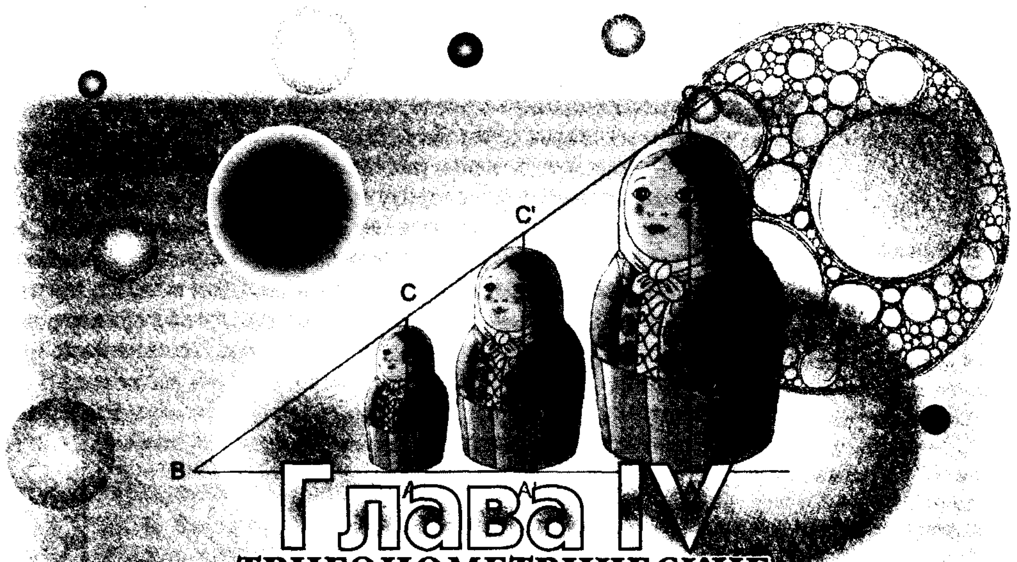
11. Внутри угла ABC отметили точку M. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в точке M и двумя другими вершинами на сторонах угла ABC.

12. Прямая l касается окружности, описанной вокруг треугольника ABC, в точке A. На сторонах AB и AC отметили точки D и E так, что $AD = 6$ см, $EC = 7$ см, $AE = 5$ см, $DE \parallel l$. Найдите длину BD.

13. Через точку M, которая отмечена на продолжении диагонали трапеции, и середину каждого из ее оснований провели две прямые, которые пересекают боковые стороны трапеции в точках H и K. Докажите, что отрезок HK параллелен основаниям трапеции.

14. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили точки M и P соответственно. Каждая из этих точек делит соответствующую сторону в отношении 1 : 2008, если считать от вершины A. В каком отношении точка пересечения отрезков CM и BP делит каждый из этих отрезков?

15. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC выполняется неравенство $AI + BI + CI \geqslant 6r$, где I – инцентр треугольника, а r – радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



Глава IV

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Вы уже знаете, что из равенства и подобия треугольников, используя теорему Пифагора, можно определять расстояния между точками без непосредственного их измерения. Математическая наука владеет и такими приемами, когда по длине некоторых отрезков определяют меры углов и используют их для вычисления длин неизвестных отрезков. Чтобы овладеть этими приемами, надо научиться пользоваться тригонометрическими функциями. К знакомству с некоторыми из них и приглашает эта глава.

§ 26. Соответствие между отношением сторон и мерой острого угла в прямоугольном треугольнике

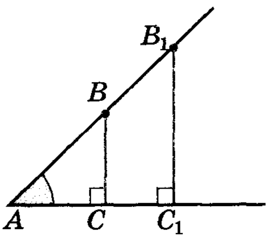
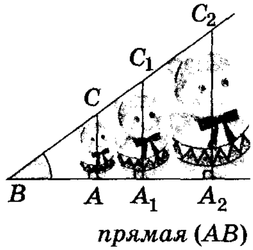


Рис. 4.1

Обозначим на одной из сторон острого угла A две точки B и B_1 (рис. 4.1). Из точек B и B_1 опустим перпендикуляры на другую сторону угла. Получим два прямоугольных треугольника ABC и AB_1C_1.

Эти прямоугольные треугольники подобны, т. к. у них острый угол A – общий. Тогда $\frac{AC}{AB}=\frac{AC_1}{AB_1}$, т. е. отношение катета, прилежащего к углу A, к гипотенузе в этих треугольниках совпадает. Оно *не зависит* от места расположения точек B, B_1 на стороне угла. А вот если изменить меру угла, то изменится и соответствующее отношение катета к гипотенузе в таких треугольниках (рис. 4.2). Таким образом, рассмотренное нами



прямая (AB)

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B}{BC_1}=\ldots$$

$\uparrow$

зависит только от меры угла

отношение сторон прямоугольного треугольника зависит только от меры угла A.

Аналогично можно рассмотреть и другие отношения сторон в подобных прямоугольных треугольниках.

Каждой мере острого угла соответствует определенное отношение сторон в прямоугольном треугольнике. Тогда их можно определить один раз для какого-то прямоугольного треугольника, а потом использовать для рассчетов в других прямоугольных треугольниках, имеющих такой же острый угол.

Еще Евклид в своих «Началах» использовал обозначения вершин и сторон прямоугольного треугольника соответственно как A, B, C и a, b, c (при этом C – вершина прямого угла, c – гипотенуза).

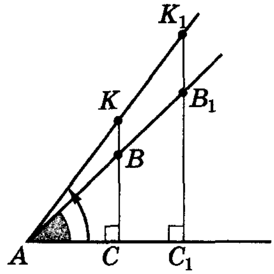


Рис. 4.2

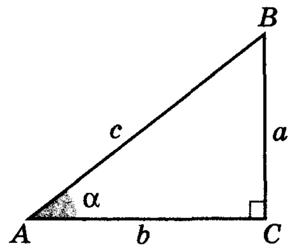


Рис. 4.3

Принято называть и обозначать эти отношения так.

Синусом угла называется отношение противолежащего катета к гипотенузе. Для рисунка 4.3:

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

Косинусом угла называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

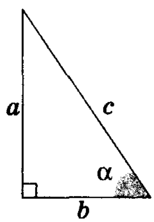
$$\cos A = \frac{b}{c}.$$

Тангенсом угла называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}.$$

Котангенсом угла называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

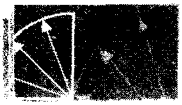
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$$

Такие отношения назвали *тригонометрическими функциями*, вычислили их значения для острых углов (с шагом меньшим 1°) и составили *таблицы тригонометрических функций.*

Первая таблица синусов была создана еще в Древней Греции во II в. до н. э.

Сегодня определить значение тригонометрической функции угла или найти градусную меру угла по значению его тригонометрической функции можно не только пользуясь таблицами тригонометрических функций, но и с помощью калькуляторов и компьютеров.



Еще в V в. индийские математики пользовались тригонометрией для вычислений неизвестных элементов треугольника. Сегодня тригонометрия используется не только для решения треугольников, а еще дает возможность, например, изучать электромагнитные волны. На теории распространения этих волн основывается работа многих приборов, которыми мы пользуемся каждый день, в частности радио, телевизоров, телефонов и т. д.

$0° < \alpha < 90°$
$0 < \sin\alpha < 1$
$0 < \cos\alpha < 1$

Важное замечание. *Синус и косинус угла не могут быть больше единицы*, поскольку гипотенуза прямоугольного треугольника всегда больше его катета.

Практическая работа 33

1. На листе бумаги начертите острый угол α. Вырежьте шаблон этого угла (рис. 4.4).

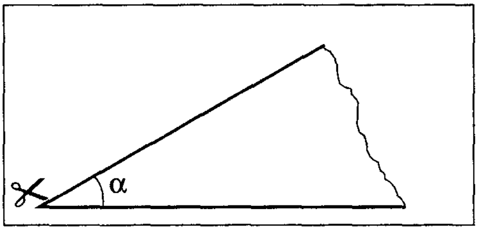


Рис. 4.4

2. С помощью изготовленного шаблона и угольника начертите в тетради несколько подобных прямоугольных треугольников (рис. 4.5).

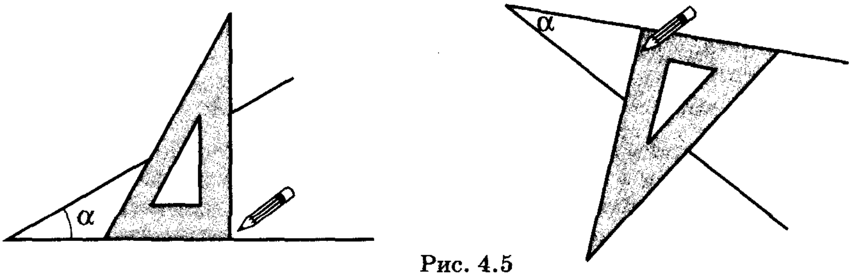


Рис. 4.5

3. Измерьте стороны треугольников и найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ для каждого из треугольников.
4. Сравните значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ для каждого из треугольников. Сделайте выводы.

Для любознательных

Тригонометрия как раздел элементарной математики, изучающий использование тригонометрических функций для решения треугольников, получила свое название от греческих слов «тригон» – *треугольник* и «метрео» – *меряю*, *измеряю*. Первые тригонометрические таблицы составил греческий математик Гиппарх (II в. до н. э.). Они содержали значения синусов углов от 0° до 90° через каждую четверть градуса. Эти таблицы до нас не дошли.

Первые тригонометрические таблицы, которые дошли до нас, помещены в произведении «Альмагес» александрийского ученого **Клавдия Птолемея** (II в.).

Задание 26

1°. По рисунку 4.6 найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла F прямоугольного треугольника FGH с прямым углом G.

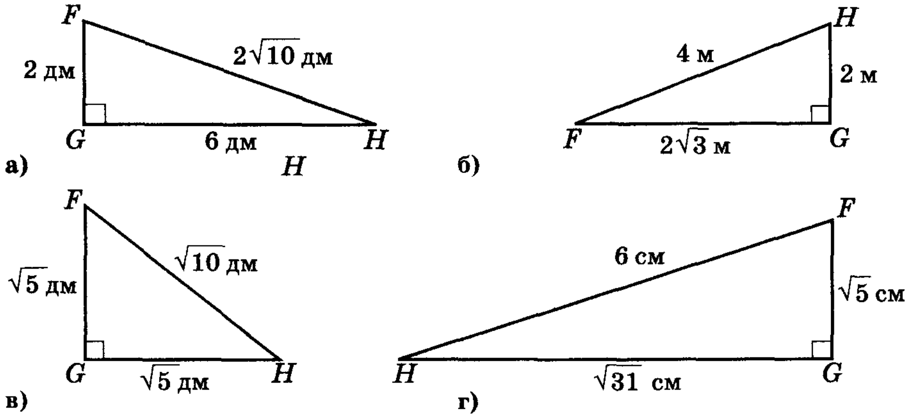


Рис. 4.6

2°. Найдите синус угла A треугольника ABC с прямым углом C, если а) $BC = 4{,}5$ см, $AB = 15$ см; б) $BC = 5{,}4$ см, $AB = 18$ см; в) $BC = 6$ см, $AB = 19$ см; г) $BC = 2{,}52$ см, $AB = 8{,}4$ см.

3°. Найдите косинус угла A треугольника ABC с прямым углом C, если: а) $AC = 10{,}32$ мм, $AB = 17{,}2$ мм; б) $AC = 10{,}32$ см, $AB = 17{,}2$ см; в) $AC = 10$ см, $AB = 17$ см; г) $AC = 6{,}192$ м, $AB = 10{,}32$ м.

4°. Найдите тангенс и котангенс углов A и B треугольника ABC с прямым углом C, если а) $BC = 4{,}3$ см, $AC = 10{,}75$ см; б) $BC = 21{,}5$ дм, $AC = 53{,}75$ дм; в) $BC = 10{,}75$ м, $AC = 4{,}3$ м.

5. В треугольнике ABC угол C прямой. Найдите: а) AC, если $AB = 4$ см, $\cos A = 0{,}4$; б) BC, если $AC = 24$ мм, $\operatorname{tg} A = 0{,}5$; в) AB, если $AC = 9$ мм, $\sin B = \frac{3}{4}$; г) AC, если $BC = 2$ м, $\operatorname{ctg} B = 4$.

6. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника соответственно равны 3 см и 5 см. Найдите: а) синус острого угла, который лежит напротив большего катета; б) косинус острого угла, прилежащего к меньшему катету; в) тангенс острого угла, который лежит напротив большего катета.

7. В прямоугольном треугольнике катеты равны 8 см и 15 см. Найдите: а) тангенс острого угла, который лежит напротив большего катета; б) косинус острого угла, прилежащего к меньшему катету; в) синус острого угла, прилежащего к большему катету.

8. Существует ли угол: а) синус которого равен: 0,5; 0,004; 1,5; б) косинус которого равен: 5,009; 0,4; 0,007; в) тангенс которого равен: 0,9; 5,2; 23; г) котангенс которого равен: 9; 0,52; 2,3?

9. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Найдите отношение катетов AC и BC, если: а) $\operatorname{tg} A = 3$; б) $\operatorname{ctg} A = 1{,}5$.

10. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Найдите отношение катета BC к гипотенузе AB, если: а) $2\sin A = 1$; б) $3\cos B = 1$.

11*. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) выполняется равенство $2\sin A = 3\sin B$. Сравните катеты.

12*. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) выполняется равенство $3\sin A = 4\sin B$. Найдите отношение катета AC к катету CB.

13.** Найдите гипотенузу AB треугольника ABC, если: а) катет $AC = 6$ см и $3\sin A = 4\sin B$; б) катет $AC = 16$ см и $3\cos A = 4\cos B$.

§ 27. Построение угла по его тригонометрическим функциям. Изменение значения тригонометрических функций на интервале [0°; 90°]

Рассмотрим построение угла по значению его тригонометрических функций на конкретных примерах.

Пример 1. **Построить угол, синус которого равен $\frac{3}{5}$.**

Используя произвольный раствор циркуля l, построим два отрезка $a = 3l$ и $c = 5l$. Если теперь построить прямоугольный треугольник по катету a и гипотенузе c (рис. 4.7), то угол, противолежащий катету a, будет искомым. Почему?

Знаменитый древнегреческий астроном Клавдий Птолемей (II в.) составил таблицу значений тригонометрических функций и использовал ее для расчета траекторий движения небесных тел. Его труд «Математическое построение» содержал математическую модель движения небесных тел – известную *геоцентрическую модель Вселенной Птолемея* (центр Вселенной – Земля, а звезды и планеты вращаются вокруг нее).

Пример 2. **Построить угол, косинус которого равен $\frac{2}{3}$.**

Используя произвольный раствор циркуля l, построим два отрезка $b = 2l$ и $c = 3l$. Если теперь построить прямоугольный треугольник по катету b и гипотенузе c (рис. 4.8), то угол, прилежащий к катету b, будет искомым. Почему?

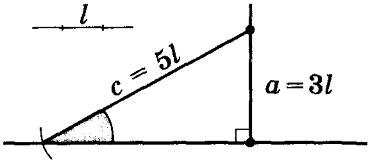


Рис. 4.7

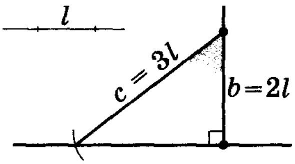


Рис. 4.8

Пример 3. **Построить угол, тангенс которого равен $\frac{5}{4}$.**

Используя произвольный раствор циркуля l, построим два отрезка $a = 5l$ и $b = 4l$. Если теперь построить прямоугольный треугольник по катетам a и b (рис. 4.9), то угол, противолежащий катету a, будет искомым. Почему?

Пример 4. **Построить угол, котангенс которого равен $\frac{4}{7}$.**

Используя произвольный раствор циркуля l, построим два отрезка $a = 4l$ и $b = 7l$. Если теперь построить прямоугольный треугольник по катетам a и b (рис. 4.10), то угол, противолежащий катету b, будет искомым. Почему?

Математическую мысль породила потребность разума построить модель окружающего мира.

Р. Том

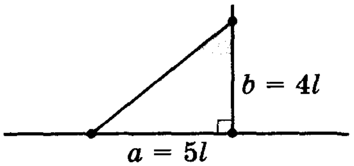


Рис. 4.9

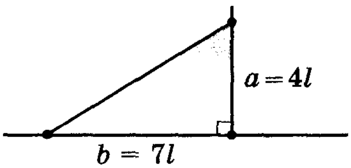
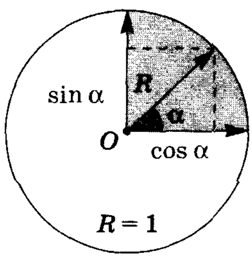


Рис. 4.10



$0 \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$:

Рассмотрим теперь четверть единичной окружности, ограниченной ЕДИНИЧНЫМИ радиусами OB_0, OB_1 и дугой B_0BB_1 (рис. 4.11-а).

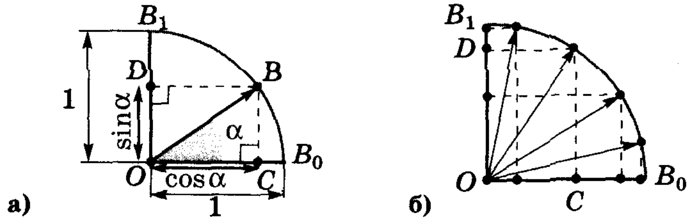
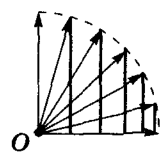
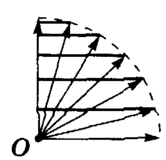


Рис. 4.11



при α↑ *sin* α↑
от 0 *до* 1;



при α↑ *cos* α↓
от 1 *до* 0.

sin 0° = 0
cos 0° = 1

sin 90° = 1
cos 90° = 0

Из точки B этой дуги проведем перпендикуляры BC и BD к радиусам OB_0 и OB_1 соответственно (рис. 4.11-а). Угол между единичными радиусами OB и OB_0 обозначим через α. Тогда $\cos \alpha = OC : 1 = OC$ и $\sin \alpha = OD : 1 = OD$, т. е. *значения cos α и sin α ЧИСЛЕННО равны проекциям точки B* на граничные радиусы OB_0 и OB_1 соответственно.

Представим себе, что точка B движется по нашей дуге от положения B_0 до положения B_1 (рис. 4.11-б). С увеличением угла уменьшается горизонтальная проекция OC и увеличивается вертикальная проекция OD. Тогда с увеличением угла α от 0° до 90° значение cos α уменьшается, а sin α – увеличивается.

Если угол α очень маленький, то OB почти совпадает с OB_0. Тогда значение длины горизонтальной проекции OC, а значит и cos α, мало отличается от 1, а значения вертикальной проекции OD и sin α – близки к 0.

Если угол α принимает значения, мало отличающиеся от 90°, то OB почти совпадает с OB_1. Тогда значение длины вертикальной проекции OD, а значит и sin α, мало отличается от 1, а значения горизонтальной проекции OC и cos α – близки к 0.

Хотя при значениях $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$ соответствующий прямоугольный треугольник не существует, понятно, почему считают, что при $\alpha = 0^\circ$ $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, а при $\alpha = 90^\circ$, наоборот, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$.

При увеличении угла от 0° до 90° синус этого угла увеличивается от 0 до 1, а косинус этого угла – уменьшается от 1 до 0.

Практическая работа 34

1. Постройте полуокружность с диаметром AC. На этой полуокружности отметьте точки B и P, соедините их с концами диаметра. Будут ли треугольники ABC и APC прямоугольными? Почему?
2. Измерьте длины сторон этих треугольников и вычислите синусы и косинусы углов BAC и PAC.
3. Сравните: а) углы BAC и PAC; б) значения синусов этих углов. Сформулируйте вывод.
4. Сравните значения косинусов этих углов. Сформулируйте вывод.

Практическая работа 35

1. Постройте прямой угол O. На одной из его сторон обозначьте точки B и C, а на другой – точку A. Соедините точки B и C с точкой A.
2. Измерьте катеты этих треугольников и посчитайте для углов BAO и CAO значения тангенсов и котангенсов.
3. Сравните: **а)** углы BAO и CAO; **б)** значения их тангенсов. Сделайте вывод.
4. Сравните значения котангенсов этих углов. Сделайте вывод.

Практическая работа 36*

1. Постройте окружность радиусом ET. Используя транспортир, поделите ее на 6 равных дуг и соедините точки раздела с концами диаметра. Прямоугольны ли образованные треугольники? Почему?
2. Измерьте стороны каждого из образованных треугольников и вычислите (с точностью до сотых) синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы углов с вершинами в точке T. Заполните таблицу значений тригонометрических функций углов от 15° до 75°.

	15°	30°	45°	60°	75°
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\operatorname{tg}\alpha$					
$\operatorname{ctg}\alpha$					

Задание 27

1. Постройте угол α, если его синус равен: **а)** $\frac{2}{3}$; **б)** $\frac{1}{5}$; **в)** 0,3.
2. Постройте угол α, если его косинус равен: **а)** $\frac{3}{5}$; **б)** $\frac{3}{4}$; **в)** 0,5.
3. Постройте угол α, если его тангенс равен: **а)** 2; **б)** 0,9; **в)** $\frac{4}{7}$.
4. Постройте угол α, если его котангенс равен: **а)** $\frac{3}{5}$; **б)** 3; **в)** 0,4.

5**. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $3\sin A = 4\sin B$. Постройте треугольник, подобный треугольнику ABC.

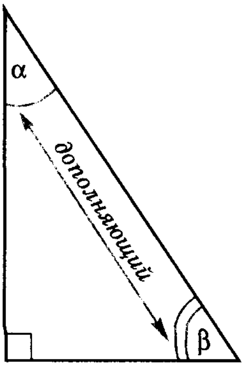
6*. Сравните: **а)** $\sin 12°$ и $\sin 34°$; **б)** $\sin 56°$ и $\sin 1°$; **в)** $\cos 8{,}9°$ и $\cos 89°$; **г)** $\cos 90°$ и $\cos 0{,}9°$; **д)** $\sin 0°$ и $\cos 0°$; **е)** $\sin 90°$ и $\cos 90°$; **ж)** $\sin 0°$ и $\cos 90°$; **з)** $\sin 90°$ и $\cos 0°$.

7**. Сравните: **а)** $\operatorname{tg} 32°$ и $\operatorname{tg} 64°$; **б)** $\operatorname{tg} 76°$ и $\operatorname{tg} 81°$; **в)** $\operatorname{ctg} 9{,}3°$ и $\operatorname{ctg} 33°$; **г)** $\operatorname{ctg} 40°$ и $\operatorname{ctg} 49°$.

8*. Сравните острые углы α и β, если: **а)** $\sin\alpha > \sin\beta$; **б)** $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\beta = \frac{3}{4}$; **в)** $\sin\alpha = 0{,}63$, $\sin\beta = 0{,}63$; **г)** $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$; **д)** $\cos\alpha = 0{,}5$, $\cos\beta = 0{,}3$; **е)** $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$.

9**. Сравните острые углы α и β, если: **а)** $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$; **б)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{2}$; **в)** $\operatorname{tg}\alpha = 3{,}4$, $\operatorname{tg}\beta = 3{,}4$; **г)** $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{ctg}\beta$; **д)** $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}4$, $\operatorname{ctg}\beta = 0{,}7$; **е)** $\operatorname{ctg}\alpha = 1$, $\operatorname{ctg}\beta = 1$.

§ 28. Соотношение между тригонометрическими функциями дополняющих углов



$\alpha + \beta = 90°$

дополняющие

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$
$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$
$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}(90° - \alpha)$
$\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}(90° - \alpha)$

Дополняющими называются углы, которые в сумме составляют 90° (дополняют друг друга до 90°).

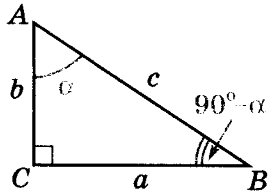


Рис. 4.12

Такими углами являются, например, острые углы любого прямоугольного треугольника. В треугольнике ABC (рис. 4.12) углы A и B – дополняющие:

$$\angle A + \angle B = 90°.$$

Обозначим угол A через α, тогда $\angle B = 90° - \alpha$. Запишем тригонометрические функции углов A и B:

1) $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \cos B = \cos(90° - \alpha)$ – **синус данного угла равен косинусу дополняющего угла;**

2) $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \sin B = \sin(90° - \alpha)$ – **косинус данного угла равен синусу дополняющего угла;**

3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b} = \mathrm{ctg}\,B = \mathrm{ctg}\,(90° - \alpha)$ – **тангенс данного угла равен котангенсу дополняющего угла;**

4) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{b}{a} = \mathrm{tg}\,B = \mathrm{tg}\,(90° - \alpha)$ – **котангенс данного угла равен тангенсу дополняющего угла.**

Задание 28

1°. Углы α и β – острые углы прямоугольного треугольника. Найдите значения:
а) $\sin\alpha$, если $\cos\beta = \dfrac{5}{13}$; б) $\cos\alpha$, если $\sin\beta = 0{,}8$; в) $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\mathrm{ctg}\,\beta = 0{,}7$.

2. Упростите выражение: **а)** $2\sin(90° - \alpha) - \cos\alpha$; б) $\cos(90° - \alpha) + \sin\alpha$; в) $\mathrm{tg}(90° - \beta) + 3\mathrm{ctg}\,\beta$; **г)** $\mathrm{ctg}(90° - \beta) - \mathrm{tg}\,\beta$.

3. Упростите выражение: **а)** $2\sin(90° - \beta) - \sin\beta + \cos\beta + \cos(90° - \beta)$; б) $\cos(90° - \alpha) + \cos\alpha + \sin\alpha - \sin(90° - \alpha)$; **в)** $\mathrm{tg}(90° - \beta) + 3\mathrm{ctg}(90° - \alpha) + 2(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)$.

4*. Для двух острых углов α и β выполняется равенство: **а)** $\sin(90° - \beta) = \sin(90° - \alpha)$; б) $\cos(90° - \beta) = \sin\alpha$; в) $\mathrm{tg}(90° - \beta) = \mathrm{ctg}\,\alpha$; **г)** $\mathrm{ctg}(90° - \beta) = \mathrm{tg}\,\alpha$. Равны ли углы α и β?

5*. Найдите сумму двух острых углов α и β, для которых выполняется равенство: **а)** $\sin(90° - \beta) = \sin\alpha$; б) $\cos\beta = \sin\alpha$; **в)** $\mathrm{tg}(90° - \beta) = \mathrm{tg}\,\alpha$; г) $\mathrm{ctg}\,\beta = \mathrm{tg}\,\alpha$.

6*. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если для двух его острых углов α и β выполняется равенство: **а)** $\cos\beta = \sin(90° - \alpha)$; б) $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}(90° - \beta)$.

7.** В треугольнике ABC углы α и β – острые. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный, если: **а)** $\cos\beta = \sin\alpha$; б) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta$.

Для любознательных

Знаки для обозначения тригонометрических функций sin, cos и tg ввел Леонард Эйлер (в 1748 г. – sin и cos; в 1753 г. – tg).

§ 29. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC со сторонами a, b, c и острым углом A, меру которого обозначим как α (рис. 4.13). Запишем значения тригонометрических функций этого угла через длины сторон треугольника ABC:

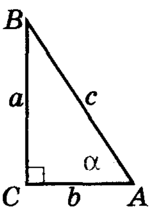


Рис. 4.13

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

(1) Разделим числитель и знаменатель последних двух дробей на c:

$$\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c};\ \frac{b}{a} = \frac{b:c}{a:c}.$$

Из последнего получаем соотношения:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$$

(2) По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$. Разделив это равенство на c^2, получим:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,\ \text{т. е. } (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Последнее равенство – *это тригонометрический эквивалент теоремы Пифагора*, его еще называют *основным тригонометрическим тождеством*.

На этом соотношении базируется вся тригонометрия. Можно сказать, что **истоком тригонометрии является теорема Пифагора**.

(3) Если разделить равенство $a^2 + b^2 = c^2$ на b^2, получим:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2,\ \text{или } (\operatorname{tg}\alpha)^2 + 1 = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}.$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Если разделить равенство $a^2 + b^2 = c^2$ на a^2, получим:

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2,\ \text{или } (\operatorname{ctg}\alpha)^2 + 1 = \frac{1}{(\sin\alpha)^2}.$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Для любознательных

1. В окружности провели диаметр и перпендикулярную к нему хорду. Докажите, что один из отрезков, на которые хорда делит диаметр, будет больше половины хорды, а второй – меньше.

2. Параллелограмм, один из острых углов которого равен α, описан вокруг окружности радиуса r. Найдите площадь этого параллелограмма. При каком значении угла α эта площадь будет наименьшей? А наибольшей?

Задание 29

1. Вычислите значение $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если: **а)** $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; **б)** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; **в)** $\cos\alpha = 0{,}8$; **г)** $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; **д)** $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; **е)** $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

2. Вычислите значение $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если: **а)** $\sin\alpha = 0{,}8$; **б)** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; **в)** $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; **г)** $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; **д)** $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; **е)** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

3*. Вычислите значение $\operatorname{ctg}\alpha$, $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, если: **а)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; **б)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$; **в)** $\operatorname{tg}\alpha = 1$; **г)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$; **д)** $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

4*. Вычислите значение $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если: **а)** $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; **б)** $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$; **в)** $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$; **г)** $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{15}$; **д)** $\operatorname{ctg}\alpha = 3$.

5*. Упростите выражение: **а)** $1 - \cos^2\alpha$; **б)** $1 - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$; **в)** $(1 - \sin\alpha) \times (1 + \sin\alpha)$; **г)** $(\operatorname{tg}^2\alpha + 1)\cos^2\alpha$.

6*. Упростите выражение **а)** $\cos\alpha - \cos\alpha\sin^2\alpha$; **б)** $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$; **в)** $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$; **г)** $\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$; **д)** $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

7**. Упростите выражение: **а)** $1 - \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$; **б)** $1 - \operatorname{ctg}^2\alpha(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$; **в)** $1 - (\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)$; **г)** $\sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

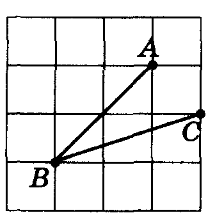
8**. Упростите выражение: **а)** $\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) - \left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$;

б) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}$; **в)** $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 - (1 - \operatorname{tg}\alpha)^2}$.

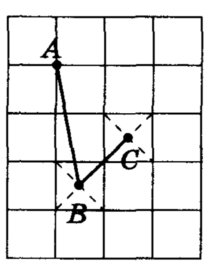
Для любознательных

Найдите значение тригонометрических функций угла ABC по рисунку:

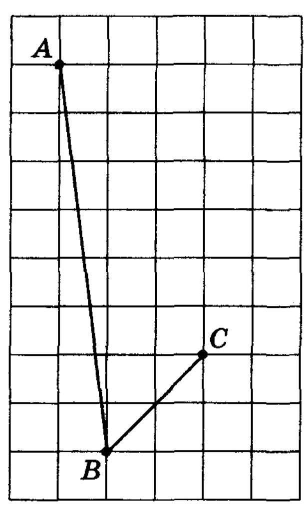
а)



б)



в)



§ 30. Значения тригонометрических функций некоторых углов

Найдем значение тригонометрических функций для углов градусной меры: 30°, 45° и 60°.

1. Для угла меры 45°.

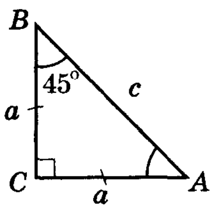
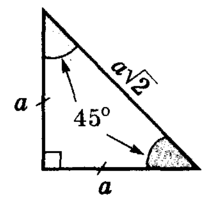


Рис. 4.14

Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, катеты которого равны a (рис. 4.14). Градусные меры его острых углов одинаковые и составляют 45°.

По теореме Пифагора квадрат гипотенузы этого треугольника $c^2 = 2a^2$. Тогда

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ а } \operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = \frac{a}{a} = 1.$$



$\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1$

2. Для углов меры 30° и 60°.

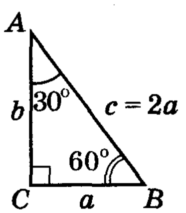


Рис. 4.15

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с острым углом A, градусной меры 30° (рис. 4.15). Его второй острый угол является дополняющим, равен 60°.

Катет, лежащий напротив угла в 30°, равен половине гипотенузы:

$$a = \frac{c}{2}.$$

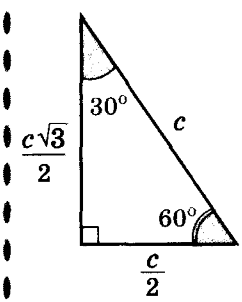
Второй катет найдем по теореме Пифагора:

$$b = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда: $\sin 30° = \cos 60° = \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{2}c : c = \dfrac{1}{2}$;

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{b}{c} = \frac{c\sqrt{3}}{2} : c = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{ctg} 60° = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \ \operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}.$$



$\sin 30° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

$\sin 60° = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{ctg} 60° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

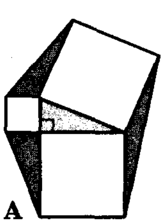
$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$

Для дальнейшего важно запомнить полученные значения тригонометрических функций.

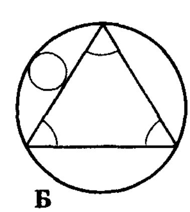
Для любознательных

1. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты. Их вершины соединили так, как показано на рисунке А. Докажите, что закрашенные треугольники являются равновеликими.

2. Треугольник на рисунке Б – правильный. Найдите отношение радиусов изображенных на этом рисунке окружностей.



А



Б

Составим таблицу значений тригонометрических функций для углов в 30°, 45° и 60°.

корень квадратный из номера столбца разделить на 2

Функция	Угол		
	30°	45°	60°
Синус	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Косинус	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Тангенс	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
Котангенс	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Замечание.

- Главное – запомнить первую строку таблицы (см. «правило» на полях).
- Вторую строку легко записать как значения тригонометрических функций дополняющих углов (числа первого и последнего столбиков меняются местами, а во втором столбике – повторяются).
- Чтобы получить значения тангенсов – делим числа первой строки на соответствующие числа второй строки.
- Чтобы получить значения котангенсов – записываем числа, обратные соответствующим значениям предыдущей строки (строки тангенсов).

$\frac{1}{2}=0{,}5$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}71$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}87$

$\sqrt{3}\approx 1{,}73$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}58$

Значение синуса 18°

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с углом при основании 72° (рис. 4.16).

1) Проведем биссектрису AK угла A. Тогда:

$$\angle KAC = \angle BAK = 72° : 2 = 36° = \angle B;$$
$$\angle AKC = 180° - 72° - 36° = 72° = \angle C.$$

2) Примем длину стороны AB за 1 и обозначим длину отрезка BK как x (рис. 4.16). Из равнобедренных треугольников KAC ($\angle AKC = \angle C$) и AKB ($\angle BAK = \angle B$) получим: $AC = AK = BK = x$.

$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\approx 0{,}31$

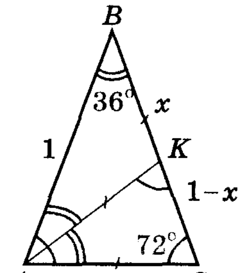


Рис. 4.16

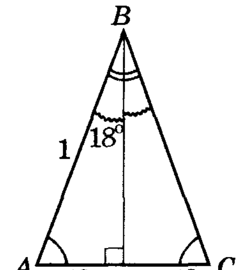


Рис. 4.17

3) AK – биссектриса треугольника ABC, тогда $\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{x}$.

Получаем квадратное уравнение для x: $x^2 + x - 1 = 0$.

Отсюда $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (т. к. $x > 0$).

4) Проведем высоту BD (рис. 4.17). В равнобедренном треугольнике ABC она будет и биссектрисой, и медианой. Тогда $\angle ABD = 18°$, $AD = DC = \dfrac{x}{2}$ и (из прямоугольного треугольника ADB) получим:

$$\sin 18° = \frac{x}{2}:1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\approx 0{,}3090.$$

В «Альмагесе» Птолемея (II в.), содержащем тригонометрические таблицы, впервые встречаются знаки для обозначения минут (′) и секунд (″). Знак градуса (°) появился позднее – в XVI в.

Задание 30

1°. По рисунку 4.18 найдите x.

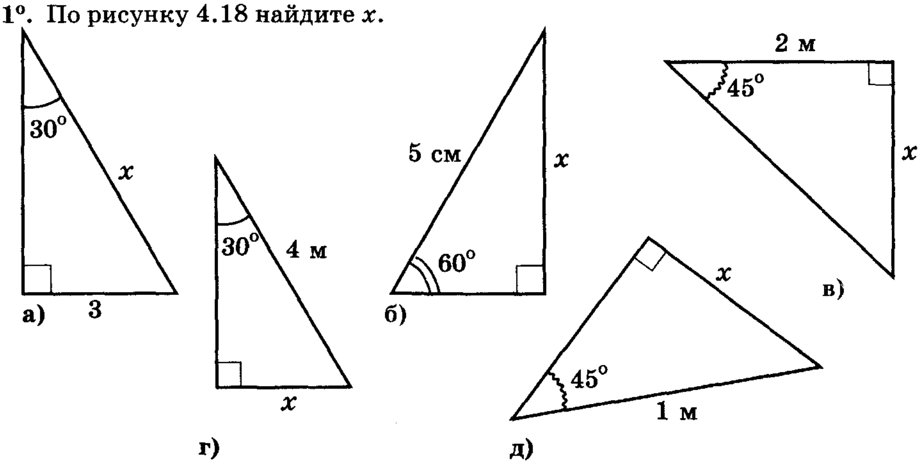
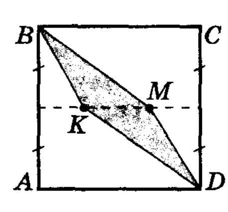


Рис. 4.18

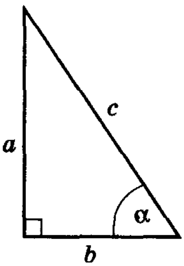
2. Найдите значение выражения: а) $2\cos 60° + \sqrt{3}\cos 30°$; б) $5\sin 30° - \operatorname{ctg} 45°$; в) $3\operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 60°$; г) $12\sin 60° \cdot \cos 60°$.
3*. Найдите значение выражения: а) $\operatorname{tg} 60° + 2\cos 30°$; б) $\cos 30° \cdot \operatorname{ctg} 30° - \operatorname{ctg} 45°$; в) $3\cos 60° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 60°$; г) $\operatorname{tg} 60° \cdot \sin 60° - \operatorname{ctg} 60° \cdot \cos 30°$.
4*. Найдите значение выражения: а) $2\operatorname{tg}^2 60° + 4\cos^2 30°$; б) $\cos 30° \cdot \operatorname{ctg}^3 30° - \operatorname{ctg} 45°$; в) $3\cos^2 60° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg}^2 60°$; г) $\operatorname{tg}^3 60° \cdot \sin 60° - \operatorname{ctg}^2 60° \times \sin 30°$.
5*. Диагональ параллелограмма равна $\sqrt{3}$ см и перпендикулярна к его стороне. Найдите стороны параллелограмма, если один из его углов равен 60°.

Для любознательных

В квадрате $ABCD$ со стороной 6 см точки K и M лежат на отрезке, который соединяет середины противоположных сторон этого квадрата (см. рис.). Если соединить точки K и M с вершинами B и D так, как показано на рисунке, квадрат разделится на три части. При какой длине отрезка KM эти три части будут равновеликими?



§ 31. Решение прямоугольных треугольников



$a^2+b^2=c^2$

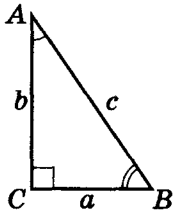


Рис. 4.19

Обозначим вершины и стороны произвольного прямоугольного треугольника так, как показано на рисунке 4.19.

По определению тригонометрических функций:

$$\sin A=\frac{a}{c}=\cos B;\ \cos A=\frac{b}{c}=\sin B;$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\operatorname{ctg} B;\ \operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}=\operatorname{tg} B.$$

Тогда:

$$a=c\sin A=c\cos B=b\operatorname{tg} A=b\operatorname{ctg} B;$$

$$b=c\sin B=c\cos A=a\operatorname{tg} B=a\operatorname{ctg} A;$$

$$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\cos B}=\frac{b}{\sin B}=\frac{b}{\cos A}.$$

$a=c\sin A$
$a=c\cos B$
$a=b\operatorname{tg} A$
$a=b\operatorname{ctg} B$

Таким образом, в прямоугольном треугольнике:

- **катет равен гипотенузе, умноженной на**
  или – *синус противолежащего угла*
  – *косинус прилежащего угла;*
- **катет равен второму катету, умноженному на**
  или – *тангенс противолежащего угла*
  – *котангенс прилежащего угла;*
- **гипотенуза равна катету, деленному на**
  или – *синус противолежащего угла*
  – *косинус прилежащего угла.*

$c=\frac{a}{\sin A}$

$c=\frac{a}{\cos B}$

Полученные соотношения вместе с теоремой Пифагора дают возможность *решать прямоугольные треугольники*, т. е. по определенным элементам треугольника находить все иные его элементы.

Замечание. При решении прямоугольных треугольников не забывайте о египетских треугольниках, стороны которых относятся как 3 : 4 : 5.

Для любознательных

1. В угол градусной меры 2α вписали окружность радиуса R. К этой окружности провели касательную, перпендикулярную к биссектрисе угла. Найдите периметр образовавшегося треугольника.

2. К двум окружностям, касающимся друг друга внешним образом, провели две общие касательные, которые пересекаются под углом α. Радиус большей окружности равен R. Найдите радиус меньшей окружности.

Пример 1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 15 см, а синус одного из острых углов равен $\frac{4}{5}$ (рис. 4.20). Найдите длины катетов треугольника.

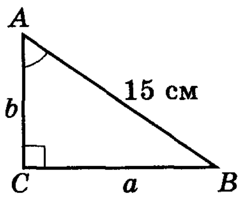


Рис. 4.20

Дано: $\angle C = 90°$; $\sin A = \frac{4}{5}$; $c = 15$ см.
Найти: a и b.

---

1) $a = c \sin A = 15 \cdot \frac{4}{5} = 12$ (см);
2) $c = 3 \cdot 5$; $a = 3 \cdot 4$, тогда $\triangle ABC$ – египетский и $b = 3 \cdot 3 = 9$ (см).

Ответ: 12 см и 9 см.

Греки ценили ясность, порядок и точность. И в геометрии они, как правило, основывали свои построения на том же идеале красоты и гармонии, которого так строго придерживались в изобразительном искусстве.

Ф. Кимпан

Пример 2. Катеты прямоугольного треугольника равны 2 см и 1 см (рис. 4.21). Найдите его гипотенузу и тангенсы острых углов.

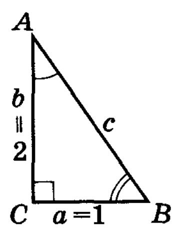


Рис. 4.21

Дано: $\angle C = 90°$; $a = 1$ см; $b = 2$ см.
Найти: c; $\operatorname{tg} A$; $\operatorname{tg} B$.

---

1) $\angle C = 90°$; $a = 1$ см; $b = 2$ см $\rightarrow$
$\rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$ (см);
2) $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} A} = 2$.

Ответ: гипотенуза равна $\sqrt{5}$ см; тангенсы острых углов, лежащих напротив катетов длины 1 см и 2 см, равны $\frac{1}{2}$ и 2 соответственно.

Пример 3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 м, а градусная мера одного из острых углов равна 70°36′ (рис. 4.22). Найдите противолежащий данному углу катет.

Геометр всегда будет художником, который формирует окончательный образ строения.

Н. Жуковский

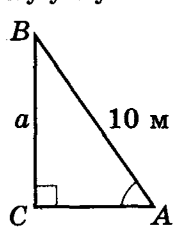


Рис. 4.22

Дано: $c = 10$ м; $\angle A = 70°36'$.
Найти: a.

---

1) $a = c \sin A = 10 \sin 70°36'$;
2) для вычисления значения $\sin 70°36'$ воспользуемся фрагментом таблицы синусов из **«Четырехзначных математических таблиц» В.М. Брадиса**.

Для любознательных

1. Расстояние между центрами двух окружностей, касающихся друг друга внутренним образом, равно d. Касательная, проведенная из центра большей окружности к меньшей окружности, образует с линией центров угол α. Найдите радиус большей окружности.

2. Хорда длины a проведена из конца диаметра окружности и образует с этим диаметром угол α. Через второй конец хорды провели касательную к данной окружности и продолжили диаметр до пересечения с этой касательной. Найдите длину отрезка касательной от точки касания до указанной точки пересечения.

Синусы														
A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
70°	0,9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9144	9449	0,9455	19°	*1*	*2*	*3*
71°	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18°	*1*	*2*	*3*
72°	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9553	9563	17°	*1*	*2*	*3*
73°	9563	9568	9573	9578	9583	9538	9593	9593	9603	9608	9613	16′	*1*	*2*	*2*
74°	9313	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15′	*1*	*2*	*2*
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	A	1′	2′	3′
Косинусы															

Находим по таблице $\sin\alpha$:
1) число градусов в левом столбике;
2) число минут в верхней строке;
3) искомое число – на пересечении.

Находим по таблице $\cos\alpha$:
1) число градусов в правом столбике;
2) число минут в нижней строке;
3) искомое число – на пересечении.

Поправки для синусов:
– в верхней строке;
– при $\alpha\uparrow$ $\sin\alpha\uparrow$.

Поправки для косинусов:
– в нижней строке;
– при $\alpha\uparrow$ $\cos\alpha\downarrow$.

Находим число градусов в крайнем левом столбике таблицы, число минут – в верхней строке таблицы. На пересечении соответствующих строки и столбика получаем искомое число $\sin 70°36' \approx 0{,}9432$.

3) $a \approx 10 \cdot 0{,}9432 \approx 9{,}432$ (м).

Ответ: ~9,432 м.

Пример 4. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 100 м, а один из его острых углов имеет градусную меру 70°37′ (рис. 4.23). Найдите катет, противолежащий этому углу.

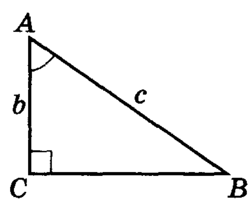


Рис. 4.23

Дано: $c = 100$ м; $\angle A = 70°37'$.
Найти: a.

1) $a = c\sin 70°37'$. Для определения значения $\sin 70°37'$ воспользуемся приведенным выше фрагментом таблицы В. Брадиса.

• Найдем по этой таблице *значение синуса угла, ближайшего к данному*: $\sin 70°36' \approx 0{,}9432$ (см. пример 3).

• *Учтем, что мера нашего угла на 1′ больше 70°36′.* В столбиках поправок (правая сторона таблицы) находим поправку для 1′: 0,0001. Т. к. при увеличении угла от 0° до 90° синус его увеличивается, то:
$\sin 70°37' \approx 0{,}9432 + 0{,}0001 \approx 0{,}9433$.

2) $a = c\sin 70°37' \approx 100 \cdot 0{,}9433 \approx 94{,}33 \approx 94{,}3$ (м).

Ответ: ~94,33 м.

Для любознательных

1. В прямоугольный треугольник с острым углом α вписана окружность радиуса r. С центром в вершине этого угла проведена окружность, которая касается к катету, противолежащему данному углу. Найдите длину отрезка, отсекаемого последней окружностью от гипотенузы треугольника.

2. Большее основание трапеции является диаметром описанной вокруг этой трапеции окружности радиуса R. Один из острых углов трапеции равен α. Найдите площадь трапеции.

3. В равнобедренный треугольник с углом α при основании вписали окружность и соединили точки касания. Периметр образовавшегося треугольника равен m. Найдите периметр заданного треугольника.

П р и м е р 5. В прямоугольном треугольнике острый угол равен $18°50'$, а прилежащий к нему катет имеет длину 10 м. Найдите гипотенузу.

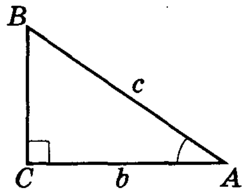


Рис. 4.24

Дано: $b = 10$ м; $\angle A = 18°50'$.
Найти: c.

1) $c = b : \cos 18°50'$. Для определения значения $\cos 18°50'$ воспользуемся приведенным ранее фрагментом таблицы В. Брадиса.

• Найдем по этой таблице *значение косинуса угла, ближайшего к заданному*, т. е. $18°48'$. Ищем число градусов в крайнем правом столбике таблицы, число минут – в нижней строке таблицы. На пересечении соответствующих строки и столбика получаем искомое число: $\cos 18°48' \approx 0{,}9466$.

а – точное число: $a = \underline{3{,}741}$
правильные

• *Учтем, что мера нашего угла на 2′ больше 18°48′.*

В столбиках поправок находим поправку для $2'$: 0,0002. Т.к. при увеличении угла от 0° до 90° косинус его уменьшается, то:

$\cos 18°50' \approx 0{,}9466 - 0{,}0002 \approx 0{,}9464$.

2) $c = 10 : 0{,}9464 \approx 10{,}57 \approx 10{,}6$ (м).

Ответ: ~10,6 м.

а – приближенное число: $a \approx \underline{3{,}74}1$
правильные
сомнительная

З а м е ч а н и е. Ответ к последнему примеру был округлен – оставлены три значащие цифры. И это было сделано не случайно. Ми делили точное число 10 на приближенное число 0,9464. Напомним, что при делении и умножении вычисления проводят до наибольшего числа правильных значащих цифр. В приближенном числе последняя цифра – сомнительная. Тогда приближенное число 0,9464 имеет три правильных значащих цифры, и результат надо было округлить именно до трех значащих цифр.

Приближенные вычисления проводим:

$\boxed{\pm}$ до наименьшего из правильных разрядов;

$\boxed{\times \atop :}$ до наибольшего числа правильных значащих цифр.

ПРАВИЛА РАБОТЫ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

Приближенные вычисления выполняем:

– сложение и вычитание – до наименьшего правильного разряда;

– умножение и деление – до наибольшего числа правильных значащих цифр;

– в процессе вычисления сохраняем на один разряд (значащую цифру) больше, чем это требуется для записи результата.

В процессе вычисления сохраняем на один разряд (значащую цифру) больше, чем это требуется для записи результата.

Например:

1) если $a \approx 2{,}3628$ и $b \approx 17{,}25$ (a и b – приближенные), то $a + b \approx 2{,}36 + 17{,}25 \approx 19{,}61 \approx 19{,}6$;

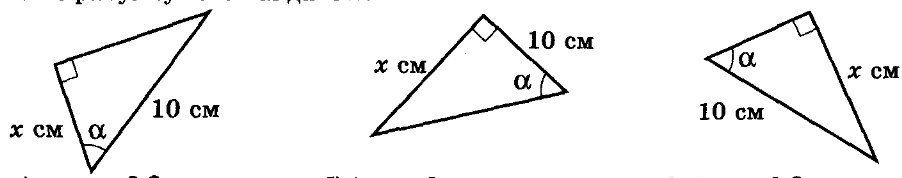
2) если $a \approx 2{,}3628$ и $b = 17{,}25$ (a – приближенное, b – точное), то $a + b \approx 2{,}3628 + 17{,}25 \approx 19{,}6128 \approx 19{,}612$;

3) если $a \approx 0{,}128359$ и $b \approx 2{,}41$ (a и b – приближенные), то $a \cdot b \approx 0{,}128 \cdot 2{,}41 \approx 0{,}308 \approx 0{,}31$;

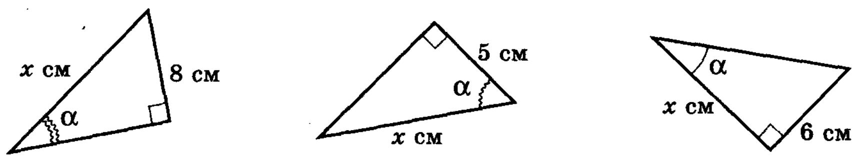
4) если $a \approx 0{,}128359$ и $b = 2{,}41$ (a – приближенное, b – точное), то $a \cdot b \approx 0{,}128359 \cdot 2{,}41 \approx 0{,}309345 \approx 0{,}30934$.

Задание 31

1°. По рисунку 4.25 найдите x.



а) $\cos\alpha = 0{,}3$; б) $\operatorname{tg}\alpha = 2$; в) $\sin\alpha = 0{,}8$;



г) $\sin\alpha = 0{,}4$; д) $\cos\alpha = 0{,}4$; е) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}5$.

Рис. 4.25

2°. Найдите неизвестные стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), если:
а) $AC = 3$ см, $\angle A = 45°$; б) $BC = 5$ см, $\sin A = \frac{2}{3}$; в) $AC = 8$ см, $\operatorname{tg} B = \sqrt{3}$;
г) $AB = 12$ см, $\angle B = 30°$; д) $BC = 6$ см, $\cos B = \frac{1}{3}$; е) $AB = 8$ см, $\operatorname{tg} B = 1$.

3. В параллелограмме диагональ, равная 45 см, перпендикулярна к стороне. Найдите стороны параллелограмма, если котангенс его острого угла равен 1,6.

4°. Могут ли быть длинами сторон одного прямоугольного треугольника тройки чисел: а) 9; 12; 15; б) 3,75; 5; 6,25? Как называются такие треугольники?

5°. Найдите гипотенузу и синусы острых углов прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 6 см и 8 см; б) 4 см и 7 см.

6°. Найдите катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза и другой катет соответственно равны: а) 15 см и 9 см; б) 8 см и 4 см.

7. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 17 см. Один из его катетов на 9 см меньше гипотенузы. Найти косинус меньшего острого угла.

8. По двум данным элементам прямоугольного треугольника KMP ($\angle P = 90°$) найдите его остальные стороны и углы: а) $MK = 10$ см, $\angle M = 48°$; б) $MP = 5$ см, $\angle M = 54°$; в) $KP = 11$ см, $\angle M = 71°$; г) $KM = 15$ см, $MP = 6$ см; д) $MP = 9$ см, $KP = 12$ см.

9. Большая диагональ и большее основание прямоугольной трапеции равны соответственно 13 см и 12 см. Найдите длину меньшой боковой стороны трапеции.

Для любознательных

1. В сектор окружности с радиусом R и центральным острым углом α вписали окружность. Найдите ее радиус.

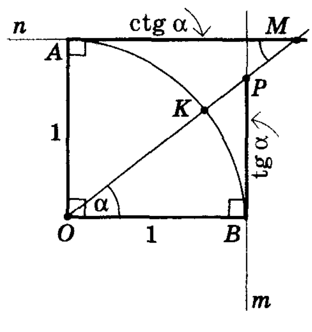
2. В сегмент окружности вписан квадрат, две вершины которого лежат на дуге сегмента и делят ее на три равные части. Найдите градусную меру дуги сегмента.

3. Докажите геометрически, что: а) $\operatorname{ctg} 30° + \operatorname{tg} 15° = 2$; б) $\operatorname{tg} 15° = 4\sin^2 15°$. (Совет. Рассмотрите равнобедренный треугольник с углом 30° при вершине и единичной боковой стороной. Проведите в этом треугольнике высоты к основанию и одной из боковых сторон и обозначьте проекцию одной боковой стороны на другую через x.)

10. Вычислите длину высоты равностороннего треугольника, сторона которого равна 12 см.
11. Сторона квадрата равна 6 см. Найдите длину его диагонали.
12*. Две стороны прямоугольного треугольника равны 5 см и 8 см. Найдите третью сторону треугольника.
13. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, $BD \perp AC$, $AB = 16$ см, $BC = 12$ см. Найдите длину отрезка AD и тангенс угла DBC.
14*. Найдите длину высоты и радиусов вписанной и описанной окружностей для равностороннего треугольника со стороной a.
15. В равнобедренном треугольнике ABC стороны $AB = BC = 7$ см, $AC = 6$ см. Найдите длину высоты AD и тангенс угла при основании.
16*. Найдите тригонометрические функции угла, который образуют диагональ прямоугольника с большей его стороной, если стороны прямоугольника равны 6 см и 4 см.
17**. Периметр прямоугольника равен 56 см, а одна из его сторон – 16 см. Найдите синус угла между диагоналями.
18*. Из одной точки к прямой проведены две наклонные длиной по 3 см каждая. Угол между наклонными – 120°. Найдите расстояние между основаниями этих наклонных.
19*. Расстояние от точки B к прямой a равно 5 см. Из точки B к прямой a провели наклонную. Найдите длину наклонной, если она образует с прямой угол: **а)** 30°; б) 60°; **в)** 45°; г) α.
20*. Из точки A к прямой m провели две наклонные. Длина одной из них равна 15 см, а ее проекция – 12 см. Найдите длину другой наклонной, если она образует с прямой угол 45°.
21**. Из точки A, которая находиться на расстоянии 10 см от прямой, проведены две наклонные AB и AC, длины которых 26 см и 20 см. Найдите расстояние между основаниями наклонных. Докажите, что $\triangle ABC$ – тупоугольный.
22**. Стороны треугольника ABC равны 9 см, 11 см, 12 см. Найдите проекции двух меньших сторон на большую сторону.
23**. Две окружности с равными радиусами и центрами в точках O и O_1 пересекаются в точках A и B. Одна сторона треугольника AOO_1 равна 13 см, вторая – 6 см. Найдите расстояние между центрами окружностей. (Рассмотрите два случая.)
24**. Две окружности с разными радиусами и центрами в точках O и O_1 пересекаются в точках A и B. Из центра одной окружности, радиус которой равен $\sqrt{2}$, хорду AB видно под прямым углом, а из центра другой окружности – под углом 120°. Найдите радиус второй окружности и расстояние между центрами окружностей. (Рассмотрите два случая.)

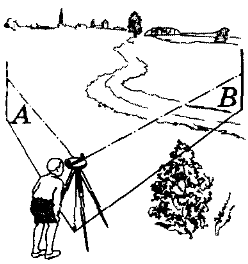
Для любознательных

Если воспользоваться четвертью окружности радиуса 1, то можно собственными глазами увидеть не только отрезки, длины которых численно равны значениям синуса и косинуса определенных углов (как мы это делали в § 27), а и тангенса, котангенса. Допустим, имеем четверть окружности, ограниченную единичными радиусами OA и OB. Проведем перпендикулярные к концам этих радиусов прямые m и n (см. рис.) Эти прямые и будут *осями*: *тангенсов* (m) и *котангенсов* (n). Действительно, пусть $\angle KOB = \alpha$. Тогда $\angle AMO = \alpha$ (т. к. $AM \parallel OB$). Из треугольников POB и AOM получим: $\operatorname{tg} \alpha = PB : R = PB$ и $\operatorname{ctg} \alpha = AM : R = AM$.



§ 32. Практические задачи с применением тригонометрии

Для измерения углов на местности используют специальный прибор, называемый *астролябией* (рис. на поле).

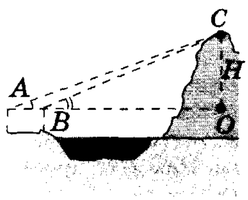


Вы уже знакомы с различными практическими задачами, решение которых опиралось на подобие треугольников (§ 22). Тригонометрические функции предоставляют возможность решать такие задачи более совершенными методами и с большей точностью. Рассмотрим несколько примеров.

Теперь мы можем вычислить высоту предмета H и в том случае, если к нему нельзя подойти (рис. 4.26). Рассмотрим два прямоугольных треугольника AOC и BOC. Допустим, что мы измеряли углы A и B и они равны $\angle A = 42°$, $\angle B = 47°$. Тогда $AO = H \operatorname{ctg} A$, $BO = H \operatorname{ctg} B$.

Отсюда $AB = H(\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B)$ и $H = \dfrac{AB}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B}$. Расстояние AB можно измерить непосредственно. Пусть, например, $AB = 12{,}00$ м. Получаем:

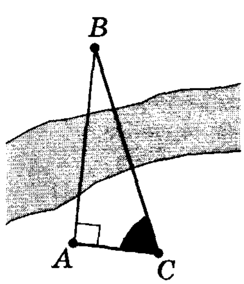
$\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} 42° - \operatorname{ctg} 47° \approx 1{,}1106 - 0{,}9325 \approx 0{,}1781;$
$H \approx 12{,}00 : 0{,}1781 \approx 12{,}00 : 0{,}178 \approx 67{,}38 \approx 67{,}4$ (м).



$$H = \frac{AB}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B}$$

Чтобы окончательно определить высоту «скалы», не забудьте к полученному результату добавить высоту прибора, с помощью которого вы измеряли углы A и B.

Определим расстояние между пунктами P_1 и P_2, разделенными препятствием, например рекой (рис. 4.27). Для этого надо построить перпендикуляр CP_1 к прямой P_1P_2, а затем измерить угол P_1CP_2 и расстояние P_1C. Пусть $\angle C = 44°$, а $P_1C = 120$ м. Тогда искомое расстояние $P_1P_2 = P_1C \cdot \operatorname{tg} C = 120{,}0 \cdot \operatorname{tg} 44° \approx 120{,}0 \cdot 0{,}9657 \approx$ $\approx 115{,}8 \approx 116$ (м).



$AB = AC \operatorname{tg} C$

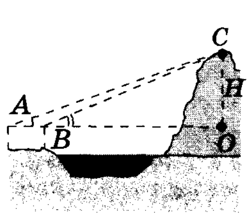


Рис. 4.26

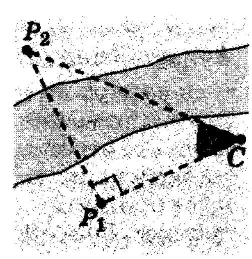


Рис. 4.27

Для любознательных

Докажите: если длины сторон прямоугольного треугольника – целые числа, то хотя бы одно из них четно и хотя бы одно из них делится на 3.

Задание 32

1°. Найдите синус угла подъема лестницы, если каждый метр ее длины соответствует подъему на 0,75 м.

2°. По рисунку 4.28 найдите x.

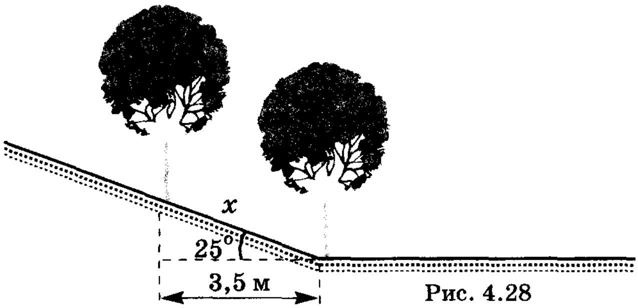


Рис. 4.28

3°. По рисунку 4.29 найдите расстояние от точки B к недоступной точке A.

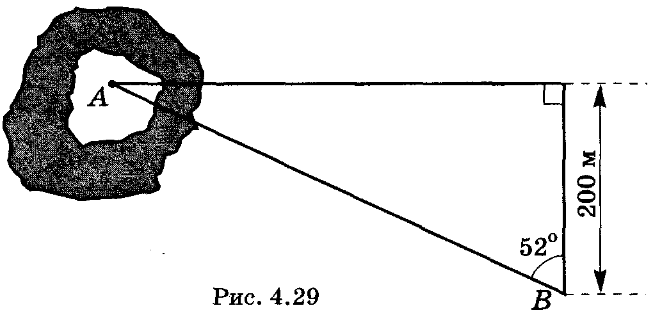


Рис. 4.29

4°. На прямолинейной части пути подъема есть пункты A и B, расстояние между которыми равно 470 м. Пункт B находится на 8 м выше, чем пункт A. Найдите синус угла подъема пути на промежутке AB.

5*. Идущий человек почти не замечает подъема, если высота подъема меньше $\frac{1}{25}$ пройденного пути. Чему равен синус угла этого подъема?

6°. Высота Солнца 48°. Длина тени телебашни равна 76 м. Найдите высоту телебашни.

7°. Угол подъема пути равен 15°30′. На какую высоту поднимется пешеход, если он пройдет 200 м?

8. За 800 м от места подъема самолета прямо по курсу растут деревья, высота которых до 20 м. Под каким углом должен взлететь самолет, чтобы не задеть вершины деревьев?

9. По рисунку 4.30 найдите высоту дерева.

Рис. 4.30

10. Под каким углом видно телеграфный столб высотой 8 м, который находится на расстоянии 230 м от наблюдателя (ростом наблюдателя можно пренебречь)?

11°. Найдите ширину реки, если верхний край башни высотой 14 м, которая находится на ее берегу, видно с другого берега под углом 24° к горизонту.

12. С крыши дома, высота которого 12,8 м, крыша другого дома, высотой 10 м, видна под углом 32°. Найдите ширину улицы, если дома расположены напротив друг друга по разные стороны улицы.

13°. По рисунку 4.31 найдите расстояние от парашютиста до земли.

14. Самолет приближается к аэропорту на высоте 7000 м. Пилот имеет указания снижаться под углом 6°. На каком расстоянии от взлетной полосы он должен начать снижаться?

15°. Лестница, длина которой 12,5 м, приставлена к стене так, что расстояние от нижнего края лестницы до стены равно 3,5 м. На каком расстоянии от земли находится верхний край лестницы?

16*. Высоты двух вертикальных столбов равны 5 м и 12,5 м, расстояние между ними – 10 м. Найдите расстояние между верхушками столбов.

17*. К вертикальному столбу прикреплено два троса так, как показано на рисунке 4.32. Найдите длину большего троса.

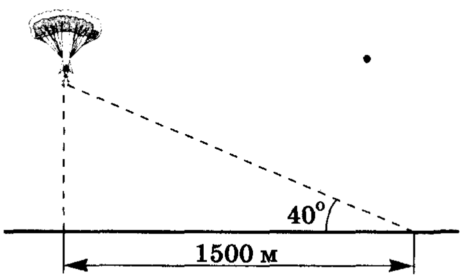


Рис. 4.31

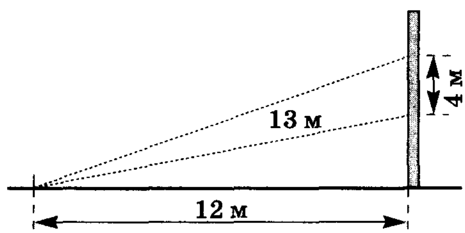


Рис. 4.32

18.** Эскалатор метрополитена состоит из 170 ступеней от вестибюля до пола подземной станции. Ширина ступеньки эскалатора – 40 см, высота – 20 см. Подсчитайте: **а)** глубину станции; **б)** угол наклона эскалатора.

19**. Найдите длину газопровода $ABCDE$, схема которого показана на рисунке 4.33.

20.** Вычислите радиус меньшей окружности в конструкции рамы окна, внешняя часть которой имеет форму полукруга радиуса R (рис. 4.34).

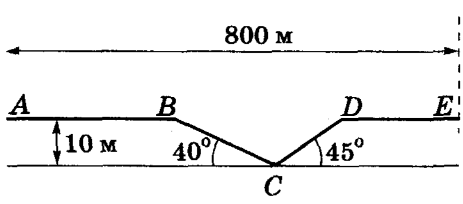


Рис. 4.33

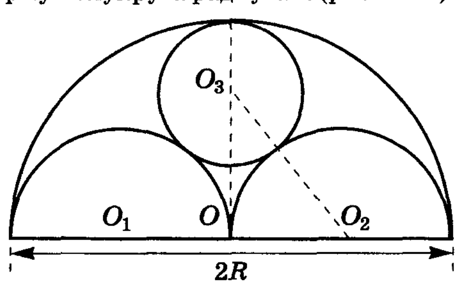


Рис. 4.34

21**. Докажите, что отрезок, который соединяет вершину прямого угла прямоугольного треугольника с центром квадрата, построенного на гипотенузе: **а)** делит прямой угол пополам; **б)** равен сумме катетов, умноженной на $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Задания для повторения главы IV

1°. Дайте определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника.

2°. Зависит ли синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла от расположения и размеров прямоугольного треугольника?

3. Докажите, что синус острого угла не зависит от размеров и расположения прямоугольного треугольника.

4°. Запишите соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

5*. Как изменяются значения синуса и косинуса углов от 0° до 90°?

6°. Запишите соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

7. Составьте таблицу значений тригонометрических функций углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

8°. Найдите синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы острых углов в прямоугольном треугольнике со сторонами: **а)** 24 м, 18 м, 30 м; **б)** 17 см, 15 см, 8 см; **в)** 1 мм, 3 мм, $\sqrt{10}$ мм.

9.** Сравните острые углы α и β, если:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = \frac{1}{3}$; **б)** $\sin\alpha = 0{,}21$, $\sin\beta = 0{,}33$;

в) $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$; **г)** $\cos\alpha = 0{,}7$, $\cos\beta = 0{,}3$.

10. Найдите значение выражения:

а) $2\sin 30° - \sqrt{3}\cos 30°$; **б)** $\sin 60°\cos 30° + \operatorname{ctg} 45°$;

в) $\operatorname{tg} 45° \cdot \cos 60°$; **г)** $2\sin 60° - \operatorname{tg} 60°$.

11. Постройте острый угол α, если: **а)** $\operatorname{tg}\alpha = 3$; **б)** $\sin\alpha = \frac{2}{5}$.

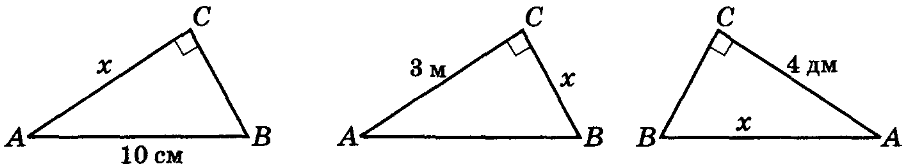
12*. Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если: **а)** $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; **б)** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; **в)** $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}4$.

13*. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если: **а)** $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; **б)** $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; **в)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{21}$.

14. Упростите выражение: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$.

15. Найдите длины неизвестных сторон прямоугольного треугольника, в котором: **а)** катет длиной 7 см лежит против угла 30°; **б)** катет длиной 10 см лежит против угла 45°; **в)** длина гипотенузы равна 12 см, а один из острых углов равен 60°.

16*. Треугольник ABC прямоугольный (рис. 4.35), $\angle C = 90°$. Найдите x.



а) $\cos B = 0{,}6$; **б)** $\sin A = 0{,}8$; **в)** $\operatorname{tg} A = 0{,}75$.

Рис. 4.35

17. Вычислите площадь квадрата, диагональ которого равна 6 см.
18*. Найдите высоту ромба, диагонали которого равны 140 см и 48 см.
19*. Найдите площадь и периметр параллелограмма $MNKL$, у которого высоты MH и MP соответственно равны 2 см и 3 см, а $\angle HMN = 45°$.
20*. Боковая сторона равнобокой трапеции равна 2 см. Найдите высоту трапеции, если: а) угол между высотой трапеции и боковой стороной равен 30°; б) один из углов трапеции равен 150°.
21**. По рисунку 4.36 найдите высоту башни. Расчеты проведите с точностью до 4 значащих цифр.

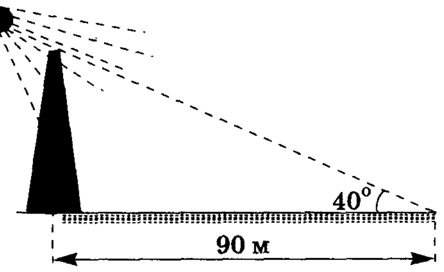


Рис. 4.36

22**. В остроугольном треугольнике ABC отрезки AH_1, BH_2 и CH_3 – высоты. Найдите длину высоты AH_1, если площадь треугольника AH_2H_3 равна S, $H_2H_3 = a$, $\angle A = \alpha$.

Готовимся к тематической аттестации № 4

Вариант I

1. (1 б.) Найдите синус угла A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, если $BC = 4{,}2$ см, $AB = 12$ см.
2. (1 б.) Найдите значение синуса угла A прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), если $\cos B = \frac{1}{3}$.
3. (1 б.) Найдите катет AC прямоугольного треугольника ABC, если его гипотенуза $AB = 13$ см, а $\angle A = 45°$.
4. (2 б.) Постройте угол α, если его синус равен $\frac{3}{4}$.
5. (3 б.) В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 10 см, а катет $AC = 5$ см. Найдите периметр и острые углы треугольника.
6. (4 б.) В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше одного из катетов на 1 см, а второй катет равен 9 см. Найдите тангенс острого угла, лежащего против меньшего катета.

Вариант II

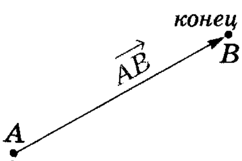
1. (1 б.) Найдите косинус угла A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, если $AC = 13{,}92$ м, $AB = 24$ м.
2. (1 б.) Найдите значение косинуса угла B прямоугольного треугольника ABC($\angle C = 90°$), если $\sin A = \frac{2}{5}$.
3. (1 б.) Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника ABC, если его катет $AC = 14$ см, а $\angle B = 45°$.
4. (2 б.) Постройте угол α, если его тангенс равен $\frac{5}{4}$.
5. (3 б.) В равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 3 см. Найдите острые углы и периметр этого треугольника.
6. (4 б.) Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются под прямым углом. Найдите AB, если $\angle BAD = 60°$, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см.

Глава V
ВЕКТОР КАК НАПРАВЛЕННЫЙ ОТРЕЗОК

В этой главе вы познакомитесь с величинами, которые, кроме числового значения, характеризуются еще и направлением в пространстве, — векторами. Векторы широко используются в физике и математике, особенно в геометрии. Глубже эту тему вы будете изучать в 9 классе, но предварительное знакомство с понятием вектора и действиями сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число позволит вам применить эти знания при изучении физики, что, в свою очередь, облегчит в дальнейшем работу над этой темой в математике.

§ 33. Понятие вектора

Много физических величин, таких как сила, перемещение материальной точки, скорость, ускорение и т. д., характеризуются не только числовыми значениями, но и направлением в пространстве. Такие величины называются *векторными величинами*, или *векторами*.



ВЕКТОР — направленный отрезок

Заметим, что величины, характеризующиеся только своим числовым значением, такие как длина, площадь, масса, температура и т. д., называются *скалярными величинами*.

В математике ***вектором называется направленный отрезок.***

На рисунке 5.1 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{n}$.

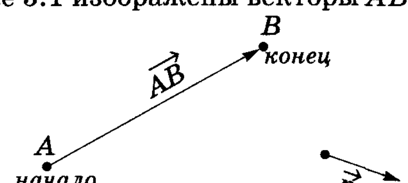
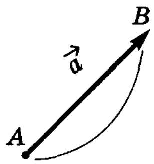


Рис. 5.1



$|\vec{a}| = AB$

Модуль вектора

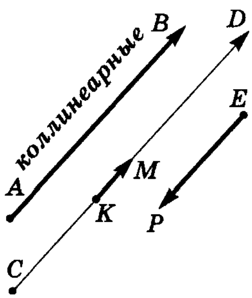
Нулевой вектор $\vec{0}$

не имеет направления:

A

$A \equiv B$ • $|\vec{a}| = 0$

B



$AB \parallel CD \parallel PE$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ отличается от отрезка AB тем, что точки A и B, ограничивающие вектор $\overrightarrow{AB}$, теперь имеют разный смысл: точка A – *начало вектора*, B – *его конец*. Две точки плоскости A и B задают один отрезок $AB \equiv BA$, но два разных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$. Длины этих векторов одинаковые, а направления – противоположные. Такие векторы называются *противоположными* и записывают это так: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Модулем вектора называется его длина. Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ будет длина отрезка AB (рис. 5.2), обозначают его как $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль вектора $\vec{n}$ обозначают как $|\vec{n}|$.

Нулевым вектором называется вектор, модуль которого равен нулю (его начало и конец совпадают). Его обозначают как $\vec{0}$. Такой вектор не имеет направления.

Коллинеарными называют векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

Например, все векторы, изображенные на рисунке 5.3, – коллинеарны. Записывают это так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$; $\vec{c} \parallel \vec{m}$ ...

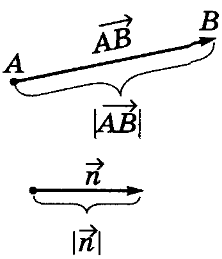


Рис. 5.2

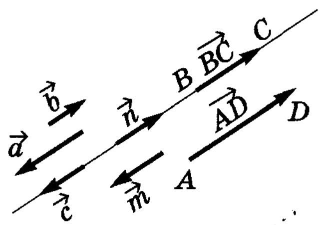


Рис. 5.3

Для любознательных

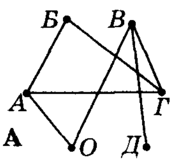
Графическое моделирование часто помогает найти решение задачи. Такой прием еще называют ***использованием графов***. Точки, отвечающие определенным объектам, называют ***вершинами графа*** (см. также стр. 187, 191, 193), а отрезки, их соединяющие, – ***ребрами графа***. Решим задачу.

В первенстве по настольному теннису 6 участников: *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* и *О*. Соревнования проводятся по круговой системе: каждые 2 участника играют друг с другом 1 раз. Некоторые игры уже проведены: *А* играл с *Б*, *Г* и *О*; *Б* – с *А* и *Г*; *В* – с *Г*, *Д* и *О*; *Г* – с *А*, *В* и *Б*; *Д* – с *В*; *О* – с *А* и *В*. Сколько игр уже проведено и сколько осталось провести?

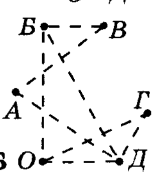
Решение

Участников турнира будем изображать точками. Если два участника провели игру, – соединим соответствующие точки отрезками. Тогда получим граф с 6 вершинами и 7 ребрами (рис. А). Число проведенных игр – это число ребер, их 7.

Чтобы найти число оставшихся игр, опять нарисуем граф с теми же вершинами, ребрами которого будут отрезки, соединяющие двух неигравших участников. Этот граф (рис. Б) легко построить, глядя на предыдущий (рис. А). У второго графа 8 ребер – осталось провести 8 игр.



А

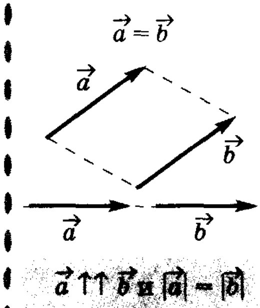


Б

Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

Ненулевые коллинеарные векторы могут быть или одинаково направленными (5.4), или **противоположно направленными** (рис. 5.5).

Коллинеарные векторы, лежащие на параллельных прямых, будут *одинаково направленными*, если они расположены в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через начала этих векторов (рис. 5.4-б), и *противоположно направленными*, если – в разных (рис. 5.5-б). (Соответствующие обозначения см. на рис. 5.4, 5.5.)



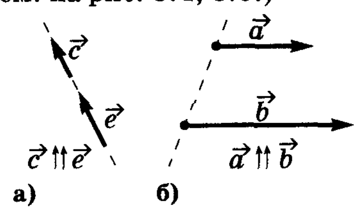


Рис. 5.4

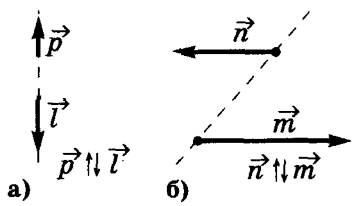


Рис. 5.5

Два ненулевые коллинеарные векторы называются равными, если равны их модули и они одинаково направлены.

Например, на рисунке 5.6 векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

СВОЙСТВА:

1) $\vec{a}=\vec{a}$

2) $\vec{a}=\vec{b}$ и $\vec{b}=\vec{c}$

$\Downarrow$

$\vec{a}=\vec{c}$

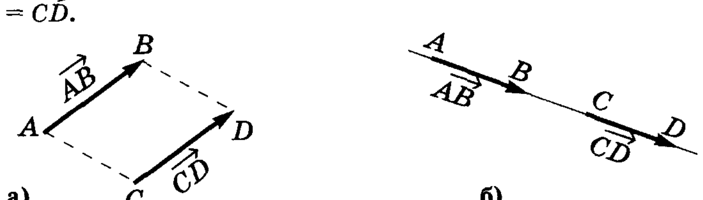


Рис. 5.6

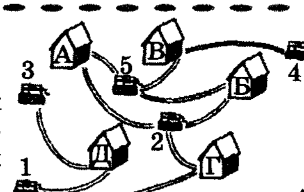
Из определения равенства векторов следуют *свойства равных векторов*:

1. Любой вектор равен сам себе: $\vec{a}=\vec{a}$.

2. Если $\vec{a}=\vec{b}$ и $\vec{b}=\vec{c}$, то $\vec{a}=\vec{c}$.

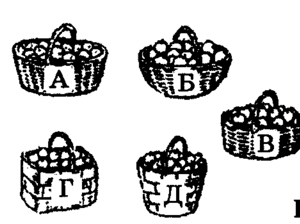
Для любознательных

1. Жители пяти домов поссорились друг с другом, и чтобы не встречаться возле колодцев, решили разделить их так, чтобы хозяин каждого дома ходил к своему колодцу своей тропинкой. Удастся ли им это сделать (рис. А)?



А

2. В пяти корзинах лежат яблоки пяти разных сортов (рис. Б). Яблоки первого сорта лежат в корзинах Г и Д; второго – в корзинах А, Б и Г; в корзинах А, Б и В – пятого сорта. Кроме того, в корзине В есть яблоки и четвертого сорта, а в корзине Д – третьего. Надо пронумеровать корзины так, чтобы в корзине № 1 было хотя бы одно яблоко первого сорта, в корзине № 2 – второго и т. д.



Б

Практическая работа 37

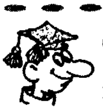
1. Отметьте на листе бумаги три точки A, B и C, которые не лежат на одной прямой. Начертите все векторы, которые определены сторонами треугольника ABC. Запишите все полученные векторы и укажите начало и конец каждого вектора.
2. Отметьте на листе бумаги три точки A, B и C, которые лежат на одной прямой. Начертите все векторы, которые определены отрезками с концами в точках A, B и C. Запишите все полученные векторы и укажите начало и конец каждого из них.
3. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Изобразите несколько векторов: **а)** одинаково направленных с вектором $\vec{a}$; **б)** одинаково направленных с вектором $\vec{b}$; **в)** противоположно направленных с вектором $\vec{a}$; **г)** противоположно направленных с вектором $\vec{b}$.
4. Начертите два вектора, которые: **а)** имеют равные длины и неколлинеарные; **б)** имеют равные длины и одинаково направлены; **в)** имеют равные длины и противоположно направлены. Запишите, какие из изображенных вами векторов: **а)** равные; **б)** противоположные.

Практическая работа 38

1. Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{EK}$ так, чтобы: **а)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{EK}$ были коллинеарные и $|\overrightarrow{AB}| = 2$ см, $|\overrightarrow{CP}| = 1$ см, $|\overrightarrow{KE}| = 3{,}5$ см; **б)** $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CP}$ были коллинеарные, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{KE}$ не были коллинеарные и $|\overrightarrow{AB}| = 1$ см, $|\overrightarrow{CP}| = 2{,}5$ см, $|\overrightarrow{KE}| = 3$ см.
2. С помощью соответствующего масштаба начертите вектор, который изображает: **а)** перемещение туриста из пункта A на 5 км на юг; **б)** перемещение туриста из пункта A на 10 км на восток; в) перемещение туриста из пункта A на $5\sqrt{2}$ км в юго-западном направлении.
3. С помощью соответствующего масштаба начертите вектор, который изображает полет самолета сначала на 200 км на восток (из пункта A в пункт B), а потом на 300 км на юг (из пункта B в пункт C). Начертите вектор, который изображает перемещение самолета из начальной точки A в конечную точку C.

Практическая работа 39

1. Постройте параллелограмм $ABCD$ и трапецию $QWRF$. Запишите все пары коллинеарных векторов, определенных сторонами: **а)** параллелограмма $ABCD$; **б)** трапеции $QWRF$.
2. Постройте параллелограмм $KMPE$ и обозначьте точку O пересечения его диагоналей. Пускай $\overrightarrow{K} = \vec{a}$, $\overrightarrow{KP} = \vec{n}$, $\overrightarrow{MO} = \vec{d}$, $\overrightarrow{KO} = \vec{c}$. Выпишите все векторы с началом или концом в точках K, M, P, E и O, которые равны: **а)** вектору $\vec{a}$; **б)** вектору $\vec{n}$; **в)** вектору $\vec{d}$; **г)** вектору $\vec{c}$.
3. Постройте ненулевой вектор $\vec{a}$ и обозначьте три точки A, B и C. Отложите вектор $\vec{a}$ от точек A, B и C.
4. Постройте прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Обозначьте середину стороны AB через M. Найдите длины векторов: **а)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}$; **б)** $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MB}$.



Для любознательных

1. На карте указано положение трех маяков: A, B и C. С корабля маяки A и B видны под углом α, а маяки B и C – под углом β. Найдите на карте местоположение корабля.

2. Два маяка A и B, обозначенные на карте, видны с корабля под углом α. После того как корабль прошел некое расстояние прямолинейным курсом, те же самые маяки стали видны с корабля под углом β. Найдите на карте местоположение корабля, если с помощью инструментов, которые есть на этом корабле, длина пройденного пути и его направление установлены.

§ 34. Действия над векторами

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ и произвольного числа k произведением $\vec{a}\cdot k \equiv k\cdot\vec{a}$ называется вектор $\vec{b}$, одинаково направленный с $\vec{a}$, если $k > 0$, и противоположно направленный с $\vec{a}$, если $k < 0$, модуль которого $|\vec{b}| = |k|\cdot|\vec{a}|$. При $k = 0$ получаем $\vec{0}$.

На рисунке 5.7 представлено несколько векторов – произведений вектора $\vec{a}$ на число.

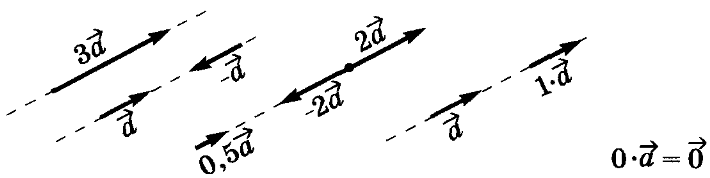


Рис. 5.7

При $k = 0$ получили нулевой вектор, т. е. точку.

При $k = 1$ получили $\vec{a}$, т. е. вектор, равный данному.

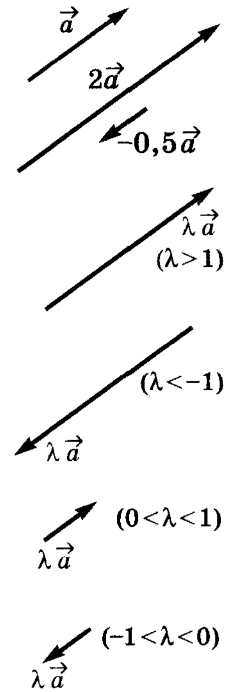
При $k = -1$ получили вектор $-\vec{a}$, равный по модулю вектору $\vec{a}$, но противоположно направленный. (Например, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.)

Любой вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, можно представить как $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$.

Действительно, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, то они отличаются только длиной: $|\vec{b}| : |\vec{a}| = k$ и $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$.

Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то аналогично предыдущему рассматриваем векторы $-\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда получим, что $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$, но $k < 0$.

Правильным будет и обратное утверждение: **если $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$, *то векторы* $\vec{b}$ и $\vec{a}$ *– коллинеарные*.** Доказательство этого утверждения проведите самостоятельно.



$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

СВОЙСТВА

$\lambda\cdot(\beta\vec{a}) = (\lambda\cdot\beta)\vec{a}$

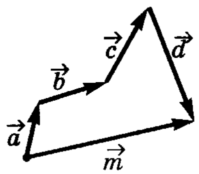
Для любознательных

Мирон Онуфриевич Зарицкий родился 21 мая 1889 г. в селе Могильница Тернопольской области в семье священника. После окончания сельской школы он поступил в Тернопольскую гимназию. Гимназист Мирон много читал (но только то, что его интересовало) и по уровню знаний значительно опережал сверстников, а иногда и учителей. Из-за этого часто происходили недоразумения и конфликты. После одного из таких споров гимназиста Зарицкого исключили из 5 класса. Вернувшись в село, он продолжил учебу самостоятельно и через год поступил в 7 класс классической гимназии в Перемышле. Но недоразумения продолжались и здесь. Некоторые преподаватели даже не видели смысла допускать его к выпускным экзаменам. А он сдал все экзамены на «отлично». Зарицкий успешно продолжил обучение в Венском университете и в 1907 г. вернулся на Украину. В условиях австро-венгерской монархии работу во Львовском университете он получил только лишь в 1939 г., а до этого Зарицкий работал учителем в гимназиях Коломыи и Тернополя (см. стр. 217).

СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

$\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

По правилу многоугольника:



Понятие равенства векторов дает возможность отложить вектор, равный данному, от произвольной точки плоскости.

Пусть у нас есть ненулевые векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, ... $\vec{a}_n$. ***Отложим от произвольной точки плоскости вектор $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_1$, потом от точки A_2 – вектор $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a}_2$ и т. д.*** (рис. 5.8). ***Наконец, отложим от точки A_n вектор $\overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \vec{a}_n$. Соединим точки A_1 и A_{n+1}. Вектор $\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$ будем называть суммой заданных векторов: $\overrightarrow{A_1A_{n+1}} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$.***

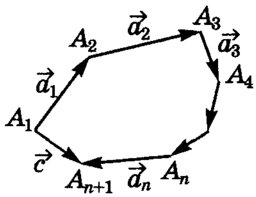


Рис. 5.8

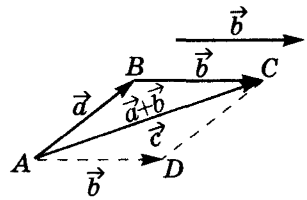
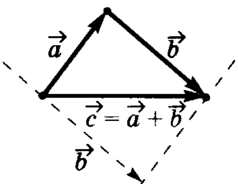


Рис. 5.9

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

По правилам треугольника:

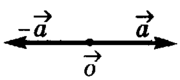


или параллелограмма

Такой способ определения суммы векторов называется *способом* (или *правилом*) *многоугольника*.

Сумму двух векторов находят или *по правилу треугольника*, или *по правилу параллелограмма* (рис. 5.9).

Правило треугольника – это правило многоугольника для двух слагаемых-векторов. Чтобы найти вектор $\vec{a} + \vec{b}$, по правилу многоугольника, надо от произвольной точки A отложить вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, потом от точки B отложить $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. (Получился треугольник ABC и $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Обратите внимание, что буква, обозначающая конец одного вектора-слагаемого, повторилась как начало второго и «исчезла».)



$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

То же самое можно сформулировать так.

Правило треугольника. Чтобы найти вектор $\vec{a} + \vec{b}$, надо:

- разместить векторы, равные $\vec{a}$ и $\vec{b}$, так, чтобы начало $\vec{b}$ совпало с концом $\vec{a}$;
- началом $(\vec{a} + \vec{b})$ будет начало $\vec{a}$, а концом $(\vec{a} + \vec{b})$ – конец $\vec{b}$.

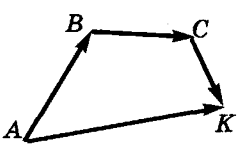
$2\vec{a}$

$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$

Чтобы найти сумму двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу параллелограмма, проведем через точки C и A треугольника ABC (рис. 5.9) прямые, параллельные AB и BC, получим параллелограмм $ABCD$. Тогда $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, а искомый вектор $\overrightarrow{AC}$ совпадает с диагональю параллелограмма $ABCD$.

Правило параллелограмма. Чтобы найти вектор $\vec{a} + \vec{b}$, надо:

- разместить векторы, равные $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, так, чтобы их начала совпали;
- через концы векторов провести параллельные им прямые;
- началом $(\vec{a} + \vec{b})$ будет общее начало $\vec{a}$ и $\vec{b}$, концом $(\vec{a} + \vec{b})$ – противоположная вершина образовавшегося параллелограмма.



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AK}$

РАЗНОСТЬ ДВУХ ВЕКТОРОВ

Из определения суммы векторов следуют свойства сложения векторов, указанные на поле. Последнее из них означает, что мы можем найти разность двух векторов.

Действительно, **чтобы найти разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, надо к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $(-\vec{b})$.**

На рисунке 5.10-а мы нашли $\vec{a} + (-\vec{b})$ *по правилу параллелограмма*.

Сформулируем теперь правило треугольника. Для этого через вершину B параллелограмма $ABCD$ (рис. 5.10-а) проведем прямую, параллельную AC, до пересечения с прямой AD. Получим параллелограмм $ACBK$. Тогда: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{KB} = \vec{a} - \vec{b}$ – искомый вектор, который можно определить из треугольника KAB.

Правило треугольника (рис. 5.10-б). Чтобы найти вектор $\vec{a} - \vec{b}$, надо:

- разместить векторы, равные $\vec{a}$ и $\vec{b}$, так, чтобы их начала совпали;
- началом $\vec{a} - \vec{b}$ будет конец $\vec{b}$, а концом $\vec{a} - \vec{b}$ – конец $\vec{a}$.

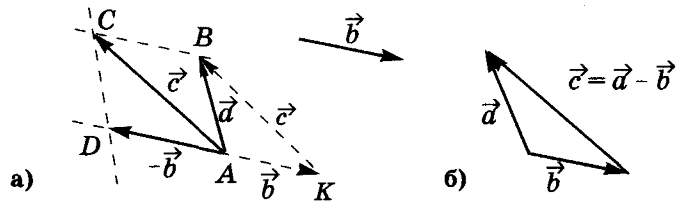
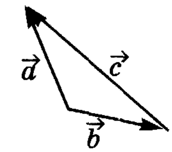


Рис. 5.10

СВОЙСТВА:

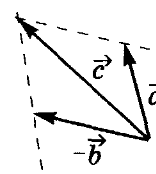
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$;
3. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$;
4. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

По правилу треугольника:



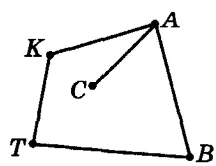
$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

По правилу параллелограмма:



Для любознательных

Количество ребер графа (см. также стр. 186, 187, 193), которые выходят из данной вершины, называют ее ***степенью***. Например, на рисунке изображен граф, у которого вершина A имеет степень 3, вершины B, K и T – степени 2, вершина C – степень 1.



Вершины графа, имеющие нечетную степень, называют ***нечетными***, а те, что имеют четную степень, – ***четными***. На рисунке вершины A и C – нечетные, а вершины B, K и T – четные.

1. Нарисуйте граф, который имеет: **а)** три вершины и два ребра; **б)** четыре вершины и четыре ребра; **в)** четыре вершины и шесть ребер. Определите степени его вершин.

2. Докажите очень важную теорему. **Количество нечетных вершин любого графа – число четное.** (Совет. Воспользуйтесь тем, что сумма нечетных чисел будет четным числом только тогда, когда количество слагаемых – четно.)

3. В классе 30 учеников. Возможно ли, чтобы 9 из них имели по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4, а 10 – по 5 друзей? (Совет. Представьте, что это возможно, и определите четность соответствующих вершин графа из 30 вершин. Сколько нечетных вершин вы получили? Не забудьте о теореме 2!)

4. На теплоходе 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы 4 телефона имели соединения с 3-мя другими, 8 – с 6-ю другими, а 3 – с 5-ю другими телефонами?

5. Может ли в королевстве, в котором из каждого города выходит по 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

Практическая работа 40

1. Начертите ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$ и постройте векторы $0 \cdot \overrightarrow{AB}$, $1 \cdot \overrightarrow{AB}$, $-1 \cdot \overrightarrow{AB}$, $(1 : |AB|) \cdot \overrightarrow{AB}$. Измерьте длину вектора $(1 : |AB|) \cdot \overrightarrow{AB}$ и убедитесь, что она равна 1.
2. Начертите два одинаково направленных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. С помощью масштабной линейки найдите $|a|$ и $|b|$. Постройте вектор $(|b| : |a|) \cdot \vec{a}$ и убедитесь в том, что он равен вектору $\vec{b}$.
3. Начертите два противоположно направленных вектора $\vec{c}$ и $\vec{p}$ так, чтобы $|c| = 2$ см, $|p| = 4$ см. Постройте вектор $(-|p| : |c|) \cdot \vec{c}$ и убедитесь, что он равен вектору $\vec{p}$.
4. Начертите три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. С помощью циркуля и линейки постройте векторы: **а)** $-\vec{a}$, $-\vec{b}$, $-\vec{c}$; **б)** $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $0{,}5\,\vec{c}$; **в)** измерьте длины векторов $\vec{a}$ и $2\vec{a}$ и убедитесь в том, что $2\vec{a} = 2|\vec{a}|$.
5. Начертите ненулевой вектор $\vec{a}$. Постройте вектор $\vec{p} = 3\vec{a}$. Постройте векторы: $-\vec{a}$, $1{,}5\vec{a}$, $2\vec{a}$, $6\vec{a}$. Укажите, как направлен каждый из полученных векторов относительно вектора $\vec{p}$, и выразите их длины через $|p|$.

Практическая работа 41

1. Начертите попарно коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Постройте суммы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$.
2. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$. По правилу многоугольника постройте вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$.
3. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых не совпадают: **а)** обозначьте произвольную точку A и по правилу треугольника постройте сумму $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$; **б)** обозначьте другую точку M и по правилу параллелограмма постройте сумму $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{MP}$; **в)** с помощью инструментов для черчения убедитесь, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MP}$.
4. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. С помощью циркуля и линейки постройте векторы: **а)** $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; **б)** убедитесь, что вектор $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ равен вектору $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Практическая работа 42

1. Начертите два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Докажите (построением), что $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$.
2. Начертите два ненулевых вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. С помощью циркуля и линейки постройте векторы: **а)** $\vec{m} - \vec{n}$; **б)** $\vec{n} - \vec{m}$. Какие векторы вы получили?
3. Начертите два ненулевых вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Постройте векторы: **а)** $\vec{x} + 2\vec{y}$; **б)** $0{,}5\,\vec{y} + \vec{x}$; **в)** $\vec{y} - 3\vec{x}$; **г)** $-2\vec{y} + \vec{x}$; **д)** $-\vec{y} - \vec{x}$; **е)** $0 \cdot \vec{y} - 2\vec{x}$; **ж)** $1{,}5\vec{y} - 0 \cdot \vec{x}$.

4*. Постройте произвольный параллелограмм $ABCD$. Обозначьте произвольную точку на этом же листе бумаги через X. Постройте векторы $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}$ и $\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$. Убедитесь, что полученные векторы равны. Изменится ли результат, если изменить положение точки X? Ответ обоснуйте.

Для любознательных

1. Лодка переправляется через реку перпендикулярно к ее берегам за 30 минут. Ширина реки 3 км, а скорость течения 2,1 км/час. Найдите собственную скорость лодки и угол между направлением течения и направлением собственной скорости лодки. (Совет. Найдите тригонометрическую функцию искомого угла и воспользуйтесь единичной окружностью и транспортиром.)
2. Из какой точки земного шара должен вылететь самолет, чтобы после того как он пролетел 100 км вдоль меридиана на юг, потом 100 км вдоль параллели на восток, потом 100 км вдоль меридиана на север, снова оказаться в начальной точке?

§ 35. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два неколлинеарные векторы, то любой третий вектор $\vec{c}$ (в этой же плоскости) можно представить в виде $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, где λ и μ – пара чисел. Т. е. на плоскости **любой вектор можно разложить по двум неколлинеарным векторам.**

Любой вектор можно разложить по двум неколлинеарным векторам.

Для доказательства этого утверждения через начало A и конец C заданного вектора $\vec{c}$ проведем прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 5.11). Мы получили параллелограмм $ABCD$.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$ – коллинеарны. Тогда $\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{a}$. Аналогично $\overrightarrow{AD}=\mu\vec{b}$. По правилу параллелограмма $\vec{c}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, что и требовалось доказать.

$\vec{a}\nparallel\vec{b}$

$\Downarrow$

$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, где $\{\lambda;\mu\}$ – единственная пара чисел

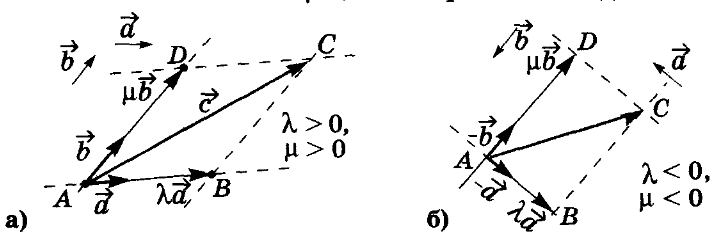
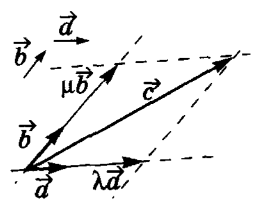


Рис. 5.11

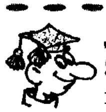


$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$

Мы доказали, что существует искомая пара чисел λ и μ. Докажем (от противного), что она единственно возможная.

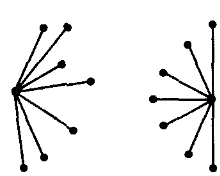
Пусть существует другая пара чисел λ_1 и μ_1 таких, что $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b}$. Тогда: $\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, $(\lambda_1-\lambda)\vec{a}=(\mu-\mu_1)\vec{b}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны по условию. Тогда последнее равенство возможно, только если векторы $(\lambda_1-\lambda)\vec{a}$ и $(\mu-\mu_1)\vec{b}$ – нулевые, т. е. при $\lambda_1=\lambda$ и $\mu_1=\mu$, что противоречит предположению. Тогда пара чисел λ и μ – единственная.



Для любознательных

Задача. На некотором острове 15 поселений, каждое из которых соединено дорогами не менее чем с 7-ю другими. Докажите, что на этом острове из любого поселения можно добраться дорогами до любого другого поселения (можно при этом проходить через поселения).



Решение

Пусть существуют два поселения такие, что из одного невозможно добраться дорогами до второго. Соответствующий граф представлен на рисунке – имеем не меньше 16-ти поселений. Предположение ошибочно. Ч. т. д.

Благодаря этой задаче мы познакомились с классификацией графов на связанные и несвязанные (про графы см. стр. 186, 187, 191). Если, двигаясь вдоль ребер графа, можно из произвольной его вершины попасть в любую другую его вершину, то такой граф называется ***связанным***. Заметим, что замкнутый путь вдоль ребер графа, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине, называется ***циклом***.

Практическая работа 43

1. Начертите три неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. С помощью инструментов для черчения разложите вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Измерьте длины полученных векторов, определите соответствующие коэффициенты и запишите вектор $\vec{c}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. Начертите два ненулевых вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$, которые лежат на двух взаимно перпендикулярных прямых. Начертите третий вектор $\vec{p}$. Разложите (построением) вектор $\vec{p}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Определите соответствующие коэффициенты и запишите вектор $\vec{p}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$.
3. Постройте произвольный треугольник ABC и проведите его медиану AM. Разложите (построением) вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Запишите соответствующее выражение.

Задания для повторения главы V

1°. Приведите примеры векторных и скалярных величин.

2*. Что математики называют вектором и чем их определение вектора отличается от понятия вектора в физике?

3. Какие векторы называют коллинеарными?

4°. Что такое модуль вектора?

5. Всегда ли верно такое утверждение: «Если модули двух векторов равны, то эти векторы равны»? Приведите примеры.

6°. Чем отличаются противоположно направленные векторы? Приведите пример.

7°. Приведите пример: а) одинаково направленных векторов; б) противоположно направленных векторов; в) равных векторов.

8. Сформулируйте определение равенства двух векторов.

9**. Что такое нулевой вектор? Как построить вектор ему коллинеарный?

10°. Приведите пример умножения одного и того же вектора на число: а) 2; б) −2. Будут ли равны модули этих векторов? А сами векторы?

11°. Приведите примеры двух коллинеарных: а) одинаково направленных векторов; б) противоположно направленных векторов.

12°. Приведите примеры разности двух коллинеарных: а) одинаково направленных векторов; б) противоположно направленных векторов.

13. Приведите примеры: а) сложения двух неколлинеарных векторов; б) вычитания двух неколлинеарных векторов.

14. Дан параллелограмм $KMHP$. Найдите: а) разность векторов $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{PH}$; б) сумму векторов $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{HP}$.

15. Дан четырехугольник $ABCD$. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

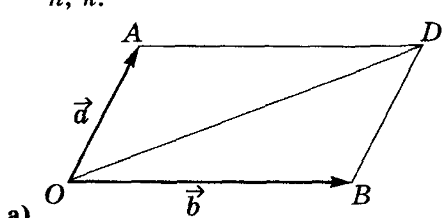
16*. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{BK}$.

17*. Дан параллелограмм $CMET$. Разложите вектор $\overrightarrow{CE}$ по векторам: а) $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CT}$; б) $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{TC}$; в) $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{CT}$.

18**. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Разложите по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ векторы: а) $\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{OC}$; в) $\overrightarrow{BD}$; г) $\overrightarrow{OB}$.

19*. На рисунке 5.12-а заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте векторы: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $\vec{a}+0{,}5\vec{b}$; г) $\vec{b}-0{,}5\vec{a}$; д) $0{,}5\vec{a}+0{,}5\vec{b}$.

20**. На рисунке 5.12-б заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите векторы: $\vec{c}$, $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$.



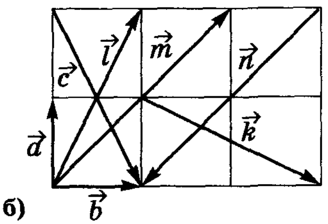
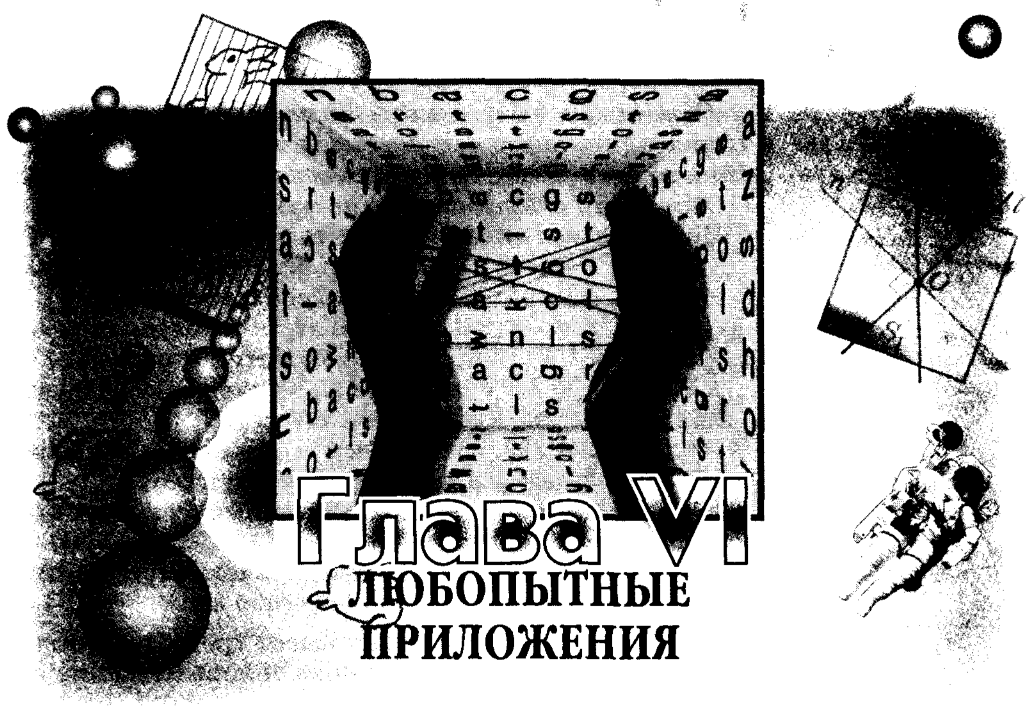


Рис. 5.12



Глава VI
ЛЮБОПЫТНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

«Школьная геометрия» является чудесным полигоном для формирования логического последовательного мышления. Эта наука – не что иное, как великая игра по определенным аксиоматическим правилам, которые выработали еще древние греки. При этом Евклид и его предшественники (как и последователи) считали, что эти правила полностью отражают закономерности окружающего мира.

Игра эта зашла так далеко, что ее можно сравнить, наверное, только с шахматами. Эта чудесная игра настолько разрослась, что сегодня похвастаться знаниями всех ее секретов, наверное, не может никто.

В этом разделе для тех, кто увлекся такой игрой, предлагаются некоторые «любопытные идеи» геометрии.

Приложение 1

Точки и окружность Эйлера, прямая Эйлера

Леонард Эйлер (1707–1783) был не только одним из величайших математиков в истории человечества, но и, на удивление, разносторонне одаренным ученым. В геометрии много понятий носят имя ***Эйлера***. Предлагаем вашему вниманию свойства треугольника, найденные Леонардом Эйлером и названных в его честь.

Точками Эйлера называют середины отрезков высот треугольника, ограниченных ортоцентром и вершинами треугольника.

Прямая, проходящая через ортоцентр треугольника и центр окружности, описанной вокруг этого треугольника, называется *прямой Эйлера*.

Окружность, проходящая через основания высот треугольника, основания его медиан и точки Эйлера, называется *окружностью девяти точек*, или *окружностью Эйлера*.

...В огромном саду геометрии каждый может подобрать для себя букет.

Давид Гильберт

Математика – это то, с помощью чего люди руководят природой и собой.

А.Н. Колмогоров

Отметим, что окружность Эйлера (окружность девяти точек) иногда еще называют *окружностью Фейербаха* – в честь немецкого математика Карла Фейербаха (1800–1834), открывшего ее независимо от Эйлера.

Договоримся далее обозначать в треугольнике ABC:

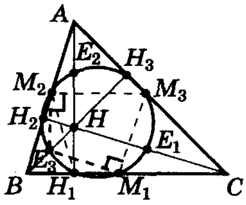


Рис. 6.1

M_1, M_2 и M_3 – середины сторон BC, AB и AC соответственно;

H_1, H_2 и H_3 – основания высот, проведенных к этим сторонам;

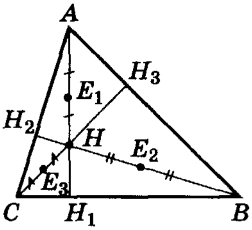
E_1, E_2 и E_3 – точки Эйлера на высотах AH_1, CH_2 и BH_3;

H, M и I – ортоцентр, центроид и инцентр треугольника;

O и R – центр описанной окружности γ вокруг треугольника и ее радиус;

γ_9, O_9 и R_9 – окружность девяти точек треугольника, ее центр и радиус.

Точки Эйлера



Т Теорема 1. **Основания высот треугольника, середины его сторон и точки Эйлера лежат на одной окружности.**

Надо доказать, что M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3, E_1, E_2 и E_3 лежат на одной окружности γ_9 (рис. 6.1).

Доказательство

1) $M_1M_3 = \dfrac{1}{2}c$, $M_1M_3 \parallel c$ (как средняя линия в $\triangle ABC$);

$H_1M_2 = \dfrac{1}{2}c$ (как медиана гипотенузы в $\triangle AH_1B$).

Тогда $H_1M_2M_3M_1$ – равнобокая трапеция и вокруг нее можно описать окружность.

Аналогично можно описать окружности и вокруг равнобоких трапеций $H_2M_3M_1M_2$ и $H_3M_1M_2M_3$.

Все три окружности проходят через точки M_1, M_2 и M_3, следовательно, они совпадают (через три точки можно провести только одну окружность). Обозначим ее как γ_9.

Мы доказали, что точки M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3 лежат на окружности γ_9.

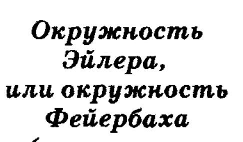
2) Докажем, что γ_9 проходит через точки E_1, E_2 и E_3.

$M_2E_3 \parallel AH$, $M_2M_3 \parallel BC$ (как средние линии в $\triangle ABH$ и $\triangle BAC$), тогда $E_3M_2M_3 = 90°$.

Аналогично, $\angle E_3M_1M_3 = 90°$. Следовательно, четырехугольник $E_3M_2M_3M_1$ – вписанный. Тогда окружность γ_9, проходящая через точки M_1, M_2 и M_3, проходит и через точку E_3.

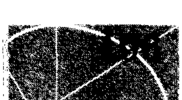
Аналогично точки E_2 и E_1 лежат на окружности, проходящей через M_1, M_2 и M_3, то есть на γ_9.

Теорема доказана.

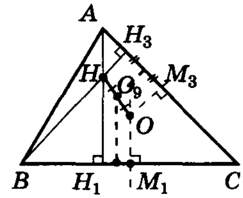


Окружность Эйлера, или окружность Фейербаха (окружность девяти точек)

Гипотеза – научное предположение, которое требует проверки и теоретического обоснования, чтобы утверждение можно было назвать истинным. *Инсайт* (буквально – озарение) – неожиданное понимание сути проблемы.



Теорема 2. Центр окружности Эйлера лежит на середине отрезка, который соединяет ортоцентр треугольника с центром описанной вокруг него окружности.



(OH)–прямая Эйлера

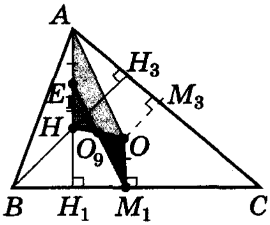


Рис. 6.2

Надо доказать, что: $O_9 \in OH$; $HO_9 = O_9O$ (рис. 6.2).

Доказательство

Центр O_9 окружности γ_9 – точка пересечения серединных перпендикуляров к хордам H_1M_1 и H_3M_3 этой окружности (см. рис. на поле).

Серединный перпендикуляр к отрезку H_3M_3 параллелен BH_3 и OM_3, тогда (по теореме Фалеса) он делит пополам отрезок OH. Аналогично серединный перпендикуляр к отрезку H_1M_1 проходит через середину OH. Следовательно, O_9 – середина отрезка OH.

Теорема доказана.

$O_9 \in OH$

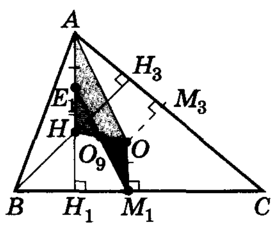
$HO_9 = O_9O$

$R_9 = \frac{1}{2}R$

Следствие 1. **Расстояние между вершиной треугольника и его ортоцентром в два раза больше расстояния между центром описанной вокруг треугольника окружности и стороной, противолежащей данной вершине.** (Т. е. $AH = 2OM_1$.)

Действительно: по теореме $HO_9 = O_9O$; $E_1O_9 = O_9M_1$ как радиусы γ_9; $\angle E_1O_9H = \angle M_1O_9O$ – как вертикальные. Тогда $\triangle E_1O_9H = \triangle M_1O_9O$ (по первому пр.) и $E_1H = OM_1$.

По определению точки Эйлера: $AH = 2E_1H = 2OM_1$.



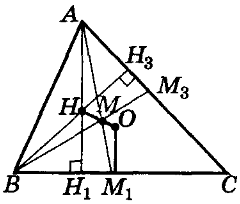
$AH = 2OM_1$

Следствие 2. **Радиус окружности Эйлера равен половине радиуса описанной окружности вокруг треугольника.** (Т. е. $R = 2R_9$.)

$AE_1 = AH : 2 = OM_1$ (следствие 2), $AE_1 \parallel OM_1$ ($AH_1 \perp BC$ и $OM_1 \perp BC$). Тогда E_1AOM_1 – параллелограмм и $AO = E_1M_1$. Учитывая, что $AO = R$, а $O_9E_1 = R_9 = O_9M_1$, получаем искомое соотношение $R = 2R_9$.

Интуиция – способность переходить к интеллектуальному результату (как гипотезе) несознательно, ощущение «безусловной правильности» определенного подхода к решению («не знаю почему… но уверен, что… попытаемся доказать»).

Первое в Восточной Европе высшее учебное заведение – **Киево-Могилянская коллегия** – было создано в 1632 г. (с 1701 г. – Киево-Могилянская академия). До 1817 г. это была общеобразовательная высшая школа, отличающаяся структурой от западноевропейских университетов тех времен. В ней было шесть классов с годичным сроком обучения и один – двухгодичный (иногда – трехгодичный). Киево-Могилянская академия была создана более чем за 20 лет до присоединения Украины к России и за 55 лет до того, как начало работать в России (в Москве) аналогичное учебное заведение (Эллино-греческая академия, позже – Славяно-латинская академия). Киево-Могилянская академия стала популярной. В ней учились студенты из разных стран Европы (даже Греции) и арабского Востока.



$M \in (OH)$

центроид *прямая Эйлера*

$OM_1 = \frac{1}{2}AH$

Теорема 3. В произвольном треугольнике точка пересечения медиан, ортоцентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой – прямой Эйлера.

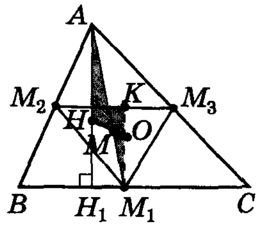


Рис. 6.3

Пусть прямая OH пересекает медиану AM_1 в точке M (рис. 6.3). Докажем, что M – центроид треугольника ABC .

Доказательство

1) Стороны треугольника $M_1M_2M_3$ параллельны сторонам треугольника ABC (как средние линии), тогда $\triangle M_1M_2M_3 \sim \triangle ACB$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

2) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC – это высоты треугольника $M_1M_2M_3$, а точка их пересечения O – ортоцентр треугольника $M_1M_2M_3$. Тогда $OM_1 = \frac{1}{2}AH$. (Сравните с доказательством этого факта на стр. 197 и попробуйте доказать его иначе.)

3) $\angle AMH = \angle M_1MO$ (как вертикальные); $\angle HAM = = OM_1M$, т. к. $AH \parallel OM_1$. Тогда $\triangle AMH \sim \triangle M_1MO$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$ (т. к. $OM_1 = \frac{1}{2}AH$).

4) Из последнего утверждения получаем, что $AM : MM_1 = 2 : 1$ и точка M (по аксиоме откладывания отрезков) действительно является центроидом треугольника ABC.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример решения задачи с точками Эйлера без использования свойств окружности Эйлера.

Пример 1. Докажите, что в остроугольном треугольнике ABC отрезки E_1E_2, M_1M_2 и H_1M_3 равны.

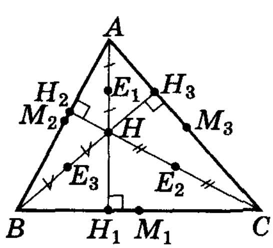


Рис. 6.4

Доказательство

1) В $\triangle AHC$ отрезок E_1E_2 – средняя линия, тогда $E_1E_2 = AC : 2$ (рис. 6.4).

2) В прямоугольном треугольнике AH_1C отрезок H_1M_3 – медиана гипотенузы, тогда $H_1M_3 = AB : 2$.

3) В $\triangle ABC$ отрезок M_1M_2 – средняя линия, тогда $M_1M_2 = AC : 2$.

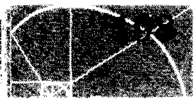
Получили: $AB : 2 = E_1E_2 = = M_1M_2 = H_1M_3$. Ч. т. д.

Геометрия – прообраз красоты мира.

И. Кеплер

А теперь попробуйте самостоятельно решить такие задачи.

1. Докажите для произвольного остроугольного треугольника: а) $\angle M_2E_1E_2 = \angle M_2M_1E_2$; б) $E_1M_1 = E_2M_2 = E_3M_3$.



2. Докажите, что отрезки M_1E_1, M_2E_2 и M_3E_3 имеют общую середину.
3. Докажите, что расстояние от ортоцентра до любой из вершин треугольника вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до противоположной стороны треугольника (тремя способами).
4. Известно, что $AB = CH$, найдите угол ACB.
5. Докажите, что в прямоугольном треугольнике O_9 совпадает с серединой медианы, проведенной к гипотенузе.
6. Докажите, что: а) $M_1E_1 = M_2E_2 = M_3E_3 = R$; б) $\angle AE_1H_3 = \angle BE_3H_1$; в) угол между прямыми H_3M_2 и H_2E_3 равен углу между прямыми H_2M_3 и H_3E_2.
7. Задана окружность, точка A на ней и точка H внутри окружности. Найдите на окружности такие точки B и C, чтобы точка H была точкой пересечения высот треугольника ABC.
8. Постройте треугольник, если известны положение одной из его вершин, середины противоположной стороны и точки пересечения высот.
9. Докажите, что радиус окружности, описанной вокруг треугольника, равен радиусу окружности, которая проходит через две вершины этого треугольника и его ортоцентр.
10. Докажите равенство треугольников по стороне, высоте, проведенной к этой стороне, и радиусу окружностей Эйлера этих треугольников.
11. Восстановите прямоугольный треугольник по положению двух его точек – центра окружности Эйлера и середины гипотенузы.

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. *Бевз Г.П.* Геометрія кіл. – Харків: Основа, 2004. – 112 с.
2. *Никулин А.В., Кукуш А.Г., Татаренко Ю.С.* Геометрия на плоскости (Планиметрия). – Минск: ООО «Попурри», 1996. – 592 с.
3. *Зеттель С.И.* Новая геометрия треугольника. – М.: Просвещение, 1962. – 152 с.
4. *Кушнір І.А.* Трикутник і тетраедр у задачах. – К.: Рад. шк., 1991. – 208 с.
5. *Кушнір І.А.* Повернення втраченої геометрії. – К.: Факт, 2000. – 280 с.

Феофан Прокопович (1681–1736) – один из выдающихся преподавателей Киево-Могилянской академии. В списке украинских математиков-методистов, которые оставили заметный след в истории науки, имя Феофана Прокоповича хронологически занимает первое место.

Феофан Прокопович родился в Киеве и был назван Елеазаром. Отец и мать его умерли очень рано, сироту взял на попечение его дядя, Феофан Прокопович, который славился образованностью и красноречием. В конце своей деятельности он был избран ректором Киево-Могилянской коллегии, однако доживал жизнь в Киево-Печерской лавре и умер, когда племяннику было 11 лет.

В 1697 г. Елеазар блестяще закончил философское отделение коллегиума, продолжил образование в Польше, пешком добрался до Рима, где учился в коллегии Св. Афанасия для славян-католиков. После окончания учебы в Риме (есть данные, что после защиты работы магистра он получил докторскую степень) на протяжении трех лет побывал во многих европейских странах и в 1704 г. вернулся в Киев, где стал преподавателем Киево-Могилянской академии. Во время крещения в православие получил (по собственному желанию) имя своего дяди. В 1707 г. он стал префектом (то есть проректором) Киевской академии, а позже (1711) – ее ректором. Он принимал участие в создании Петербургской академии наук.

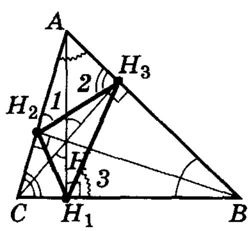
О некоторых видах треугольников

Вы умеете различать треугольники по соотношениям длин их сторон (правильные, равнобедренные, равносторонние), по значениям углов (остроугольные, прямоугольные, тупоугольные). Однако геометры выделяют не только такие виды треугольников.

ОРТОЦЕНТРИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Ортоцентрическим называется треугольник, вершинами которого являются основания высот заданного треугольника.

$\triangle H_1H_2H_3$ – *ортоцентрический* (для $\triangle ABC$)



$\angle 1 = \angle B$
$\angle 2 = \angle C$
$\angle 3 = \angle A$

Опорная задача

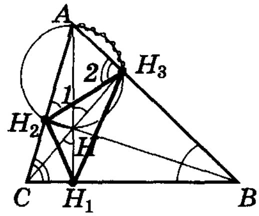


Рис. 6.5

Отрезки AH_1, BH_2 и CH_3 – высоты треугольника ABC. Докажите, что $\angle AH_2H_3 = \angle B$; $\angle AH_3H_2 = \angle C$ (рис. 6.5).

Дано: $AH_1 \perp CB$; $BH_2 \perp AC$; $CH_3 \perp AB$.

Доказать: $\angle 1 = \angle B$; $\angle 2 = \angle C$.

1) $\angle CHH_1 = \angle B$ как углы, образованные взаимно перпендикулярными сторонами;

2) $\angle AH_2H = 90° = \angle AH_3H$, тогда четырехугольник AH_2HH_3 – вписанный;

3) $\cup AH_3$: $\angle 1 = \angle AHH_3 = \angle CHH_1 = \angle B$.

Аналогично можно доказать, что $\angle 2 = \angle C$.

Самостоятельно докажите такие свойства ортоцентрического треугольника.

1. Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортоцентрического треугольника.

2. Углы ортоцентрического треугольника, построенного в треугольнике ABC, равны $180° - 2\angle A$, $180° - 2\angle B$, $180° - 2\angle C$.

3. В остроугольном треугольнике точка пересечения высот являются центром окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются основания высот данного треугольника. А что будет в случае тупоугольного треугольника?

4. Вершины A, B и C треугольника ABC являются ортоцентрами треугольников HBC, HAC и HAB соответственно.

5. Окружности, описанные вокруг четырех треугольников с вершинами в точках A, B, C, H, имеют равные радиусы.

Можно ли, опираясь на эти свойства, восстановить треугольник по данным трем точкам H_1, H_2, H_3 – основаниям его высот?

ПЕДАЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

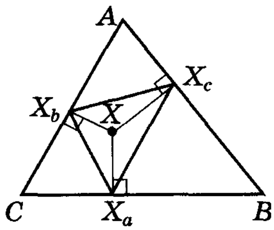
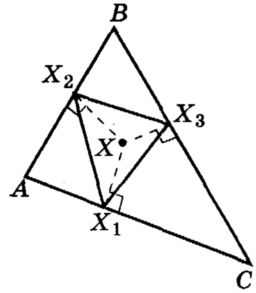


Рис. 6.6

Пускай произвольная точка X находится всередине нетупоугольного треугольника ABC, а X_a, X_b, X_c – проекции точки X соответственно на стороны a, b, c этого треугольника (рис. 6.6). Треугольник с вершинами в точках X_a, X_b, X_c называется *педальным*. Рассмотрим несколько свойств педальных треугольников.



$\triangle X_1X_2X_3$ – *педальный*

Т Теорема 1. **Если точка X совпадает с ортоцентром треугольника $X_aX_bX_c$, то она является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC.**

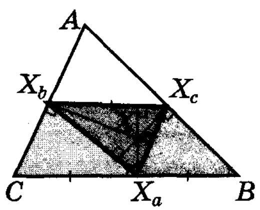


Рис. 6.7

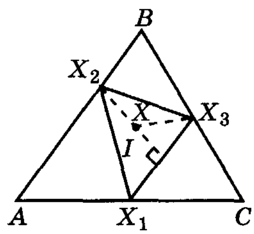
Доказательство

1) X – ортоцентр треугольника $X_aX_bX_c$; X_a, X_b, X_c – проекции точки X на стороны треугольника ABC (рис. 6.7). Тогда $X_aX_b \parallel AB$, $X_bX_c \parallel BC$, $X_aX_c \parallel AC$ и четырехугольники $AX_bX_aX_c$, $BX_aX_bX_c$, $CX_bX_cX_a$ – параллелограммы.

2) $BX_aX_bX_c$, $CX_bX_cX_a$ – параллелограммы, тогда $CX_a = X_bX_c = X_aB$ и XX_a – серединный перпендикуляр к отрезку CB. Аналогично XX_c и XX_b – серединные перпендикуляры к AB и AC.

3) X – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC, тогда X – центр окружности, описанной вокруг этого треугольника.

Ч. т. д.



$$\frac{X \equiv H_{X_1X_2X_3}}{\Downarrow}$$
$$X \equiv O_{ABC}$$

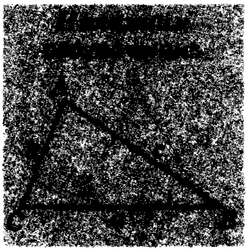
В моральном плане математика учит нас строго относиться к тому, что утверждается как истина, что выдвигается как аргумент или высказывается как доказательство. Математика требует ясности понятий и утверждений, не терпит ни тумана, ни бездоказательных заявлений.

А.Д. Александров

Остроградский Михаил Васильевич (1801–1862) родился в селе Пашенная (сейчас – Пашеновка) на Полтавщине в семье мелкого помещика. В 1817 г. поступил на физико-математический факультет Харьковского университета. Первый год учился плохо и оставил университет, но через год вернулся и в 1820 г. закончил учебу, блестяще сдав все экзамены.

Однако из-за реакционных преподавателей, обвинявших Михаила Васильевича в антирелигиозных настроениях, он не получил документ об окончании университета. В 1822 г. М.В. Остроградский выехал в Париж, где совершенствовал свое математическое образование.

Вернувшись в 1828 г. на родину, он поселился в Петербурге. М.В. Остроградский оставил большое научное наследие в самых разных областях математики. Он лично был знаком с Лапласом, Фурье, Коши и другими знаменитыми математиками того времени. Характеризуя научный вклад М.В. Остроградского, Н.Е. Жуковский говорил: «В произведениях Остроградского нас привлекает общность анализа, главная мысль их так широка, как просторы его родных полей».



Теорема 2. Если точка X совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник $X_aX_bX_c$, то она является ортоцентром треугольника ABC.

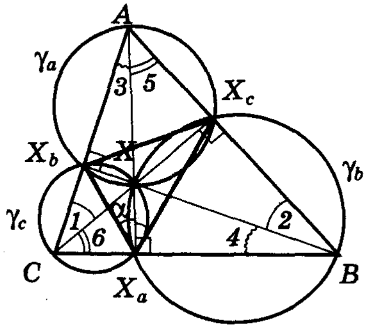
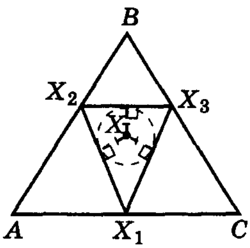


Рис. 6.8



$X \equiv I_{X_1X_2X_3}$

$\Downarrow$

$X \equiv H_{ABC}$

Пусть X – инцентр треугольника $X_aX_bX_c$. Надо доказать, что точки A, X, X_a лежат на одной прямой; точки B, X, X_b лежат на одной прямой; точки C, X, X_c лежат на одной прямой.

Доказательство

1) Опишем вокруг четырехугольников XX_aBX_c, XX_aCX_b, X_cXAX_b окружности γ_b, γ_c, γ_a соответственно (рис. 6.8). $\angle X_bX_aX = \angle XX_aX_c$ – обозначим их α.

2) В окружностях γ_c и γ_b: $\angle 1 = \alpha$ (опираются на $\smile XX_b$) и $\angle 2 = \alpha$ (опираются на $\smile XX_c$), т. е. $\angle 1 = \angle 2$.

Аналогично получим равенства: $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = \angle 6$.

3) В треугольнике ABC: $2\angle 1 + 2\angle 3 + 2\angle 6 = 180°$. Тогда $\angle 1 + \angle 6 + \angle 3 = 180° : 2 = 90°$.

4) $\angle AXX_b + \angle X_bXX_a = (90° - \angle 3) + (90° - \angle 1) + (90° - \angle 6) = 3 \cdot 90° - (\angle 3 + \angle 1 + \angle 6) = 2 \cdot 90° = 180°$. Тогда точки A, X, X_a лежат на одной прямой.

Аналогично точки B, X, X_b лежат на одной прямой; точки C, X, X_c лежат на одной прямой.

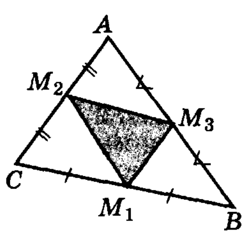
Теорема доказана.

Докажите самостоятельно.

1. Если точка X совпадает с центром окружности, описанной вокруг треугольника $X_aX_bX_c$, то она – центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

2. Если точка X совпадает с центроидом треугольника $X_aX_bX_c$, то выполняется соотношение: $XX_a : XX_b : XX_c = a : b : c$.

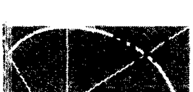
3. Если в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) точка X совпадает с центроидом треугольника $X_aX_bX_c$, то точки C, X, X_c лежат на одной прямой.



$\triangle M_1M_2M_3$ – *серединный*

СЕРЕДИННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Серединным треугольником данного треугольника называют треугольник, вершинами которого являются середины сторон заданного треугольника. (См. пп. 1–2 доказательства теоремы 3 на стр. 198.)



Докажите самостоятельно такие свойства серединного треугольника.

1. Серединный треугольник подобен заданному треугольнику с коэффициентом подобия 1/2.

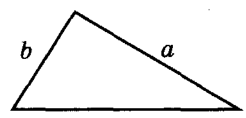
2. Серединный и заданный треугольники имеют общий центроид (точку пересечения медиан).

3. Центр описанной окружности треугольника является ортоцентром его серединного треугольника.

4. Треугольник $M_1M_2M_3$ – серединный для треугольника ABC. Тогда $AH = 2H_0M_1$, где H и H_0 – ортоцентры треугольников ABC и $M_1M_2M_3$ соответственно, а M_1 – середина стороны CB.

РАЗНОСТНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Разностный треугольник



$a - b = c - a$

Треугольник, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию, называется *разностным*.

Замечание (для тех, кто еще не учил прогрессий в курсе алгебры). Арифметической прогрессией называется последовательность (последовательно пронумерованные числа), в которой каждый следующий член последовательности отличается от предыдущего на одно и то же число (разность прогрессии).

Если в таком треугольнике длины сторон удовлетворяют неравенству $b < a < c$, то $a - b = c - a$ – разность арифметической прогрессии $\{a, b, c\}$, т. е. $2a = c + b$.

Докажите самостоятельно несколько свойств разностного треугольника.

1. В разностном треугольнике ABC ($b < a < c$):

а) полупериметр $p = 3a : 2$;

б) радиус вписанной окружности $r = \frac{h_a}{3}$.

2. Чтобы треугольник ABC был разностным, необходимо и достаточно, чтобы $AI = IW_a$, где I – инцентр треугольника, а W_a – точка пересечения биссектрисы угла A с описанной вокруг этого треугольника окружностью.

3. Чтобы треугольник ABC был разностным, необходимо и достаточно, чтобы $W_aL_a = L_aI$, где I – инцентр треугольника; L_a – основание биссектрисы угла A; W_a – точка пересечения биссектрисы угла A с описанной вокруг этого треугольника окружностью.

Лучший способ выучить что-либо – открыть это самому.

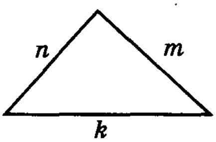
Д. Пойя

Вороной Георгий Феодосиевич (1868–1908) принадлежит к когорте наиболее известных украинских математиков прошлого. За свою короткую жизнь он успел напечатать всего лишь шесть больших трудов и шесть небольших заметок. Но все его труды, наполненные новыми и глубокими идеями, имели большое влияние на развитие математической науки в области теории чисел.

Родом Г. Вороной из села Журавка на Полтавщине. Окончил Георгий Феодосиевич Петербургский университет, работал профессором Варшавского университета и Варшавского политехнического института. По завещанию был похоронен в родном селе.

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Целочисленный треугольник



$\{n, m, k\} \in N$

Целочисленным называется треугольник, длины сторон которого выражаются натуральными числами. Таких треугольников бесконечное множество. Все тройки натуральных чисел, которые удовлетворяют условию неравенства для сторон треугольника, могут быть длинами сторон целочисленного треугольника.

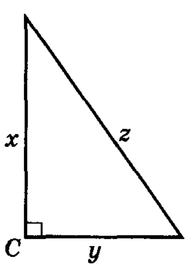
Если целочисленный треугольник является прямоугольным, то его называют *пифагоровым треугольником*. Например, пифагоровыми являются египетские треугольники, длины сторон которых пропорциональны 3, 4 и 5 единицам измерения. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы целочисленный треугольник с длинами сторон x, y, z был пифагоровым, является выполнение соотношения*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Это вытекает непосредственно из теоремы Пифагора и обратной к ней.

Понятно, если тройка чисел $\{x, y, z\}$ удовлетворяет указанному уравнению, то удовлетворяет его и каждая тройка $\{tx, ty, tz\}$, где t – произвольное натуральное число.

Пифагоров треугольник



$\{x, y, z\} \in N$

$\angle C = 90^\circ$

Основной пифагоров треугольник: x, y, z – взаимно простые

Пифагоров треугольник называется *основным*, если длины его сторон $\{x, y, z\}$ – взаимно простые числа (то есть не имеют общих множителей).

Пифагор нашел, что тройки чисел $\{2n + 1;\ 2n^2 + 2n;\ 2n^2 + 2n + 1\}$, где $n \in N$, удовлетворяют уравнению $(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$, то есть определяют пифагоров треугольник.

Платон нашел другое тождество, с помощью которого также можно найти числа, удовлетворяющие условию существования пифагорова треугольника:

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2.$$

Заметим, что последнее соотношение не содержит «египетской» тройки $\{3, 4, 5\}$.

Оба тождества не дают всех решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.

Позже было найдено тождество

$$(2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2,$$

которое дает возможность найти все решения такого уравнения.

Пользуясь приведенными тождествами, **самостоятельно найдите** несколько троек чисел, определяющих длины сторон основных пифагоровых треугольников. Вычислите их площадь, диаметры вписанной и описанной окружностей и составьте соответствующую таблицу.

Рассмотрим *свойства основного пифагорова треугольника*.

1. Длина одного из катетов всегда число нечетное, а другого – четное. Длина гипотенузы – всегда нечетное число.

Справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из того, что длины сторон треугольника взаимно простые числа, при условии существования такого треугольника $z^2 = x^2 + y^2$. Последнее можно представить в виде: $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$ или $y^2 = z^2 - x^2$.

Доведите доказательство до конца **самостоятельно** (рассмотрите случаи, когда x является числом четным и нечетным).

Следующие свойства **докажите самостоятельно.**

2. Один из катетов делится на четыре.

3. Один из катетов делится на три (Совет. Предположите противоположное, что $x = 3k + 1$ или $x = 3m - 1$.)

4. Одно из чисел $\{x, y, z\}$ делится на 5.

5. Произведение длин катетов делится на 12.

6. Произведение длин всех сторон делится на 60.

7. Диаметр описанной окружности – число натуральное.

8. Радиус вписанной окружности – число натуральное.

У народов, которые владеют геометрией, даже самые простые вещи имеют какую-то особую красоту.

Ф. Прокопович

Рассмотрим задачу Брахмагупты (индийский математик VI в.) на использование пифагоровых треугольников.

Задача Брахмагупты. **Приведите пример вписанного четырехугольника, длинами сторон которого являются разные натуральные числа, чтобы при этом длины диагоналей, площадь и радиус описанной вокруг этого четырехугольника окружности были целыми числами.**

Решение

Выберем два произвольных пифагоровых треугольника, например со сторонами $3n$, $4n$, $5n$. Обозначим катеты этих треугольников как a_1, b_1 и a_2, b_2 соответственно, а гипотенузы – c_1 и c_2. Отложим отрезок l, длина которого равна единице измерения, и построим как четвертое пропорциональное (см. стр. 113) отрезки:

$$x = a_1a_2 : l, \quad y = b_1b_2 : l, \quad z = b_1a_2 : l, \quad t = a_1b_2 : l.$$

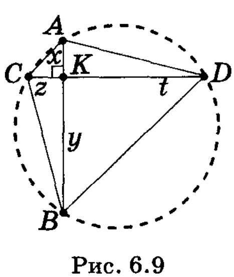


Рис. 6.9

На двух перпендикулярных прямых от точки их пересечения K отложим отрезки x, y, z, t (рис. 6.9).

Длины диагоналей AB и CD четырехугольника $ACBD$ являются целыми числами (по построению), и площадь этого четырехугольника выражаются целым числом (т. к. $AB \perp CD$). Имеем, что $AK \cdot KB = CK \cdot KD$ и вокруг четырехугольника $ACBD$ можно описать окружность (см. задачу № 30 на стр. 151).

Тогда по лемме Архимеда о перпендикулярных хордах (стр. 151) выполняется соотношение:

$$4R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (a_1a_2)^2 + (b_1b_2)^2 + (b_1a_2)^2 + (a_1b_2)^2 =$$
$$= a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2) = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2).$$

Отсюда: $4R^2 = c_1^2c_2^2$ и $R = c_1c_2 : 2$.

Если c_1 и c_2 – нечетные числа, то увеличим четырехугольник в два раза. Тогда длина радиуса R будет целым числом. Задача решена.

СВОЙСТВА ОСНОВНОГО ПИФАГОРОВА ТРЕУГОЛЬНИКА:
(x, y – катеты, z – гипотенуза):

1) $x \vdots 2$ или $y \vdots 2$;
2) $x \vdots 4$ или $y \vdots 4$;
3) $x \vdots 3$ или $y \vdots 3$;
4) $x \vdots 5$ или $y \vdots 5$ или $z \vdots 5$;
5) $x \cdot y \vdots 12$;
6) $x \cdot y \cdot z \vdots 60$;
7) $2R \in n$;
8) $r \in n$.

ТРЕУГОЛЬНИКИ НАПОЛЕОНА И ОКРУЖНОСТИ ТОРРИЧЕЛЛИ

Если на сторонах треугольника построить правильные треугольники, то получим конфигурацию из четырех треугольников, которую называют *треугольниками Наполеона.*

Окружности, описанные вокруг построенных правильных треугольников, называют *окружностями Торричелли.*

Считают, что именно Наполеон Бонапарт (французский император) изучал эту конфигурацию, первым сформулировал и доказал утверждение, известное как *теорема Наполеона*: **«Если на сторонах произвольного треугольника извне его построены равносторонние треугольники, то их вершины являются вершинами равностороннего треугольника».**

Известно, что Наполеон Бонапарт увлекался математикой, больше всего – геометрией. Говорят, что как-то Наполеон, который тогда еще не был правителем Франции, спорил с известными математиками Лагранжем и Лапласом. Во время одной из дискуссий Лаплас прервал Наполеона словами: «Меньше всего мы желаем, чтоб вы, генерал, учили нас геометрии!» В дальнейшем Лаплас стал главным военным министром Наполеона.

Хотя Наполеон занимался геометрией (в частности, известен его способ деления окружности на четыре равные части с помощью только циркуля), многие специалисты не верят в то, что он мог доказать теорему, названную его именем.

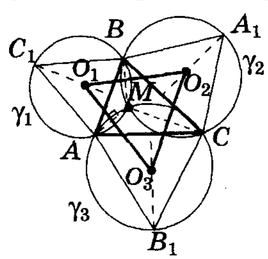


Рис. 6.10

Доказательство

Пусть $\triangle C_1AB$, $\triangle A_1CB$ и $\triangle B_1AC$ – правильные (рис. 6.10); окружности γ_1, γ_2 и γ_3 описаны вокруг этих треугольников (соответственно). Докажем, что γ_1, γ_2 и γ_3 пересекаются в одной точке – *точке Торричелли.*)

Обозначим точку пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников AB_1C и CA_1B, как M. Тогда $\angle AMC = 180° - 60° = \angle BMC$. Отсюда $\angle AMB = 360° - 2 \cdot 120° = 120°$, и точка M лежит на окружности, описанной вокруг $\triangle ABC_1$.

Прямые O_1O_3 и O_1O_2 перпендикулярны к общим хордам AM и BM окружностей γ_1, γ_3 и γ_1, γ_2 соответственно.

Тогда $\angle O_1 + \angle AMB = 180°$ и $\angle O_1 = 180° - \angle AMB = 60°$.

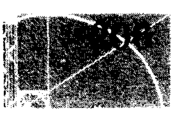
Аналогично $\angle O_2 = \angle O_3 = 60°$ и $\triangle O_1O_2O_3$ – правильный.

Теорема Наполеона доказана.

Мы строили правильные треугольники извне заданного треугольника на его сторонах. Их еще называют *внешними треугольниками Наполеона* для заданного треугольника. По аналогии, если правильные треугольники строят на сторонах треугольника внутрь его, то их называют *внутренними треугольниками Наполеона* для заданного треугольника. **Докажите самостоятельно,** что треугольник с вершинами в центрах внутренних треугольников Наполеона также является правильным.

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. *Бевз Г.П.* Геометрія трикутника. – К.: Генеза, 2005. – 120 с.
2. *Зеттель С.И.* Новая геометрия треугольника. – М.: Просвещение, 1962.
3. *Коксетер Г.С. М., Грейтцер С.Л.* Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 224 с.
4. *Никулин А.В., Кукуш А.Г., Татаренко Ю.С.* Геометрия на плоскости (Планиметрия). – Минск: ООО «Попурри», 1996. – 592 с.
5. *Кушнір І.А.* Повернення втраченої геометрії. – К.: Факт, 2000. – 280 с.
6. *Кушнір І.А.* Трикутник і тетраедр у задачах. – К.: Рад. шк., 1991. – 208 с.



Параллельные отрезки в трапеции. Соотношение между средними величинами

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = b$ и $BC = a$ $(a < b)$.

①Мы знаем, что ДЛИНА СРЕДНЕЙ ЛИНИИ трапеции равна $(a + b)/2$, то есть является **средним арифметическим длин ее оснований.**

Она делит боковые стороны трапеции пополам.

②Из опорных задач трапеции (§ 25) знаем, что:

• отрезок, параллельный основаниям a и b трапеции, концы которого лежат на боковых сторонах этой трапеции и делят эти стороны в отношении $m : n$ (считая от основания a), равен $\dfrac{an+bm}{m+n}$;

• отрезок, параллельный основаниям a и b трапеции, концы которого принадлежат боковым сторонам трапеции, ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДИАГОНАЛЕЙ трапеции, равен $\dfrac{2ab}{a+b}$ и делит боковые стороны в отношении $a : b$ (пропорционально прилежащим основаниям).

Последнее выражение можно записать в виде $x = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Такое соотношение между числами a и b называют **средним гармоническим чисел a и b.**

③ Теперь рассмотрим отрезок PE, параллельный основаниям трапеции a и b, ДЕЛЯЩИЙ ее на ДВЕ ПОДОБНЫЕ ТРАПЕЦИИ $PBCE$ и $APED$ (все углы – попарно равны, а соответственные стороны – пропорциональны) (рис. 6.11).

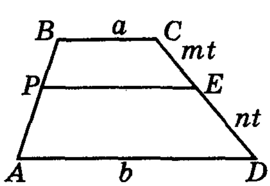


Рис. 6.11

Тогда $\dfrac{AD}{PE}=\dfrac{PE}{BC}$, $PE^2 = ab$ и $PE = \sqrt{ab}$. Такое выражение называют ***средним геометрическим чисел а и b.***

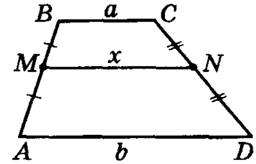
Найдем, в каком отношении этот отрезок делит боковые стороны трапеции. Имеем:

$$\frac{an+bm}{m+n}=\sqrt{ab},\ \frac{a+b\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1}=\sqrt{ab},\ a+b\frac{m}{n}=\sqrt{ab}\left(\frac{m}{n}+1\right),$$

$$\frac{m}{n}(b-\sqrt{ab})=\sqrt{ab}-a,\ \frac{m}{n}=\frac{\sqrt{ab}-a}{b-\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Таким образом, PE делит боковые стороны трапеции в отношении $\dfrac{m}{n}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}<\dfrac{a}{b}<1.$

$x \parallel a$

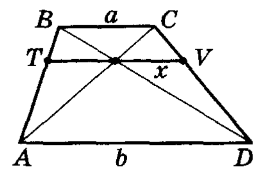


$x = \dfrac{a+b}{2}$

↗

среднее арифметическое

$x \parallel a$

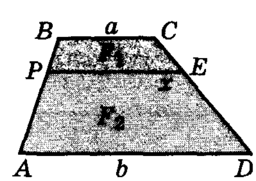


$x = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

↗

среднее гармоническое

$x \parallel a$ и $F_1 \backsim F_2$



$F_1 \backsim F_2$

$x = \sqrt{ab}$

↗

среднее геометрическое

Тогда этот отрезок находится выше средней линии, но ниже точки пересечения диагоналей трапеции.

(4.) Найдем длину отрезка LK, параллельного основаниям a и b трапеции с концами на боковых сторонах трапеции, ДЕЛЯЩЕГО ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ ПОПОЛАМ (рис. 6.12).

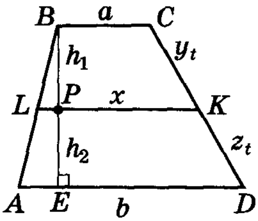


Рис. 6.12

Проведем в трапеции высоту BE; LK делит ее на отрезки BP и PE, которые являются высотами h_1 и h_2 трапеций $LBCK$ и $ALKD$ соответственно. Обозначим искомый отрезок LK через x, площадь трапеций $LBCK$, $ALKD$ и $ABCD$ – S_1, S_2 и S соответственно. Тогда:

$$S_1 = \frac{1}{2}(x + a)h_1,\ S_2 = \frac{1}{2}(x + b)h_2,\ S = \frac{1}{2}(a + b)(h_1 + h_2).$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (x + a)h_1 = (x + b)h_2, \\ 2(x + a)h_1 = (a + b)(h_1 + h_2). \end{cases}$$

Найдем из первого уравнения системы h_2 и подставим во второе. Получим

$$2(x+a)h_1 = \frac{(a+b)h_1(2x+a+b)}{x+b}.$$

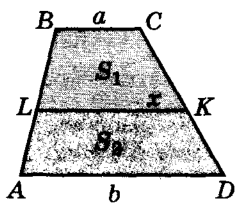
Отсюда:
$2(x + a)(x + b) = (a + b)(2x + a + b)$, $2x^2 = a^2 + b^2$,

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Последнее выражение называют **средним квадратическим чисел a и b.**

Не трудно найти отношение $\frac{CK}{KD}$, в котором отрезок LK делит боковые стороны трапеции, и убедиться, что это отношение будет больше, чем 1. (Сделайте это **самостоятельно.**) Тогда отрезок LK будет располагаться в трапеции ниже средней линии.

$x \parallel a$ и $S_1 = S_2$



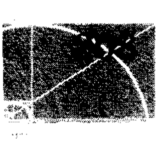
$$x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

среднее квадратическое

Давно замечено, что геометрия – это чудесная логика. А таки действительно: когда определения ясны, когда постулаты неоспоримы, когда свойства фигур вытекают из четкого наблюдения с помощью четкой цепочки последовательных рассуждений, а объекты все время находятся в поле зрения, – то таким путем формируется привычка думать точно, последовательно и методично; эта привычка усиливает и оттачивает ум и становится нужной во время поисков истины в других областях.

Дж. Беркли

В конце XIX – начале XX в. *формальная логика* опиралась на естественный язык, поэтому ее еще называли *традиционной логикой*. Позже в логику были введены специальные обозначения – *символы*, и ее назвали *математической*, или *символической* (*современной*), *логикой*.



Мы рассмотрим четыре отрезка, проведенные в трапеции параллельно основаниям, длины которых равны: среднему арифметическому ее оснований (MN), среднему гармоническому ее оснований (TV), среднему геометрическому ее оснований (PE) и среднему квадратическому ее оснований (LK). При этом мы выяснили, что $TV < PE < MN < LK$ (рис. 6.13).

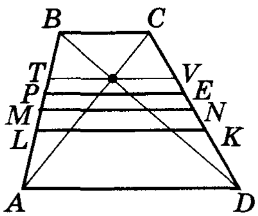


Рис. 6.13

В случае, когда $a = b$, все отрезки совпадают и будут равны между собой.

Мы доказали геометрически для положительных чисел a и b:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

То есть:

• *среднее квадратическое двух положительных чисел больше либо равно их среднему арифметическому;*

• *среднее арифметическое двух положительных чисел больше либо равно их среднему геометрическому (среднему пропорциональному);*

• *среднее геометрическое двух положительных чисел больше либо равно их среднему гармоническому.*

• *каждое из этих соотношений будет равенством только при $a = b$.*

Отрезок, параллельный основаниям трапеции с концами на боковых сторонах	**Длина соответственного отрезка в зависимости от длины оснований трапеции a и b**	**Название соответствующего среднего**
Средняя линия трапеции	$\frac{a+b}{2}$	среднее арифметическое
Отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей	$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$	среднее гармоническое
Отрезок, делящий трапецию на две подобные трапеции	$\sqrt{ab}$	среднее геометрическое
Отрезок, делящий площадь трапеции на две равновеликие части	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	среднее квадратическое
$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$		

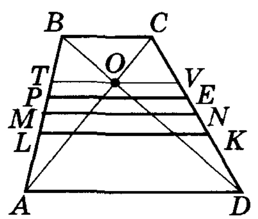
$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Равенство достигается только при $a = b$.

В произвольной трапеции:



$O \in TV$
$BCEP \sim PEDA$;
MN – средняя линия;
$S_{LBCK} = S_{ALKD}$

Среднее квадратическое

$\geqslant$

среднее арифметическое

$\geqslant$

среднее геометрическое

$\geqslant$

среднее гармоническое

$A_n \geqslant G_n$

$\uparrow$

неравенство Коши

(для неотрицательных чисел)

Средним арифметическим A_n нескольких чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n называется результат деления суммы этих чисел на их количество:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Среднее гармоническое C_n положительных чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n вычисляется по такой формуле:

$$C_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Средним геометрическим G_n положительных чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n называется корень n-ой степени из произведения этих чисел:

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Средним квадратическим S_n чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n называется квадратный корень из среднего арифметического квадратов данных чисел:

$$S_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Указанные средние величины связаны уже известными нам соотношениями:

$$C_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant S_n.$$

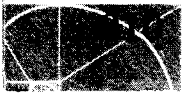
При этом каждое неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

Замечание. Понятия рассмотренных нами средних величин известны еще со времен Древней Греции.

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. *Никулин А.В., Кукуш А.Г., Татаренко Ю.С.* Геометрия на плоскости (Планиметрия). – Минск: ООО «Попурри», 1996. – 592 с.
2. *Сивашинский И.Х.* Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

В Древней Греции говорили, что четыре числа a, b, c, e образуют *арифметическую пропорцию* и если $a - b = c - e$. Пропорция называлась *непрерывной*, если $b = c$. В этом случае число $b = (a + e) : 2$ называли *средним арифметическим* чисел a и e. Говорили, что четыре числа a, b, c, e образуют *геометрическую пропорцию*, если $a : b = c : e$. Пропорция называлась *непрерывной*, если $b = c$. В этом случае легко получить $b = \sqrt{ae}$. Число b называли *средним геометрическим* чисел a и e. Наконец, говорили, что четыре числа a, b, c, e образуют *гармоническую пропорцию*, если $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{e}$. В случае $b = c$ (*непрерывной пропорции*) число $b = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{e}}$ называли *средним гармоническим* чисел a и e. Открытие гармонической пропорции приписывают пифагорийцам.

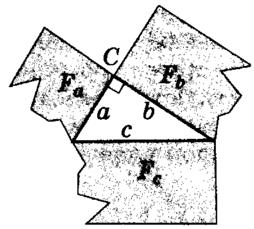


Знаменитые теоремы древности

Вы уже знаете выдающегося ученого античного мира Евклида (IV в. до н. э.), автора знаменитых «Начал» – книги, ставшей на многие тысячелетия образцом изложения научных теорий и учебником, по которому училось геометрии много поколений.

Рассмотрим одну из теорем книги 6 «Начал» Евклида, которую можно считать обобщением теоремы Пифагора. Греческий философ, комментатор Евклида, Прокл (410–485), писал, что эту форму теоремы Пифагора предпочитали другим как такую, которая правильно выражает именно суть этой теоремы.

Теорема Евклида



$\angle C = 90°$

$F_a \backsim F_b \backsim F_c$

$\Downarrow$

$S_a + S_b = S_c$

Теорема Евклида. **Если на катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника построить любые подобные фигуры *A*, *B* и *C*, в которых катеты и гипотенуза данного треугольника являются соответственными сторонами, то $S_a + S_b = S_c$, где S_a, S_b и S_c – площади построенных фигур** (рис. 6.14).

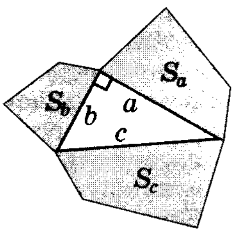


Рис. 6.14

Доказательство

$\dfrac{S_a}{S_c} = \dfrac{a^2}{c^2}$, $\dfrac{S_b}{S_c} = \dfrac{b^2}{c^2}$ (см. поле).

Отсюда $S_a \cdot c^2 = S_c \cdot a^2$ и $S_b \cdot c^2 = S_c \cdot b^2$. Сложив почленно эти равенства, получим: $c^2 (S_a + S_b) = (a^2 + b^2) S_c$.

Но $c^2 = a^2 + b^2$, поэтому $S_a + S_b = S_c$. Теорема доказана.

Подобные многоугольники – такие, что все их стороны пропорциональны, а соответственные углы равны.

Все их соответственные *линейные элементы* пропорциональны с одним коэффициентом k, а *площади* относятся как k^2.

Архимед из Сиракуз (прим. 287–212 гг. до н. э.) принадлежит к тем гениям, чье творчество на много веков определило судьбу науки. Он совершил великие открытия в механике, оптике и технические изобретения, но делом жизни Архимеда была математика. Архимед, как и другие древнегреческие математики, делал геометрические построения на доске, посыпанной песком, либо в ящике с песком. Он открыл множество зависимостей для геометрических фигур. В разделе I (стр. 36, 116, 151) мы уже рассматривали некоторые математические утверждения, открытые Архимедом.

Множество произведений Архимеда утеряны, но и сохранилось значительное количество – на протяжении 22 столетий! Даже для современных геометров «*Книга лемм*» Архимеда является интересной. В большинстве трактатов Архимеда речь идет об открытии определенных закономерностей, но не приводится их доказательство. Поэтому доказательство лемм Архимеда, которые мы будем рассматривать дальше, были осуществлены несколько позднее – арабами, а чаще всего нашими современниками.

Путь, которым сам Архимед доказывал открытые им утверждения, в большинстве случаев остается неизвестным для того, чтобы, по словам Архимеда, «*каждый математик имел удовольствие самостоятельно получить этот результат*».

Рассмотрим задачу, которой начинается «Книга лемм» Архимеда.

Леммой математики называют небольшие вспомогательные теоремы, которые обычно следуют перед доказательством основной теоремы.

Лемма о параллельных диаметрах. **Если две окружности касаются друг друга в точке K, а AB и CD – их параллельные диаметры, то точки C, K и B лежат на одной прямой** (рис. 6.15).

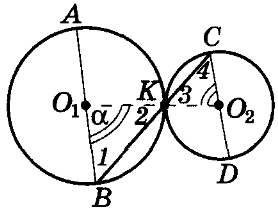


Рис. 6.15

Доказательство

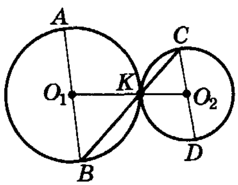
Как известно, центры окружностей O_1 и O_2, а также их точка касания K лежат на одной прямой (на линии центров). Тогда прямая O_1O_2 является секущей при параллельных прямых AB и CD. Отсюда $\angle O_2O_1B = \angle O_1O_2C$, обозначим его как α.

Треугольники BO_1K и KO_2C равнобедренные. Тогда $\angle 1 = (180° - \alpha) : 2 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.

Получили, что по разные стороны от прямой O_1O_2 с вершиной в точке K отложили два равных угла O_1KB и CKO_2, тогда точки B, K и C принадлежат одной прямой.

Утверждение леммы доказано.

Лемма Архимеда о параллельных диаметрах и обратная ей



$$\frac{AB = 2R_1;\ CD = 2R_2 \quad AB \parallel CD}{\Downarrow\Uparrow}$$
$$K \in CB$$

Аналогично можно доказать соответствующее утверждение и в случае внутреннего касания двух окружностей. **Сделайте это самостоятельно.** Кроме того, **докажите самостоятельно** обратное утверждение, то есть лемму, обратную к лемме Архимеда о параллельных диаметрах: **«Если через точку касания двух окружностей провести прямую, пересекающую окружности в точках B и C соответственно, то радиусы с концами в этих точках параллельны между собой».**

Лемма Архимеда о параллельных диаметрах и обратная ей помогут при решении, например, следующих задач (**убедитесь в этом самостоятельно**).

1. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Через точку K провели прямую, пересекающую эти окружности в точках A и B. Докажите, что прямые, касательные к окружностям в точках A и B, – параллельны.

2. Даны окружность и прямая вне этой окружности. Постройте окружность, касающуюся заданной окружности и заданной прямой в данной на ней точке. (Не забудьте рассмотреть случай внутреннего касания окружностей.)

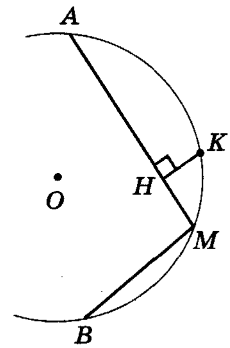
3. Через данную точку вне окружности проведите окружность, касающуюся данной окружности в данной на ней точке.

Анализ – мыслительный процесс разложения целого на элементы, части.
Синтез – мыслительный процесс объединения разных элементов, частей в целое.
Д. Пойя: «*Метод анализа* – метод продвижения от начала к концу; *метод синтеза* – метод продвижения от конца к началу».
Дидактическая конструкция – задачи внутри задачи, то есть цепочка задач, каждая из которых содержит в себе одну или несколько идей, которые нужны для решения начальной, более сложной задачи.

Докажем теорему Архимеда, которую арабский математик **Абу Райхан Беруни** (973–1043) считал очень важной, часто использовал и нашел несколько ее доказательств.

Теорема Архимеда. **Если из середины дуги, описанной вокруг ломаной из двух звеньев, опустить перпендикуляр на большее звено, то он разделит всю ломаную на две части одинаковой длины.**

Теорема Архимеда



$\smile AK = \smile KB$

$\underline{KH \perp AM}$

$\Downarrow$

$AH = HM + MB$

Пусть у нас есть две хорды AM и MB ($AM > MB$). Из точки K, середины дуги AMB, проведем $KH \perp AM$ (рис. 6.16). Надо доказать, что $AH = HM + MB$.

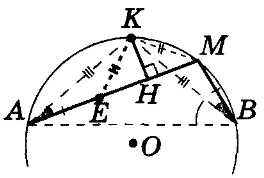


Рис. 6.16

Доказательство

1) $\smile AK = \smile KB$, тогда хорды KA и KB – равны.
2) Вписанные углы KAM и KBM равны (опираются на одну дугу KM).
3) Отложим на AM отрезок $AE = MB$ (см. рис. 6.16). Треугольники KAE и KBM равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $KE = KM$.
4) $\triangle EKM$ – равнобедренный, $KH \perp EM$. Тогда $EH = HM$.
5) $AH = AE + EH = HM + MB$.

Теорема доказана.

Пользуясь рисунками 6.17 и 6.18, **докажите самостоятельно** теорему Архимеда способами Беруни.

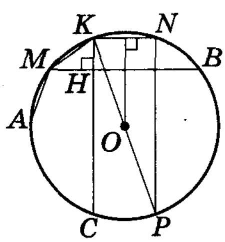


Рис. 6.17

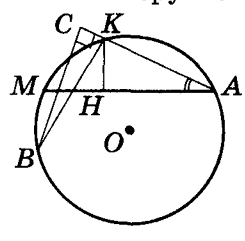
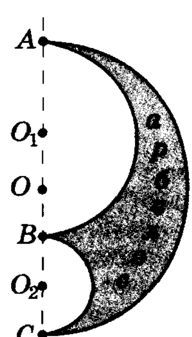


Рис. 6.18

Трактаты Архимеда «Книга о кругах, которые касаются», «О шаре и цилиндре», «О телах вращения», «Об измерении круга» и др. имели большое значение для развития математики.

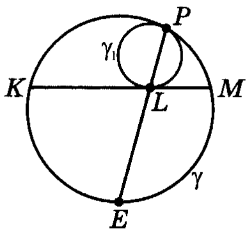
В своих занятиях геометрией Архимед много внимания уделял изучению свойств фигуры, носящей название *арбелос*, или *скорняжный нож*. Это название фигура получила за то, что похожа на нож, использовавшийся скорняками для обработки шкур.

Если взять на прямой три последовательные точки A, B, C и построить три полукруга с диаметрами AB, BC и AC, то часть плоскости, которую ограничивают эти полуокружности, и есть арбелос (рис. на поле).



Из большого количества свойств этой фигуры мы рассмотрим только одно.

Проведем в арбелосе через точку B прямую, перпендикулярную AC, и обозначим точку ее пересечения с большим полукругом как D. Тогда две окружности, вписанные в полученные криволинейные треугольники, имеют одинаковые радиусы.



P и L — точки касания γ_1 и γ
$\Downarrow$
$\smile KE = \smile EM$

Сохранилось доказательство самого Архимеда этого свойства арбелоса. Доказательство Архимеда опиралось на такую лемму.

Лемма Архимеда. **Пусть прямая пересекает данную окружность в точках K и M. Рассмотрим окружность, касающуюся к данной окружности в точке P и к прямой KM – в точке L. Тогда прямая PL проходит через середину одной из двух дуг KM, на которые данную окружность делит данная прямая KM.**

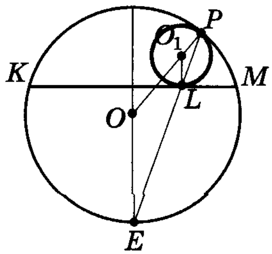


Рис. 6.19

Доказательство

Пускай прямая PL пересекает большую окружность в точке E (рис. 6.19). По лемме, обратной лемме Архимеда о параллельных диаметрах, радиусы O_1L и OE – параллельны. Но L – точка касания меньшей окружности к прямой KM, тогда $O_1L \perp KM$. Отсюда $OE \perp KM$ и точка E – середина дуги KM.

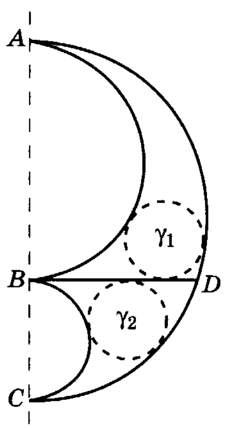
Если бы в математике не было красоты, то, наверное, не было бы и самой математики. Иначе какая тогда сила притягивала бы к этой нелегкой науке крупнейших гениев человечества?

М. Чайковский

В других случаях расположения окружностей доказательство будет аналогичным. Рассмотрите их **самостоятельно.**

Рассмотрим теперь *доказательство указанного ранее свойства арбелоса, предложенное Архимедом.*

На рисунке 6.20 окружность касается прямой BD в точке L, большей полуокружности – в точке P, а меньшей – в точке F. Докажем, что радиус этой окружности равен радиусу окружности, вписанной в другой криволинейный треугольник BDC.



$R_1 = R_2$

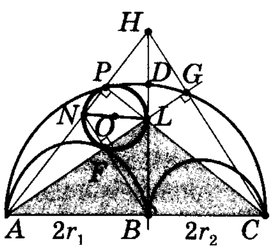


Рис. 6.20

Доказательство

1) По доказанной лемме прямая PL проходит через точку C, а прямая FL – через точку A.

2) Проведем в окружности, которую вписали, диаметр LN. Тогда угол NPL – прямой. Угол APC тоже прямой (опирается на диаметр AC). Тогда точки A, N, P лежат на одной прямой.

3) Углы NFL и AFB – прямые (опираются на диаметры NL и AB). Тогда точки N, F, B лежат на одной прямой.

4) Рассмотрим треугольник ALC. Его высотами являются отрезки LB, AP и CG ($\angle G = 90°$, поскольку AC – диаметр), а ортоцентром точка H – точка пересечения прямых, содержащих эти высоты.

5) По лемме, обратной лемме о параллельных диаметрах, $NL \parallel AB$. Тогда $\triangle HNL \backsim \triangle HAB$ и $NL : AB = NH : AH$.

6) $BN \perp AG$ и $CG \perp AG$, тогда $BN \parallel CG$ и $NH : AH = BC : AC$.

7) Тогда $NL : AB = BC : AC$ и $NL = \dfrac{AB \cdot BC}{AC} = \dfrac{2r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$.

Понятно, что диаметр другой вписанной окружности будет тот же самый.

Так доказывал эту лемму Архимед две тысячи лет тому назад. А как может решить ее современный ученик, интересующийся геометрией? **(Попробуйте доказать эту теорему самостоятельно другим способом.)**

Рассмотрим две формулы для равнобедренного треугольника, открытие которых также приписывают Архимеду.

Формула Архимеда (I). **Квадрат длины боковой стороны равнобедренного треугольника равен сумме квадрата длины отрезка, соединяющего вершину этого треугольника с точкой его основания, и произведению длин отрезков, на которые указанная точка делит основание треугольника.**

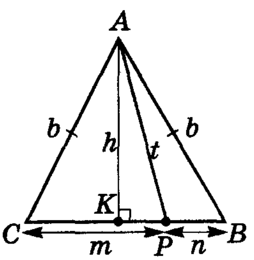


Рис. 6.21

В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = AB = b$): AK – высота (обозначим как h), точка $P \in [CB]$, $AP = t$, $CP = m$, $PB = n$ (рис. 6.21). Надо доказать, что $b^2 = t^2 + m \cdot n$.

Доказательство

1) Из треугольника ACK ($\angle K = 90°$) получим:

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{m+n}{2}\right)^2.$$

2) Из треугольника AKP ($\angle K = 90°$):

$$t^2 = h^2 + \left(\frac{m-n}{2}\right)^2.$$

3) Отнимем от первого уравнения второе:

$$b^2 - t^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = m \cdot n.$$

Ч. т. д.

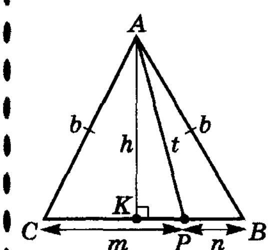
Продемонстрируем, как эта формула может облегчить решение задач.

Пример 1. Докажем с помощью этой формулы теорему о пересекающихся хордах окружности, которую мы доказали в § 24, опираясь на свойства подобных треугольников.

Математика – это большая выдумка без обмана!

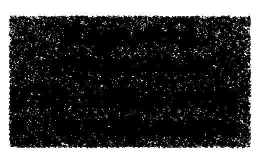
Мистер Доджсон

Формула Архимеда

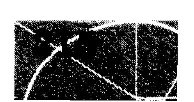


$$\frac{\begin{gathered}AC = AB = b\\ \underline{h \perp CB}\end{gathered}}{\Downarrow}$$

$$b^2 = t^2 + m \cdot n$$



Математик **Чарльз Людовик Доджсон** (1832–1898), профессор Оксфордского университета, всемирно известен как детский писатель **Льюис Кэрролл**. Когда в 1932 году праздновали столетний юбилей писателя Льюиса Кэрролла, рукопись его книги «Алиса в Стране Чудес» была продана за 30 тысяч фунтов стерлингов золотом. На то время это была наибольшая сумма, когда-либо уплаченная за книгу.



Теорема. **Если через точку, взятую внутри окружности, провести хорды, то произведение отрезков хорды, на которые она делится данной точкой, является постоянной величиной для данной окружности.**

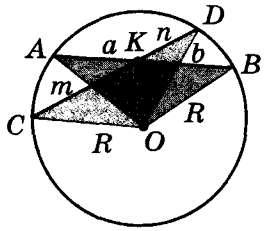


Рис. 6.22

Хорды AB и CD пересекаются в точке K и делятся ею на отрезки a, b и m, n соответственно (рис. 6.22). Надо доказать, что $a \cdot b = m \cdot n$.

Доказательство

Соединим концы хорд с центром окружности O. Тогда получим два равнобедренных треугольника COD и AOB, точка K принадлежит их основаниям. По формуле Архимеда: $R^2 - m \cdot n = OK^2 = R^2 - a \cdot b$. Отсюда $a \cdot b = m \cdot n$.

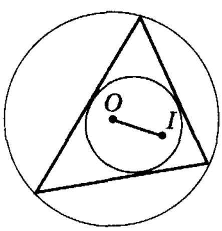
Математика – это поэзия логики идей.
А. Эйнштейн

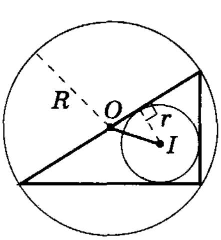
Теорема доказана.

Пример 2. Докажем *формулу Эйлера* о расстоянии между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника. Существует множество доказательств этой формулы, однако наипростейшее и кратчайшее из них опирается на доказанную выше формулу Архимеда.

Теорема. **Расстояние между точкой O – центром описанной окружности и точкой I – центром вписанной в этот треугольник окружности можно вычислить по формуле $OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно.**

Формула Эйлера





$OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$

Доказательство

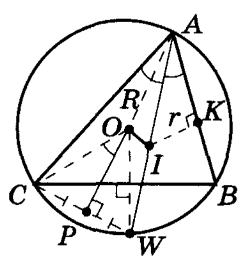


Рис. 6.23

Пусть биссектриса угла A треугольника ABC пересекает окружность, описанную вокруг него, в точке W (рис. 6.23).

1) Из равнобедренного треугольника WOA (по формуле Архимеда) $OI^2 = R^2 - WI \cdot IA$. Осталось доказать, что $WI \cdot IA = 2Rr$.

2) По теореме, которую мы доказали в § 6, $WI = WC$. Треугольник WCA вписан в ту же окружность, что и треугольник ABC. Тогда из $\triangle COP$ ($OP \perp CW$, $\angle COP = \angle COW : 2 = \angle A : 2$):

$$\frac{WC}{2} = R\sin\frac{A}{2} \text{ и } WI = WC = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

Из $\triangle AIK$ ($\angle K = 90°$): $IA = \dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}}$.

Из п. 2 и п. 3 получим, что $WI \cdot IA = WC \cdot IA = 2\,Rr$.
Теорема доказана.

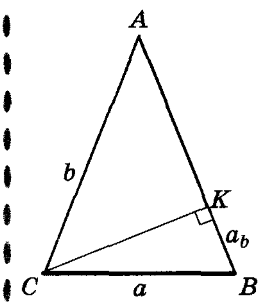
Следующие два примера предлагаются для **самостоятельного доказательства.**

Пример 3. Докажите, что произвольная точка хорды окружности делит ее на отрезки, произведение которых равно разности квадрата радиуса окружности и квадрата расстояния от этой точки до центра окружности.

Пример 4. Докажите, что в равнобокой трапеции квадрат диагонали равен сумме произведения ее оснований и квадрата боковой стороны. (Совет. Через вершину меньшего основания трапеции проведите прямую, параллельную ее диагонали.)

Формула Архимеда (II). **В равнобедренном треугольнике квадрат основания равен удвоенному произведению боковой стороны и проекции основания на боковую сторону.**

Формула Архимеда



$AC = AB = b$
$CK \perp AB$

$\Downarrow$

$a^2 = 2ba_b$

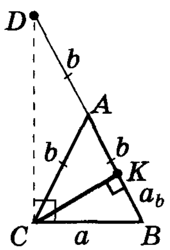


Рис. 6.24

В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = AB$) проведем высоту CK (рис. 6.24). Надо доказать, что $a^2 = 2b \cdot a_b$.

Доказательство

Продолжим сторону AB на отрезок $AD = AB$.

1) $\angle DAC = 2\angle B$ (как внешний угол треугольника ABC).

2) $\angle CDA = \angle DCA = (180° - 2\angle B) : 2 = 90° - \angle B$. Отсюда $\angle DCB = 90°$.

3) Из DCB ($\angle C = 90°$, $CK \equiv h_c$): $a^2 = DB \cdot a_b = 2b \cdot a_b$.

Что и требовалось доказать.

Примеры использования этой формулы предлагаем **доказать самостоятельно.**

Пример 5. Основание равнобедренного треугольника относится к его боковой стороне как 4 : 3. В каком отношении делит боковую сторону этого треугольника его высота?

Пример 6. Высоты равнобедренного треугольника, проведенные к его основанию и боковой стороне, равны 10 см и 12 см соответственно. Найдите длину основания.

Пример 7. Докажите геометрически, что:

а) $\mathrm{ctg}\, 30° + \mathrm{ctg}\, 75° = 2$; б) $\mathrm{tg}\, 15° = 4 \sin^2 15°$.

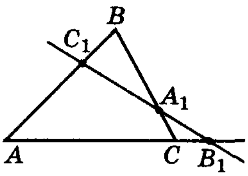
В мае 1989 г. украинское математическое общество праздновало столетний юбилей выдающегося украинского математика профессора Львовского государственного университета **Мирона Онуфриевича Зарицкого** (см. стр. 189) – одного из основателей украинской математической культуры.

«Кого не привлекает ни красота, ни искусство, кто живет убогой духовной жизнью – тот ничего не даст и математике. Поэзия не отличается от математики высшим полетом воображения, а математик отличается от поэта только тем, что все и везде понимает... Но как и в искусстве, так и в математике только произведения, отличающиеся красотой, переживают столетия и воспитывают поколения», – говорил Мирон Зарицкий.

Менелай Александрийский (I–II в.) в книжке «Сферика» дал систематическое изложение сферической геометрии – первой геометрической системы, отличающейся от Евклидовой.

Приведем одну из теорем, сформулированных и доказанных Менелаем, которая и сегодня широко используется во время решения геометрических задач и носит его имя.

Теорема Менелая



$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Теорема Менелая. **Если прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках C_1 и A_1 соответственно, а продолжение стороны AC – в точке B_1, то выполняется соотношение**

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

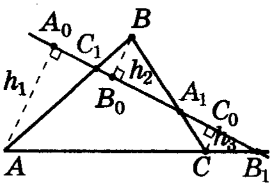


Рис. 6.25

Доказательство

Из вершин треугольника ABC проведем к заданной прямой перпендикуляры AA_0, BB_0, CC_0 и обозначим их как h_1, h_2 и h_3 соответственно (рис. 6.25).

Имеем три пары подобных прямоугольных треугольников (признак подобия по острому углу):

1) $\Delta AA_0C_1 \backsim \Delta BB_0C_1 \to \dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{AC_1}{C_1B}$;

2) $\Delta B_0BA_1 \backsim \Delta C_0CA_1 \to \dfrac{h_2}{h_3}=\dfrac{BA_1}{A_1C}$;

3) $\Delta AA_0B_1 \backsim \Delta CC_0B_1 \to \dfrac{h_3}{h_1}=\dfrac{CB_1}{B_1A}$.

Тогда $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{h_1}{h_2}\cdot\dfrac{h_2}{h_3}\cdot\dfrac{h_3}{h_1}=1$.

Теорема доказана.

Легко **можно доказать** и обратную теорему.

Будущий академик, профессор Киевского и Московского университетов, выдающийся математик и физик-теоретик **Николай Николаевич Боголюбов** (1909–1992) в 1922 г. вместе с матерью переехал в Киев. И именно здесь в свои 13 лет привлек к себе внимание академиков Д.А. Граве и Н.М. Крылова. В 1924 г. Боголюбов написал первую научную работу. 15-летним юношей его без диплома о высшем образовании специальным решением Революционного научного комитета УССР приняли в аспирантуру Академии наук Украины.

А началось все, наверное, из-за проблем с арифметикой. Учитель гимназии, куда поступил Боголюбов, счел необходимым сообщить родителям: «Математиком ваш сын не станет, это ясно. – И, подумав, добавил: – Но характер его дает основание надеяться, что он все же найдет свое призвание».

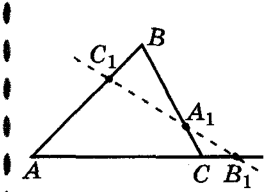
До 14 лет Н.Н. Боголюбов самостоятельно выучил всю элементарную математику, основы высшей математики и математический анализ. Николай Николаевич владел, кроме украинского и русского языков, еще и польским, английским, испанским, итальянским, немецким и французским. «*То, что нравится, легко запоминается*» – так говорил Боголюбов.

Теорема (обратная теореме Менелая). **Если точки C_1 и A_1 на сторонах AB и BC треугольника ABC и точка B_1 на продолжении стороны AC расположены так, что выполняется соотношение**

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

то эти точки лежат на одной прямой (рис. 6.26).

Теорема, обратная теореме Менелая



$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$
$$\Downarrow$$
$$A_1\in(C_1B_1)$$

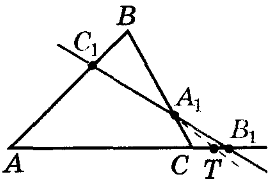


Рис. 6.26

Доказательство

Пусть точка $B_1\notin(A_1C_1)$. Обозначим точку пересечения прямых A_1C_1 и AC через T. По теореме Менелая выполняется соотношение:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CT}{TA}=1.$$

По условию: $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=1.$

Тогда $\dfrac{TA}{CT}=\dfrac{B_1A}{CB_1}$ и $\dfrac{AC+CT}{CT}=\dfrac{AC+CB_1}{CB_1}$. Отсюда

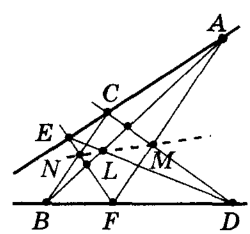
$$\frac{AC}{CT}+1=\frac{AC}{CB_1}+1,\quad \frac{AC}{CT}=\frac{AC}{C_1B}\text{ и } CB_1=CT,$$

что противоречит допущению. Теорема доказана.

В начале IV в. в Александрии работал прекрасный знаток античной математики **Папп**, автор интересной книги «*Математическое собрание*», в которой он сформулировал и доказал ряд важных теорем геометрии.

Опираясь на теорему Менелая, можно легко доказать одну из них, известную сегодня как теорема Паппа.

Теорема Паппа



$N\in(LM)$

Теорема Паппа. Если A, C, E – три точки на одной прямой, а B, F, D – на другой и если (AB), (CD), (EF) пересекают соответственно (DE), (FA), (BC), то три точки их пересечения L, M, N лежат на одной прямой.

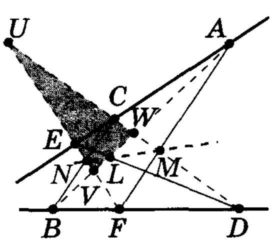


Рис. 6.27

Доказательство

Чтобы не рассматривать все возможные варианты, ограничимся случаем, когда (AB), (CD), (EF) образуют треугольник UVW (рис. 6.27). Применяя к пяти тройкам чисел $\{D, L, E\}$, $\{A, M, F\}$, $\{B, N, C\}$, $\{A, C, E\}$, $\{B, F, D\}$ теорему Менелая, получим:

$$1)\ \frac{VL}{LW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UE}{EV}=1;\quad 2)\ \frac{VA}{AW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UF}{FA}=1;$$

$$3)\ \frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UN}{NV}=1;\quad 4)\ \frac{VA}{AW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UE}{EV}=1;$$

$$5)\ \frac{VB}{BW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UF}{FV}=1.$$

Если почленно перемножить первые три равенства и разделить полученное произведение на два оставшихся, то после соответствующих сокращений получим:

$$\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UN}{NV}=1.$$

Тогда, по обратной теореме Менелая, три точки L, M, N лежат на одной прямой.

...Принципы геометрии – это принципы всей математики.

О. Хайям, XII в.

Теорема доказана.

Эта теорема – одна из основных в проективной геометрии.

Опираясь на теорему Менелая и свойства вписанных углов, можно доказать еще одно интересное утверждение – *теорему Симпсона* (**Роберт Симпсон** – шотландский математик, XVIII в.).

Теорема Симпсона. **Если из произвольной точки окружности, описанной вокруг треугольника, провести перпендикуляры на прямые, содержащие стороны треугольника, то основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой.**

Эту прямую называют *прямой Симпсона*.

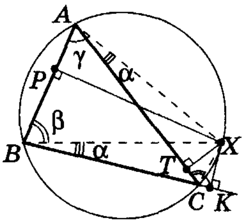
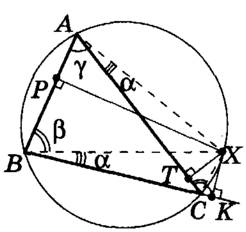


Рис. 6.28

Пусть из точки X окружности, описанной вокруг треугольника ABC, на прямые AB, BC и CA провели перпендикуляры XP, XK и XT соответственно (рис. 6.28). Докажем, что точки P, T и K лежат на одной прямой.

Теорема Симпсона



$\{P, T, K\}$ – на прямой

прямая Симпсона

Доказательство

1) $\smile XC$: $\angle CAX = \angle CBX \triangleq \alpha$.

2) $\smile AX$: $\angle ABX = \angle ACX \triangleq \beta$.

3) Четырехугольник $ABXC$ – вписанный. Тогда $\angle BAX + \angle BCX = 180°$, $\angle BAX = 180° - \angle BCX = \angle XCK \triangleq \gamma$.

4) Из прямоугольных треугольников, катетами которых являются перпендикуляры XP, XK и XT, следует:

$AP = AX\cos\gamma$, $PB = XB\cos\beta$, $BK = XB\cos\alpha$, $KC = XC\cos\gamma$, $CT = XC\cos\beta$, $TA = AX\cos\alpha$.

Тогда $\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{CT}{TA}\cdot\dfrac{BK}{KC}=1$, и, согласно обратной теореме Менелая, точки P, T и K лежат на одной прямой. Ч. т. д.

Для тех, кто интересуется решением геометрических задач, предлагается очень полезная теорема, которую сформулировал и доказал итальянский математик **Джованни Чева (1648–1734).**

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на его противолежащей стороне, называется *чевианой*

Т Теорема Чевы. **Пусть X, Y и Z – точки на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC соответственно** (рис. 6.29). **Чтобы чевианы AX, BY, CZ пересекались в одной точке, необходимо и достаточно:**

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

1) Докажем необходимость: *если AX, BY и CZ пересекаются в одной точке P, то* $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$

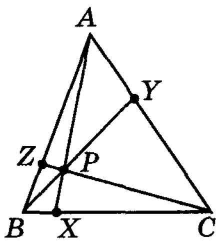


Рис. 6.29

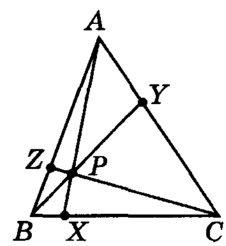
В треугольнике (рис. 6.29): $BX : XC = S_{ABX} : S_{AXC} = S_{PBX} : S_{PXC} = (S_{ABX} - S_{PBX}) : (S_{AXC} - S_{PXC})$. Тогда $BX : XC = S_{ABP} : S_{CAP}$. Аналогично $CY : YA = S_{BCP} : S_{ABP}$ и $AZ : ZB = S_{CAP} : S_{BCP}$.

Если перемножить три полученных равенства, получим:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{S_{ABP}}{S_{CAP}}\cdot\frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}\cdot\frac{S_{CAP}}{S_{BCP}}=1.$$

Ч. т. д.

Теорема Чевы



$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

2) Докажем достаточность: *если* $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$, *то AX, BY и CZ пересекаются в одной точке P.*

Пусть $AX \cap BY = P \notin CZ$. Проведем через точку P чевиану CZ_1, $Z_1 \neq Z$. Тогда, согласно доказанному выше:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ_1}{Z_1B}=1=\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB} \text{ и } \frac{AZ_1}{Z_1B}=\frac{AZ}{ZB},$$

т. е. $Z_1 \equiv Z$, что противоречит условию.

Теорема доказана.

С **Следствиями из теоремы Чевы являются известные теоремы (докажите это самостоятельно):**

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

2. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

3. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

4. Прямые, которые проходят через вершины треугольника и делят его периметр пополам, пересекаются в одной точке.

AX, BY и CZ – чевианы

5. Прямые, которые соединяют точки касания вписанной в треугольник окружности с противолежащими вершинами треугольника, пересекаются в одной точке.

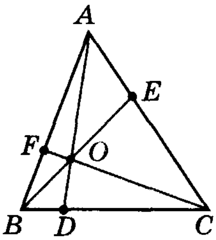
6. Прямые, которые соединяют точки касания вневписанных окружностей (см. стр. 230, 254) к сторонам треугольника и противоположные вершины этого треугольника, пересекаются в одной точке.

Французским математиком **Жергонном** в 1818 г. была доказана такая теорема.

Теорема Жергонна. **Если чевианы AD, BE, CF треугольника ABC пересекаются в точке O** (рис. 6.30), **то:**

$$(1)\ \frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1;\quad (2)\ \frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=2.$$

Теорема Жергонна



$$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1,$$
$$\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=2$$

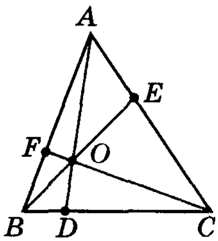


Рис. 6.30

Доказательство

Площади треугольников AOC и ABC относятся как их соответствующие высоты, а последние относятся как OE к BE (если из O и B провести перпендикуляры к AC – получим подобные треугольники).

Тогда $\dfrac{S_{AOC}}{S_{ABC}}=\dfrac{OE}{BE}$.

Аналогично $\dfrac{S_{BOC}}{S_{ABC}}=\dfrac{OD}{AD}$ и $\dfrac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\dfrac{OF}{CF}$.

Если сложить полученные равенства, получим:

$$\frac{OE}{BE}+\frac{OD}{AD}+\frac{OF}{CF}=\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$$

...Утром 9 марта 1942 года на глубину 1,5 м похоронили в вечную мерзлоту тело узника **Михаила Кравчука** – известного украинского математика, академика, учителя легендарного конструктора Сергея Королева. Так окончил земной путь один из выдающихся математиков XX столетия.

Родился Михаил Кравчук в селе Човницы на Волыни. Его отец работал землемером, а мать свободно владела несколькими европейскими языками и учила своих детей немецкому, французскому и польскому. Но главным языком в семье был украинский. Потому неслучайно академик Кравчук первым разработал в Украине проект алгебраической и геометрической терминологии. Под его руководством в 20-е годы сотрудники Института украинского научного языка составили математический словарь в трех томах. А студенты Михаила Филипповича еще долго после его ареста вспоминали красоту мысли и языка, царившие на его лекциях. Михаил Кравчук успел до ареста написать 180 научных работ (10 из них – монографии в разных областях математики).

9 марта 1930 года в Харькове начался судебный процесс над организацией «Общество освобождения Украины». Это было началом разгрома украинской интеллигенции. Дата процесса была выбрана неслучайно – 9 марта – день рождения Тараса Шевченко. Михаилу Кравчуку, всемирно известному ученому, друзьями которого были уважаемые люди – ученые, поэты, литературоведы, – предложили выступить на этом процессе с обвинениями. Он отказался ... Началась травля академика: в газетах печатались разгромные статьи, такие как «Академик Кравчук рекламирует врагов», а самому Кравчуку угрожали уничтожить семью, если он не согласится взять на себя преступления, которых не совершал (см. далее стр. 223).

Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем вторую часть теоремы. Из равенств

$$\frac{AO}{AD}=\frac{AD-OD}{AD}=1-\frac{OD}{AD};\ \frac{BO}{BE}=1-\frac{OE}{BE};\ \frac{CO}{CF}=1-\frac{OF}{CF}$$

получим:

$$\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=3-\left(\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}\right)=3-1=2.$$

Второе утверждение теоремы доказано.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема Жергонна выполняется и в случае, когда точка O лежит на стороне треугольника. Тогда третье слагаемое превратится в ноль, и получим:

$$\frac{OC}{AC}+\frac{OA}{CA}=1,$$

что эквивалентно равенству

$$\frac{CO+AO}{AC}=1,\ \frac{CA}{AC}=1.$$

Люди ошибаются именно потому, что им не хватает логики.

Г. Лейбниц

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

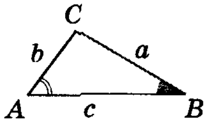
1. *Бевз Г.П.* Геометрія трикутника. – К.: Генеза, 2005. – 120 с.
2. *Бевз Г.П.* Геометрія кіл. – Харків: Основа, 2004. – 112 с.
3. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. – М.: Наука, 1991. – Ч. 1. – 240 с.
4. *Коксетер Г.С. М., Грейтцер С.Л.* Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1973. – 224 с.
5. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия. – М.: Дрофа, 2001. – 368 с.
6. *Билецкий Юрий, Филипповский Григорий.* Чертежи на песке. В мире геометрии Архимеда. – К.: Факт, 2000. – 100 с.
7. *Филипповский Г.Б.* Школьная геометрия в миниатюрах. – К.: ГРОТ, 2002. – 240 с.
8. *Конфорович А.Г.* Визначні математичні задачі. – К.: Рад. шк., 1981. – 189 с.

В 1938 г. «за антисоветскую националистическую деятельность на научно-педагогическом фронте» М.Ф. Кравчук (см. стр. 222) был осужден как «враг народа» на 20 лет заключения и 5 лет ссылки. В 60-градусный мороз академик с больным сердцем должен был выполнять дневную норму на рудниках Колымы – полторы тонны руды. По свидетельству бывшего узника, жившего в бараке рядом с академиком, в минуты отдыха каторжник Кравчук писал какие-то формулы на кусочках бумаги и каждый вечер сдавал свои записи начальнику концлагеря – только при таком условии ему позволяли заниматься математикой. Из лагеря Михаилу Филипповичу удалось передать записку академику А.М. Люльке, где он сообщал о сделанном им важном математическом открытии, к которому, по словам академика, он шел всю свою жизнь. К сожалению, потомки не смогли найти в архивах колымских лагерей записи Михаила Кравчука – все они были уничтожены, так же как и их автор.

Доказываем геометрические неравенства

$a > b$

$\angle A > \angle B$



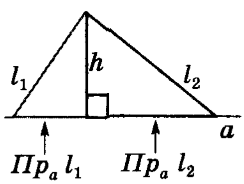
$a < c + b$

$a > |c - b|$

В приложении 3 мы доказывали алгебраические неравенства на сравнение средних: квадратического, арифметического, геометрического (пропорционального) и гармонического. При этом использовалась их геометрическая интерпретация – мы сравнивали длины соответствующих отрезков в трапеции, т. е. доказывали геометрические неравенства. С заданиями на доказательство соотношений неравенства для геометрических величин вы встречались и до этого. Данное приложение предлагает выделить их в виде отдельной темы и систематизировать первые шаги в ее овладении.

Эта тема, с одной стороны, легкая, а с другой – доказательство даже очевидных неравенств бывает «твердым орешком». Овладеть данной темой поможет *система опорных фактов и задач*.

$h \perp a \Rightarrow h < l_{1,2}$



$l_1 < l_2$

$\Downarrow\Uparrow$

$Пр_a l_1 < Пр_a l_2$

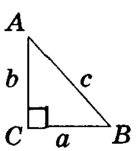
Краеугольным камнем среди таких ***опорных фактов***, конечно же, будут *неравенства треугольника*, которые изучались в 7 классе. Напомним их.

В произвольном треугольнике:

- **против большей стороны лежит больший угол;**
- **против большего угла расположена большая сторона;**
- **каждая из сторон меньше суммы двух других;**
- **каждая из сторон больше разности двух других.**

К опорной группе геометрических неравенств относятся и следствия приведенных выше утверждений – *о перпендикуляре и наклонных, проведенных из одной точки к прямой*:

- **длина перпендикуляра меньше длины любой наклонной, проведенной из заданной точки к той же прямой;**
- **из двух наклонных, проведенных из одной точки к одной прямой, бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию;**
- **из двух наклонных, проведенных из одной точки к одной прямой, большей проекции соответствует бóльшая наклонная.**



$\angle C = 90^\circ$

$\Downarrow$

$c > b$,

$c > a$,

$\angle A < 90^\circ$,

$\angle B < 90^\circ$

Тогда в *произвольном прямоугольном треугольнике*:

- **каждый из катетов меньше гипотенузы;**
- **углы, противолежащие катетам, – острые.**

Рассмотрим несколько ***опорных задач.***

Опорная задача 1

Докажите, что для медиан m_a, m_b и m_c треугольника ABC выполняются неравенства:

$$(1)\ m_a < \frac{b+c}{2};\quad (2)\ m_a > c - \frac{a}{2};\quad (3)\ a < \frac{2}{3}(m_b + m_c);$$

(4) $\frac{1}{2}a < \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_a$ и $\frac{1}{2}a < \frac{2}{3}m_c + \frac{1}{3}m_a$.

Доказательство

1) Удвоим медиану m_a (рис. 6.31-а) – получим параллелограмм $ABCD$, тогда $CD = c$. Запишем неравенство для сторон треугольника ABC: $b + c > 2m_a$, (1) доказано.

2) Из неравенства для сторон треугольника ABM_1 (рис. 6.31-а) получаем: $m_a > c - \frac{a}{2}$, и (2) доказано.

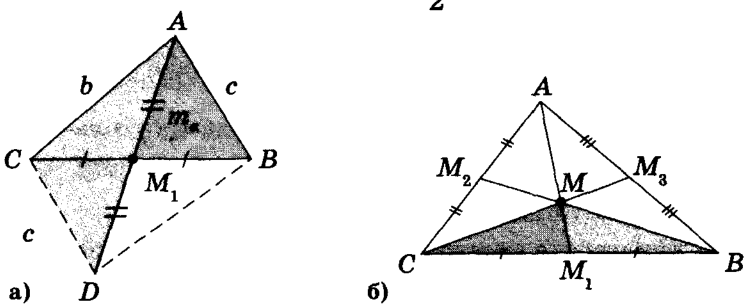
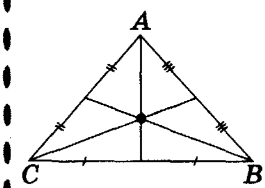


Рис. 6.31

3) Рассмотрим треугольник CMB, где M – центроид в $\triangle ABC$ (рис. 6.31-б). Для сторон треугольника CMB, учитывая свойство медиан треугольника ABC, выполняется неравенство:

$$a < CM + MB = \frac{2}{3}(m_b + m_c), \text{ и (3) доказано.}$$

4) Аналогично предыдущему из треугольников BMM_1 и CMM_1 получим утверждение (4).



$m_a < \frac{b+c}{2}$

$m_a > c - \frac{a}{2}$

$a < \frac{2}{3}(m_b + m_c)$

$\frac{1}{2}a < \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_a$

$\frac{1}{2}a < \frac{2}{3}m_c + \frac{1}{3}m_a$

Опорная задача 2

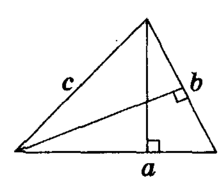
В треугольнике бо́льшей стороне соответствует бо́льшая высота и наоборот.

Решение

Проведем в треугольнике ABC высоты h_a и h_b.

Площадь этого треугольника равна $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$.

Тогда $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$. Ч. т. д.



$a > b$

$\Downarrow \Uparrow$

$h_a < h_b$

Рассмотрим теперь примеры решения задач на доказательство неравенств с использованием приведенных опорных фактов.

Пример 1. Докажите, что в произвольном прямоугольном треугольнике куб гипотенузы больше суммы кубов его катетов.

Решение

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Тогда $c > a$ и $c > b$. Умножим эти неравенства на a^2 и b^2 соответственно и сложим. Получим: $c(a^2+b^2) > a^3+b^3$. Учитывая, что по теореме Пифагора $(a^2+b^2)=c^2$, получаем $c^3 > a^3+b^3$. Ч. т. д.

Пример 2. Докажите, что для медиан произвольного треугольника ABC выполняются неравенства $p < m_a + m_b + m_c < 2p$, где p – полупериметр данного треугольника.

Решение

1) Запишем утверждение (4) опорной задачи 1 для сторон a, b и c треугольника ABC:

$$\frac{1}{2}a < \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_a, \quad \frac{1}{2}b < \frac{2}{3}m_c + \frac{1}{3}m_b, \quad \frac{1}{2}c < \frac{2}{3}m_a + \frac{1}{3}m_c.$$

Сложив эти неравенства, получим: $p < m_a + m_b + m_c$, и левая часть неравенства условия доказана.

2) Запишем утверждение (1) опорной задачи 1 для медиан треугольника ABC:

$$m_a < \frac{b+c}{2}, \quad m_b < \frac{a+c}{2}, \quad m_c < \frac{b+a}{2}.$$

После сложения этих неравенств получим: $m_a + m_b + m_c < 2p$, и правая часть неравенства условия доказана.

Пример 3. Докажите, что для сторон прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) справедливо неравенство $a + b < c + h_c$.

Решение

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$. А из выражений для площади этого треугольника: $4S = 2ab = 2ch_c$. Тогда

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ch_c = (c+h_c)^2 - h_c^2 < (c+h_c)^2.$$

Отсюда $a + b < c + h_c$. Что и требовалось доказать.

Пример 4. Докажите, что для сторон a, b и c треугольника ABC справедливо неравенство: $abc \geqslant (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$.

Решение

Запишем очевидные неравенства: $a^2 \geqslant a^2 - (b-c)^2$, $b^2 \geqslant b^2 - (a-c)^2$, $c^2 \geqslant c^2 - (b-a)^2$.

Обе части этих неравенств неотрицательны (т. к. выполняются неравенства для разности сторон этого треугольника). Тогда записанные неравенства можно перемножить:

$$a^2b^2c^2 \geqslant (a-b+c)(a+b-c)(b-a+c)(b+a-c)(c-b+a)(c+b-a),$$
$$a^2b^2c^2 \geqslant (a+c-b)^2(a+b-c)^2(b+c-a)^2,$$
$$abc \geqslant |a+c-b| \cdot |a+b-c| \cdot |b+c-a|.$$

Учитывая неравенства для суммы сторон треугольника, все выражения под знаками модуля неотрицательны, – искомое утверждение выполняется.

Пример 5. В треугольнике ABC $a > b > c$. Какую из этих сторон видно под большим углом из центра: **а)** описанной окружности; **б)** вписанной окружности?

Решение

1) В треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол. По условию $a > b > c$, тогда $\angle A > \angle B > \angle C$.

2) Из центра O окружности, описанной вокруг данного треугольника, стороны этого треугольника видны под углами:

$$\angle BOC = 2\angle A,\ \angle AOC = 2\angle B,\ \angle AOB = 2\angle C,$$

т. к. они являются центральными углами этой окружности. Наибольшим из них будет угол BOC, которому соответствует вписанный угол A.

3) Из центра вписанной окружности I стороны треугольника видны под углами: $\angle BIC = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$, $\angle AIC = 90° + \dfrac{\angle B}{2}$, $\angle AIB = \dfrac{\angle C}{2}$, (см. опорную задачу на стр. 255). Наибольший из них угол BIC.

Ответ: **из центров описанной и вписанной окружностей под наибольшим углом видно наибольшую сторону.**

Пример 6. Докажите, если a, b, c – стороны треугольника ABC, то существует треугольник, длины сторон которого равны $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.

Решение

Пусть a – наибольшая из сторон треугольника ABC. Тогда $(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = b + c + 2\sqrt{bc} > b + c > a = (\sqrt{a})^2$. Отсюда $\sqrt{b} + \sqrt{c} > \sqrt{a}$, и искомый треугольник существует.

Пример 7. Докажите, что для радиусов вписанного r и описанного R окружностей прямоугольного треугольника и площади S этого треугольника выполняется соотношение $R + r \geqslant \sqrt{2S}$.

Решение

Как известно, для прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$)

$$R = \frac{c}{2},\ \ r = \frac{a + b - c}{2},\ \ S = \frac{1}{2}ab.$$

Воспользуемся неравенством для среднего арифметического и среднего геометрического (см. стр. 209):

$$R + r = \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} = \sqrt{2S}, \text{ ч. т. д.}$$

Замечание. Неравенство, в котором сравнивается среднее арифметическое со средним геометрическим неотрицательных чисел, называют *неравенством Коши*. Это неравенство справедливо не только для двух чисел.

> **Для n неотрицательных чисел, согласно неравенству Коши, выполняется соотношение $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$, при этом равенство достигается только в случае, когда все n чисел между собой равны.**

Пример 8. Докажите, что для высот треугольника ABC выполняется соотношение $h_a + h_b + h_c \geqslant 9r$, где r – радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение

Запишем радиус вписанной окружности треугольника через его площадь S и полупериметр p: $r = \dfrac{S}{p}$. Тогда $\dfrac{1}{r} = \dfrac{a}{2S} + \dfrac{b}{2S} + \dfrac{c}{2S}$.

Если в знаменатели дробей вместо S подставить $\frac{1}{2}a \cdot h_a$, $\frac{1}{2}b \cdot h_b$ и $\frac{1}{2}c \cdot h_c$ соответственно, то получим:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Тогда, воспользовавшись неравенством Коши:

$$(h_a + h_b + h_c) \cdot \frac{1}{r} =$$

$$= (h_a + h_b + h_c)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{h_a h_b h_c} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{h_a h_b h_c}} = 9.$$

Что и требовалось доказать.

Одним из важнейших опорных фактов геометрии, который используется и при доказательстве неравенств, является теорема о точке пересечения продолжения биссектрисы угла треугольника с описанной вокруг него окружностью (стр. 37). Напомним следствие из этой теоремы.

Биссектриса треугольника не меньше его высоты и не превышает его медиану, которые проведены из одной вершины треугольника.

Пример 9. Докажите, что для биссектрис треугольника ABC выполняется неравенство $9r \leqslant l_a + l_b + l_c < 2p$, где r – радиус окружности, вписанной в этот треугольник, а p – его полупериметр.

Решение

Используя вышеприведенный факт, получим:

$$h_a + h_b + h_c \leqslant l_a + l_b + l_c \leqslant m_a + m_b + m_c.$$

В примерах 2 и 8 мы доказали, что

$$m_a + m_b + m_c < 2p; \ \ h_a + h_b + h_c \geqslant 9r.$$

Тогда

$9r \leqslant h_a + h_b + h_c \leqslant l_a + l_b + l_c \leqslant m_a + m_b + m_c < 2p$, *ч. т. д.*

Обратите внимание и на *формулу Эйлера*, доказанную в приложении 4 (стр. 216).

Расстояние между центрами O, описанной вокруг треугольника окружности, и I, вписанной в него окружности, равно $OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ (R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно).

Пример 10. Докажите, что радиус окружности, описанной вокруг треугольника, не превышает диаметр окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение

Пусть R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей данного треугольника, а O и I – их центры соответственно. По формуле Эйлера $OI^2 = R^2 - 2Rr \geqslant 0$. Отсюда $R \geqslant 2r$ (т. к. $R \neq 0$).

Что и требовалось доказать.

Решите самостоятельно задачи

1. Докажите, что длина медианы треугольника меньше суммы двух других медиан и больше их разности.
2. В треугольнике ABC: $a \geqslant b \geqslant c$. Докажите, что градусные меры углов треугольника лежат в пределах: $60° \leqslant A < 180°$, $0 < B < 90°$, $0 < C \leqslant 60°$.
3. Если a, b, c – стороны треугольника, а) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$;
   б) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$; в) $a + b + c \leqslant 2(ab + ac + bc)$.
   (Совет. Не забывайте про неравенство Коши.)
4. В треугольнике ABC: $a > b > c$. Какую из этих сторон видно из ортоцентра треугольника под наибольшим углом, если этот треугольник: а) остроугольный; б) тупоугольный?
5. Докажите, если в треугольнике ABC: а) $m_a < \frac{a}{2}$, то угол A – тупой;
   б) $m_a > \frac{a}{2}$, то угол A – острый.
6. Докажите, что в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$; r – радиус вписанной окружности): а) $r < \frac{a}{2}$; б) $a + b < + h_c$; в) $h_c \leqslant \frac{c}{2}$;
   г) $c < a + b < c\sqrt{2}$.
7. Докажите, что из отрезков $a + m_a$, $b + m_b$ и $c + m_c$, где a, b, c – стороны, а m_a, m_b, m_c – медианы треугольника ABC, можно построить треугольник.
8. На окружности, описанной вокруг правильного треугольника ABC, отметили произвольным образом точку M. Можно ли составить треугольник из отрезков MA, MB и MC?
9. Докажите, что для медиан m_a, m_b, m_c, треугольника ABC выполняется
   неравенство $\frac{m_a}{a}+\frac{m_b}{b}+\frac{m_c}{c} \geqslant \frac{9}{4}$.
10. Будут ли правильными утверждения, обратные утверждениям задачи 6?

Кроме того, решите задачи на геометрические неравенства, предлагаемые в **Заданиях: 4 (№ 13, № 14), 6 (№ 4-в), 10 (№ 10, № 20-в, № 20-г, № 21, № 23 – № 25); 13 (№ 18), 14 (№ 42)**; а также в рубрике «Для любознательных» на **стр. 60 (№ 1, № 2), стр. 146 (№ 3, № 4), стр. 160 (№ 2, № 15), стр. 169 (№ 1, № 2).**

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. *Сивашинский И.Х.* Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Билецкий Юрий, Филипповский Григорий.* Чертежи на песке. В мире геометрии Архимеда. – К.: Факт, 2000. – 100 с.
3. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. – М.: Наука, 1991. – Ч. 2. – 288 с.
4. *Коксетер Г.С. М., Грейтцер С.Л.* Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1973. – 224 с.
5. *Филипповский Г.Б.* Школьная геометрия в миниатюрах. – К.: ГРОТ, 2002. – 240 с.
6. *Кушнір І.А.* Повернення втраченої геометрії. – К.: Факт, 2000. – 280 с.
7. *Сарана О.А., Ясінський В.В.* Конкурсні задачі підвищеної складності з математики. К.: НТУУ «КПІ», 2005. – 260 с.

Вневписанная окружность треугольника и ее свойства

Как известно, три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – инцентре треугольника. Эта точка *равноудалена от сторон треугольника* и является центром окружности, вписанной в данный треугольник. Отметим, что с инцентром связано много интересных свойств треугольника (см., например, стр. 255, 257) и потому его считают одной из «замечательных» точек треугольника.

В $\triangle ABC$ *точка* I – *инцентр – равноудалена от* $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$.

А если искать точку, *равноудаленную от прямых, которые содержат стороны треугольника*?

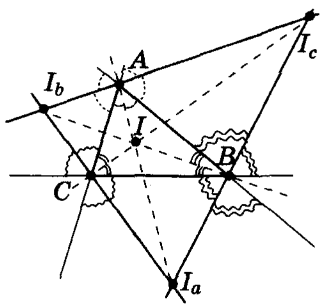
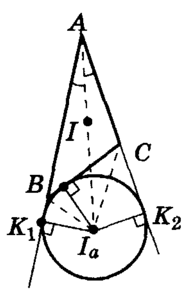


Рис. 6.32

Воспользуемся главным свойством биссектрисы угла – тем, что она является ГМТ, равноудаленных от сторон угла. Понятно, что инцентр треугольника удовлетворяет этому условию. Но, кроме того, мы получим еще три точки – точки пересечения биссектрис внешних углов треугольника. На рисунке 6.32 они обозначены как I_a, I_b и I_c. Через эти точки проходят и продолжения биссектрис треугольника ABC (рис. 6.32) l_a, l_b и l_c соответственно. Докажем это.

В н е в п и с а н н а я о к р у ж н о с т ь касается a и продолжения b и c.



$AK_1 = AK_2 = p$;
I и I_a – *равноудалены от* $[BC]$ и (AB), (AC)

Рассмотрим точку I_a – точку пересечения биссектрис внешних углов треугольника ABC при вершинах B и C. По свойству биссектрисы угла:

$$\left.\begin{matrix} d(I_a;AC) = d(I_a;CB) \\ d(I_a;CB) = d(I_a;AB) \end{matrix}\right| \Rightarrow d(I_a;AC) = d(I_a;AB).$$

Тогда I_a принадлежит биссектрисе угла CAB, т. е. продолжению l_a.

Аналогично доказывается, что I_b и I_c принадлежат продолжениям l_b и l_c.

Мы доказали, что точка I_a – равноудалена от стороны a треугольника ABC и продолжения его сторон b и c. Тогда I_a – *центр окружности, которая касается стороны a и продолжения сторон b, c этого треугольника.* Такую окружность называют **вневписанной окружностью треугольника** ABC. Каждый треугольник имеет три вневписанных окружности с центрами в точках I_a, I_b и I_c.

Рассмотрим СВОЙСТВА вневписанной окружности.

1. Расстояние от вершины угла треугольника до точек касания его вневписанной окружности сторон этого

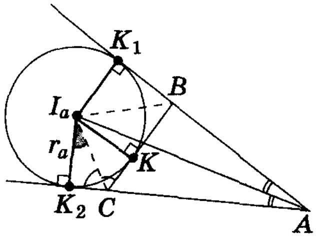


Рис. 6.33

угла равно полупериметру треугольника.

На рисунке 6.33 вневписанная окружность касается стороны a треугольника ABC в точке K и продолжения сторон c и b в точках K_1 и K_2.

По свойству отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки:

$$AK_1 = AK_2, \quad BK_1 = BK, \quad K_2C = KC.$$

Периметр треугольника ABC равен:

$$2p = AB + BC + AC = AB + (BK + KC) + AC =$$
$$= AB + (BK_1 + K_2C) + AC = AK_1 + AK_2.$$

Учитывая, что $AK_1 = AK_2$, получаем искомое утверждение.

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

$$r_a = \frac{rp}{p-a}$$

$$r_a = p \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$r_a = (p-b) \cdot \operatorname{ctg}\frac{C}{2}$$

2. Радиус вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся его стороны a, равен $S : (p - a)$, где S – площадь треугольника ABC, p – его полупериметр.

На рисунке 6.33 искомый радиус вневписанной окружности обозначен как r_a.

Площадь четырехугольника ABI_aC равна сумме площадей ABI_a и ACI_a, а с другой стороны – сумме площадей $\triangle ABC$ и BI_aC. Тогда

$$\frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a = S + \frac{1}{2}ar_a, \; r_a(c + b - a) = 2S.$$

Учитывая, что $(c + b - a) = 2(p - a)$, получим

$$r_a = \frac{S}{p-a}.$$

Формула Герона
$S_{\triangle ABC} =$
$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
(см. стр. 232)

3. Радиус вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся его стороны a, можно вычислить по формулам:

$$\text{а) } r_a = \frac{rp}{p-a}; \quad \text{б) } r_a = p \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}; \quad \text{в) } r_a = (p-b) \cdot \operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

где r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC; p – его полупериметр.

Искомую формулу (а) получаем непосредственно из свойства 2, подставив вместо S выражение $S = pr$.

Для доказательства (б) рассмотрим прямоугольный треугольник AI_aK_1 (рис. 6.33). По ранее доказанному $AK_1 = p$, $l_a \in AI_a$. Тогда

$$r_a = AK_1 \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2} = p \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Для доказательства (в) рассмотрим прямоугольный треугольник CI_aK_2 (рис. 6.33):

$$K_2C = K_2A - b = p - b,$$

$$\angle K_2 I_a C = 90^\circ - \angle K_2 C I_a = 90^\circ - \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \frac{\angle C}{2},$$

$$r_a = K_2 C \cdot \mathrm{ctg}(\angle K_2 I_a C) = (p-b) \cdot \mathrm{ctg}\frac{C}{2}.$$ Ч. т. д.

4. Для треугольника $I_a I_b I_c$ отрезки $I_a A$, $I_b B$, $I_c C$ являются высотами, а инцентр I треугольника ABC – ортоцентром.

Это утверждение (рис. 6.32) следует из свойства смежных углов: биссектрисы смежных углов образуют угол, равный $180^\circ : 2 = 90^\circ$, т. е. взаимно перпендикулярны.

С помощью рассмотренных свойств вневписанной окружности легко доказать *формулу Герона* для вычисления площади треугольника ABC:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Доказательство

По доказанному ранее: $r_a = \dfrac{S}{p-a} = (p-b) \cdot \mathrm{ctg}\dfrac{C}{2}$.

Знаем, что (опорные задачи № 1–2 на стр. 257): $r = \dfrac{S}{p} = (p-c)\mathrm{tg}\dfrac{C}{2}$.

Тогда $r \cdot r_a = \dfrac{S^2}{p(p-a)} = (p-b)(p-c)$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Ч. т. д.

Следующие свойства вневписанной окружности треугольника ABC докажите самостоятельно.

Для их записи используем обозначения (для $\triangle ABC$): R и r – радиусы вписанной и описанной окружностей; p – полупериметр; S – площадь треугольника ABC; W_a – точка пересечения продолжения биссектрисы l_a треугольника ABC с окружностью, описанной вокруг этого треугольника; O – центр описанной окружности.

5. $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

6. $r_a r_b r_c = Sp$.

7. $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$.

8. $IW_a = W_a I_a$.

9. $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ (формула Эйлера для вневписанной окружности).

10. Треугольник ABC – ортоцентрический для треугольника $I_a I_b I_c$.

11. Углы треугольника $I_a I_b I_c$ равны $90^\circ - \dfrac{A}{2}$, $90^\circ - \dfrac{B}{2}$, $90^\circ - \dfrac{C}{2}$.

12. Центроид треугольника $I_a I_b I_c$ принадлежит прямой OI.

13. Треугольники $W_a W_b W_c$ и $I_a I_b I_c$ подобны с коэффициентом подобия 2.

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. *Кушнір І.А.* Трикутник і тетраедр у задачах. – К.: Рад. шк., 1991. – 208 с.

2. *Бевз Г.П.* Геометрія трикутника. – К.: Генеза, 2005. – 120 с.

Кролики, клетки и принцип Дирихле в геометрии

?

n – клеток
$n + 1$ – кроликов

$\Downarrow$

хотя бы в одной клетке – 2 кролика

Наверное, вы уже слышали о *принципе Дирихле*. Чаще всего при первом знакомстве этот принцип объясняют так.

Если в n клетках разместили $n + 1$ кроликов, то хотя бы в одной клетке находится не менее двух кроликов.

Такой, вроде бы очевидный, принцип дает возможность решать непростые задачи, в том числе и геометрические. Главное при использовании этого принципа разобраться, какие объекты будут играть роль кроликов, а какие – клеток.

Пример 1. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600 000 иголок. Докажите, что в этом лесу найдется хотя бы две елки с одинаковым количеством иголок.

Доказательство

Имеем миллион «кроликов»-елок и только 600 001 «клетку» с номерами от 0 до 600 000. Каждую елку надо поместить в клетку с номером, соответствующим ее числу иголок. Если рассадить «кроликов» по одному – получим 600 001 пару «кролик»-«клетка». Остальных «кроликов» придется рассаживать по уже занятым «клеткам». Но если два «кролика»-елки окажутся в одной «клетке» – это означает, что они имеют одинаковое количество иголок.

Утверждение доказано.

?

n – клеток
$kn + 1$ – кроликов

$\Downarrow$

хотя бы в одной клетке – $k + 1$ кроликов

Иногда удобно использовать обобщенный *принцип Дирихле*.

Если в n клетках разместили $kn + 1$ кроликов, то хотя бы в одной клетке находится не менее $k + 1$ кроликов.

Таким образом, мы *одного кролика заменили на группу из k кроликов*.

Пример 2. В магазин привезли 25 ящиков конфет трех сортов (в каждом ящике – конфеты только одного сорта). Докажите, что среди них есть хотя бы 9 ящиков конфет одного сорта.

Доказательство

25 ящиков-«кроликов» разместим по трем «клеткам»-сортам: $25 = 3 \cdot 8 + 1$. Тогда по обобщенному принципу Дирихле в одной из «клеток»-сортов должно оказаться хотя бы $8 + 1 = 9$ ящиков-«кроликов».

Утверждение доказано.

Если математику считают гимнастикой для ума, то элементы нестандартной математики можно считать эмоциональной его зарядкой, которая просто необходима разуму.

Ю.Ю. Барничка
(украинский советский математик)

Понятно, что при оформлении решения задачи, ссылаясь на принцип Дирихле, не присваивают объектам названия: «кролики» и «клетки». Сформулируем принцип Дирихле, заменив «клетки» на множество A, а «кроликов» на множество B.

Если каждому элементу множества A (из n элементов) ставится в соответствие элемент множества B (из m элементов) и при этом $n < m$, то хотя бы одному элементу из A соответствует не менее двух элементов из B.

Рассмотрим несколько примеров *применения принципа Дирихле при решении геометрических задач.*

Пример 3. В квадрате со стороной 1 м произвольно отметили 51 разную точку. Докажите, что какие-то 3 из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

Решение

Разделим данный квадрат на квадраты со стороной 20 см, получим $5 \times 5 = 25$ таких квадратов. Число $51 = 25 \cdot 2 + 1$. Тогда, по принципу Дирихле, в одном из этих квадратов окажется $2 + 1 = 3$ точки.

Утверждение доказано.

Пример 4. В квадрат со стороной 10 см «бросили» 101 точку (никакие 3 из них не лежат на одной прямой). Докажите, что среди них есть три точки, образующие треугольник, площадь которого не превышает 1 см^2.

Решение

Разобьем квадрат на 50 прямоугольников со сторонами 1×2 см. По принципу Дирихле ($101 = 2 \cdot 50 + 1$) хотя бы в один из них попадет не менее 3-х точек. Эти точки образуют треугольник, площадь которого не превышает половины площади прямоугольника, содержащего указанные точки.

Утверждение доказано.

Пример 5. Какое наибольшее число точек можно разместить в квадрате 1×1 см так, чтобы расстояние между любыми двумя из них не превышало 0,5 см? («В квадрате» означает «внутри квадрата или на его сторонах».)

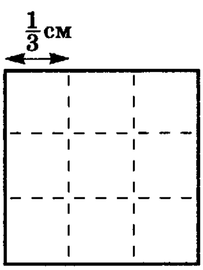


Рис. 6.34

Решение

Разделим квадрат на 9 равных квадратов со стороной 1/3 см (рис. 6.34). Если в этих квадратах поместить 10 точек, то, по принципу Дирихле, хотя бы 2 из них попадут в один квадрат. Расстояние между такими точками не превышает диагонали квадрата, длина которой

$$\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2}.$$

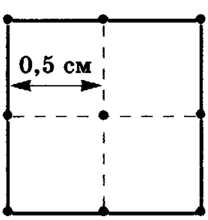


Рис. 6.35

Таким образом, 10 точек разместить согласно условию задачи невозможно.

Разместим 9 точек так, как показано на рисунке 6.35. Расстояние между двумя соседними точками равно 0,5 см.

Таким образом, мы показали, что 9 точек можно разместить согласно условию задачи, а 10 – невозможно.

Ответ: 9 точек.

Пример 6. Докажите, что в каждом девятиугольнике существует пара диагоналей, угол между которыми меньше 7°.

Решение

Всего в девятиугольнике $(9 \cdot 6) : 2 = 27$ диагоналей (из каждой вершины можно провести 6 диагоналей, при этом каждая диагональ соединяет 2 вершины). Проведем через произвольную точку плоскости параллельно диагоналям девятиугольника 27 прямых. Эти прямые разобьют полный угол (360°) на 54 части. Тогда по принципу Дирихле ($7° \cdot 54 = 368° > 360°$) среди образовавшихся углов существует угол меньше 7°.

Утверждение доказано.

Пример 7. На плоскости отметили 6 точек, каждые 3 из которых не лежат на одной прямой. Каждые 2 точки соединили отрезками красного или синего цвета. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в данных точках, все стороны которого одного цвета.

Решение

Обозначим заданные точки как $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Из каждой точки исходит 5 отрезков 2-х цветов. По принципу Дирихле среди этих отрезков хотя бы 3 одного цвета. Пусть для точки A_1 это будут отрезки A_1A_2, A_1A_3 и A_1A_4 красного цвета. Рассмотрим отрезки A_2A_3, A_2A_4 и A_3A_4. Тогда возможны два случая.

1) Среди этих отрезков есть красный, например A_2A_3. Тогда есть треугольник, все стороны которого красные, у нас это треугольник $A_1A_2A_3$.

2) Среди указанных отрезков нет отрезка красного цвета. Тогда они образуют треугольник $A_2A_3A_4$, стороны которого синие.

Утверждение доказано.

Решите самостоятельно такие задачи

1. Шесть учеников съели 7 конфет. Докажите, что хотя бы один из них съел 2 конфеты, если известно, что конфеты на части не делили.
2. Можно ли вывезти 50 камней, масса которых 370 кг, 372 кг, ..., 466 кг и 468 кг, на семи трехтонных грузовых машинах?
3. Каждую сторону квадрата разделили на 8 равных частей и провели через них прямые, параллельные сторонам квадрата. Наименьший из образовавшихся квадратов назовем клеточкой. Какое наибольшее число клеточек можно закрасить, чтобы в любом «уголке» (состоящем из трех клеточек рис. 6.36) хотя бы одна клеточка оставалась незакрашенной?

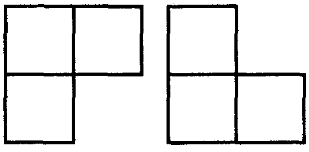


Рис. 6.36

Совет. Примите 1/8 длины стороны квадрата за единицу измерения и разделите заданный квадрат на квадраты 2×2. Эти квадраты будут вашими «клетками» для «кроликов» – цветных маленьких клеточек.
4. Какое наибольшее количество королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

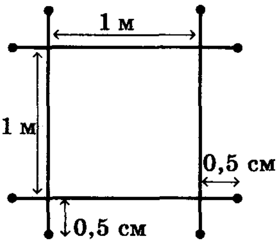


Рис. 6.37

5. Какое наибольшее количество пауков может жить на паутине, изображенной на рисунке 6.37, если паук терпит соседа на расстоянии не меньшем 1,1 м?

6. Внутри правильного треугольника со стороной 1 м поставили 5 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя из них меньше 0,5 м.

Совет. Проведите в заданном треугольнике средние линии и рассмотрите 4 образовавшихся треугольника.

7. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя накрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

8. На плоскости задано 7 прямых. Докажите, что какие-то две из них образуют угол меньше 27°.

9. На плоскости задано 17 точек, каждые три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две точки соединены отрезками или красного, или синего, или зеленого цвета. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, все стороны которого одного цвета.

10. На отрезке длины 1 закрасили несколько отрезков так, чтобы расстояние между двумя цветными точками не равнялось 0,1. Докажите, что сумма длин всех закрашенных отрезков не превышает 0,5.

Совет. Разделите отрезок на 10 равных частей и спроектируйте их на параллельную ему прямую. При этом две цветные точки не могут проектироваться в одну.

11. На плоскости дано 25 точек, при этом среди произвольных трех из них найдутся две на расстоянии меньше 1 м. Докажите, что существует круг радиуса 1 м, который содержит не менее 13 данных точек.

Совет. Рассмотрите два круга с радиусами, равными 1 м, и центрами в данных точках, расстояние между которыми не меньше 1 м.

Больше по этой теме можно узнать из литературы:

1. *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. – Киров: «АСА», 1994. – 272 с.
2. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. – М.: Наука, 1991. – Ч. 2. – 240 с.
3. *Сарана О.А.* Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – К.: «А.С.К.», 2004. – 344 с.
4. *Федак І.В.* Готуємося до олімпіади з математики. – Кам'янець-Поділ.: Абетка, 2006. – 420 с.

Люди, усвоившие великие принципы математики, имеют на один орган чувств больше, чем простые смертные.

Ч. Дарвин

ПРОВЕРЬ СЕБЯ. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

Недостаточно иметь хороший ум.
Главное – уметь его использовать.
Рене Декарт

Эти задания, оформленные в виде тестов, дадут вам возможность быстро получить информацию о том, действительно ли вы усвоили программу по геометрии (для общеобразовательных учебных заведений) по определенной теме, и подготовиться к аттестационной работе. Правильность выполнения заданий вам поможет определить таблица ответов, приведенная в разделе «Ответы и советы».

ПОВТОРЕНИЕ МАТЕРИАЛА ЗА 7 КЛАСС

В заданиях 1–9 надо из предложенных ответов выбрать ОДИН, который, по вашему мнению, является правильным.

1. Укажите, сколько из приведенных ниже утверждений являются правильными.

1) Точкой, по определению, является круг очень маленького радиуса.

2) Аксиомы планиметрии – это математические утверждения, которые доказал Евклид.

3) Если два луча имеют общее начало, то они ограничивают развернутый угол.

4) Через две точки можно провести множество лучей, но только одну прямую.

5) Если два луча принадлежат одной прямой, то они ограничивают развернутый угол.

А	Б	В	Г	Д
Четыре	Три	Два	Один	Другой ответ

2. Найдите среди приведенных утверждений теорему.

А) Точка не имеет ни длины, ни ширины, ее форму невозможно определить.

Б) Углом называется часть плоскости, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки.

В) Два треугольника равны, если их можно совместить наложением.

Г) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.

Д) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести всего одну прямую, перпендикулярную к данной.

3. На прямой последовательно расположены точки: A, B, C и M. Расстояние между серединами отрезков AB и BC равно 5 см, а между серединами отрезков BC и CM – 6 см. **Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CM.**

А	Б	В	Г	Д
Невозможно определить	22 см	16 см	11 см	Другой ответ

4. Прямой угол разделен на три части, градусные меры которых относятся как 2 : 3 : 4. Найдите градусные меры этих частей.

А	Б	В	Г	Д
40°, 60°, 80°	10°, 15°, 20°	20°, 30°, 40°	18°, 27°, 55°	10°, 30°, 40°

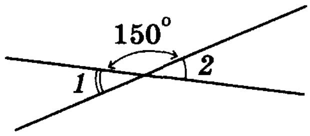


Рис. Т-1

5. На рисунке Т-1 изображены пересекающиеся прямые. **Найдите сумму углов ∠1 + ∠2.**

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	60°	180°	300°

6. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, в пять раз больше другого. **Найдите градусные меры всех полученных углов.**

А	Б	В	Г	Д
30° и 150°	100° и 20°	30°, 30°, 150°	100°, 20°, 100°, 20°	30°, 150°, 30°, 150°

7. Прямые PQ и RS параллельны (рис. Т-2). **Сумма каких углов равна 180°?**

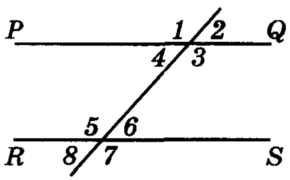


Рис. Т-2

А	Б	В	Г	Д
∠5 + ∠7	∠3 + ∠6	∠1 + ∠5	∠1 + ∠7	∠8 + ∠2

8. Точка P принадлежит данной прямой. Из нее, как из центра окружности, провели дугу, пересекающую указанную прямую в точке M. Потом из точки M, как из центра окружности, провели дугу такого же радиуса до пересечения с первой дугой в точке E. **Найдите градусную меру угла PEM.**

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	75°	90°

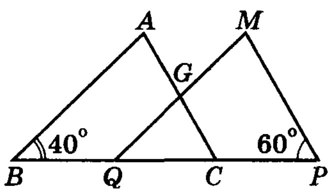


Рис. Т-3

9. Треугольники ABC и MQP равны, $BC = PQ$ (рис. Т-3). **Найдите угол QGC.**

А	Б	В	Г	Д
20°	40°	60°	80°	100°

В задании 10 сформируйте соответствующие пары из выражений левого и правого столбиков так, чтобы (вместе с условием) образовались правильные утверждения.

10. Точки O_1 и O_2 – центры двух окружностей с радиусами R_1 = 7 см и R_2 = 5 см соответственно.

А) O_1O_2 = 12 м	1) Тогда эти окружности пересекаются.
Б) O_1O_2 = 22 см	2) Тогда эти окружности касаются внешне.
В) O_1O_2 = 4 см	3) Тогда эти окружности касаются внутренне.
Г) O_1O_2 = 0 см	4) Тогда эти окружности не имеют общих точек, и одна расположена внутри другой.
Д) O_1O_2 = 2 см	5) Тогда соответствующие окружностям круги не имеют общих точек.
Е) O_1O_2 = 1 см	6) Тогда окружности – концентрические.

К заданиям 11–16 запишите только ответ.

11. На рисунке Т-4 $\angle POR = 110°$, $\angle QOC = 90°$, $\angle POC = 140°$. **Найдите угол QOR.**

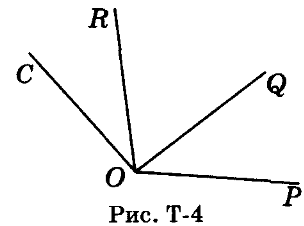


Рис. Т-4

12. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) угол, внешний углу A, равен $60°$. **Найдите градусную меру наибольшего из углов треугольника ABC.**

13. Укажите, как надо провести прямую, чтобы она разделила треугольник ABC (рис. Т-5) на два равных треугольника.

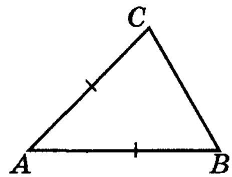


Рис. Т-5

14. Угол при вершине A треугольника ABC равен $60°$. **Под каким углом пересекаются биссектрисы углов B и C данного треугольника?**

15. В прямоугольник вписаны две равные окружности, длины радиусов которых по 5 см. Каждая из этих окружностей касается трех сторон прямоугольника и другой из данных окружностей. **Найдите площадь прямоугольника.**

16. Прямые AD и BC пересекаются в точке M и касаются окружности в точках A и B (рис. Т-6). Известно, что $AM = MD$, $BM = MC$, хорду AB видно из точки M под углом $20°$. **Найдите градусную меру угла MCD.**

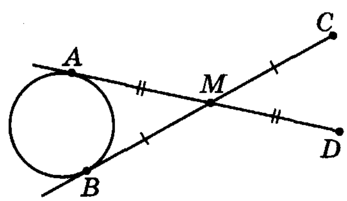


Рис. Т-6

К ГЛАВЕ I

В заданиях 1–2 выберите правильные, по вашему мнению, утверждения. Их МОЖЕТ БЫТЬ НЕСКОЛЬКО.

1. Какие из утверждений являются истинными?

А) Центральным углом называется угол с вершиной внутри окружности.
Б) Вписанным углом называется угол с вершиной на окружности.
В) Полный угол – развернутый угол.
Г) Центральным углом называется угол с вершиной в центре окружности.
Д) Вписанным углом называется угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают эту окружность.

2. Какие из этих утверждений являются истинными?

А) Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего ей вписанного угла.
Б) Мера дуги окружности зависит от радиуса окружности.
В) В одной окружности равные дуги стягиваются равными хордами.
Г) В разных окружностях равные дуги стягиваются равными хордами.
Д) Вписанный угол вдвое меньше соответствующего ему центрального угла.

В заданиях 3–7 надо выбрать из предложенных ответов ОДИН, который, по вашему мнению, является правильным.

3. Можно ли тремя точками разделить окружность на дуги, градусные меры которых $156°$, $104°$, $101°$?

А	Б	В	Г	Д
Да	Нет	Не всегда	При определенном значении радиуса окружности	Другой ответ

4. Радиус окружности с центром O равен 5 см. **Найдите длину хорды AB**, если $\angle AOB = 300°$.

А	Б	В	Г	Д
5 см	10 см	Невозможно определить	Другой ответ	15 см

5. В окружность с радиусом $R = 10$ см вписан угол ACB равный 30°. **Найдите длину хорды AB.**

А	Б	В	Г	Д
2,5 см	5 см	10 см	Невозможно определить	Другой ответ

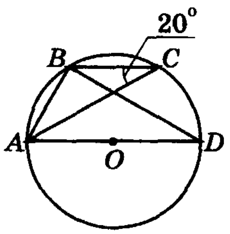


Рис. Т-7

6. **Найдите** по рисунку Т-7 **градусную меру угла** BAD (O – центр окружности).

А	Б	В	Г	Д
60°	40°	80°	70°	Другой ответ

7. **Найдите** по рисунку Т-8 **сумму градусных мер углов BOD и BMD** (O – центр окружности).

А	Б	В	Г	Д
320°	180°	120°	90°	220°

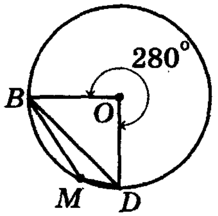


Рис. Т-8

В заданиях 8–10 требуется записать только ответ.

8. Три точки A, B и C делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 3 : 5. **Найдите наибольший угол треугольника ABC.**

9. Через концы хорды окружности провели две касательные к этой окружности. **Найдите угол между касательными,** если хорда стягивает дугу, градусная мера которой равна 60°.

10. **Какими могут быть углы равнобедренного треугольника,** если его основание видно из центра описанной окружности под углом 60°?

К ГЛАВЕ II

В заданиях 1–2 выберите правильные, по вашему мнению, утверждения. Их МОЖЕТ БЫТЬ НЕСКОЛЬКО.

1. **Какие из утверждений являются правильными?**
   А) Параллелограммом называется четырехугольник, у которого две стороны равны и параллельны.
   Б) Вокруг произвольного параллелограмма можно описать окружность.
   В) У параллелограмма все углы могут быть острыми.
   Г) Существует параллелограмм, у которого всего один угол тупой.
   Д) Три угла параллелограмма могут быть равными.
2. **Какие из этих утверждений являются истинными?**
   А) Если у параллелограмма диагонали равны, то он – прямоугольник.
   Б) Прямоугольник, вписанный в окружность, – квадрат.
   В) Если вокруг трапеции можно описать окружность, то она равнобедренная.
   Г) Если у ромба диагонали пересекаются под прямым углом, то это квадрат.
   Д) Если в трапецию можно вписать окружность, то она равнобедренная.
   Е) Четырехугольник, у которого две стороны равны и параллельны, – параллелограмм.

В задании 3 сформируйте соответствующие пары из выражений левого и правого столбиков так, чтобы образовались правильные утверждения.

3. Составьте правильные утверждения.

А) В четырехугольнике противоположные стороны равны.	1) Тогда в него можно вписать окружность.
Б) В четырехугольнике все стороны равны.	2) Тогда он является квадратом.
В) У параллелограмма диагонали равны и являются биссектрисами его углов.	3) Тогда он является параллелограммом.
Г) Суммы противоположных сторон четырехугольника равны.	4) Тогда вокруг него можно описать окружность.
Д) Сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°.	5) Тогда он является ромбом.

В заданиях 4–18 надо выбрать из предложенных ответов ОДИН, который, по вашему мнению, является правильным.

4. Укажите, вокруг какого из четырехугольников можно описать окружность, если известно отношение градусных мер их внутренних углов, взятых последовательно (для каждого из четырехугольников).

А	Б	В	Г	Д
1 : 7 : 4 : 3	3 : 8 : 4 : 5	2 : 7 : 4 : 1	3 : 4 : 5 : 4	1 : 5 : 4 : 3

5. Укажите, в какой из четырехугольников можно вписать окружность, если известно отношение длин их последовательных сторон (для каждого из четырехугольников).

А	Б	В	Г	Д
1 : 5 : 4 : 3	3 : 2 : 7 : 5	2 : 5 : 4 : 1	1 : 4 : 5 : 4	1 : 5 : 4 : 2

6. *ABCD* – трапеция (рис. Т-9). Известно, что есть трапеция *KOME*, которая равна трапеции *ABCD*. Углы *K* и *E* трапеции *KOME* равны по 70°. **Какое из следующих утверждений является правильным?**

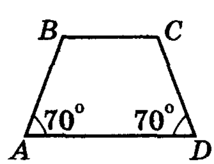


Рис. Т-9

А) $KO = AB$.

Б) Угол O – прямой.

В) Все стороны трапеций имеют одинаковую длину.

Г) Периметр трапеции *KOME* в три раза больше периметра трапеции *ABCD*.

Д) Обе трапеции равнобедренные.

7. Диагонали трапеции *ABCD* ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке *O*. **Какое из следующих утверждений является правильным?**

А	Б	В	Г	Д
$BC < AD$	$S_{ABC} = S_{DBC}$	$AO > OC$	$S_{ABC} < S_{DBC}$	$S_{ABC} > S_{DBC}$

8. Какое количество признаков ромба содержится среди приведенных ниже утверждений?

1) Параллелограмм, в который можно вписать окружность.

2) Четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны.
3) Четырехугольник, у которого все стороны равны.
4) Параллелограмм, у которого все высоты равны.
5) Четырехугольник, у которого диагонали являются биссектрисами его углов.
6) Четырехугольник, вершины которого являются серединами сторон прямоугольника.

А	Б	В	Г	Д
Пять	Два	Четыре	Три	Другой ответ

9. Биссектриса одного из углов параллелограмма пересекает его противоположную сторону под углом 30°. **Найдите больший из углов параллелограмма.**

А	Б	В	Г	Д
30°	120°	150°	90°	Другой ответ

10. Один из углов ромба равен 140°. **Какой угол образует со стороной ромба его диагональ, проведенная из вершины острого угла?**

А	Б	В	Г	Д
40°	70°	90°	10°	20°

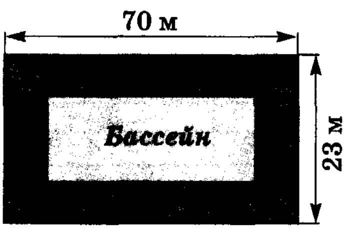


Рис. Т-10

11. Вокруг бассейна прямоугольной формы сделана дорожка для прогулок так, как показано на рисунке Т-10. **Найдите площадь этой дорожки.**

А	Б	В	Г	Д
100 м²	161 м²	Другой ответ	710 м²	1610 м²

12. Противоположные углы равнобедренной трапеции могут быть равны:

А	Б	В	Г	Д
155° и 35°	60° и 30°	60° и 90°	160° и 30°	155° и 25°

13. Точки M, P, H и T – середины сторон трапеции. **Определите вид четырехугольника** $MPHT$.

А	Б	В	Г	Д
Параллелограмм	Равнобедренная трапеция	Ромб	Прямоугольник	Квадрат

14. Диагонали трапеции делят ее среднюю линию на три равные части. **Найдите отношение оснований этой трапеции.**

А	Б	В	Г	Д
1 : 3	2 : 3	1 : 1	1 : 2	Другой ответ

15. В равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого равны 4 см, вписан квадрат, который имеет общий угол с треугольником. **Найдите периметр этого квадрата.**

А	Б	В	Г	Д
4 см	6 см	8 см	16 см	Другой ответ

16. В равносторонний треугольник вписан ромб, который имеет общий угол с треугольником. **Найдите периметр треугольника, если периметр ромба равен a.**

А	Б	В	Г	Д
$2a$	$\frac{3}{2}a$	$\frac{3}{4}a$	a	Другой ответ

17. Диагонали равнобокой трапеции пересекаются под прямым углом и равны по 12 см. **Найдите площадь четырехугольника** с вершинами в серединах сторон трапеции.

А	Б	В	Г	Д
144 см^2	16 см^2	72 см^2	Не возможно определить	36 см^2

18. Найдите площадь параллелограмма, вписанного в окружность радиуса 6 дм, если одна из вершин параллелограмма удалена от его диагонали на 3 дм.

А	Б	В	Г	Д
3,6 м^2	36 дм^2	18 дм^2	36 дм	Другой ответ

В заданиях 19–25 требуется записать только ответ.

19. Найдите площадь описанного вокруг окружности четырехугольника, длины сторон которого равны 20 см, 10 см, 30 см и 40 см, а радиус вписанной окружности – 13 см. Ответ запишите в квадратных метрах.

20. Фигура на рисунке Т-11 состоит из пяти равных квадратов. Ее площадь равна 245 см^2. Найдите периметр этой фигуры.

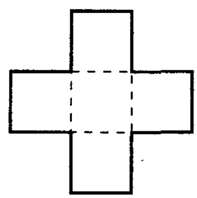


Рис. Т-11

21. В квадрате провели диагонали и последовательно соединили середины его сторон. Площадь наименьшего из образованных треугольников равна 1 см^2. Найдите стороны данного квадрата.

22. Точку O, в которой пересекаются диагонали ромба $ABCD$, соединили с точкой M – серединой стороны BC. Площадь треугольника BOM равна 2 см^2. Найдите площадь ромба.

23. Высота равнобокой трапеции, проведенная из вершины меньшего из ее оснований, делит большее основание в отношении 2 : 3. Найдите отношение средней линии этой трапеции к ее большему основанию.

24. Найдите площадь описанной равнобокой трапеции, боковая сторона которой равна 7 дм, а радиус вписанной в нее окружности – 5 дм.

25. Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 5 м, а большая боковая сторона – 18 м. Найдите площадь трапеции.

К ГЛАВЕ III

Выберите правильные, по вашему мнению, утверждения. Их МОЖЕТ БЫТЬ НЕСКОЛЬКО.

1. **Какие из следующих утверждений истинные?**
   А) Параллельные прямые, пересекающие угол, отсекают на его сторонах равные отрезки.

Б) Параллельные прямые, пересекающие угол, отсекают на его сторонах пропорциональные отрезки.
В) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
Г) Прямая, пересекающая треугольник, отсекает от него треугольник, подобный данному.
Д) Отношение всех соответственных линейных элементов подобных треугольников равно их коэффициенту подобия.

В задании 2 сформируйте пары из выражений левого и правого столбиков так, чтобы образовались правильные утверждения.

2. Составьте правильные утверждения.

<table>
<tr><td>А) Подобные треугольники – треугольники, у которых все углы равны, а соответственные стороны пропорциональны.</td><td rowspan="2">1) Это свойство подобных треугольников.</td></tr>
<tr><td>Б) Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента их подобия.</td></tr>
<tr><td>В) Подобными являются два треугольника, у которых все стороны пропорциональны.</td><td rowspan="2">2) Это признак подобия треугольников.</td></tr>
<tr><td>Г) Подобными являются треугольники, у которых два угла равны.</td></tr>
<tr><td>Д) Подобными являются два треугольника, у которых две стороны пропорциональны, а углы, образованные этими сторонами, – равны.</td><td>3) Это определение подобия треугольников.</td></tr>
</table>

В заданиях 3–9 надо выбрать из предлагаемых ответов ОДИН, который, по вашему мнению, является правильным.

3. Сколько пар подобных треугольников среди изображенных на рисунке Т-12?

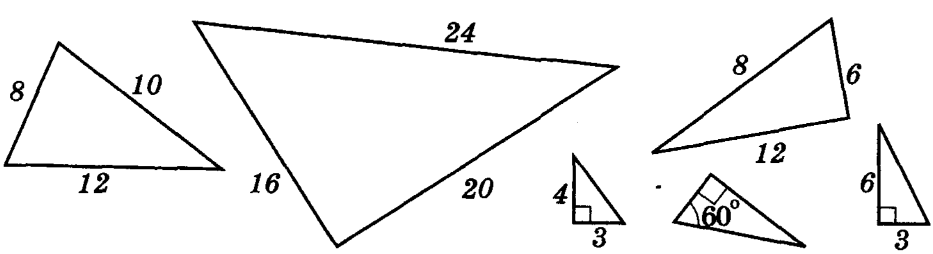


Рис. Т-12

А	Б	В	Г	Д
Четыре	Пять	Три	Восемь	Другой ответ

4. Основания трапеции относятся как 2 : 5. **В каком отношении делит диагонали трапеции точка их пересечения?**

А	Б	В	Г	Д
1 : 5 и 2 : 5	2 : 3 и 1 : 4	2 : 3 и 2 : 3	2 : 5 и 2 : 5	Другой ответ

5. Периметр треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника ABC равен 6 м. **Найдите периметр треугольника ABC.**

А	Б	В	Г	Д
24 м	12 м	3 м	6 м	Другой ответ

6. Треугольники со сторонами a, b, c и b, c, d подобны. **Коэффициент подобия этих треугольников может быть равен:**

А	Б	В	Г	Д
1,6	0,6	2	Любому числу	Другой ответ

7. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 равны, произведения $AB \cdot A_1B_1$ и $AC \cdot A_1C_1$ равны. **Подобны ли эти треугольники?**

А	Б	В	Г	Д
Не всегда	Нет	Да	Невозможно определить	Да, если $AB = AC$

8. В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат $KMNC$ со стороной 2 см (точка K принадлежит катету AC). **Найдите произведение длин отрезков AK и NB.**

А	Б	В	Г	Д
Невозможно определить	16	4	8	Другой ответ

9. В окружности провели две хорды, которые пересекаются. Точка их пересечения делит одну из хорд на отрезки 2 м и 6 м, а вторую – в отношении 1 : 3. **Найдите длину второй хорды.**

А	Б	В	Г	Д
6 м	8 м	4 м	Определить невозможно	Другой ответ

В заданиях 10–15 требуется записать только ответ.

10. Центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, удален от катетов этого треугольника на 3 см и 5 см. Найдите катеты треугольника.

11. В угол A вписаны две окружности с центрами O_1 и O_2. Точки касания окружностей одной из сторон угла обозначены как M_1 и M_2 соответственно. Площади треугольников AO_1M_1 и AO_2M_2 относятся как 1 : 4. Найдите отношение радиусов заданных окружностей.

12. Средняя линия трапеции больше меньшего из оснований этой трапеции на 2 дм. Найдите разницу оснований трапеций.

13. В равнобедренном треугольнике боковая сторона относится к основанию как 5 : 3. В каком отношении делит высоту треугольника, проведенную к его основанию, биссектриса угла при основании?

14. Основания трапеции равны 6 см и 15 см. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный его основаниям, делит боковые стороны этой трапеции в отношении 2 : 3. Найдите длину данного отрезка.

15. Длины оснований трапеции $2a$ и $8a$. Середины каждого из оснований соединили с концами другого основания. Проведенные отрезки пересекаются в точках M и N. Найдите расстояние между этими точками.

К ГЛАВЕ IV

В задании 1 сформируйте из выражений правого и левого столбиков правильные равенства.

1. В треугольнике ABC против углов A, B, C расположены стороны a, b, c ($\angle C = 90°$). Тогда

А) $\sin A =$	1) $b : c$.
Б) $\cos A =$	2) $b : a$.
В) $\mathrm{tg} A =$	3) 1.
Г) $\mathrm{ctg} A =$	4) $a : c$.
Д) $\sin^2 A + \cos^2 A =$	5) $a : b$.

В задании 2 выберите правильные, по вашему мнению, утверждения. Их МОЖЕТ БЫТЬ НЕСКОЛЬКО.

2. Какие из следующих утверждений правильные?

А) Косинус угла зависит только от градусной меры угла.
Б) Синус угла зависит от размеров треугольника.
В) Тангенс угла зависит от размещения треугольника на плоскости.
Г) Синус угла не зависит от размеров треугольника и размещения его на плоскости.
Д) Синус угла зависит только от градусной меры угла.

3. Заполните таблицу.

	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$
1) $\sin\alpha$			
2) $\cos\alpha$			
3) $\mathrm{tg}\alpha$			
4) $\mathrm{ctg}\alpha$			
5) $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha$			
6) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$			

В заданиях 4–5 заполните пустые клетки таблицы так, чтобы образовались правильные утверждения.

4. При увеличении угла α от 0° до 90° **значения тригонометрических функций изменяются так:**

1) $\sin\alpha$		от		до	
2) $\cos\alpha$		от		до	
3) $\mathrm{tg}\alpha$		от		до	
4) $\mathrm{ctg}\alpha$		от		до	

5. Заполните пустые клетки таблицы.

1) Синус данного угла равен		дополняющего угла
2) Косинус данного угла равен		дополняющего угла
3) Тангенс данного угла равен		дополняющего угла
4) Котангенс данного угла равен		дополняющего угла
5) $\mathrm{tg}^2\alpha + 1$	равно	
6) $\mathrm{ctg}^2\alpha + 1$	равно	

В заданиях 6–10 требуется записать только ответ.

6. Найдите периметр прямоугольного треугольника по его гипотенузе c и острому углу α.

7. Катет прямоугольного треугольника равен 12 см, а косинус прилежащего к нему угла равен $\frac{1}{4}$. Найдите проекцию этого катета на гипотенузу.

8. Катет прямоугольного треугольника равен 2 см, а синус противолежащего угла равен $\frac{1}{2}$. Найдите длину второго катета.

9. Проекции катетов прямоугольного треугольника на его гипотенузу равны 4 дм и 9 дм. Найдите катеты этого треугольника.

10. В прямоугольный треугольник с катетами 6 м и 8 м вписана окружность. Найдите расстояние от центра окружности до высоты треугольника, проведенной к его гипотенузе.

СЛОВАРИК

Аксиома – утверждение, принимаемое без доказательства (стр. 7, 8).

Арбелос – фигура, похожая на скорняжный нож, изучению свойств которой много внимания уделял Архимед (стр. 213).

Архимеда

– *леммы*, – сформулированные Архимедом и известные под таким названием (стр. 36, 116, 151, 212, 214);

– *теорема* – теорема о свойстве вписанной ломаной из двух звеньев, которую открыл и доказал Архимед (стр. 213);

– *формулы* – соотношения для отрезков в равнобедренном треугольнике, открытие которых приписывают Архимеду (стр. 215, 217).

Астролябия – прибор, с помощью которого измеряют углы на местности (стр. 180).

Базовый треугольник – треугольник, который умеем строить по заданным элементам из множества сторон и углов треугольника (перечень базовых треугольников – перечень опорных задач на построение треугольника) (стр. 253).

Вариньйона параллелограмм – параллелограмм, который образуется при последовательном соединении середин сторон произвольного выпуклого четырехугольника (стр. 82).

Вектор – направленный отрезок (стр. 185);

– *коллинеарные* – векторы, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых; подразделяются на противоположно направленные и одинаково направленные (стр. 186);

– *модуль вектора AB* – длина отрезка AB (стр. 186);

– *нулевой вектор* – вектор, начало и конец которого совпадают, его длина равна нулю (стр. 186);

– *противоположные векторы* – векторы, длины которых равны, а направления противоположны (стр. 187);

– *равные векторы* – одинаково направленные векторы равной длины (стр. 187);

– *разложение вектора по двум неколлинеарным векторам* (базисным) – представление данного вектора в виде суммы двух векторов коллинеарных базисным (стр. 193);

– *разность двух векторов* – сумма первого вектора и вектора, противоположного второму (стр. 191);

– *сумма двух векторов* – вектор, образованный из этих векторов по правилу треугольника или параллелограмма (стр. 190);

– *умножение вектора на число* – правило образования вектора, коллинеарного данному (стр. 189).

Вневписанная окружность – окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон (стр. 230, 255, 257).

Геометрическое место точек (ГМТ) – совокупность (множество) всех точек, удовлетворяющих определенному условию (стр. 11).

Градус – мера угла, составляющая $\frac{1}{360}$ часть развернутого угла (7 класс).

Градусная мера дуги окружности – градусная мера соответствующего центрального угла (стр. 17).

Градусная мера угла – мера угла, измеренного в градусах, минутах, секундах (7 класс).

Граф – графическое моделирование задачи (стр. 186);

– *вершины графа* – точки, обозначающие определенные объекты (стр. 186);

– *ребра графа* – отрезки, соединяющие вершины графа (стр. 186).

Диагонали многоугольника – отрезки, соединяющие две его несоседние вершины (стр. 41).

Дирихле принцип – принцип, по которому при размещении $n + 1$ кроликов по n клеткам хотя бы в одной клетке находится не меньше двух кроликов (стр. 233).

Доказательство – логическое размышление, определяющее истинность определенного утверждения (стр. 8).

Доказательство от противного – способ доказательства, при котором делается предположение, противоположное тому, которое нужно доказать, и опираясь на него приходят к логическому противоречию (стр. 10).

Достаточное условие – признак определенного множества фигур (стр. 11).

Дуга окружности – часть окружности, ограниченная двумя точками этой окружности (стр. 17).

Евклида теорема – теорема о соотношении площадей подобных фигур, построенных на сторонах прямоугольного треугольника (стр. 211).

Египетский треугольник – прямоугольный треугольник, длины сторон которого относятся как 3 : 4 : 5 (стр. 141).

Жергонна теорема – теорема о соотношении между длинами отрезков чевиан, на которые они делятся общей точкой своего пересечения внутри треугольника (стр. 222).

Замечательные точки треугольника – его ортоцентр, центроид, инцентр и центр описанной вокруг этого треугольника окружности (стр. 255).

Инцентр треугольника – точка пересечения его биссектрис (стр. 255, 257).

Касательная к окружности – прямая, имеющая одну общую точку с окружностью (7 класс).

Касающиеся окружности – окружности, имеющие одну общую точку (возможно внутреннее и внешнее касание) (7 класс).

Контрпример – пример того, что определенное утверждение не выполняется (стр. 11).

Концентрические окружности – окружности, имеющие общий центр и разные радиусы (7 класс).

Лагранжа формула – формула для квадрата длины биссектрисы треугольника (стр. 147).

Лемма – вспомогательная теорема (стр. 35, 212).

Логический шаг – умозаключение, состоящее из утверждения-условия и утверждения-вывода, между которыми можно вставить «тогда» (стр. 8).

Менелая теорема – теорема о свойствах точек пересечения прямой с двумя сторонами треугольника и продолжением третьей (стр. 218).

Мера дуги окружности – мера центрального угла, опирающегося на эту дугу (стр. 17).

Метод

– *вспомогательной окружности* использование при решении задачи дополнительного построения окружности (стр. 37);

– *площадей* – использование площади некоторой фигуры как вспомогательного элемента (стр. 74);

– *подобия* – использование подобия треугольников, образованных дополнительными построениями (стр. 145).

Минута – мера угла, составляющая 1/60 часть градуса (7 класс).

Многоугольник(и) – часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной, которая не пересекает сама себя (стр. 41);

– *вписанный* – все вершины принадлежат окружности (стр. 42, 44);

– *выпуклый* – ни одна из его сторон при неограниченном продолжении не пересекает этот многоугольник (стр. 42);

– *правильный* – у которого все стороны и все углы равны (стр. 42);

– *одноименные* – с одинаковым числом вершин (стр. 42);

– *описанный* – все стороны касаются окружности (стр. 42, 44).

Наклонная, проведенная из данной точки к данной прямой, – отрезок, соединяющий данную точку вне прямой с точкой на прямой и не перпендикулярный к ней (стр. 224).

Наполеона треугольники – конфигурация из трех правильных треугольников, построенных на сторонах некоторого треугольника (стр. 206).

Обратная теорема – теорема, в которой условием является вывод, а выводом – условие заданной (прямой) теоремы (стр. 8).

Окружности Торричелли – окружности, описанные вокруг треугольников Наполеона (стр. 206).

Окружность

– *вписанная в многоугольник* – касается всех сторон многоугольника (стр. 62);

– *описанная вокруг многоугольника* – проходящая через все его вершины (стр. 61).

Определение – утверждение, в котором разъясняется, какие именно объекты или свойства относят к данному названию (стр. 8).

Ортоцентр треугольника – точка пересечения его высот (стр. 255).

Ортоцентрический треугольник – треугольник, вершинами которого являются основания высот заданного треугольника (стр. 200).

Основная теорема подобия треугольников – теорема о треугольниках, отсекаемых от угла параллельными прямыми (стр. 117).

Паппа теорема – теорема о свойствах двух троек точек на двух пересекающихся прямых (стр. 219).

Параллелограмм – четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны (стр. 57);

– *высота* параллелограмма – расстояние между его параллельными сторонами (стр. 67).

Педальный треугольник – треугольник с вершинами в основаниях перпендикуляров, проведенных из внутренней точки остроугольного треугольника к его сторонам (стр. 201).

Пифагора теорема – теорема о сумме квадратов катетов прямоугольного треугольника (стр. 140).

Пифагоровы треугольники – прямоугольные целочисленные треугольники (стр. 204).

Площадь – число, ставящееся в соответствие фигуре и имеющее определенные свойства (стр. 47).

Правила работы с приближенными числами – правила арифметических действий с приближенными числами (стр. 177).

Пропорциональный (делительный) циркуль – прибор, с помощью которого можно разделить отрезок на несколько равных отрезков (стр. 137).

Признак – теорема, утверждающая, что выполнение определенных условий обеспечивает принадлежность фигуры (фигур) определенному ранее множеству (стр. 9).

Проекция наклонной на прямую – отрезок заданной прямой, ограниченный основанием наклонной и проекцией другого конца наклонной на прямую (7 класс).

Пропорция – равенство двух отношений (стр. 109).

Подобные треугольники – треугольники с равными углами и соответственно пропорциональными сторонами (стр. 116);

– *коэффициент подобия* – отношение соответственных сторон или других соответственных линейных элементов подобных треугольников (стр. 116);

– *соответственные вершины* подобных треугольников – вершины их равных углов (стр. 116);

– *соответственные углы* подобных треугольников – их равные углы (стр. 116);

– *соответственные стороны* подобных треугольников – их стороны, лежащие против равных углов (стр. 116).

Поперечный масштаб – определенный способ измерения расстояния между точками с помощью карты или плана (стр. 138).

Птолемея теорема – теорема о сумме произведений противоположных сторон вписанного четырехугольника (стр. 148).

Равновеликие фигуры – фигуры, имеющие равные площади (стр. 47).

Равносоставленные многоугольники – два многоугольника, один из которых сложен из всех частей другого, полученных его разрезанием (стр. 49).

Разностный треугольник – треугольник, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию (стр. 203).

Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны (стр. 57).

Свойство – теорема, утверждающая, что принадлежность фигуры (фигур) определенному ранее множеству обеспечивает выполнение определенных условий (соотношений) (стр. 9).

Сегмент – часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой, стягивающей эту дугу (стр. 33).

Секунда – мера угла, составляющая 1/60 часть минуты (7 класс).

Сектор – часть центрального угла, ограниченная соответствующей ему дугой окружности (стр. 17).

Серединный треугольник – треугольник с вершинами в серединах сторон заданного треугольника (стр. 202).

Симпсона прямая – прямая, проходящая через проекции произвольной точки окружности, описанной вокруг треугольника, на прямые, содержащие его стороны (стр. 220).

Следствие – утверждение, являющееся непосредственным выводом из теоремы или аксиомы (стр. 8).

Софизм – умышленно ошибочное умозаключение (стр. 23, 28, 124).

Среднее гармоническое чисел *a* и *b* – $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (стр. 207, 209, 210).

Среднее геометрическое (среднее пропорциональное) чисел a и b – $\sqrt{ab}$ (стр. 139, 142, 207, 209, 210).

Среднее квадратическое чисел *a* и *b* – $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (стр. 208–210).

Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины двух его сторон (стр. 82).

Теорема – известное математическое утверждение, справедливость которого доказана определенным логическим умозаключением (доказательством) (стр. 8).

Трапеция – четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – не параллельны (стр. 57);
– *боковые стороны* трапеции – ее непараллельные стороны (стр. 97);
– *высота* трапеции – расстояние между ее основаниями (стр. 97);
– *основания* трапеции – ее параллельные стороны (стр. 97);
– *равнобокая* трапеция – трапеция, боковые стороны которой равны (стр. 97);
– *средняя линия* трапеции – отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон (стр. 97).

Тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике
– *косинус* – отношение прилежащего катета к гипотенузе (стр. 162);
– *котангенс* – отношение прилежащего катета к противолежащему катету (стр. 162);
– *синус* – отношение противолежащего катета к гипотенузе (стр. 162);
– *тангенс* – отношение противолежащего катета к прилежащему катету (стр. 162).

Угол
– *вписанный* в окружность – угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность (стр. 21);
– *дополняющие* углы – два угла, сумма градусных мер которых равна 90° (стр. 168);
– *многоугольника внешний* – угол, смежный его внутреннему углу (стр. 42);
– *многоугольника* (внутренний) – угол, образованный смежными сторонами многоугольника, который содержит данный многоугольник (стр. 42);
– *полный* – угол, градусная мера которого равна 360° (стр. 14);
– *центральный* – угол с вершиной в центре окружности (стр. 17).

Утверждение – высказывание, которое является или истинным, или ложным (стр. 6).

Фалеса теорема – теорема об отрезках, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми в случае, когда на одной его стороне образовались равные отрезки (стр. 80).

Фалеса обобщенная теорема – теорема о пропорциональности отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла (стр. 110).

Центроид (центр тяжести) треугольника – точка пересечения его медиан (стр. 91, 255).

Целочисленный треугольник – длины сторон которого – натуральные числа (стр. 204).

Чевы теорема – теорема об условии пересечения трех чевиан треугольника в одной точке (стр. 221).

Чевиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на его противолежащей стороне (стр. 221).

Четвертый пропорциональный отрезок для трех заданных отрезков a, b и c – отрезок x, для которого $a : b = c : x$ (стр. 112).

Эйлера

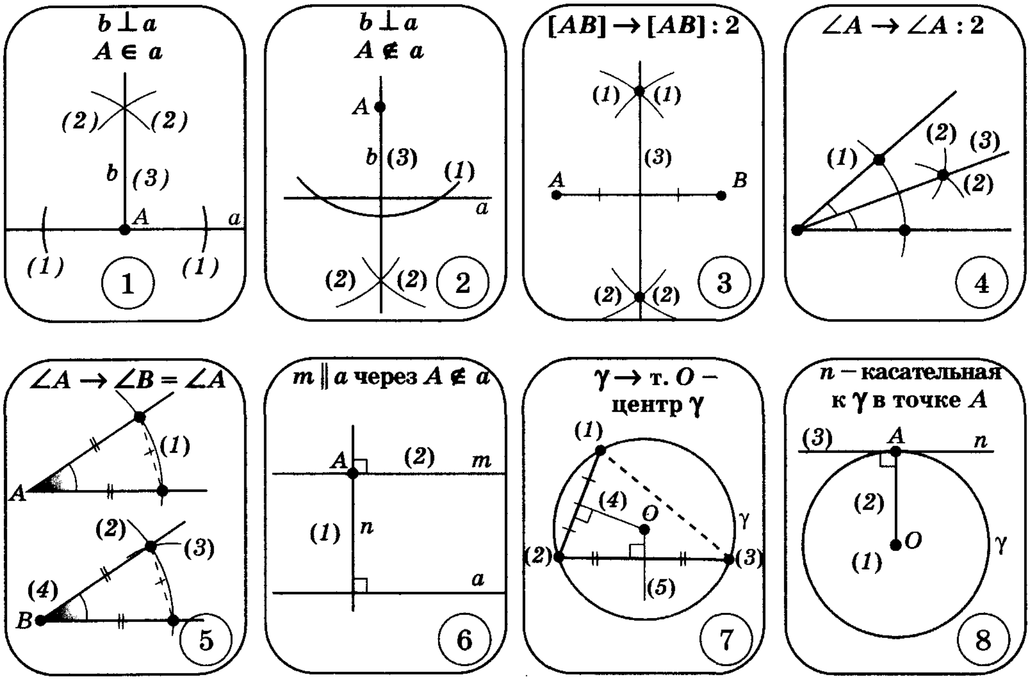
– *окружность* (или окружность Фейербаха, или окружность 9-ти точек) – окружность, проходящая через основания высот треугольника, медиан треугольника и его точки Эйлера (стр. 196);

– *точки* – середины отрезков высот треугольника, ограниченных его вершинами и ортоцентром (стр. 195);

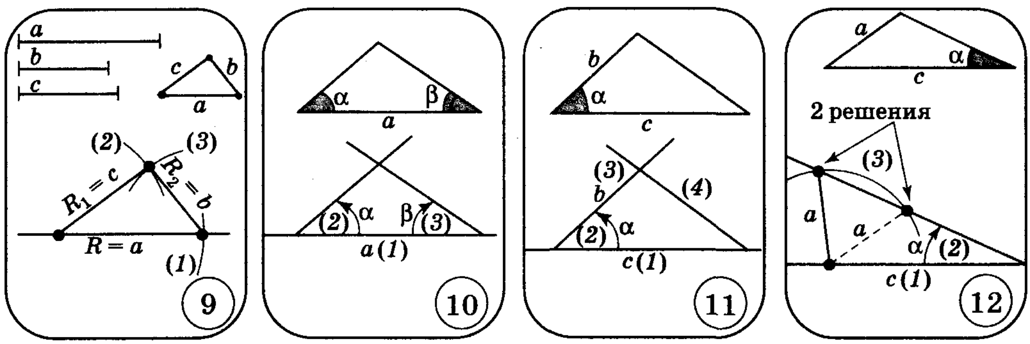
– *прямая* – прямая, проходящая через ортоцентр треугольника и центр окружности, описанной вокруг этого треугольника (стр. 195);

– *формула* – формула для определения расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника через радиусы этих окружностей (стр. 216).

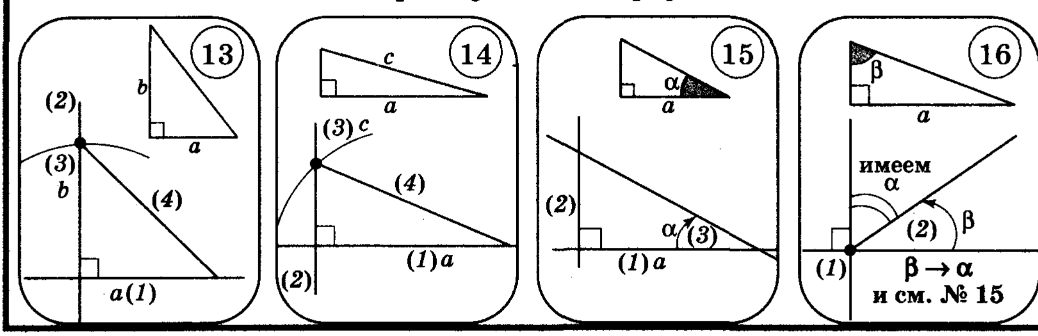
Опорные задачи на построение (7 класс)



Базовые треугольники

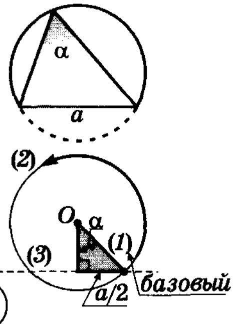


Базовые прямоугольные треугольники



Опорные задачи на построение (8 класс)

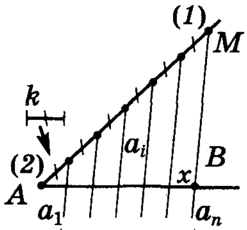
ГМТ, из которых данный отрезок a виден под заданным углом α – ***сегмент, вмещающий заданный угол***



1

Деление заданного отрезка AB на заданное количество равных частей

[redacted]



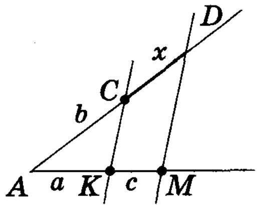
(3) – параллельные

$\angle A$ и k – произвольные

2

Построение четвертого пропорционального отрезка

$a, b, c \to x = \dfrac{c \cdot b}{a}$

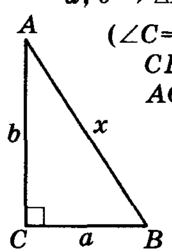


$\angle A$ – произвольный

3

$\boxed{a, b \to x = \sqrt{a^2 + b^2}}$

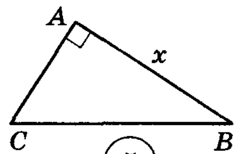
$a, b \to \triangle ABC$ $(\angle C = 90^\circ,$ $CB = a,$ $AC = b)$



4

$a, b \to x = \sqrt{a^2 - b^2}$

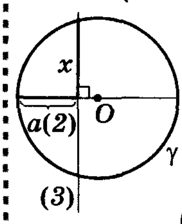
$a, b \to \angle ABC$ $(\angle A = 90^\circ, CB = a,$ $AC = b)$



5

$\boxed{a, b \to x = \sqrt{a\,b}}$

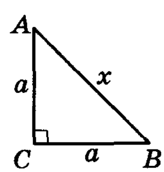
1) $a, b \to \gamma$ $\left(R = \dfrac{a+b}{2}\right)$



6

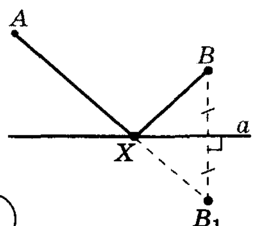
$\boxed{a \to x = a\sqrt{2}}$

$a \to \triangle ABC$ $(\angle C = 90^\circ,$ $AC = CB = a)$



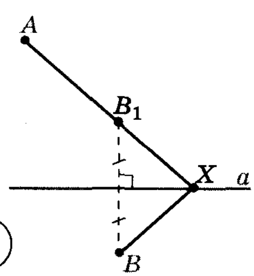
7

$A, B, a \to X$
$AX + XB$ –
наименьшая для $X \in a$



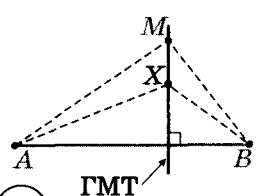
8

$A, B, a \to X$
$|AX - XB|$ –
наибольшая для $X \in a$



9

$[AB], M \to X,$
для которых
$AX^2 - XB^2 = AM^2 - MB^2$

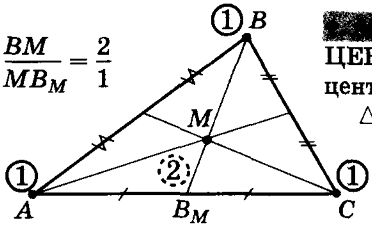


10

Замечательные точки треугольника

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МЕДИАН

$\dfrac{BM}{MB_M} = \dfrac{2}{1}$



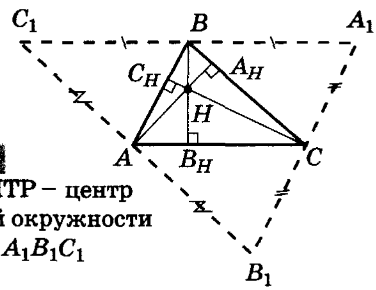
[redacted] ЦЕНТРОИД – центр тяжести $\triangle ABC$

① – *единичные массы*

B_M – *центр тяжести* $[AC]$

M – *центр тяжести* $[BB_M]$

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ВЫСОТ

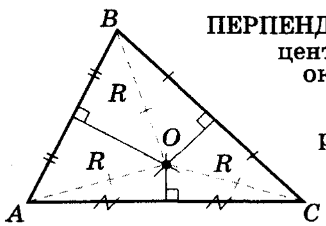


[redacted] ОРТОЦЕНТР – центр описанной окружности вокруг $\triangle A_1B_1C_1$

$$\left.\begin{array}{l} A_1C_1 \parallel AC \\ B_1C_1 \parallel BC \\ A_1B_1 \parallel AB \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ABA_1C - \textit{параллелограмм} \\ AC_1BC - \textit{параллелограмм} \end{array}\right| \Rightarrow BA_1 = AC = C_1B$$

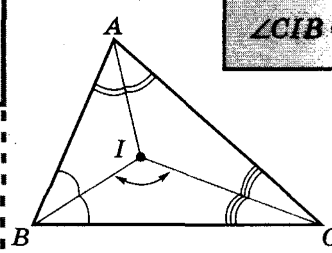
BB_H – *серединный перпендикуляр к* $[C_1A_1]$

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СЕРЕДИННЫХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРОВ – центр описанной окружности



[redacted] равноудалена от вершин треугольника

$$\boxed{\angle CIB = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}}$$

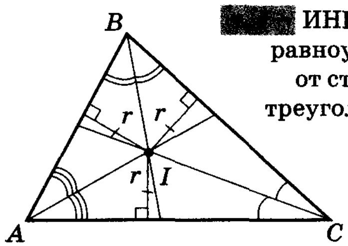


$\underline{\triangle CIB}$:

$$\angle CIB = 180^\circ - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle B}{2} = 180^\circ - \frac{\angle C + \angle B}{2} =$$

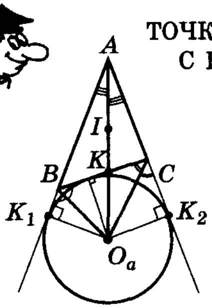
$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}.\ \text{Ч. т. д.}$$

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИССЕКТРИС – центр вписанной окружности



[redacted] ИНЦЕНТР – равноудалена от сторон треугольника

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИССЕКТРИСЫ ВНУТРЕННЕГО УГЛА С БИССЕКТРИСАМИ ВНЕШНИХ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА



(см. стр. 230, 254)

[redacted] центр вневписанной окружности

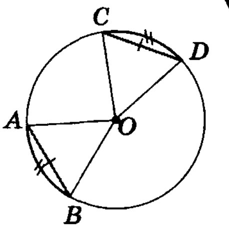
$$\left.\begin{array}{l} O_aC \equiv l_{KCK_2} \\ O_aB \equiv l_{KBK_1} \end{array}\right| \Rightarrow d(O_a; (AK_2)) = d(O_a; (AK_1))$$

$$\Downarrow$$

$$O_aA \equiv l_A$$

[redacted] *равноудалены от стороны BC прямых AB, AC*

Опорные факты окружности

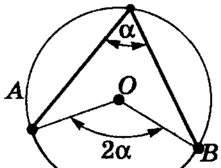


$AB = CD$

$\Updownarrow$

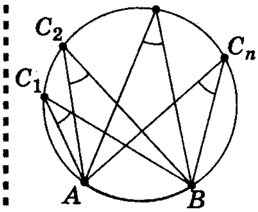
$\cup AB = \cup CD$

(1)



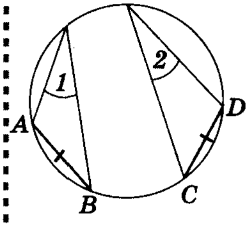
$\alpha = \frac{1}{2} \cup AB$

(2)



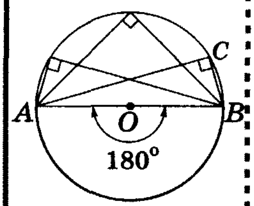
$\angle AC_1B = ... = \angle AC_nB$

(3)



$AB = CD \Leftrightarrow \angle 1 = \angle 2$

(4)

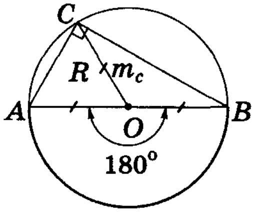


$AB = 2R$

$\Updownarrow$

$\angle ACB = 90^\circ$

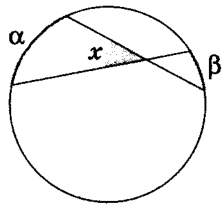
(5)



$\angle C = 90^\circ$

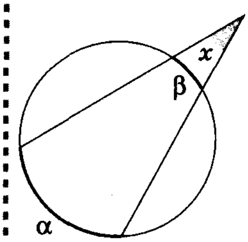
$R = m_c = \frac{c}{2}$

(6)



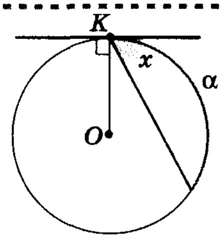
$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$

(7)



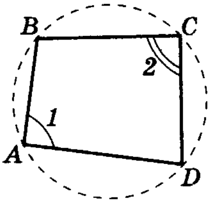
$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$

(8)



$x = \frac{\alpha}{2}$

(9)



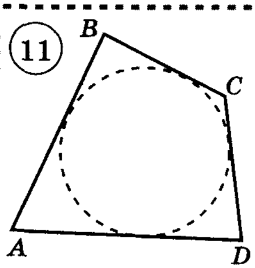
$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

$\Updownarrow$

$ABCD$ – вписанный

(10)

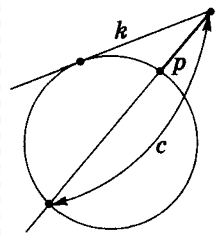
(11)



$AD + BC = AB + CD$

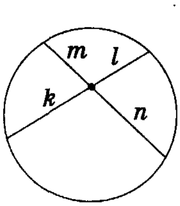
$\Updownarrow$

$ABCD$ – описанный



$k^2 = p \cdot c$

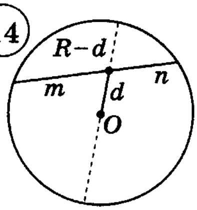
(12)



$m \cdot n = k \cdot l$

(13)

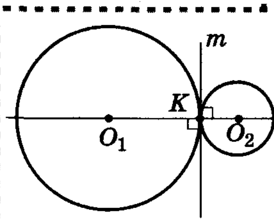
(14)

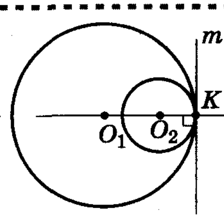


$m \cdot n = (R + d)(R - d)$

$m \cdot n = R^2 - d^2$

$\boxed{d^2 = R^2 - m \cdot n}$



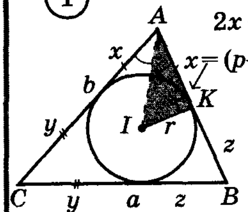


$\left.\begin{array}{l} O_1K \perp m \\ O_2K \perp m \end{array}\right| \Rightarrow K \in (O_1O_2)$

(15) (16)

Опорные задачи окружности

①



$2x + 2y + 2z = 2p$

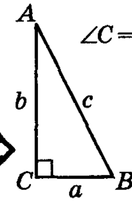
$x = (p-a)$

$x = p - (y+z)$

$r = (p-a)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{A}{2}$

$p \triangleq \dfrac{P}{2}$

$\Rightarrow$

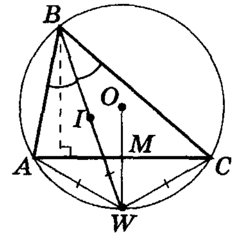


$\angle C = 90^\circ \to \mathrm{tg}\,\dfrac{C}{2} = 1$

$\dfrac{a+b-c}{2} = r$

$2r = a + b - c = a + b - 2R$

$r + R = \dfrac{a+b}{2}$



$AW = WI = WC$

$WM \perp AC$

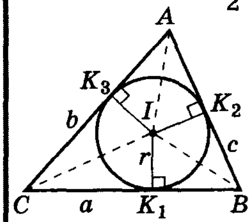
$\Downarrow$

$O \in WM$

②

$S = S_1 + S_2 + S_3 =$

$= \dfrac{1}{2}ra + \dfrac{1}{2}rb + \dfrac{1}{2}rc$



$r = \dfrac{S}{p}$

$p \triangleq \dfrac{P}{2}$

$\Rightarrow$

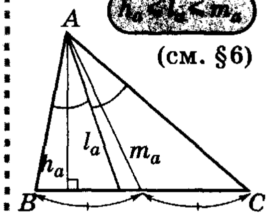
$r = \dfrac{S}{p} \qquad \dfrac{1}{r} = \dfrac{a+b+c}{2S} =$

$= \dfrac{a}{ah_a} + \dfrac{b}{bh_b} + \dfrac{c}{ch_c}$

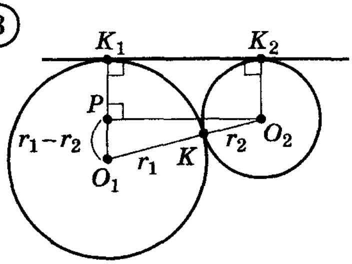
$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

$h_a \leq l_a \leq m_a$

(см. §6)



③

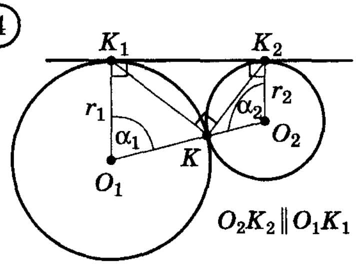


$O_2P \perp O_1K_1 \Rightarrow K_1K_2 = O_2P;$

$O_2P = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2}$

$K_1K_2 = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2}$

④



$O_1K_1 \perp K_1K_2$

$O_2K_2 \perp K_1K_2$

$\Downarrow$

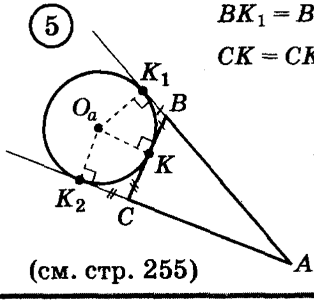
$O_2K_2 \parallel O_1K_1 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ$

$\left.\begin{aligned} \angle KK_1K_2 &= \dfrac{\alpha_1}{2} \\ \angle KK_2K_1 &= \dfrac{\alpha_2}{2} \end{aligned}\right| \Rightarrow \angle K_1KK_2 = 180^\circ - \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$

$\angle K_1KK_2 = 90^\circ$

Вневписанная окружность (треугольника ABC)

⑤



$\left.\begin{aligned} BK_1 &= BK \\ CK &= CK_2 \end{aligned}\right| \Rightarrow BC =$

$= K_1B + K_2C$

$AK_1 = AB + BK_1$

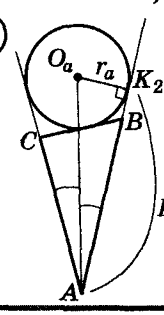
$+ \ \parallel$

$AK_2 = AC + CK_2$

$AK_1 = AK_2 = p$

(см. стр. 255)

⑥



$r_a = p \cdot \mathrm{tg}\,\dfrac{A}{2}$

$r = \dfrac{S}{p} = (p-a) \cdot \mathrm{tg}\,\dfrac{A}{2}$

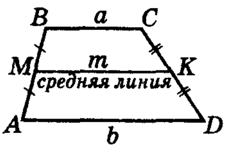
(см. № 1)

$\mathrm{tg}\,\dfrac{A}{2} = \dfrac{S}{p \cdot (p-a)}$

$r_a = \dfrac{S}{p-a}$

Опорные факты трапеции

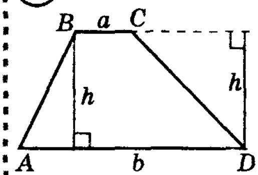
①



$m \parallel a \parallel b$

$m = \dfrac{a+b}{2}$

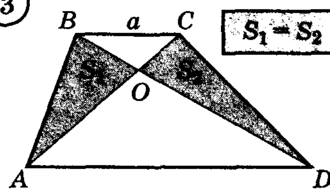
②



ABCD – трапеция

$S = h \cdot \dfrac{a+b}{2}$

③

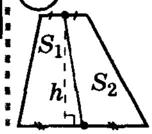


$S_1 = S_2$

$S_1 = S_{ABC} - S_{BOC} = S_{BCD} - S_{BOC}$

равны

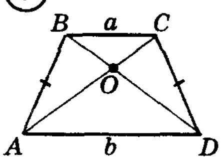
④



$S_1 = S_2$

(*т.к. h – общая*)

⑤



$AB = CD$

$\Downarrow \Uparrow$

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle C$

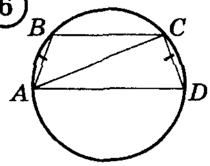
$AC = BD$,

$BO = OC$, $AO = OD$

$\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

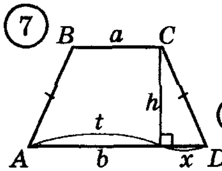
⑥



$AB = CD$

$R_{ABCD} = R_{ACD}$

⑦

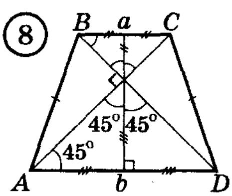


$AB = CD$

$\Downarrow$

$t = \dfrac{a+b}{2} = m$ (ср. л.) | $x = \dfrac{b-a}{2}$ | $S = th$

⑧



$AB = CD$, $AC \perp BD$

$\Downarrow$

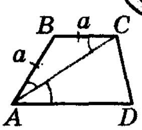
$h = \dfrac{a+b}{2} = m$ (ср. л.)

$S = h^2 = m^2$

⑨

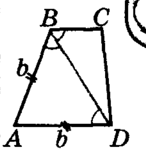
$AC = l_A$

$AB = a$



$BD = l_B$

$AB = b$

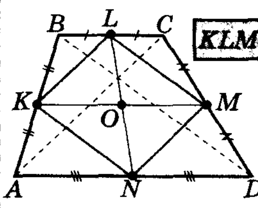


⑩

Если K, L, M, N – середины сторон

$\Downarrow$

KLMN – параллелограмм

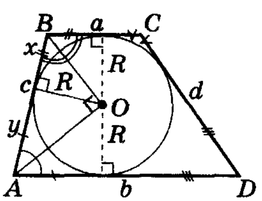


(*т.к.* $LM \parallel BD \parallel KN$, $KL \parallel AC \parallel NM$)

$KO = OM$; $OL = ON$

если $AB = CD \Rightarrow AC = BD$ *и KLMN – ромб*

⑪



$\angle AOB = 180^\circ - \dfrac{\angle A}{2} - \dfrac{\angle B}{2} =$

$= 180^\circ - \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\triangle AOB$: $R^2 = x \cdot y$

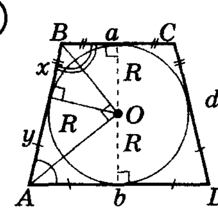
$a + b = d + c$

$h = 2R$

$\angle AOB = 90^\circ$

$R = \sqrt{xy}$

⑫



$AB = CD$

$\Downarrow$

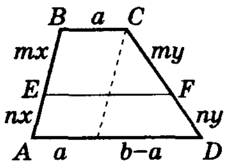
$x = \dfrac{a}{2}$

$y = \dfrac{b}{2}$

$R = \dfrac{\sqrt{ab}}{2}$

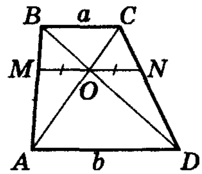
$h = \sqrt{ab}$

Опорные задачи трапеции



ABCD – трапеция
$EF \parallel AD$
$\Downarrow$
$\boxed{EF = \dfrac{an + bm}{m + n}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{MN = \dfrac{2ab}{a + b}}$
$\Downarrow$

① (см. стр. 153)



ABCD – трапеция
$MN \parallel AD$
$\Downarrow$
$\boxed{MO = ON}$

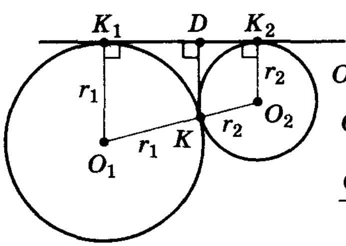
$\boxed{\dfrac{BM}{MA} = \dfrac{CN}{ND} = \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{a}{b}}$

(см. стр. 154) ②

③

$\boxed{\angle K_1KK_2 = 90^\circ}$ (см. стр. 38)

$d(K; K_1K_2) = \dfrac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$



$KD \parallel O_1K_1 \parallel O_2K_2$ и

$O_1K_1K_2O_2$ – трапеция;

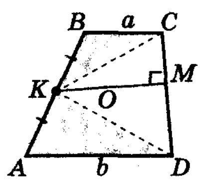
$O_1K_1 = r_1, O_2K_2 = r_2;$

$O_1K = r_1 \quad KO_2 = r_2$

$\Downarrow$

$$d(K; K_1K_2) = KD = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_1}{r_1 + r_2} = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$$

④

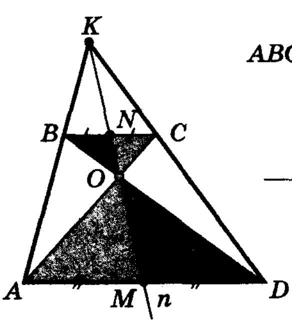


ABCD – трапеция,
$AK = KB$
$KM \perp CD$
$\Downarrow$
$\boxed{S = KM \cdot CD}$

$$\underbrace{S_{KBC} + S_{AKD}}_{\parallel} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2}b \cdot \frac{h}{2}$$

$$\frac{1}{2}S \Rightarrow S_{KCD} = \frac{1}{2}S \text{ и } S = 2S_{KCD}$$

⑤

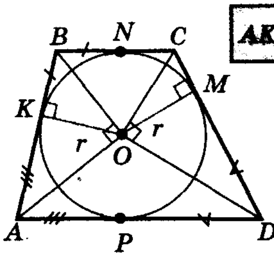


ABCD – трапеция
$BN = NC$
$AM = MD$
$\Downarrow$
$\boxed{\{K; N; O; M\} \in n}$

(см. стр. 152 – 153)

⑥

ABCD – описанная трапеция
$\Downarrow$
$\boxed{AK \cdot KB = CM \cdot MD}$
$\Downarrow$



$AP \cdot BN = NC \cdot PD$

$\boxed{\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{PD}{AP}}$

1) $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$; $OK \perp AB$, $OM \perp CD$;

2) $\triangle AOB$ и $\triangle COD$: $KB \cdot AK = r^2 = CM \cdot MD$

ОТВЕТЫ И СОВЕТЫ

ГЛАВА I

Задание 1

2. 90°. 3. а) $\angle AOC$; б) $\angle BOA$; в) 360°. 4. а) 290°; б) 240°. 5. 141°. 6. 180°, 180°, 360°. 8. а) 100°, 120°, 140°; б) 60°, 180°, 120°; в) 30°, 120°, 210°. 9. а) На 360°; б) на 120°; в) на 75°. 10. а) $22{,}5^\circ$; б) 36°; в) 111°. 12. Совет. Используйте то, что а) $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$ или $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$; б) $285^\circ = 270^\circ + 15^\circ = 180^\circ + 90^\circ + 30^\circ : 2$.

Задание 2

2. а) 225°; б) 189°. 6. а) На 4°; б) на 120°. 9. а) Нет; б) да; в) нет. 13. а) 32 см; б) 16 см; в) 16 см. 14. 45°, 45°, 90°. 15. 60°, 60°, 60°. 18. 90° и 270°. 19. 100° и 260°. 20. 60°, 120° и 180°. 21. 24 см. 22. 7 см. 23. 60°, 60°, 120° и 120°. 24. Нет. 60°, 150°, 150°. 25. 40°, 60° и 80° или 20°, 80° и 80°. 26. 18°, 54° и 108° или $22{,}5^\circ$, 45° и $112{,}5^\circ$. 27. 40°, 60°, 120° и 140°. 28. 20°. 29. 46°, 314°.

Задание 3

2. а) 55°; б) 110°; в) 90°; г) 96°. 3. а) 24°; б) $71{,}5^\circ$; в) 90°; г) 161°; д) $0{,}5\beta$. 4. а) 26°; б) 180°; в) 256°; г) 174°; д) 2α. 5. а) 12°; б) $28{,}5^\circ$; в) 45°; г) 63°; д) 90°. 6. $29^\circ 30'$, $29^\circ 30'$ и 121°. 7. а) 130°; б) $116{,}5^\circ$. 8. а) 114°; б) 124°; 236°. 9. 60° или 120°. 10. а) 55°, 60° и 65°; б) 20°, 55° и 105°. 11. Нет. 12. а) 105°; б) 120°; в) 80°; г) 34°. 13. а) 105° и 75°. 14. 104°, 108° и 148°. 15. 24°, 72° и 84°. 16. 130°. 17. 40°. 18. 45°. 19. 93°. 20. 180° и 90°. 21. 60° или 140°. 22. 35°. 23. 110°. 24. 130°. 25. 36° или 101°. 26. 50° и 40°. 27. а) 122°; б) 58°. 28. 35° и 55°. 31. 360°. 32. 360°. 33. 180°. 34. 40°, 40°, 100°. 36. а) 50°; б) 50°. 38. Совет. Рассмотрите углы треугольника MBN и возможные размещения точек M, N и A. 40. По теореме о мере вписанных углов: $\angle PEB + \angle BCD = \angle PAD$ и $\angle AEB + \angle ACB = \angle APB + \angle ADB$. Откуда: $\angle PEC + \angle ECD = \angle PEB + \angle AEB + \angle ACB + \angle BCD = \angle PAD + \angle APD + \angle ADP = 180^\circ$.

Задание 4

1. а) 45°; б) 120°; в) 55°. 2. 30°. 3. 108°. 4. 158°. 5. 20°. 6. 120°. 7. 30°. 8. 50°. 10. 18°. 11. 45°. 12. а) 120° и 240°; б) $180^\circ - \gamma$ и $180^\circ + \gamma$. 17. Совет. Докажите, что $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC$. 18. Совет. Докажите, что PN – медиана прямоугольного треугольника APM.

Задание 5

3. Постройте окружность с диаметром AB. Точками пересечения окружности со сторонами AC и BC будут точки A_1 и B_1 (почему?). Углы B_1AB и B_1A_1B опираются на одну хорду, тогда их сумма равна 180° и $\angle B_1A_1C = \angle B_1AB$. Аналогично докажите, что $\angle A_1B_1C = \angle ABC$. 4. Совет. Используйте такое же дополнительное построение, что и в предыдущей задаче; вспомните свойства серединного перпендикуляра к хорде. 5. С инцентра треугольника его сторону видно под углом на 90° больше половины угла треугольника, противолежащего этой стороне (почему?). Поэтому искомым ГМТ будет дуга окружности, которая стягивается хордой AB. 9. Пусть надо построить треугольник по двум углам, α и β и медиане m. Постройте отрезок $AP = 2m$, середину его обозначьте как K. Постройте ГМТ, из которых отрезок AK видно под углом β, а KP – под углом α (в одной полуплоскости относительно AP). Точку пересечения этих ГМТ обозначьте как B. Отрезок BK надо продолжить на $KC = BK$. Треугольник ABC – искомый. Докажите это. 10. Совет. См. задачу 5. 11. Окружность, концентрическая данной с радиусом вдвое большим заданной. Докажите это. 12. Проведите в данной окружности радиус OA и касательную к окружности AK

заданной длины. Искомое ГМТ – окружность, концентрическая заданной, с радиусом равным OK. Докажите это.

Задание 6

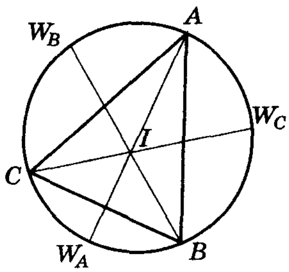


Рис. 1

1. Совет. Опишите вокруг треугольника ABC окружность и продлите биссектрису AK к пересечению с окружностью в точке W_A. **4. в)** По неравенству треугольника (рис. 1): $AI + IC > AC$; $CI + IB > BC$; $AI + IB > AB$. Учитывая, что: $W_BI = W_BA = W_BC$; $W_AI = W_AB = W_AC$ и $W_CI = W_CA = W_CB$, получим: $2IW_C = AW_C + BW_C > AB$; $2IW_A = BW_A + CW_A > BC$; $2IW_B = CW_B + AW_B > AC$. Если сложить все неравенства, получим: $2AI + 2IW_A + 2BI + 2IW_B + 2CI + 2IW_C > 2P$, т. е. $AW_A + BW_B + CW_C > P$. **5.** Используйте совет к задаче 1. **7.** Совет. Сначала постройте точку W_A (пересечение биссектрисы угла A с описанной окружностью), а потом постройте диаметр описанной окружности, проходящий через точку W_A. **8.** Используйте совет к задаче 7.

Задания для повторения главы I

13. а) 72° и 288°; **б)** 36° и 144°. **14. а)** 120°; **б)** 120°. **15. а)** 30°, 60° и 90°; **б)** 120° и 60°. **16. а)** 110°; **б)** 80°; **в)** 59°; **г)** 35°; **д)** 130°. **17.** 10°, 10°, 160° или 20°, 80°, 80°. **18. а)** 36°, 72° и 72°; **б)** 120°; **в)** 36°; **г)** 90°. **20. а)** Совет. Рассмотрите углы ABC и ABD.

Готовимся к тематической аттестации № 1

Вариант I. 1. а) 75° и 285°; **б)** 75°; **в)** 37,5° и 142,5°; **г)** 37,5°; 37,5° и 105°. **2.** 56°, 56° и 68°. **3.** Рассмотрите возможные расположения точек C и D на окружности относительно хорды AB и вспомните свойство вписанных углов, опирающихся на равные дуги.

Вариант II. 1. а) 144° и 216°; **б)** 144°; **в)** 72° и 108°; **г)** 72°; 72° и 36°. **2.** Рассмотрите возможные расположения точек C и D на дуге AB и вспомните свойство вписанных углов, опирающихся на равные дуги. **3.** Рассмотрите возможные расположения точки M окружности относительно хорды CD и вспомните: свойство диаметра, перпендикулярного хорде; свойство биссектрисы смежных углов.

ГЛАВА II

Задание 7

1. а) 1260°. **2. а)** 11. **3. а)** 8. **7. а)** 3; **б)** 4. **9. а)** Да; **б)** да. **10.** 150°, 60°, 150°, 90°, 90°. **12. а)** 11; **б)** 6; **в)** 6; 5; 4; 3; **г)** 6. **14.** Совет. Запишите пять неравенств для треугольников ABP, BTC, ... (рис. 2) и сложите их. **15.** Совет. Воспользуйтесь тем, что в произвольном треугольнике со сторонами a, b, c и углами A, B, C (соответственно), неравенства $a < b < c$ и $A < B < C$ равносильны. Рассмотрите треугольники ABC и ADC, а потом BCD и BAD. **16.** Совет. Продлите NM до пересечения со сторонами многоугольника в точках M_1 и N_1. Понятно, что $M_1N_1 \geqslant MN$ (почему?). Затем сравните M_1N_1 и отрезки, соединяющие N_1 с вершинами многоугольника, являющимися концами стороны, которой принадлежит M_1. **17. а)** Продлите BC и DE до пересечения в точке K (рис. 3). $\angle BKE = 60°$, $\angle KBE + \angle BEK = 120°$, тогда $\angle CBE = \angle BEF$, (учитывая, что все углы шестиугольника $ABCDEF$ по 120°); **б)** Совет. Продлите BC, DE, AF до пересечения в точках K, M, N. Треугольник KMN – равносторонний.

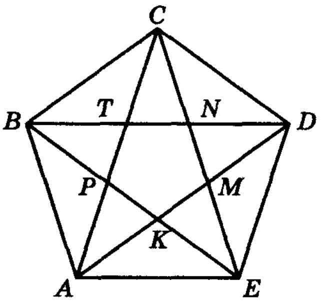


Рис. 2

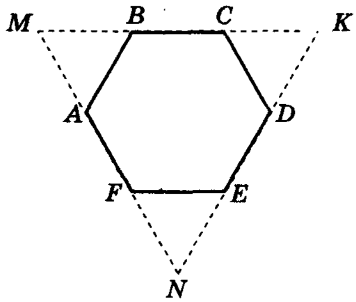


Рис. 3

Задание 8

5. Совет. Проведите медиану гипотенузы. 8. Совет. Проведите перпендикуляр EP к стороне BC. 9. Квадрат площади $\frac{Q}{5}$.

Задание 9

6. 15 см и 4 см. 7. 100 см^2. 8. 396 см. 9. 56,25 см^2. 11. 432 см^2 или 864 см^2. 12. 48 см. 15. 140 см^2. 16. а) $4r^2$; б) $\frac{R^2}{2}$. 17. 125 с половинками или 130 целых. 18. Площадь квадрата на 900 м^2 больше. 19. 31 778,8 м^2. 20. 125 см^2. 21. 248 см^2. 22. 1760 см^2. 23. 16 м^2. 24. 2 см^2. 25. а) 5 : 3; б) 5 : 3. 26. $(a^2 + b^2)$ см^2.

Задание 10

4. а) 1,8 см, 1,5 см, 1,4 см, 1,3 см; б) 15 см, 7 см, 23 см, 21 см. 8. а) 3; б) 3; в) 4. 10. а) (60°; 180°); б) (0°; 90°). 11. 90°. 13. а) 60°, 60°, 120°, 120°; б) 30°, 60°, 120°, 150°. 14. а) 70°, 105°, 135°, 50°; б) 90°, 126°, 63°, 81°. 15. 60°, 100°, 60°. 16. а) 83°; б) 165°; в) 92°. 21. Совет. а) Отрезок, соединяющий две точки на противоположных сторонах четырехугольника, – общая сторона четырехугольников, на которые он разбивает заданный четырехугольник. Запишите неравенства для сторон образованных четырехугольников и сделайте вывод. б) Диагональ четырехугольника – общая сторона двух треугольников, на которые она разбивает четырехугольник. Запишите неравенства для сторон обоих треугольников и сделайте вывод. 22. Совет. Рассмотрите два треугольника, на которые четырехугольник делится диагональю, найдите их площадь. 23. Совет. а) Используйте утверждение задачи 21 а); б) рассмотрите два треугольника, стороны которых принадлежат диагоналям и двум противолежащим сторонам; в) воспользуйтесь утверждениями задач 21 б) и 23 б). 24. Пусть точка M – точка пересечения диагоналей AC и BD. В треугольниках AMB и AMD сторона AM – общая, $DM = MB$ и $AB > AD$. Тогда $\angle AMB > \angle AMD$ и $\angle CMD > \angle BMC$. Отсюда $BC < DC$. 25. Совет. Постройте окружность на диагонали, которая проходит через в вершины острых углов, как на диаметре.

Задание 11

2. а) Да; б) нет; в) нет. 3. а) Да; б) да. 5. Да. 9. 12 см, 24 см, 36 см и 24 см. 10. а) Да; б) нет; в) нет. 11. а) Да; б) нет; в) да; г) нет. 12. 6,5 см^2. 13. а) 10 см^2; б) 52 см^2. 17. Совет. Докажите, что $\smile EB + \smile BP = \smile PD + \smile DE$. 18. Совет. Используйте утверждения задачи 17. 21. Совет. а) Вспомните свойство медианы прямоугольного треугольника; б) используйте утверждения задачи 21 а). 22. Совет. а) Через вершину C проведите прямую, параллельную BD, точку ее пересечения с окружностью обозначьте E. Докажите, что $BE = CD$, и рассмотрите треугольник ABE.

Задание 12

3. а) 84°, 96°, 84°, 96°; **б)** 62,5°, 117,5°, 62,5°, 117,5°; **в)** 71°, 109°, 71°, 109°; **г)** 60°, 120°, 60°, 120°. **4. а)** 45°, 135°, 45°, 135°; **б)** 65°, 125°, 65°, 125°; **в)** 70°, 110°, 70°, 110°; **г)** 72°, 108°, 72°, 108°; **д)** 30°, 150°, 30°, 150°. **5. а)** Нет; **б)** нет; **в)** нет. **7. а)** 72°, 108°, 72°, 108°; **б)** 53°, 127°, 53°, 127°; **в)** $\alpha + \beta$, $180° - \alpha - \beta$, $\alpha + \beta$, $180° - \alpha - \beta$. **8. а)** 20°; **б)** 65°. **9. а)** 100°, 80°, 100°, 80°; **б)** 60°, 120°, 60°, 120°. **10. а)** 50°, 130°, 50°, 130°; **б)** 40°, 140°, 40°, 140°. **11.** Нет. **12.** Нет. **13. а)** 6 см; **б)** 4,5 см, 7,5 см; **в)** 4 см, 8 см; **г)** 3 см, 9 см, 3 см, 9 см. **14. а)** 10 см, 14 см, 10 см, 14 см; **б)** 8,5 см, 15,5 см, 8,5 см, 15,5 см; **в)** 8 см, 16 см, 8 см, 16 см. **15. а)** 16 см; **б)** 20 см; **в)** 18 см. **16.** 20 см. **18.** 28 см или 32 см. **19. а)** 96 см²; **б)** 4 см; **в)** 5,4 см. **20.** 132 см². **21.** 40 см². **22.** 48 см². **23.** 42 см. **24.** Стороны – 14 см и 10 см; высота – 5,6 см. **25.** 10 см и 14 см. **26. а)** 5 см; **б)** 34 см; **в)** 5 см. **27. а)** 8 см и 2 см; **б)** 6 см; **в)** 12 см. **32.** 40° и 140° или 80° и 100°. **33. а)** 40° и 140°; **б)** 60° и 120°. **34.** 51° и 129° или 15° и 165°. **44.** С о в е т. Постройте две прямые, каждая из которых параллельна двум параллельным сторонам параллелограмма и равноудалена от них. Точка пересечения этих прямых и есть точкой пересечения диагоналей. Докажите это.

Задание 13

1. а) 4 см; **б)** $x = a$. **2.** 4 см, 4 см, 8 см, 12 см. **7.** 8 см. **8.** 2 см, 3 см и 1,5 см. **9. а)** Равнобедренный; **б)** равносторонний; **в)** прямоугольный. **10.** 2 : 1. **12.** 30 см. **13.** 12 м. **16.** С о в е т. Используйте свойство медианы гипотенузы в прямоугольном треугольнике. **17. а)** 15 см; **б)** 9 см. **20.** Прямая, параллельная заданной прямой и равноудаленная от заданной точки и прямой. **21.** 3 см. **22. а)** и **б)**. С о в е т. Построение следует из свойства медиан треугольника; **в)**. С о в е т. Постройте окружность, диаметром AM которой есть медиана. Постройте две хорды MK и MN, которые равны половинам высот, так, чтобы K и N принадлежали разным полуокружностям. Продлите хорду KM на отрезок $HM = KM$. Через точку H проведите прямую, перпендикулярную KH, до пересечения с прямой AN в точке C. Точку пересечения CM с AK обозначьте как B. Докажите, что треугольник ABC – искомый; **д)**. С о в е т. См. задачу 20. **25.** С о в е т. Для доказательства используйте теорему о средней линии треугольника.

Задание 14

2. а) 70°, 70° и 20°; **б)** 45°, 135° и 45°; **в)** 10°, 80° и 20°. **3.** 50°. **4.** 124°. [illegible] **б)** 36°. **7.** 45°. **8. а)** 4 см; **б)** 52 см. **9. а)** 16 см; **б)** 8 см. **10.** 6 см, 12 см, 6 см [illegible] **11. а)** 10 см, 14 см, 10 см и 14 см; **б)** 6 см, 18 см, 6 см и 18 см; **г)** 10 см, 14 см, [illegible] и 14 см. **12. а)** 52 см; **б)** 24 см. **13.** 6 см и 16 см. **15.** 8 см и 18 см. **16.** Н[illegible] **23.** 9 см. **24.** 15 см. **25.** 30° и 60°. П о д с к а з к а на рис. 4. **26.** 45°. По[illegible] на рис. 5. **27.** 75°. П о д с к а з к а на рис. 6. **32. а)** 80°, 100°, 80°, 100°; **б)** 60°, [illegible] 60°, 120°; **в)** 70°, 110°, 70°, 110°. **34. а)** 22,5° и 67,5°; **б)** 30° и 60°. **35. а)** [illegible] 70°, 110°; **б)** 80°, 100°, 80°, 100°. **36. а)** 80°, 100°, 80°, 100°; **б)** 60°, 120°, 60°, [illegible] **37. а)** 8 см; **б)** 20 см. **39. а)** 8 см²; **б)** 60 см². **41. а)** 50 см²; **б)** 200 см². [illegible] **49.** 40 см и 30 см. **53.** С о в е т. Используйте, что диагональ ромба – биссектриса треугольника. **62.** $2a$. **63.** 10 см. **65.** 4 см и 6 см.

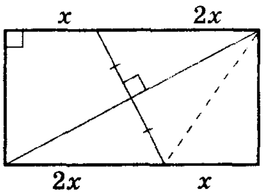


Рис. 4

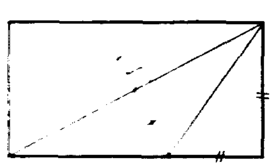


Рис. 5

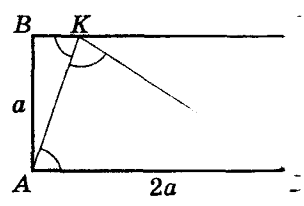


Рис. 6

Задание 15

1. 112° и 106°. **2. а)** 57°, 123°, 123°; **б)** 123°, 90°, 90°. **3. а)** 60°, 120°, 45°, 135°; **б)** 120°, 60°, 45°, 135°. **4.** 54°, 54°, 126°, 126°. **5. а)** Не существует; **б)** существует. **6. а)** Не могут; **б)** могут. **7. а)** 68°, 112°, 118°, 72°; **б)** 90°, 90°, 135°, 45°; **в)** 120°, 60°, 60°, 120°. **8.** 60°, 120°, 120°, 60°. **9.** 30°, 150°, 150°, 30°. **10.** 90°. **11.** 3 см. **12.** 8 см. **13.** Трапеция. **а)** 23 см; **б)** 36 см. Совет. Учтите что или KL, или MN – средняя линия треугольника. **14. а)** 4 см; **б)** 15 см. **15. а)** 8 см; **б)** 2 см; **в)** 4 см. **16. а)** 5 см и 15 см; **б)** 6 см и 10 см. **17.** 2 см, 3 см и 2 см. **18.** 4см и 10 см. **19. а)** 1: 2; **б)** 2 : 3. **20. а)** 3,5 см, 5 см, 6,5 см; **б)** 4 см и 6 см. **21.** 132 см. **22. а)** 28 см; **б)** 7 см. **23.** 24 м, 6 м и 6 м. **24.** 2 см. **25.** 10 см и 34 см. **26.** 7 см. **27. а)** 96 см^2; **б)** 192 см^2. **29. а)** 15 см^2; **б)** 25 см^2. **30.** 2 см, 8 см, 3 см. **35.** Совет. Проведите через середину меньшего основания две прямые, параллельные боковым сторонам, и рассмотрите треугольник, ограниченный этими прямыми и большим основанием. **33.** Пусть BC и AD – основания трапеции, диагонали AC и BD, которой перпендикулярны между собой, середины оснований – точки K и M. По опорной задаче 6 (стр. 101) отрезок KM равен средней линии трапеции. Тогда KM – высота трапеции (докажите это). Тогда по опорной задаче 5 (стр. 100) трапеция – равнобокая. **34.** Подсказка на рис. 7. **35.** Совет. Воспользуйтесь утверждением предыдущей задачи и учтите, что трапеция описанная. **36.** Пусть сторона $AB = BC + AD$. Продлите биссектрису угла A до пересечения с прямой BC в точке E. Пусть O – точка пересечения AE и CD. Треугольники ECO и ADO – равны (докажите это). Треугольник EBA равнобедренный, тогда его медиана основания – биссектриса. Попробуйте провести доказательство другим способом, проведите для этого среднюю линию трапеции.

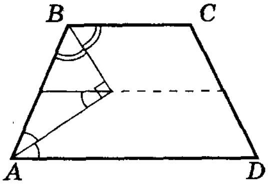


Рис. 7

Задания для повторения главы II

13. Да. **14.** Нет. **16.** 40°. **17.** Нет. **18. а)** Нет; **б)** да. **19. а)** Нет; **б)** 7. **24. а)** 27°, 153°, 27°, 153°; **б)** 72°, 108°, 72°, 108°. **25.** 40°, 140°, 40°, 140°. **26.** 74°, 106°, 74°, 106°. **27. а)** 5 см, 9 см, 5 см, 9 см; **б)** 4 см, 10 см, 4 см, 10 см; **в)** 5,6 см, 8,4 см, 5,6 см, 8,4 см. **29.** 24 см. **30. а)** 5 см; **б)** 88 см^2 или 33 см^2; **в)** квадрат с диагональю 3 см. **31.** 10,5 см, 13,5 см, 10,5 см, 13,5 см. **32. а)** 106°, 106°; **б)** 60°, 135°. **33. а)** 100°, 90°, 90°, 80°; **б)** 45°, 45°, 135°, 135°. **34.** 135°. **35.** 120° и 60°. **36.** 60°, 60°, 120°, 120°. **37.** 8 см. **38.** 4 см. **39.** 28 см. **40.** 17 см, 19 см, 21 см. **41.** 3 см, 6 см и 18 см.

Готовимся к тематической аттестации № 2

Вариант I. 1. 57°, 123°, 57°, 123°. 2. 12 см^2. 3. 16 см. 4. 24 см^2. 5. 90°, 90°, 120° и 60°. **Вариант II.** 1. 158° и 64°. 2. 49 см^2. 3. 27 см. 4. 10 см^2. 5. 20 см.

ГЛАВА III

Задание 16

3. 1 : 3 и 2 : 3. **5.** $5\frac{1}{3}$ см. **6. а)** 3 : 4; **б)** 3 : 7; **в)** 7 : 4. **7.** 3 см. **8. а)** 5 : 4 : 7; **б)** 5 : 11; **в)** 9 : 7. **9.** 4 см и 9 см. **10.** 6 см. **11. а)** 12 см и 10 см; **б)** 18 см и 15 см. **12. а)** 1,5 см; **б)** 5 см. **13.** 7,5 см. **14.** Совет. Найдите отношение $MN : AC$ и докажите, что $MN \parallel AC$. **15.** 1 : 4. Совет. Через точку A_1 проведите прямую, параллельную BM. **16.** 6 : 1. **17.** 1 : 1. Совет. Через точку пересечения высоты и медианы поведите прямую, параллельную стороне BC.

Задание 17

2. 1,5 см, 2 см, 2,5 см. **3.** 7 см, 16 см. **4.** 6 см, 7 см и 8 см. **5.** 4 см, $3\frac{1}{3}$ см, $5\frac{1}{3}$ см. **6. а)** 27 см; **б)** 45 см. **7.** 6 см, 12 см, 15 см. **10.** 24 см, 28 см, 32 см. **11.** 30 м, 35 м, 40 м. **12.** 12 см. **13.** 6,25 см, 0,75 см. **14.** 6 см, 4,5 см. **15.** 90 см.

Задание 18

3. 4,8 см. **4.** 84 см и 84 см. **5.** 11 см. **10.** По теореме Фалеса $HO : OM = HF : FN$, углы FNK и OHF равны (почему?), $NK = OM$ (почему?). Тогда треугольники OHF и KNF подобны по первому признаку. **11.** 1 : 4 и 1 : 3. **12.** Продлите медиану AM на отрезок $MO = MB$. Тогда $\angle MBO = \angle BOM = \angle BML$, поэтому $AL : AB = AM : AO$. Аналогично доказываем, что $AD : AC = AM : AO$. Отсюда: $AL : AB = AD : AC$. Тогда треугольники подобны по первому признаку. **13.** Совет. Сначала докажите, что площади треугольников, имеющих общую высоту, относятся как стороны, на которые эта высота опущена.

Задание 19

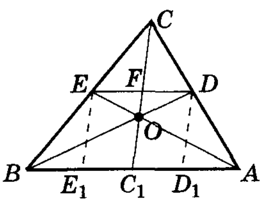


Рис. 8

6. а) 1,2 см; **б)** 3,6 см. **9.** 6 : 11. **10.** Проведем $EE_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ (рис. 8). ED – средняя линия $\Rightarrow ED \parallel BA \Rightarrow$ $\Rightarrow EF = E_1C_1 = BE_1$ и $FD = C_1D_1 = D_1A$. Из подобия треугольников DOF и BOC_1, треугольников EFO и AC_1O (докажите это подобие) получим:
$EF : C_1A = FD : BC_1$, или $\frac{1}{2}BC_1 : C_1A = \frac{1}{2}AC_1 : BC_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (BC_1)^2 = (AC_1)^2 \Rightarrow BC_1 = AC_1$ (рис. 8). **13. а)** 1 : 2; **б)** 2 : 1. **14.** 1 : 3. **15.** 10 см и 26 см.

Задание 20

3. а) Да, $k = \frac{2}{3}$; **б)** нет. **4.** 18 см, 24 см, 36 см. **5. а)** Да; **б)** нет. **8.** $\sqrt{mn}$. **9.** 22 см.

Задание 21

6. а) 6 см; **б)** 30 см. **7. а)** 20 см; $4\sqrt{41}$ см и $5\sqrt{41}$ см; **б)** 18 м, 24 м и $12\sqrt{4}$ м; **в)** 12 мм, 16 мм и $8\sqrt{3}$ мм. **8.** $b : a = b_1 : h$ (из подобия треугольников BCA и CAH) (рис. 9), $\frac{b}{a} = \frac{h}{a_1}$ (из подобия треугольников CAB и BCH),

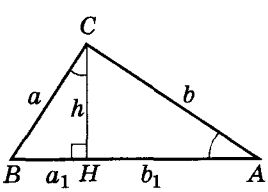


Рис. 9

$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b_1}{h} \cdot \frac{h}{a_1} = \frac{b_1}{a_1}$. **9.** 1,8 см и 3,2 см. **10.** 13 см. **11.** 61 см. **12.** $5\frac{7}{13}$ см, $2\frac{4}{13}$ см, 6 см. **13.** 3,75 см. **14.** 9 дм и 13,5 дм. **15.** 2 : 1. **16.** 12,5 см. **17.** 6 см и 10 см. **18.** 36 см и 40 см.

Задание 22

1. $\frac{10}{3}$. **2.** 4,8 см, 7,2 см и 8 см. **3.** 12 см, 14 см и 16 см. **4.** 1,875 см. **5.** 19 : 10. **6.** $1{,}8\sqrt{5}$ см. **7.** 2,25 см^2. **8. а)** 3 : 4; **б)** 1 : 1. **9. а)** 4 : 1; **б)** 9 : 4. **10.** 32 см^2 и 18 см^2. **11.** Проведите диагональ AC. BD и AM – медианы треугольника ABC, тогда $S_{BOM} = \frac{1}{6} S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ (см^2). Площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$ (см^2).

12. $\frac{1}{3}a$. 13. $3S$. 14. $\frac{6a}{7}; \frac{2a}{7}$. 15. Совет. Проведите биссектрису AL и докажите, что точка $L \equiv D$. 16. $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$. Пусть $ABCD$ – трапеция ($BC \parallel AD$), ее диагонали пересекаются в точке K, $S_{BKC} = S_1, S_{AKD} = S_2$. $\triangle BKC \backsim \triangle DKA \Rightarrow BK : DK = CK : AK = \sqrt{S_1} : \sqrt{S_2}$, тогда $S_{\triangle CKD} = \sqrt{S_1 S_2}$ и $S_{\triangle ABK} = \sqrt{S_1 S_2}$ (докажите это). Отсюда

$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$. 17. $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$. Каждый из образованных треугольников подобен данному с коэффициентами подобия: $\sqrt{S_1} : \sqrt{S}$, $\sqrt{S_2} : \sqrt{S}, \sqrt{S_3} : \sqrt{S}$, где S – искомая площадь. Площади образовавшихся параллелограммов $2\sqrt{S_1 S_2}, 2\sqrt{S_1 S_3}, 2\sqrt{S_2 S_3}$; тогда $S = S_1 + S_2 + S_3 + 2\sqrt{S_1 S_2} + 2\sqrt{S_2 S_3} + 2\sqrt{S_1 S_3} = \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$.

Задание 23

1. а) 10 см; б) $\sqrt{65}$ см; в) $13a$. 2. а) 12 см; б) $4\sqrt{3}$ см; в) $\sqrt{c^2-a^2}$. 3. а) 13 см; б) 5 см; в) $6\sqrt{3}$ см; г) $6\sqrt{2}$ см; д) 12 см. 4. 216 см. 5. $\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{a\sqrt{3}}{6}$. 6. 5 см. 7. 6 см. 8. 4 м. 9. а) 6,4 см; б) 5 см; в) 6 см; г) 4 см. 10. $4\frac{8}{13}$ см. 11. 6 м и $6\sqrt{3}$ м. 12. 12 см и 16 см. 13. а) 5 см; б) 25 см. 14. 12 см и $12\sqrt{3}$ см. 15. $4\sqrt{3}$ см и $2\sqrt{19}$ см. 16. $10\frac{5}{12}$ см. 17. 5 см, 2 см, 5 см и 8 см. 18. 11,2 см. 19. 4,8 см. 20. 4 : 5. 21. $2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. 22. 15°, 75°, 90°. Совет. Используйте, что произведение катетов прямоугольного треугольника равно произведению его гипотенузы и высоты (к гипотенузе). Отсюда высота равна половине медианы. 24. 40 см и 42 см. 25. 2 см. 26. 98 см. 28. 10 см. 29. а) $\sqrt{Rr}$; б) $\frac{2Rr}{R+r}$. 30. 11 см или 21 см. 31. 6 см^2. Совет. Докажите, что диагонали взаимно перпендикулярны, а для этого постройте четырехугольник, вершинами которого будут середины сторон трапеции. 32. Подсказка на рис. 10. 33. 45°. 34. 45°. 35. 90°. Совет. Используйте результат задачи 34.

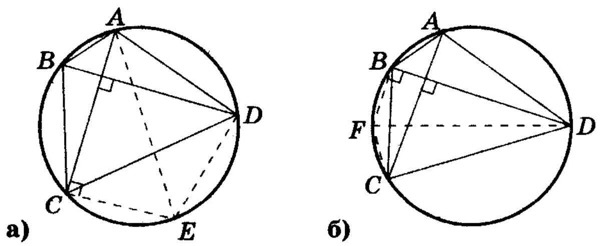


Рис. 10

Задание 24

4. 40 см. 5. 6 см. 6. 4,5 дм, 42,75 см^2. 7. $\frac{2r}{5}$ см. 8. $4\sqrt{5}$ см или $4\sqrt{5}$ см. 9. $R^2 - d^2$. 10. 6 см и 12 см. 11. $d^2 - R^2$. 12. 6 см. 13. 0,2 см. 14. 21 см. 15. 4 см. 18. а) 10 см; б) $\sqrt{30}$ см. 19. 1 см и 2 см. 20. 9 см, $5\frac{2}{7}$ см, $10\frac{5}{7}$ см. 21. $2{,}4\sqrt{2}$. 22. По свойству биссектрисы треугольника (рис. 11) $\frac{c_1}{c_2} = \frac{(b_1 + b_2)}{a} \Leftrightarrow ac_1 = b_1c_2 + b_2c_2$ (1) и $\frac{b_1}{b_2} = \frac{(c_1 + c_2)}{a} \Leftrightarrow ab_1 = b_2c_1 + b_2c_2$ (2). По теореме Лагранжа: $a(c_1 + c_2) - b_1b_2 = a(b_1 + b_2) - c_1c_2 \Leftrightarrow ac_1 + ac_2 - b_1b_2 - ab_1 - ab_2 + c_1c_2 = 0$. Подставим (1) и (2) в последнее равенство: $b_1c_2 + b_2c_2 + ac_2 - b_1b_2 - b_2c_1 - c_2b_2 - ab_2 + c_1c_2 = 0 \Leftrightarrow (c_2 - b_2)(a + b_1 + c_1) = 0 \Leftrightarrow c_2 = b_2$. Это дает возможность доказать, что $\angle ACB = \angle ABC$. 24. 14 : 1. 25. 100 мм. 27. 49 : 81. 28. 15 см.

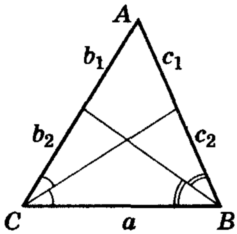


Рис. 11

Задание 25

1. $a : b$. 2. 4 см. 3. 4,8 см. 4. 8 см. 5. $\frac{2ab}{b-a}$. 6. 3 см^2, 6 см^2, 6 см^2 и 12 см^2. 8. 5 : 16 или 4 : 3. 9. $\sqrt{10}$. Совет. См. приложение 3. 10. Боковую сторону прямая делит в отношении $2a : b$, где a и b – длины меньшего и большего оснований трапеции.

Задания для повторения главы III

11. 9 см и 10 см. 12. 30 см, 40 см и 35 см. 13. 24,7 см. 18. а) 20 см; б) $3\sqrt{2}$ см. 20. а) 6 см; б) $4\frac{2}{3}$ см. 21. а) $4\sqrt{21}$ см, б) 5 см; в) 5 см. 22. 20 см. 23. 9 см, 12 см и 15 см. 24. $2\sqrt{3}$ см и $2\sqrt{6}$ см. 25. $3\sqrt{41}$ см. 26. 7,25 см. 27. 2,4 см. 28. $3(7-4\sqrt{3})a^2$. 29. 4 см и 14 см. 30. 13 см. 31. 12 см. 32. $3\sqrt{3}$ см. 33. $8\sqrt{5}$ см и $4\sqrt{5}$ см. 34. 6,25 см. 35. 30°, 60° и 90°. 36. 3 см. 38. $m^2 - c^2$. 39. 12 см, 294 см^2. 40. 64. 41. 17 см и 34 см или 27 см и 24 см. 42. 16 см. 43. $5R^2$.

Готовимся к тематической аттестации № 3

Вариант I. 1. 30,8 см. 2. $\sqrt{61}$ см. 3. 13 см. 4. 6 см. 5. 180 см^2.

Вариант II. 1. 39 см. 2. $\sqrt{106}$ см. 3. 10 м. 4. 6 см. 5. $5\sqrt{3}$ см.

ГЛАВА IV

Задание 26

1. а) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\frac{\sqrt{10}}{10}$, 3, $\frac{1}{3}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, 1. 2. а) 0,3; в) $\approx$ 0,32. 3. а) 0,6; в) $\approx$ 0,59. 4. а) $\operatorname{tg} A = 0{,}4$, $\operatorname{ctg} A = 2{,}5$, $\operatorname{tg} B = 2{,}5$, $\operatorname{ctg} B = 0{,}4$. 5. а) 1,6 см; б) 12 мм; в) 12 мм; г) 0,5 м. 6. а) 0,8; б) 0,6; в) $\frac{4}{3}$. 7. а) 1,875; б) $\frac{8\sqrt{89}}{89}$; в) $\frac{8\sqrt{89}}{89}$. 9. а) $\frac{1}{3}$; б) 1,5. 10. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$. 11. а) $BC > AC$. Совет. Используя данное равенство, сравните си-

нусы углов A и B. 13. а) 10 см. Совет. Из данного равенства найдите тангенс угла A и вычислите катет CB.

Задание 27

1, 2, 3, 4. Совет. Воспользуйтесь решением примеров 1–4 (стр. 165). 9. а) $\alpha < \beta$; б) $\alpha > \beta$; в) $\alpha = \beta$; г) $\alpha > \beta$; д) $\alpha < \beta$; е) $\alpha = \beta$.

Задание 28

1. а) $\frac{5}{13}$; б) 0,8; в) 0,7. 2. а) $\cos\alpha$; б) $2\sin\alpha$; в) $4\operatorname{ctg}\beta$; г) 0. 3. а) $3\cos\beta$; б) $2\sin\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\beta + 5\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}\beta$. 4. а) Да; в) да. 5. а) 90°; б) 90°. 7. Совет. Воспользуйтесь равенствами 1–4 (стр. 168).

Задание 29

5. а) $\sin^2\alpha$; б) 0; в) $\cos^2\alpha$; г) 1. 6. а) $\cos^3\alpha$; б) $\cos^2\alpha$; в) 1; г) 1. 7. а) $\cos^2\alpha$; б) $\sin^2\alpha$; в) $2\cos^2\alpha$; г) 1. 8. а) 4; б) 0; в) $0{,}5\cos^2\alpha$.

Задание 30

2. а) 2,5; б) 1,5; в) $3\sqrt{3}$; г) $3\sqrt{3}$. 3. а) $2\sqrt{3}$; б) 0,5; в) $1{,}5\sqrt{3}$; г) 1. 4. а) 9; б) 3,5; в) 2,25; г) $4\frac{1}{3}$. 5. 1 см, 2 см, 1 см, 2 см.

Задание 31

1. а) 3 см; б) 20 см; в) 8 см; г) 20 см; д) 6,25 см; е) 9 см. 2. а) $3\sqrt{2}$ см, 3 см; б) 7,5 см $\approx$ 6,87 см; в) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см, $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см; г) 6 см, $\sqrt{3}$ см; д) 18 см, $12\sqrt{2}$ см; е) $32\sqrt{2}$ см, $32\sqrt{2}$ см. 3. 72 см, $9\sqrt{89}$ см. 7. 12 см, 3 см, $\frac{15}{17}$ см. 9. 5 см. 10. $6\sqrt{3}$ см. 13. 12,8 см; 0,75. 18. $3\sqrt{3}$ см. 20. $9\sqrt{2}$ см. 21. $\left(24+10\sqrt{3}\right)$ см или $\left(24-10\sqrt{3}\right)$ см. 22. $\frac{13}{3}, \frac{23}{3}$. 24. Радиус окружности $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см; расстояние между центрами – 0,5 см или 1,5 см.

Задание 32

1. 0,75. 2. $\frac{3{,}5}{\cos 25^\circ}$ м $\approx$ 3,87 м. 3. $\frac{3{,}5}{\cos 52^\circ}$ м $\approx$ 322,58 м. 4. $\approx$ 0,02. 5. 0,04. 6. 76 tg 48° м $\approx$ 84,40 м. 7. 200 sin $15^\circ 30'$ м $\approx$ 53,45 м. 8. Под углом, тангенс которого равен 0,025 ($\approx 1{,}43^\circ$). 9. (1,2 + 15 tg 35°) м $\approx$ 11,70 м. 10. Под углом, тангенс которого равен $\frac{8}{230}$ ($\approx 1{,}99^\circ$). 11. 14 tg 24° м $\approx$ 6,23 м. 12. 2,8 ctg 32° м $\approx$ $\approx$ 4,48 м. 13. 1500tg 40° м $\approx$ 1258,65 м. 14. 7000tg 6° м $\approx$ 735,73 м. 15. 12 м. 16. 12,5 м. 17. 15 м. 18. а) $\approx 26{,}57^\circ$; б) 34 м. 19. $\approx$ 806,8 м. Совет. От расстояния AE отнять расстояние BD и прибавить расстояние BC и CD. 20. $r = \frac{1}{3}R$.

Задания для повторения главы IV

10. а) –0,5; б) 1,75; в) 0,5; г) 0. 12. а) $\frac{4}{5}$ и $\frac{4}{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{5}{13}$ и $\frac{5}{12}$. 13. а) $\frac{4}{5}$ и $\frac{4}{3}$; б) $\frac{\sqrt{8}}{3}$ и $\sqrt{8}$; в) $\frac{21}{29}$ и $\frac{21}{20}$. 14. 1. 15. а) 14 см и $7\sqrt{3}$ см; б) $10\sqrt{2}$ см и 10 см; в) 6 см и $6\sqrt{3}$ см. 16. а) 8 см; б) 4 м; в) 5 дм. 17. 18 см^2. 18. $90\frac{30}{37}$ см. 19. $6\sqrt{2}$ см^2 и $10\sqrt{2}$ см. 20. а) $\sqrt{3}$ см; б) 1 см.

Готовимся к тематической аттестации № 4

Вариант I. 1. 0,35. 2. $\frac{\sqrt{8}}{3}$. 3. $6{,}5\sqrt{2}$ см. 5. $(15+5\sqrt{3})$ см; 30° и 60°. 6. $\frac{41}{40}$.

Вариант II. 1. 0,58. 2. $\frac{\sqrt{21}}{5}$. 3. $14\sqrt{2}$ см. 5. $(3+3\sqrt{2})$ см; 45° и 45°. 6. 2 см.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ

К повторению материала за 7 класс

1. Г. 2. Д. 3. Г. 4. В. 5. В. 6. Д. 7. Б. 8. В. 9. Г. 10. А–2, Б–5, В–1, Г–6, Д–3, Е–4. 11. 60°. 12. $\angle A = 120°$. 13. $AK = h_a$. 14. 150°. 15. 200 см^2. 16. 80°.

К главе I

1. Г, Д. 2. В, Д. 3. Б. 4. А. 5. В. 6. Г. 7. Д. 8. 90°. 9. 120°. 10. 30°, 75°, 75° или 150°, 15°, 15°.

К главе II

1. Б, Д. 2. А, В. 3. А–3, Б–5, В–2, Г–4, Д–1. 4. Г. 5. В. 6. А. 7. Б. 8. В. 9. Б. 10. Д. 11. Г. 12. Д. 13. А. 14. Г. 15. В. 16. Б. 17. Д. 18. Б. 19. 0,13 м^2. 20. 84 см. 21. 4 см. 22. 16 см^2. 23. 3 : 5. 24. 70 дм^2. 25. 140 м^2.

К главе III

1. Б, Д. 2. А–3, Б–1, В–2, Г–2, Д–2. 3. А. 4. Г. 5. Б. 6. А. 7. В. 8. В. 9. Б. 10. 6 см и 10 см. 11. 1 : 2. 12. 4 дм. 13. 10 : 3. 14. 9,6 см. 15. $1{,}6a$.

К главе IV

1. А–4, Б–1, В–5, Г–2, Д–3. 2. А, Г, Д. 3. См. стр. 169, 171. 4. 1) Увеличивается от 0 до 1; 2) уменьшается от 1 до 0; 3) увеличивается от 0 до ∞; 4) уменьшается от ∞ до 0. 5. 1)... косинусу...; 2)... синусу...; 3)... котангенсу...; 4)... тангенсу...; 5) $1/\cos^2\alpha$; 6) $1/\sin^2\alpha$. 6. $c \cdot (1 + \sin\alpha + \cos\alpha)$. 7. 3 см. 8. $2\sqrt{3}$ м. 9. $2\sqrt{13}$ дм и $3\sqrt{13}$ дм. 10. 1,6 м.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

АПОСТОЛОВА Галина Вадимівна

Упорядкування завдань
Вашуленко О. П., Карликової О. А.

ГЕОМЕТРІЯ

Дворівневий підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Переклад з української

Редактори *Н. Дашко, О. Мовчан*
Обкладинка і макет *П. Машкова*
Художнє оформлення *Ю. Ясінської*
Технічні малюнки *В. Марущинця*
Технічний редактор *В. Олійник*
Коректори *І. Барвінок, А. Кравченко*
Комп'ютерна верстка *К. Шалигіної*

Здано на виробництво і підписано до друку 10.09.2008 р.
Формат 70×100 $^1/_{16}$. Папір офсетний. Друк офсетний.
Гарнітура Шкільна. Умовн. друк. арк. 22,1 + 0,32 форз.
Умовн. фарбо-відб. 88,2. Обл.-вид. арк. 21,83 + 0,49 форз.
Наклад 62 550 прим.
Вид. № 910.
Зам. № 8230.

Видавництво «Генеза»,
04212, м. Київ, вул. Тимошенка, 2-л.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців
серія ДК № 25 від 31.03.2000 р.

Віддруковано з готових позитивів на
ДП «Державна картографічна фабрика»

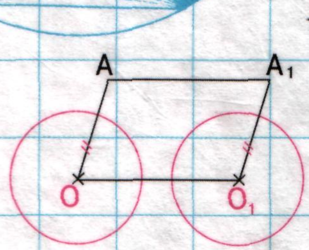
Учебно-методический комплект

«Геометрия–8»

создан в соответствии с новой программой для 12-летней школы с учетом современных тенденций развития школьного образования. Он состоит из данного учебника, рабочей тетради, тетради для тематической аттестации и книги для учителя.

Учебно-дидактический материал данного комплекта можно использовать для:

- общеобразовательных учебных заведений,
- классов с углубленным изучением математики,
- проведения внеклассных занятий,
- самообразования учеников.



ISBN 978-966-504-862-6

9 789665 048626