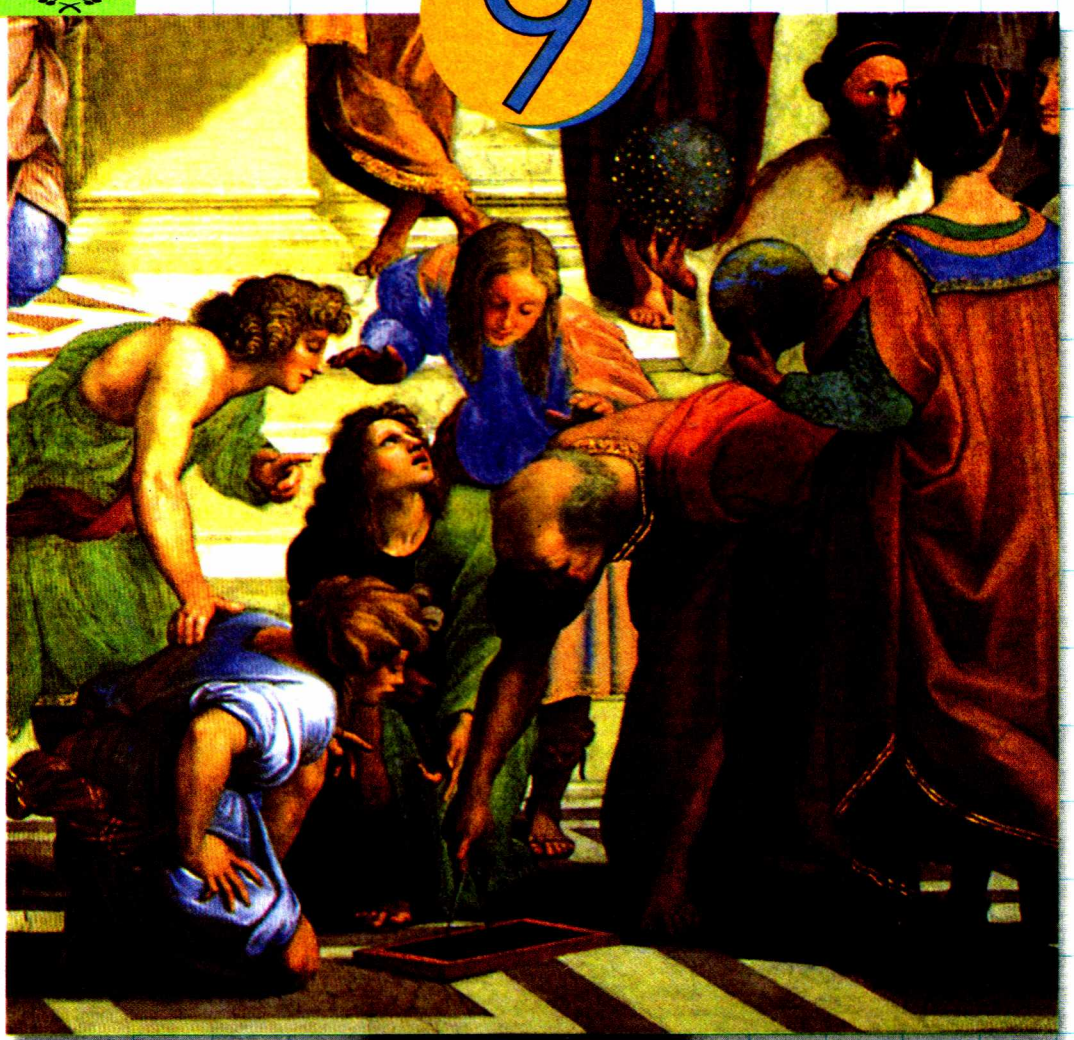
Г. В. АПОСТОЛОВА

Геометрия

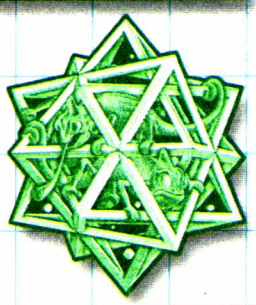
9

ВИДАВНИЦТВО «ГЕНЕЗА»



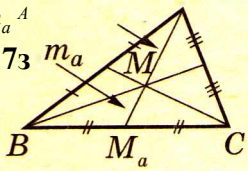






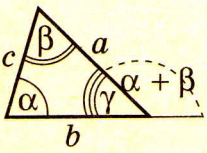


M - центроид



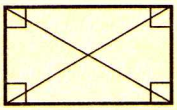
$S_{ABM_a} = S_{ACM_a}$

a + P + y = 180°



c ^ a + Ъ

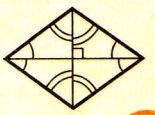
c^\a-Ъ

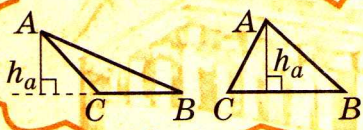


прямоугольник

$di = d_2$

ромб





$$S = \frac{1}{2}ah_a;\ h_a = \frac{2S}{a};\ a = \frac{2S}{h_a}$$



параллелограмм

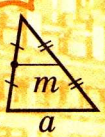


$S = ah_a = bh_b$



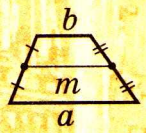
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ r = \frac{a\sqrt{3}}{6};\ R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

средняя линия



$$m = \frac{a}{2}$$

$m \parallel a$



$$m = \frac{a+Ъ}{2}$$

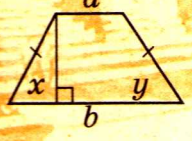
$m \parallel a \parallel b$

$$S = \frac{1}{2}ah_a = mh_a$$

$$S = \frac{a+b}{2}\,h = mh$$

трапеция

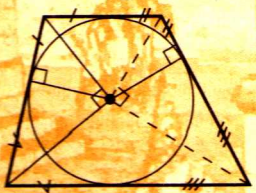




$$x = \frac{Ъ - a}{2}$$

$$y = \frac{Ъ + a}{2}$$

Tig'





СВОЙСТВА $AL = l_a$



$$\frac{x}{y} = \frac{ft}{c}$$

$$\frac{}{IL} = \frac{ft + c}{a}$$

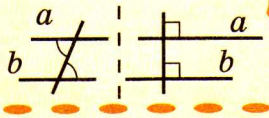
формула Лагранжа

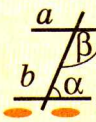
$$l_a^2 = bc - xy$$

$$\angle CIB = 90° + \frac{\hat{A}}{2}$$

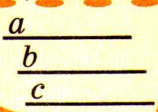
l_a всегда между h_a и т,

$a \parallel b$





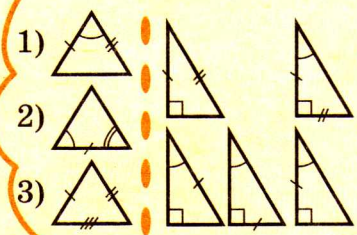
$\alpha + \beta = 180°$



$b \parallel c$

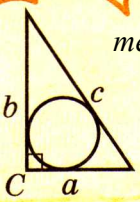
$a \parallel c$

признаки равенства





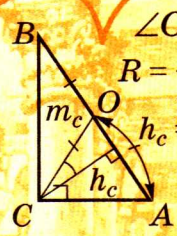
$\angle C = 90°$



теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

$r = \frac{a + b - c}{2} = p - c$

$R = \frac{c}{2}$ $\quad r + R = \frac{a + b}{2}$



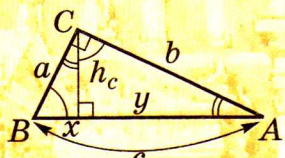
$\angle C = 90°$

$R = \frac{c}{2} = m_c$

$h_c = \frac{ab}{c}$

$\widehat{m_c h_c} = |\angle A - \angle B|$

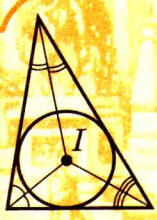




$S = \frac{1}{2}ab$

$h_c = \frac{ab}{c}$

$h = \sqrt{xy}$ $\quad a = \sqrt{cx}$ $\quad b = \sqrt{cy}$





I – инцентр

признаки подобия



$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

$\angle C = \angle C'$



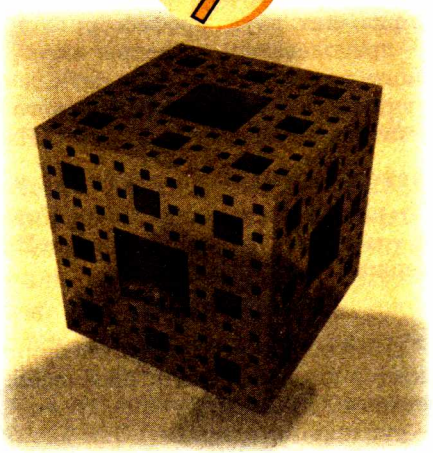
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$



Г. В. АПОСТОЛОВА

Геометрия

9



Двухуровневый учебник
для общеобразовательных учебных заведений

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины

Перевод с украинского

КИЕВ
«ГЕНЕЗА»
2009

ББК 22.151я721
А76

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины (приказ МОН Украины № 56 от 02.02.09 г.)

Издано за счет государственных средств. Продажа запрещена

Перевод *Г. В. Апостоловой*

Независимые эксперты:

Хмара Т. М. - ведущий научный сотрудник лаборатории математического и физического образования Института педагогики АПН Украины, кандидат педагогических наук;
Шарко В. В. - заведующий отделом топологии Института математики НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор;
Синюкова Е. Н. - преподаватель кафедры алгебры и геометрии ЮУГПУ им. К. Д. Ушинского, кандидат физ.-мат. наук, доцент;
Петечук К. М. - учитель-методист Закарпатского ИППО;
Горелова О. В. - учитель-методист ООШ № 10 г. Измаила Одесской обл.

Ответственные за подготовку к изданию:

Прокопенко Н. С. - главный специалист МОН Украины;
Литвиненко О. А. - методист высшей категории Института инновационных технологий и содержания образования

Рецензенты:

Ясинский В. В. - директор Института мониторинга качества образования НТУУ «КПИ», доктор физ.-мат. наук, профессор, заслуженный работник народного образования Украины;
Мирецкая Л. Б. - учитель-методист ООУЗ № 92 г. Киева

Систематизация дидактического материала:

Барышникова О. И., Вашуленко О. П., Карликова Е. А.

Апостолова, Г. В.

А76 Геометрия : 9 : двухуровн. учеб. для общеобразоват. учебн. заведений: Пер. с укр. / Г. В. Апостолова. - К. : Генеза, 2009. - 304 с. : ил.

ISBN 978-966-504-935-7.

Соответствует программе как общеобразовательных средних учебных заведений, так и классов с углубленным изучением математики - является *двухуровневым.*

Отличается-, дифференциацией теоретического и дидактического материала; выделением опорных фактов и опорных задач, обобщающих схем; наличием практических работ, исторической информации, заданий логического характера; обширностью дидактического и внепрограммного материала. *Может быть использован:* в общеобразовательных классах и классах с углубленным изучением математики; для организации внеклассных занятий и самостоятельной учебной деятельности учащихся.

Главная цель: предоставить широкий спектр возможностей и учителю, и учащемуся независимо от типа учебного заведения и места его расположения.

ББК 22.151я721

©Апостолова Г. В., 2008
©Издательство «Генеза», оригинал-макет, 2009

ISBN 978-966-504-935-7 (рус.)
ISBN 978-966-504-900-5 (укр.)



Автор Галина Вадимовна Апостолова - профессор Киевского областного института последипломной подготовки педагогических кадров, кандидат физико-математических наук, учитель-методист.

Я благодарна всем своим ученикам за совместный поиск и открытия, за то, что вместе радовались и удивлялись красоте и гармоничности математической модели мира. В этом учебнике есть частичка от встречи с каждым из вас.

Уважаемый ученик!

Этот учебник завершает курс школьной планиметрии, но на этом ваши встречи с царицей математики - Геометрией не заканчиваются. В старших классах вы будете изучать стереометрию - геометрию фигур в пространстве. Исследуя свойства пространственных фигур, вы будете рассматривать плоскости, в которых доказательства и вычисления опираются на законы планиметрии, т. к. в плоскости выполняются все аксиомы и теоремы планиметрии.

Идеи геометрии живут во всех сферах окружающего мира, они с успехом работают в естественных и технических науках, в том числе и в различных разделах математики. Убедиться в этом вам поможет собственный опыт и последняя глава учебника «Любопытные приложения».

О месте геометрии в развитии человека трудно сказать лучше ирландского философа Дж. Беркли: «Давно заметили, что геометрия — это прекрасная логика... Приобретается привычка мыслить точно, последовательно и методично; эта привычка делает наш разум сильнее и острее, помогает в поисках истины и в других сферах жизни».

Заметим, что последнее станет для вас актуальным, если работать по учебнику так, как советовал известный психолог Д. Юнг: «Десять страниц математики, которые ты понял, лучше ста страниц, выученных наизусть и неусвоенных, а одна страница, отработанная самостоятельно, - полезнее десяти страниц, усвоенных четко, но пассивно».

Желаю вам успешного обучения по методу Юнга, самостоятельных поисков и открытий. Получите эстетическое удовольствие от изучения геометрии!

Автор

Информация для учащихся

Перед началом работы с учебником внимательно прочитайте *вступление,* в котором обобщается то, что вы уже изучали ранее, и обратите внимание на *форзацы* и *схемы* в конце учебника - на них представлены основные опорные факты геометрии за курс седьмого и восьмого классов.

Домашнюю работу лучше начинать с выполнения *практических работ,* которые предлагаются после каждого параграфа. Это поможет вам «почувствовать» геометрию, понять и запомнить учебный материал.

На поля учебника вынесена *главная (опорная) информация,* а в конце учебника предлагаются обобщающие *опорные конспекты.* Пользуйтесь ими во время подготовки к уроку и при решении задач.

Обязательный (минимальный) объем информации отмечен цветной вертикальной полосой.

Задания подразделяются на четыре уровня сложности: задания с нуликом возле номера - наиболее простые; задания без обозначений возле номера - несколько сложнее; задания со звездочкой - требуют более глубоких размышлений; задания с двумя звездочками - наиболее сложные, для их выполнения нужны творческие усилия.

Задания *«Для повторения»* и *«Готовимся к тематической аттестации»* помогут вам повторить изученное, подготовиться к итоговой аттестации.

Кроме того, в конце учебника предлагаются *задания в тестовой форме «Проверь себя».* Их цель - определить уровень ваших умений и знаний, помочь вам адаптироваться к будущим тестированиям.

«*Ответы и советы»* помогут вам убедиться в правильности выполнения заданий, а иногда подскажут путь решения.

Задания рубрики *«Для любознательных»*, параграфы с такой же пиктограммой и последний раздел *«Любопытные приложения»* предназначены для более широкого и глубокого ознакомления с геометрией, чем это требуется программой общеобразовательной школы.

В конце учебника вас ожидает *«Словарик»* новых терминов и незнакомых слов (со ссылками на страницы, где они встречаются).

Пиктограммы в учебнике означают:

 – **определение;**  – **теорема;**  – следствие;

$ - материал для ознакомления;  - дополнительный материал.

Не ждите указаний учителя, работайте самостоятельно - учебник предоставляет вам такую возможность. Помните, что готовиться к внешнему тестированию, к вступительным экзаменам в ВУЗ по определенным темам надо тогда, когда эти темы изучаются.

Тот, кто учится самостоятельно, преуспевает в семь раз больше, чем тот, которому все объяснили.

Артур Гитерман (поэт)

Информация для учителей и родителей

Обычно в учебнике объем учебного материала четко ограничен - все, что в нем содержится, учитель должен отработать с классом. Поэтому и создаются разные учебники для общеобразовательных школ и для классов с углубленным изучением математики. А как быть ученику, который может и хочет знать больше? Понятно, что при этом больше возможностей имеют дети в мегаполисах, где есть спецшколы. Главная цель этого учебника — предоставить равные возможности *всем учащимся,* независимо от места их проживания и обучения, а *учителю* помочь осуществить дифференцированный подход в работе, естественным образом продолжить изучение геометрии на внеклассных занятиях (или предложить некоторым учащимся сделать это самостоятельно).

Этот учебник двухуровневый - *по нему можно работать как по общеобразовательной программе (ОП), так и в классах с углубленным изучением математики (МК).* Можно сказать, что он многоуровневый по объему и спектру представленного дидактического и теоретического материала. Учебник дает возможность одним учащимся плавно идти вверх, другим спуститься и залатать индивидуальные «прорехи».

Теоретический материал подразделяется на:

- *параграфы, обязательные для изучения* по ОП, минимум госстандарта отмечен цветной вертикальной полосой;
- *параграфы для ознакомления* (не обязательные для оценивания по ОП);
- *параграфы, не обязательные для изучения* (по ОП);
- *рубрика «Для любознательных»* дополняет параграфы исторической и математической информацией;
- *раздел «Любопытные приложения»* - для МК, кружковой и индивидуальной внеклассной работы, подготовки реферативных работ.

Дидактический материал подразделяется на:

- *практические работы и задачи четырех уровней сложности* (задания с цветными номерами рекомендованы для домашней работы);
- *задания рубрики «Для любознательных»:* дополнительные задачи повышенной сложности и не только по программному материалу;
- *задания раздела «Любопытные приложения»* - задачи повышенной сложности по представленным темам;
- *задания для повторения* расположены после разделов и в конце учебника (в тестовой форме);
- *«Готовимся к тематической аттестации»* - ориентировочные задания аттестации по темам (для ОП).

Сэкономит учебное время, поможет усвоить, повторить и обобщить учебный материал использование в работе на уроке пособия «Геометрия в опорных схемах и рисунках. Рабочая тетрадь ученика 9 класса». Это позволит учащимся не носить учебник в школу (работать по нему только дома).

Напоследок подчеркну, что невозможно и не нужно отрабатывать в классе весь учебный материал учебника, стремиться решить все предложенные задачи. Обширность дидактического материала предоставляет возможность (без привлечения дополнительных сборников) реализовать дифференцированный подход в работе с классом, иметь «запас» - кому-то для повторения, а кому-то для углубления, для факультативной или самостоятельной работы ученика.

Этот учебник предлагает «возможности», а вот насколько они будут реализованы - это уже зависит лично от Вас и Ваших детей.

РАДОСТИ ПОИСКА и УСПЕХОВ!

С уважением, автор



Память - страж всему
и сокровищница всего.
Цицерон

Вступление

Взгляд на старые проблемы под иным
углом зрения требует творческого
воображения и дает большие преимущества.
Альберт Эйнштейн

Вступая в Геометрию 9-го класса, сначала остановитесь и оглянитесь на то, что изучалось ранее. Рассмотрите этот «пейзаж», ощутите его логичность и цельность, красоту маленьких сюжетов опорных задач. Это поможет вам овладеть новыми просторами геометрии в 9-м классе.

Структура геометрии:
1) основные понятия;
2) аксиомы;
3) определение других фигур, доказательство свойств фигур, которые отличаются от аксиом.

Напомним:
утверждением называется предложение, о котором можно сказать или «да», или «нет», т. е. оно может быть или истинным, или ложным.

Логический шаг *доказательства:*
1. Исходное утверждение (несколько утверждений).
2. «Тогда».
3. Утверждение-вывод.

Геометрия - это не просто набор фактов и некоторых размышлений, а строгая, целостная и эстетическая в своей логичности наука. *Геометрия как математическая наука о пространственных формах опирается на дедуктивный метод - цепочку логических переходов (шагов) от утверждения-условия к утверждению-выводу.* Поэтому так важно обобщить уже изученное и выделить в этом материале основное.

Используйте: «Словарик», форзацы, схемы в конце учебника, информацию на поле.

Вопросы для повторения

1. Какую структуру имеет планиметрия?
2. Из чего состоит логический шаг доказательства?
3. Объясните, что такое: а) утверждение; б) аксиома; в) теорема; г) следствие; д) определение; е) признак; ж) свойство; з*) теорема, обратная данной; и**) необходимое и достаточное условия.
4. Что такое «способ доказательства от противного»? Приведите пример доказательства какого-то утверждения этим способом.
5. Какие углы называются: а)смежными; б) вертикальными? Какие свойства этих углов вы знаете? А их биссектрис?
6. Какие прямые называются параллельными? Сформулируйте их: а) свойства; б) признаки.
7. Какую фигуру называют треугольником? Какие свойства углов треугольника (внутренних и внешних) и неравенства для его сторон и углов вы знаете?
8. Какие треугольники называются равнобедренными? Сформулируйте свойства и признаки равнобедренного треугольника.

9. Какие свойства высот (биссектрис, медиан) треугольника вы знаете?
10. Какую окружность для данного треугольника называют: а) вписанной; б) описанной; в**) вневписанной? Какие свойства этих окружностей вы знаете?
11*. Что такое «геометрическое место точек (ГМТ), удовлетворяющее определенному условию»? Сформулируйте свойства биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку как соответствующих ГМТ. Какие еще ГМТ вы знаете?
12. Какая фигура называется окружностью? Какие свойства хорд окружности вы знаете?
13. Сформулируйте определение прямой - касательной к окружности и вспомните ее свойства.
14. Какие виды касания двух окружностей вы знаете? Сформулируйте свойства таких окружностей.
15. Сформулируйте определения вписанного и центрального углов окружности. Какие свойства этих углов и углов, образованных хордами, касательными и секущими окружности, вызнаете?
16. Сформулируйте: а) теорему Фалеса (и обратную к ней); б) обобщенную теорему Фалеса (и обратную к ней).
17. Какие треугольники называются: а) равными; б) подобными; в) равновеликими?
18. Сформулируйте признаки и свойства: а) равных треугольников; б) подобных треугольников; в) равных прямоугольных треугольников; г) подобных прямоугольных треугольников.
19. Какие свойства прямоугольных треугольников вы знаете? (Вспомните метрические соотношения в прямоугольном треугольнике.)
20. Какая фигура называется: а) многоугольником; б) выпуклым многоугольником; в) правильным многоугольником; г) вписанным многоугольником; д) описанным многоугольником? Какие свойства этих многоугольников вы знаете?
21*. а) В какой многоугольник можно вписать окружность? б) Вокруг какого многоугольника можно описать окружность?
22*. Вспомните свойства и признаки описанного и вписанного четырехугольников.
23. Какие виды четырехугольников вы знаете? Сформулируйте их определения, свойства и признаки.
24**. Какая фигура образуется при пересечении биссектрис: а) параллелограмма; б) прямоугольника; в) ромба; г) внешних углов прямоугольника?
25*. Определите вид четырехугольника с вершинами в серединах сторон: а) произвольного четырехугольника; б) параллелограмма; в) равнобокой трапеции; г) ромба.

Примечание для учителя. Двумя звездочками обозначены вопросы, не обязательные для изучения в общеобразовательных классах (только в МК). Большинство вопросов сформулированы так, чтобы вы имели возможность уточнить их смысловое наполнение опорными фактами.

Определение - название (с разъяснением, что именно так называется).

Аксиома - принимается без доказательства.

Теорема - *доказывается* определенным логическим рассуждением (доказательством).

Доказательство опирается на аксиомы и утверждения, доказанные ранее (состоит из логических шагов).

Следствие - непосредственный вывод из теоремы или аксиомы.

Прямая и обратная теоремы - меняются местами условие и вывод.

ОБРАТНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ ТРЕБУЕТ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА!

Множество - совокупность объектов, которые мы представляем как единое целое. Например: множество усатых, множество треугольников.

Признак - теорема, выводом которой является принадлежность фигуры определенному множеству (определение которому дано было ранее).

Свойство - теорема, выводом которой является выполнение определенных условий, если фигура принадлежит конкретному множеству.

Доказательство от противного:
1. Четко сформулировать утверждение, которое надо доказать.
2. Сформулировать утверждение обратное к (1).
3. Предположить, что (2) выполняется.
4. Прийти к логическому противоречию.
5. Вывод: (2) - ложно и выполняется (1).

Чтобы установить ложность утверждения, достаточно привести один контрпример.

Приведение примеров того, что утверждение выполняется, не является его доказательством!

26. Что такое: а) средняя линия треугольника; б) средняя линия трапеции? Какие свойства этих отрезков вы знаете?
27*. Какие опорные задачи трапеции вы знаете?
28*. Какие опорные задачи равнобедренной трапеции вы знаете?
29. а) Каким свойствам фигуры соответствует понятие площади фигуры? б) Какие фигуры называются равновеликими? в**) Какие многоугольники называются равносоставленными ?
30. Запишите формулы для вычисления площади: а) квадрата; б) прямоугольника; в) параллелограмма; г) треугольника; д) прямоугольного треугольника; е) трапеции; ж**) равнобедренной трапеции, диагонали которой пересекаются под прямым углом?
31*. Как относятся площади: а) треугольников с равными основаниями; б) треугольников с равными высотами; в) параллелограммов с парами сторон, лежащими на общих параллельных прямых; г) трапеций с соответственно равными основаниями; д) трапеций, основания которых лежат на общих параллельных прямых?
32. Докажите методом подобия опорные факты: а*) об отрезках, на которые биссектриса треугольника делит его сторону; б**) формулу Лагранжа для биссектрисы треугольника; в*) о произведении отрезков двух пересекающихся хорд; г**) о расстоянии между точкой хорды окружности и ее центром (следствие факта (в)); д*) соотношение между отрезками секущей и касательной, проведенными из одной точки к окружности; е**) теорему Птолемея.
33. Какие опорные задачи вы умеете доказывать методом: а*) подобия; б**) вспомогательной окружности; в**) площадей?
34**. На сторонах АС и BC треугольника ABC отметили соответственно точки M и K так, что $AM : MC = m : n$, $BK : KC = p : t$. В каком отношении AK делит отрезок $BM1$
35**. На стороне AB треугольника ABC отметили точку М, а на стороне BC - точку K так, что $CK : KB = m : n$, а точка пересечения AK и CM делит CM в отношении $p : t$. В каком отношении точка М делит сторону АВ?
36. Сформулируйте определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника. Зависит ли их значение от расположения и размеров прямоугольного треугольника?
37. Запишите соотношения между тригонометрическими функциями: а) одного и того же угла; б) дополняющих углов (углов, сумма мер которых равна 90°).
38*. Как изменяются значения синуса (косинуса, тангенса, котангенса) при изменении градусной меры угла от 0° до 90°?
39. Запишите табличку значений тригонометрических функций углов градусной меры: 0°; 30°; 45°; 60°; 90°.
40. Вспомните ^задачи решения прямоугольных треугольников: а) как по градусной мере одного из острых углов и длине одной из сторон найти второй острый угол и остальные его стороны; б) как, зная длины двух сторон, найти третью сторону и меры острых углов.
41. Что означает «решить задачу на построение»? Какие опорные задачи на построение вы знаете?

Глава I

КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ углов ОТ 0° ДО 180°. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В этой главе вы узнаете об открытии французского ученого Декарта, которое поможет решать задачи геометрии языком алгебры, а алгебраическим задачам давать геометрическую интерпретацию. Благодаря именно этому открытию мы сможем определить тригонометрические функции тупых углов, значительно упростить решение некоторых геометрических задач, например - решение треугольников. Вообще говоря, современная математика, наверное, не существовала бы без этого открытия Декарта.

§ 1. Система координат Декарта. Расстояние между двумя точками на координатной плоскости и уравнение окружности. Координаты середины отрезка

Так в чем же состоит открытие *Декарта* (1596-1650)? Его еще называют *аналитическая геометрия.* Как и все гениальное, оно гениально простое. Декарт заставил алгебру работать на геометрию.

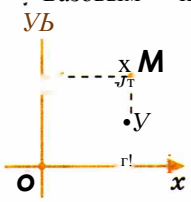
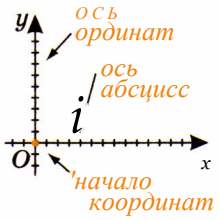
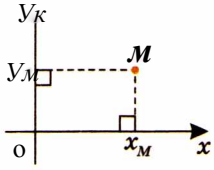


Рис. 1.1

Базовым понятием аналитической геометрии является понятие системы координат. Наиболее простая система координат - это так называемая *декартова прямоугольная система координат.* Ее задают так: на плоскости выбирают две взаимно перпендикулярные числовые оси - *оси координат,* пересекающиеся в точке *O* - *начале координат* (рис. 1.1).





(х; *у*) - координаты точки,

М(хм; Ум).

I
абсцисса
ордината

Оси координат обычно называют:

- горизонтальную - *ось абсцисс* (обозначается *Ох),*
- вертикальную - *ось ординат* (обозначается *Оу).*

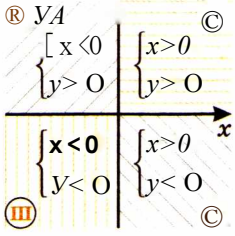
Плоскость, на которой введена декартова система координат, называют *координатной плоскостью,* или *плоскостью ху,* и записывают это так: (*хОу*) или просто *(ху).*

Найдем для произвольной точки плоскости *М* расстояния от осей координат. Числа *х и у - абсцисса и ордината точки М* - по модулю равны этим расстояниям (рис. 1.1 и рис. на поле). При этом, *если точки лежат* (рис. 1.2):

- *правее оси ординат - их абсциссы положительны;*
- *левее оси ординат - их абсциссы отрицательны;*
- *над осью абсцисс - их ординаты положительны;*
- *ниже оси абсцисс - их ординаты отрицательны.*



Числа *хну,* именно в такой последовательности, и *являются декартовыми координатами точки М: х - абсцисса; у - ордината.* Записывают: *М(х; у).*



Оси координат разбивают координатную плоскость на четыре части - *четверти* (рис. 1.2). Иногда их называют *координатными углами.* В пределах одной четверти знаки обеих координат сохраняются.

Замечание. Точки на координатных осях относят к соответствующим координатным четвертям.

Точки, лежащие на оси *Ох,* имеют ординаты, которые равны нулю (*у* = 0), а точки оси *Оу* имеют абсциссы, которые равны нулю *(х* = 0) (рис. 1.3).

Таким образом, каждой точке плоскости соответствует определенная пара чисел, и наоборот, каждой



Для любознательных

Докажите методом от противного (опираясь на признаки равенства прямоугольных треугольников и аксиомы геометрии) взаимно однозначное соответствие между точкой на координатной плоскости и парой чисел - ее координат (необходимое и достаточное условия).

Наследник старинного французского дворянского рода *Рене Декарт* (1596-1650) был настоящим любимцем судьбы. О таких говорят, что при рождении их поцеловали все музы. Удача сопровождала его не только в науке. Смелый и бесстрашный, он побеждал не только интеллектом, но иногда и с оружием в руках. Так, однажды ему удалось с помощью шпаги, которой он владел с д'артаньяновским мастерством, заставить пиратов пристать к берегу и дать высадиться ему самому и его слуге.



Наверное, не существует точной закономерности между соотношением смелости научной мысли и личным мужеством ученого. Но именно эти черты присущи большинству известных исследователей (Фалесу, Пифагору, Архимеду, Эйлеру, Лобачевскому, Декарту...).

паре чисел можем поставить в соответствие только одну точку плоскости. Именно это взаимно однозначное соответствие и является прямоугольной системой координат Декарта. (Далее - декартова система координат.)

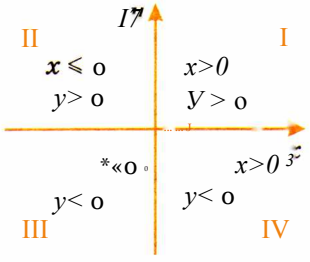


Рис. 1.2

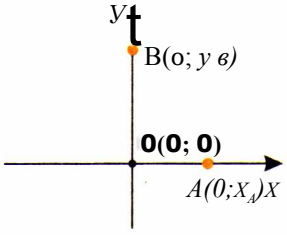


Рис. 1.3

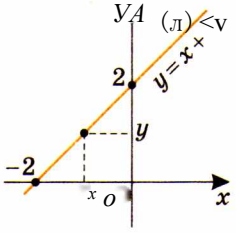


Обозначают:
Ох -ось абсцисс;
Оу - ось ординат.

А что можно поставить в соответствие линии на плоскости? Декарт предлагает *в соответствие линиям плоскости записывать уравнения с неизвестными x и y, чтобы:*

- *координаты любой точки такой линии удовлетворяли соответствующему уравнению*;
- *координаты точек, не лежащих на заданной линии, не удовлетворяли такому уравнению.*

Например, для точек прямой линии и только для точек этой линии справедливо равенство $y = kx + I$ (если k и I - постоянные). Это равенство называют *уравнением прямой.*



Прямая (п) - все ее точки имеют координаты (х; *x+2).*

А как задать уравнением окружность? Мы знаем из курса 7-го класса, что *окружность - это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от определенной точки этой плоскости - центра окружности.* (Для любой точки плоскости, не принадлежащей окружности, это расстояние будет меньше или больше I



Для любознательных

Мать Декарта умерла от туберкулеза через несколько дней после его рождения, а с 8-ми лет он стал воспитанником иезуитской школы, основанной в те времена под личным покровительством Генриха IV.

Счастливый случай привел Декарта в математику. Однажды во время прохождения гарнизонной службы в одном из голландских городков Декарт обратил внимание на объявление. Написано оно было на фламандском языке, которого Декарт не знал. С просьбой перевести текст он обратился к прохожему, который также заинтересовался этим объявлением. Незнакомец оказался профессором математики Бекманом, который не без иронии ответил на любопытство молодого солдата, что это публичный вызов - предложение решить геометрическую задачу и что он переведет условие, если юноша возьмется ее решить. На следующий день Декарт принес профессору решение, и это стало началом его занятий математикой под руководством Бекмана, которые продолжались дЁа года.

I радиуса окружности.) Тогда, чтобы найти уравнение окружности, надо сначала выразить расстояние между двумя точками плоскости через их координаты.

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ

Нам нужно для двух произвольных точек плоскости $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ записать длину отрезка M_1M_2 через числа x_1, y_1, x_2, y_2 (рис. 1.4).

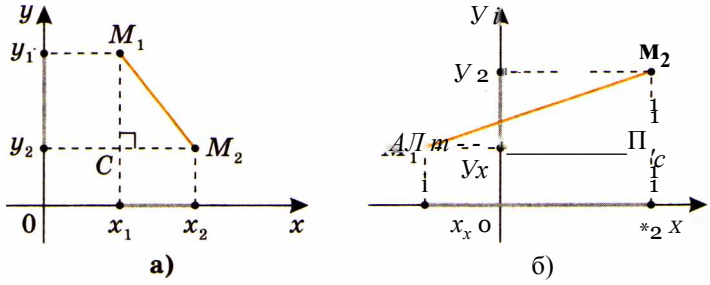


Рис. 1.4

Расстояния между проекциями этих точек на оси абсцисс и ординат равны $|x_1 - x_2|$ и $|y_1 - y_2|$ соответственно. Длины катетов прямоугольного треугольника M_1CM_2 равны длинам указанных проекций (как стороны образованных прямоугольников).

Используя теорему Пифагора, найдем длину гипотенузы треугольника M_1CM_2 - расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:

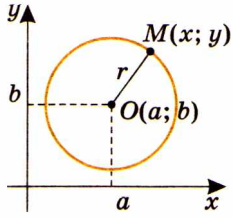
$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

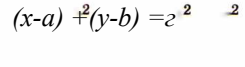
Замечание. Если отрезок M_1M_2 параллелен одной из координатных осей, то либо $|x_1 - x_2| = 0$, либо $|y_1 - y_2| = 0$ и записанная выше формула для вычисления длины отрезка M_1M_2 также является правильной.

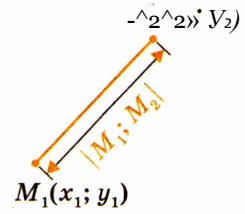
УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

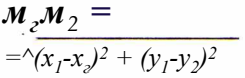
Теперь мы можем записать уравнение окружности как геометрическое место точек $M(x; y)$, расстояние от которых до центра окружности - точки $O(a; b)$ - является величиной постоянной, равной радиусу окружности r:

$$MO = r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$











Для любознательных

Декарт - математик, влюбленный в поэзию, писал: «Зимними свободными вечерами, сравнивая тайны природы с законами математики, я осмеливаюсь надеяться, что нашел основы этой дивной науки». Литературная деятельность Декарта развивалась на протяжении всего 12 лет. Она промелькнула, как метеор, но оставила блестящий незабываемый след в конструкции современной математики. Основы открытой им аналитической геометрии Декарт опубликовал в 1637 г. в книге «Геометрия».

Тогда уравнение окружности радиуса r и с центром $O(a; b)$ имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Например, окружности, изображенной на рисунке 1.5, соответствует уравнение

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2^2.$$

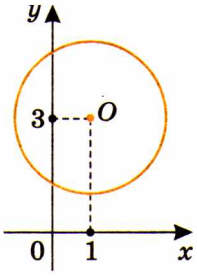


Рис. 1.5

КООРДИНАТЫ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА

Выведем формулу, выражающую *координаты точки - середины отрезка через координаты его концов.*

1) Пусть отрезок с концами $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ не параллелен осям координат, т. е. $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ (рис. 1.6). Найдем координаты его середины - точки $C(x_c; y_c)$.

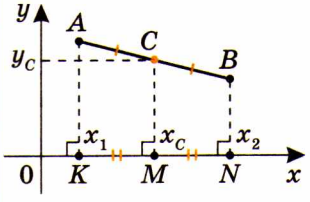


Рис. 1.6

Проведем:

$AK \perp Ox$, $CM \perp Ox$, $BN \perp Ox$.

Тогда $AK \parallel BN \parallel CM$. И, учитывая, что $AC = CB$, получим $KM = MN$, т. е. $|x_c - x_1| = |x_2 - x_c|$.

Тогда или $(x_c - x_1) = (x_2 - x_c)$, или $(x_c - x_1) = -(x_2 - x_c)$.

По условию $x_1 \neq x_2$ и может выполняться только второе равенство, из которого получаем:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$ Аналогично $$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

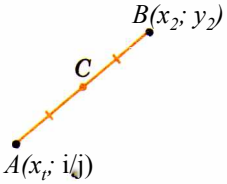
2) Если $AB \parallel Ox$, то $y_1 = y_2 = y_c$, а $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Если $AB \parallel Oy$, то $x_1 = x_2 = x_c$, а $y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

И полученные выше соотношения также выполняются.

Таким образом, координаты середины отрезка с концами в точках $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Напомним обозначение:
$\neq$ - «не совпадает», «не является тождеством»;
$\in$ - «принадлежит»;
[AB] - отрезок AB.



Для любознательных

1. По полю проложили прямолинейную дорогу. Человек, который стоит на этой дороге в точке A, может двигаться: по полю - со скоростью не более 3 км/ч; по дороге - не более 6 км/ч. Найдите множество точек, до которых этот человек может дойти за 1 час.
2. В селе Семихатки 7 домов, для любых трех домов расстояние хотя бы между двумя из них равно 50 м. Изобразите план расположения домов в этом селе.

$X^2 + y^2 + nx + + my + p = O$ определяет: или *окружность* - - $r^2 > O$, или *точку* $r^2 = O$, или *пустое множество* $r^2 < O$, $r^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4} - p$

Замечание. При *решении геометрической задачи методом координат* нужно не только перевести на язык алгебры ее условие и решить алгебраическую задачу, но еще и дать геометрическое толкование полученного алгебраического результата. Рассмотрим примеры.

1. *Уравнение* $x^2 + y^2 = c^2$ *описывает окружность радиуса* $r = |c|$ *с центром в начале координат* O(0; 0).



2. *Уравнение* $x^2 + y^2 + nx + my + p = 0$ *описывает: или окружность, или точку, или пустое множество (не имеет смысла).* Чтобы выяснить, какой именно случай реализуется, в уравнении надо выделить квадраты двучленов относительно *хну:*

$$x^2 + 2\cdot\frac{n}{2}X + \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2 + Y + 2\cdot\frac{m}{2}Y + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 + p = O,$$

$$\left(X + \frac{n}{2}\right)^2 + \left(Y + \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4} - p.$$

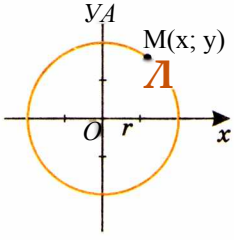
Если правая часть полученного соотношения:

- *положительна - это уравнение окружности;*
- *равна нулю - это точка;*
- *отрицательна - это пустое множество.*

Например, уравнение $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ преобразуем так:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 1 - 4 + 1 = O,$$
$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2.$$

Рассматриваемое уравнение определяет окружность с центром O(1; -2) и радиусом 2.



$X^2 + y^2 = c^2$ O(0; 0); r= |c|



3. Согласно аксиоме об измерении отрезков и неравенству для сторон треугольника получим такое утверждение. Если на плоскости задано три точки *A, B, C* и для расстояний между ними выполняется соотношение $|AB| = |AC| + |CB|$, то эти точки лежат на одной прямой (при этом точка C расположена между точками *A* и *B).* Правильным будет и обратное утверждение.

$|AB| = |AC| + |CB|$

Z

A, B, C на одной прямой и *Ce* [AB]



КООРДИНАТЫ ТОЧКИ, ДЕЛЯЩЕЙ ОТРЕЗОК В ЗАДАННОМ СООТНОШЕНИИ

Пусть точка *C(x; y)* принадлежит отрезку с концами в точках A(x,; *уЛ, B(x„; y2)* и делит этот отрезок в соотношении $|AC| : |CB| = n : m$ (рис. 1.7). Найдем координаты точки C.



Для любознательных

Термин *координата* (упорядоченность) латинского происхождения.

Творцом аналитической геометрии, одновременно с Декартом, считают любителя математики, автора многочисленных блестящих открытий французского юриста *Пьера Ферма* (1601-1665).

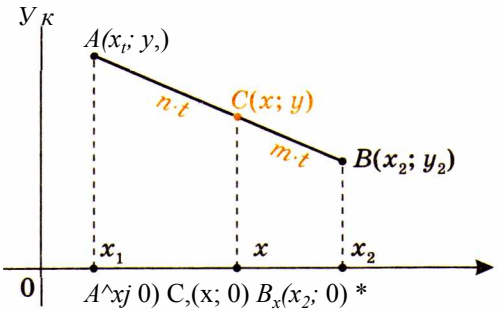


Рис. 1.7

Прямые AA_V ССj и ВВ, перпендикулярны оси Ох, т. е. параллельны между собой. Тогда, согласно теореме Фалеса, имеем:

$$\frac{AC_x}{сл} = \frac{AC}{CB} = \frac{n}{m'}, \quad \left|\frac{x\text{-}X,}{x_2 - x}\right| = \frac{n}{m}.$$

Возможны два случая: $x_2 > x > x$. ; $X, > X > x_2$.
Для обоих случаев полученное под знаком модуля выражение положительно. Тогда:

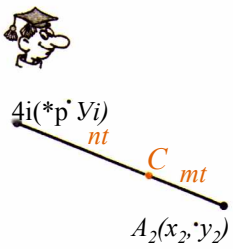
$$\frac{x\text{-}x.}{X_2 - x} = \frac{n}{m}, \quad x = \frac{nx_2 + mx_1}{n + m}.$$

Аналогично получим, что

$$y = \frac{ny_2 + my,}{n + m}.$$

Таким образом, координаты точки С, делящей отрезок с концами в точках $A(x_x; y_x)$ и $B(x_2; y_2)$ в отношении $|AC| : |CB| = n:m$, равны

$$x = \frac{nx_2 + mx_x}{n+m}; \quad y = \frac{ny_2 + my_1}{n+m}.$$



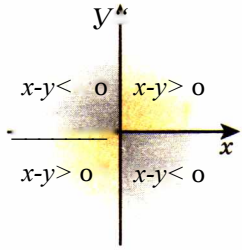
$$x_C = \frac{nx_2 + mx_1}{n + m}$$

$$y_C = \frac{Шг + mY\backslash}{n + m}$$

Если $\frac{A_1C}{CA_2} = \lambda$: $(X = n:m)$

$$x_a = \frac{кx_2 + X,}{X + 1},$$

$$y_C = \frac{Ъy_2 + Yx}{1+1}$$

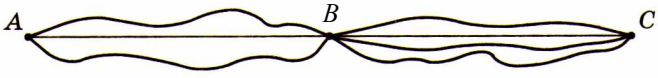




Для любознательных

ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ

Проанализируем такую ситуацию. Пусть из пункта А в пункт *В* проложили 2 туристических маршрута, а из пункта *В* в пункт *С* - 3 маршрута. Спрашивается: сколькими способами можно совершить путешествие из А в С?

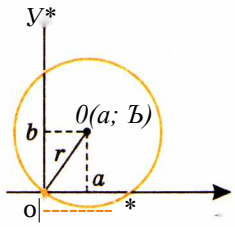


Так как после преодоления каждого из маршрутов, соединяющих пункты *А* и *В,* остается по 3 возможности добраться из В в С, то из А в С можно попасть 2 х 3 = 6 способами.

Обобщением этой простой задачи является *основное правило комбинаторики,* которое еще называют *правилом умножения.* Если объект *X* можно выбрать *m* способами, а объект У — *n* способами (независимо от выбора X), то пару *X* и У можно выбрать m X *n* способами.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найдите все точки (л:; *у)* координатной плоскости, которые удовлетворяют соотношению *ху* > о.



$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Решение

Условие *ху* > 0 равносильно тому, что числа *х* и *у* одного знака: *х* > о и *у* > о или *х* < о и *у* < 0. Тогда решением будет множество точек I или III координатных четвертей, но не на осях координат (рис. 1.8).

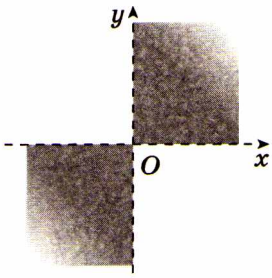
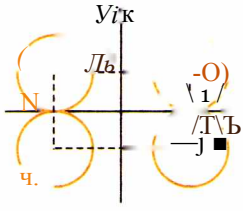


Рис 1.8

Пример 2. Докажите, что середина отрезка с концами в точках *А(5;* 7) и Б(8; -7) лежит на оси *Ох.*



г =|2>|

Доказательство

Пусть $C(x_0; y_0)$ - середина отрезка АВ. Тогда

$$y_0 = \frac{7 + (-7)}{2} = 0.$$

ч. т. д.

Пример 3. Запишите уравнение окружности с центром в точке (-1; 3), которая проходит через начало координат.

Решение

1) Точка (-1; 3) - центр окружности, тогда уравнение этой окружности имеет вид:

$$(x - (-1))^2 + (y - 3)^2 = r^2,\ (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2.$$

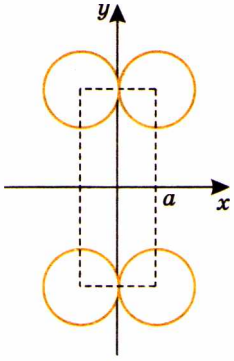
2) Окружность проходит через точку 0(0; 0), тогда значения *х* = о и *у* = о удовлетворяют уравнению этой окружности:

$$(0 + 1)^2 + (0 - 3)^2 = r^2,\ r^2 = 10.$$

3) Вывод: уравнение искомой окружности имеет вид:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10.$$

Ответ: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$.



r = |a|

Замечание. Ответ к последней задаче можно записать и в другом виде, например (если раскрыть скобки I и привести подобные слагаемые) $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$.



Для любознательных

Решение геометрических задач иногда связано с *комбинаторным переб*ором конфигураций (см. стр. 15). Целенаправленный перебор возможных вариантов нужен и при составлении расписания движения транспорта, занятий в школе, шифровании и дешифровке письменной информации, в том числе и кодировании. Например, кодами являются числа номерных знаков машин, товарные знаки (штрих-коды) и т. д.

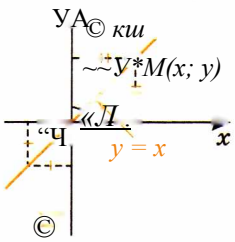
Пример 4. Найдите точку на оси ординат, равноудаленную от начала координат и точки А(3; -1).

Решение

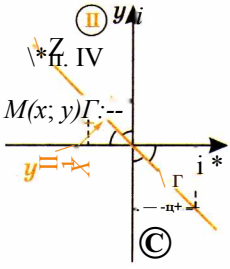
1) Искомая точка M лежит на оси Oy, т. е. $M(0; y_м)$ и $|MO| = y_м, |AM| = \sqrt{(x_A - x_м)^2 + (y_A - y_м)^2} = \sqrt{9+(-1-y_м)^2}$.

2) $|MO|^2 = |AM|^2$ тогда $y_м^2 = 9 + (1 + y_м)^2$, $y_м = -5$.

Ответ: (0; -5).



Пример 5. Найдите точку на окружности $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 3$, равноудаленную от осей координат.



Решение

Точки $C(x_c; y_c)$, равноудаленные от осей координат, лежат на биссектрисах координатных углов, т. е. удовлетворяют условию $x_c = y_c$ или $x_c = -y_c$.

Окружность с центром $0(2; 3)$ и радиусом $R = \sqrt{3}$ расположена в первой координатной четверти (т. к. $R = \sqrt{3} < 2$ ий = i/3<3).

Тогда искомая точка может принадлежать только биссектрисе I координатной четверти и $x_c = y_c$.

$$(x_c-2)^2 + (x_c-3)^2 = 3,\ 2x_c^2 - 10x_c + 13 = 3,$$
$$x^2 - 5x + 5 = 0.$$

Корни уравнения - положительные числа $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Точки, равноудаленные от осей координат, принадлежат биссектрисам координатных углов и наоборот.

Умение решать задачи - такое же практическое искусство, как и умение плавать, бегать или танцевать. Этому можно научиться только путем подражания и тренировок.

Д. Пойя

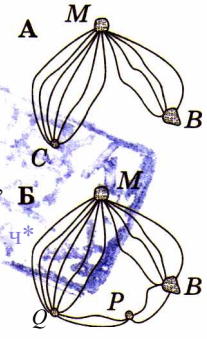
Пример 6. Найдите точку, равноудаленную от осей координат и точки А(-3; -6).

Решение

Координаты точек $C(x_c; y_c)$, равноудаленных от осей Ox и Oy, удовлетворяют соотношению $|x_c| = |y_c|$. Т. е. надо рассмотреть два случая, когда $x_c = y_c$; $x_c = -y_c$.

Для любознательных

1. Из села C к городу M ведет 6 дорог, а из города M к городу B - 4 дороги (см. рис. А). Сколько существует способов добраться из С в В?
2. Недалеко от пунктов C, M и В пр^ьадущей задачи построили поселок P и несколько новыхжэрбг (см. рис. Б). Сколько теперь существует способов добщИЛИ^из СйВ?
3. Сколько существует отрезков, длины которых записываются (в метрах) двуцифровыми целыми числаэдй с разными цифрами?
4. Каждую клеточку квадратной таблицы 5X5 можно раскрасить в желтый или синий цвет. Сколько существует вариантов раскраски этой таблицы?



1) Пусть $x_c = y_c$. Тогда

$$CA^2 = (x_c + 3)^2 + (x_c + 6)^2 = x_c^2;\ x^2 + 18x_c + 45 = 0.$$

Последнее уравнение имеет два решения {-3; -15}. Тогда точки (-3; -3) и (-15; -15) равноудалены от осей координат и точки А.

2) Пусть $x_c = -y_c$. Тогда

$$CA^2 = (x_c + 3)^2 + (-x_c + 6)^2 = x_c^2;\ x^2 - 6x_c + 45 = 0.$$

Полученное уравнение не имеет корней.

Ответ: (-3; -3), (-15; -15).



Пример 7. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин вписанного в нее правильного треугольника не зависит от положения точки на окружности.

Доказательство

Через центр O окружности, описанной вокруг правильного треугольника ABC, и его вершину B проведем ось Oy, а ось Ox - параллельно AC (рис. 1.9).

Координаты произвольной точки окружности $M(x; y)$ удовлетворяют уравнению окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Длина стороны треугольника АВС $a = R\sqrt{3}$, поэтому координаты вершин треугольника $A\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{6}\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{3}\right), C\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$ можно записать в виде:

$$A\left(-\frac{R\sqrt{3}}{2}; -\frac{R}{2}\right),\ B(0;R),\ C\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}; -\frac{R}{2}\right).$$

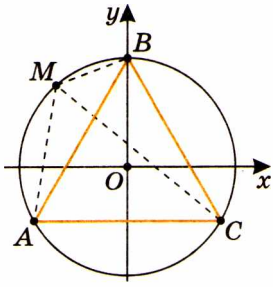


Рис. 1.9

Тогда

$$MA^2 = \left(x + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R}{2}\right)^2;\ MB^2 = x^2 + (y - R)^2;$$

$$MC^2 = \left(x - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R}{2}\right)^2.$$

Искомая сумма имеет вид:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(x + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R}{2}\right)^2 + x^2 + (y - R)^2 + \left(x - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 +$$

$$+ \left(y + \frac{R}{2}\right)^2 = 3(x^2 + y^2) + 3R^2 = 6R^2,$$

т. е. не зависит от положения точки M на окружности.

Ч. т. д.



Для любознательных

Опорная задача. Докажите, что координаты центроида треугольника равны среднему арифметическому соответствующих координат вершин этого треугольника.

Практическая работа 1

1. Начертите декартову систему координат и в ней отметьте по две точки:
   а) с абсциссами, равными 3; б) с ординатами, равными -2. Запишите координаты этих точек.
2. Начертите декартову систему координат и в ней отметьте две точки, определите их координаты. Вычислите расстояние между этими точками по соответствующей формуле. Измерьте расстояние между заданными точками и сравните полученные результаты.
3. Начертите декартову систему координат и обозначьте в ней точку. Найдите ее координаты и начертите окружность с центром в этой точке. Измерьте радиус окружности и запишите ее уравнение. Отметьте произвольную точку окружности и определите ее координаты. Должны ли координаты этой точки удовлетворять уравнению окружности? Проверьте свой ответ соответствующим вычислением.
4. Начертите декартову систему координат и треугольник в ней. Запишите координаты вершин треугольника. С помощью линейки отметьте середины его сторон и определите координаты этих точек. Вычислите координаты середин сторон треугольника по соответствующим формулам. Сравните полученные результаты.

Задание 1

1°. Запишите координаты точек, отмеченных на координатной плоскости *(xy)* (рис. 1.10).

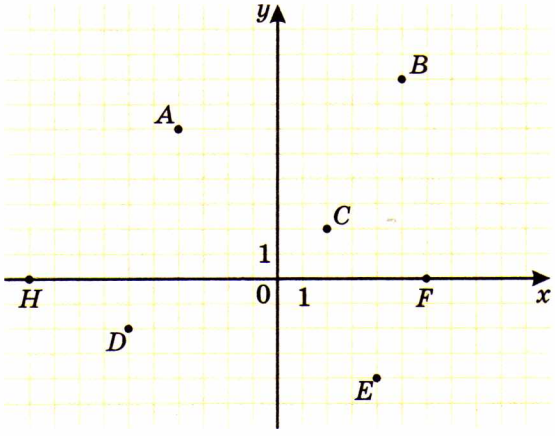


Рис. 1.10

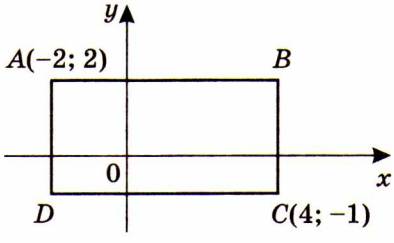


Рис. 1.11

2°. Отметьте на координатной плоскости точки *M(*5; 4), *N(*-5; 4), *K(*-5; -4), *T(*5; -4), A(4; 0), *B(*-4; 0), C(0; 5), *D(*0; -5).



Для любознательных

Аналитическая геометрия играла важную роль в развитии понятия о числе. Отрицательные числа, известные в Индии уже в VI-XI в., европейские математики считали абсурдом. Даже Виет не признавал их. Только благодаря аналитической геометрии Декарта (правило выбора знаков координат точек на координатной плоскости) отрицательные числа полностью утвердились в математике.

Интересно, что открытие декартовых координат не принадлежит Декарту. Древнегреческий математик *Аполлоний* (III—II в. до н. э., Александрия) фактически уже использовал прямоугольную систему координат, но вместо алгебраической символики (которая тогда не существовала) осуществлял описание уравнений через геометрические понятия.

3°. Постройте четырехугольник, если известны координаты его вершин А(*2;* 3), В(3;-5), С(-4;-1),D(-5; 3).

4°. Не выполняя построений, укажите, в каких координатных четвертях лежат точки *М(*-0,3; 80), ДГ(100; 200), .£(-500; -1000), 7(200; -0,1), L(-100; 0,3), S(120; -5).

5. На какой оси декартовой системы координат находятся точки: а) А(0; 4); б) В(*-2;* 0); в) С(5; 0); г) *D(0;* -10)?

6. Через точку *К(-4;* 1) проведите прямые *т и п ,* параллельные осям координат, а) Лежат ли на прямых *т и п* точки А(-4; 3), В(4; -3), С(2; 1), £)(-2; -1)? б) Укажите на прямых *т и п* точки, расстояние между которыми 2 единицы.

7. По рисунку 1.11 (стр. 19) найдите координаты вершин прямоугольника *ABCD,* стороны которого параллельны координатным осям.

8. Три вершины прямоугольника расположены в точках (-1; 4), (3; 4), (-1; -2). Найдите координаты четвертой вершины.

9. Проверьте, лежат ли на линии $y^2 - x^2 = 7$ точки А(1; 8), *В(*3; 16), С(-5; 4).

10. Какие из точек А(2; -1), В(-1; 3), С(0; -2) принадлежат линии, соответствующей уравнению $|дс| + 2y^2 = 4$?

11*. Сторона квадрата равна 6. Одна его вершина расположена в начале координат, а две - на осях и имеют неотрицательные координаты. Найдите координаты всех вершин квадрата.

12*. Точка пересечения диагоналей ромба совпадает с началом координат. Диагонали ромба лежат на осях координат. Длина одной диагонали - 8 единиц, а второй - 4 единицы. Какие координаты могут иметь вершины ромба?

13. Задана точка А(2; 4). Постройте точку и запишите ее координаты: а) A_y симметричную точке *А* относительно оси *Ох;* б) A_2, симметричную точке *А* относительно оси *Оу;* в*) A_3, симметричную точке *А* относительно начала координат; г**) A_4, симметричную точке A_t относительно точки A_2.

14. Задана точка А(-3; 2). Постройте точку: а) A_x, симметричную точке А относительно оси *Ох;* б) A_2, симметричную точке А относительно оси *Оу;* в*) A_3, симметричную точке А относительно начала координат; г**) A_4, симметричную точке A_3 относительно точки A_1. Запишите координаты построенных точек.

15*. Принадлежат ли точки координатной плоскости, удовлетворяющие уравнению $y = x$, множеству точек, заданных уравнением $|(/| + y^2 = |я| + x^2 1$

Задание 2

1°. Найдите расстояние между точками: а) А(3; 2) и В(1; -7); б) М(-4; -8) и *N(2;* 0); в) *F{2;* -1) и D(2; 4); г) G(3; -5) и Я(6; -5).

2°. Найдите расстояние от начала координат до точки: а) А(2; 3); б) В(-7; 5); в) М(-3; 4); г) N(-4;-3).

3. Найдите периметр треугольника *ABC,* если А(2; -1), В(-1; 3), С(2; 7).

4. Докажите, что треугольник *FGH* равнобедренный, если *F(*4; -2), G(-4; 4), Я(-12; 10).

5*. Докажите, что точки А, *R* и *Т* лежат на одной прямой, если А(-3; -7), *R(2;* 3), 7Х0; 1). Какая из точек лежит между двумя другими?

6*. Не выполняя построения точек, определите, лежат ли точки *К(*0; -4), М(3; -2), *N(*7; 1) на одной прямой.



Для любознательных

Французский математик *Орезм* в XIV в. использовал прямоугольные координаты для графической иллюстрации зависимости двух переменных. Вместо современных терминов «абсцисса» и «ордината» он использовал термины «долгота» и «широта». Идеи Орезма не имели распространения, т. к. понятие функциональной зависимости было еще очень туманным.

7. Расстояние между точками $A(m; -3)$ иВ(1; 5) равно 10. Найдите значение m.

8*. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек М(-1; 4) и $N(5; -7)$.

9*. На осях координат найдите точку, удаленную от точки Р(6; -8) на: а) 16 единиц; б) 10 единиц; в) 4 единицы.

10*. Найдите точку, равноудаленную от точек $K(4; -5)$ и Т(-7; 8), если: а) искомая точка лежит на оси абсцисс; б) искомая точка лежит на оси ординат; **в)** абсцисса и ордината искомой точки равны между собой.

11*. Докажите, что четырехугольник с вершинами А(4; 8), 5(7; 3), С(4; -2) и D(l; 3) - ромб.

12**. Координаты всех вершин треугольника - четные числа. Докажите, что площадь этого треугольника выражается натуральным числом.

13**. Координаты вершин А и B квадрата $ABCD$ - целые числа. Докажите, что координаты вершин C и D - тоже целые числа.

14°. Запишите уравнение окружности с центром в точке О, радиус которой равен R, если: а) 0(1; 2), $R = 3$; б) 0(-3; 4), $R = 8$; **в)** 0(-5; -4), $R = 1$; г) 0(3; 0), $R = 4$; д) 0(0; -2), $R = 6$; е) 0(0; 0), Я = 3.

15°. Запишите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением:
а) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 4$; б) $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 16$; **в)** $(x - 1)^2 + y^2 = 36$; г) $x^2 + y^2 = 100$.

16°. На координатной плоскости постройте окружность, заданную уравнением:
а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$; **в)** $x^2 + (y + 4)^2 = 16$.

17°. Какие из точек А(0; 5), 5(1; 2), С(5; -1), Щ-5; 0), £(-4; 3), $F(-3; -4)$ лежат на окружности $x^2 + y^2 = 25$?

18°. Какие из точек 0(0; 0), А(0; 3), 5(1; -4), С(-4; -3) принадлежат окружности $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 26$?

19°. На координатной плоскости постройте окружность с центром в точке 5(0; 4), диаметр которой равен 4. Запишите уравнение этой окружности.

20. Запишите уравнение окружности с центром в точке $M(-3; 5)$, которая проходит через точку $A(1; 7)$.

21. На окружности $x^2 + y^2 = 25$ найдите точки: а) с ординатой -2; б) с абсциссой 4; **в)** такие, которые лежат на оси абсцисс; г) такие, которые лежат на оси ординат.

22*. Найдите центр и радиус окружности:
а) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 6$; б) $x^2 + y^2 - 6* + 8 = 3$.

23. Какой из окружностей рисунка 1.12 соответствует уравнение: а) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$;
б) $x^2 + y^2 = 4$; **в)** $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$?

24*. Найдите расстояние между центрами окружностей:
а) $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ и $x^2 + y^2 - 10x - 6y = 2$;
б) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$ и $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 3$.

25*. Окружность касается координатных осей. Найдите координаты точки касания оси Oy, если оси Ox эта окружность касается в точке $M(3; 0)$.

26*. Запишите уравнение окружности, которая касается координатных осей и проходит через точку с координатами (0; -1).

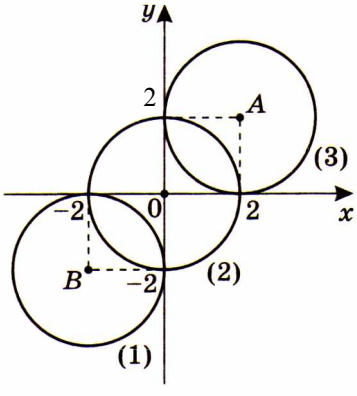


Рис. 1.12



Для любознательных

1. Могут ли три рыцаря, каждый со своим оруженосцем, переправиться через речку на лодке, вмещающей не более двух человек, если оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев?

2. Учитель на уроке геометрии задал «хитрую» задачу. Число мальчиков, которые ее решили, равно числу девочек, которые ее не решили. Кого в классе больше - тех, кто решил задачу, или девочек?

27*. Определите координаты центра окружности радиуса 2, которая касается осей координат.

28*. Запишите уравнение окружности, которая касается координатных осей и проходит через точку (1;2).

29°. Найдите координаты середины отрезка с концами в точках А(-4; 7), В(12; -5).

30. Точка *К* - середина отрезка *NP, К(*5; -7), Р(-3; 8). Найдите координаты точки *N.*

31. Найдите длину медианы *AM* треугольника *ABC,* если А(5; 1), В(-3; -2), С(-5; -6).

32. Запишите уравнение окружности диаметра *AB,* если А(4; -9), В(-6; 5).

33*. Диагонали параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке *О.* Найдите координаты точек *Cw.D,* если известны координаты точек А(-1; 6), В(8; -3), 0(3; -2).

34*. Четырехугольник *MNPK* - параллелограмм, при этом М(1; -2), *N(2;* 3), Р(5; 6). Найдите координаты точки *К.*

35**. На оси ординат найдите точки, из которых отрезок АВ видно под прямым углом, если: а)А(-4; -1), £(12; 1); б)А(0; 6), В(6; 14).

36**. На оси абсцисс найдите точки, из которых отрезок АВ видно под прямым углом, если: а)А(-4; -1), В(12; 1); б)А(4; 0), *В(*6; 14).

37*. Отрезок *AB* разделили на три равные части: *AC = CD = DB.* Найдите координаты точек *С* и *D,* если А(1; -2), В(4; 4).

38*. Отрезок *MN* разделили на четыре равные части: *MP = PT = TK = KN.* Найдите координаты точек *P, K, N,* если М(7; -13) и *Т(-5;* 1).

39**. Пусть $A(x_л; y_A)$, $B(x_в; y_в)$, $M(x_м; y_м)$. Известно, что точка М принадлежит отрезку *AB* и что $AM : MB = к$. Докажите, что $x_м = \frac{x_л + Xx_в}{1 + A,}$; $y_м = \frac{Y_л + Xy_в}{1 + X}$.

40**. Отрезок *AB* делится точкой М в отношении 1:2. Найдите координаты точки *M,* если А(5; 3), В(-1; -3).

41**. По двум заданным точкам - вершине треугольника А(3; -2) и середине противоположной стороны М(-6; 2) найдите координаты центроида треугольника.

42**. Найдите координаты центра масс треугольника *ABC,* если известны координаты: а) его вершин: А(4; 1), В(2; 1), С(4; 3); б) середины сторон треугольника: $M_1(-3; 2), M_2(1;0), M_3(3;4)$.

43**. Докажите, что *AL* - биссектриса внутреннего угла треугольника *ABC,* если: а) А(4; 1), В(6; 5), С(2; 7), ДЗ; 4); б)А(0; 7), В(-4; -1), С(12; 1), L(2,4; -0,2).

44**. Точки А(9; 4), В(-3; -1), С(3; 4) - вершины треугольника *ABC, АК* - его биссектриса. Найдите: а) координаты точки *К;* б) длину биссектрисы *АК.*

45**. Сколько существует на плоскости точек таких, что сумма расстояний от каждой из них до двух заданных точек А(2; 3) и В(-2; -1) равна 5,5?

46**. Отрезок с концами в точках А(6; -4) и В(15; -2) разделен точками *С* и *D* соответственно как 3 : 2 : 4 (от А к *В).* Найдите абсциссу точки, симметричной *С* относительно оси ординат.



Для любознательных

1. Несколько шахматистов целый день играли в шахматы в парке. Так как они имели только один комплект шахмат, то установили следующий порядок игры. Тот, кто выиграл партию, - пропускает две следующие. Тот, кто проиграл партию, - пропускает четыре следующие. В случае ничьей - проигрыш засчитывается тому, кто играл белыми. Сколько было, шахматистов, если эти правила выполнялись?

2. Существуют шахматные доски с бортиками, чтобы фигуры не падали во время игры, например в поезде. Попробуйте разместить на такой доске 28 пластинок домино, каждая из которых занимает две клеточки доски, так, чтобы ни одну из пластинок нельзя было сдвинуть с места в плоскости этой доски.

§ 2 о Уравнение прямой

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Из курса алгебры вы уже знаете, что график функции $y = kx + l$- прямая. Это равенство еще называют *уравнением прямой.*

Выясним, любой ли прямой плоскости соответствует уравнение вида $y = kx + I$.

Для этого найдем уравнение произвольной прямой *n* декартовой плоскости, используя свойство серединного перпендикуляра к отрезку.

Обозначим на координатной плоскости две точки А(Xj5 г/,) и $B(x_2; y_2)$ так, чтобы прямая *n* была серединным перпендикуляром отрезка АВ (рис. 1.13). Тогда, по свойству серединного перпендикуляра к отрезку, произвольная точка М(х; *у)* прямой *n* будет равноудалена от точек А и В, т. е. $AM = BM$ и $AM^2 = BM^2$:

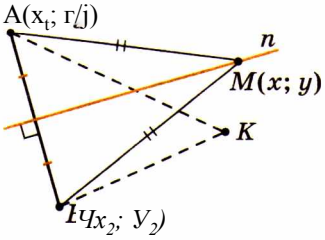


Рис. 1.13

$$(x - Xj)^2 + (y - y,)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2.$$

Если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, получим:

$$2(Xj - x_2)x + 2(г/_{\bullet} - y_2)y + x_2^2 + y^2 - x_2^2 - y^2 = o.$$

В этом соотношении значения чисел х и *у* могут меняться (как координаты произвольной точки *М* прямой *n),* а числа $x_{,}$, y_v x_2, $i/_2$при этом неизменны.

Тогда координаты х и *у* любой точки прямой *n* удовлетворяют уравнению

$$ax + by + c = o,$$

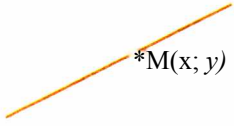
где $a = 2(Xj - x_2)$, $b = 2(j/j - y_2)$ и $c = x_2^2 - Xj^2 + y^2 - y_1^2$ - постоянные величины для данной прямой.

Важное замечание. Если некоторая точка *К* не принадлежит прямой *n* (рис. 1.13), то AK^2 Ф BK^2 (по свойству серединного перпендикуляра к отрезку) и координаты этой точки не удовлетворяют уравнению прямой *n.*

Уравнение $ax + by + c = 0$ называют *обобщенным уравнением прямой,* иначе - *уравнением прямой в обобщенном виде (общего вида)* или *в обобщенной (канонической) форме.*

Из всех языков мира наилучший - это искусственный язык, язык лаконичный, язык математики.

Н.И. Лобачевский



$ax + by + c = 0$

обобщенное уравнение прямой,

или

уравнение прямой в обобщенной (канонической) форме

Точка $(x_0; y_0)$ ПРИНАДЛЕЖИТ прямой $ax + by + c = o$ тогда и только тогда, ЕСЛИ $ax_o + by_0 + c = o$.

Для любознательных

1. А можете ли вы ответить на вопрос, почему в алгебре линейную функцию не задают в виде $ax + by + c = 0$? Совет. Вспомните определение функции.
2. Какому множеству точек плоскости соответствует случай $a = 0$, $Ъ = 0$ и $c^* 0$? *А* случай а = 0, £> = 0ис = 0?

Напомним: *(1)o(2)~* утверждения равносильны, *(1)^(2)* и *(2)=>(1).*

Возникает вопрос: являются ли равносильными обобщенное уравнение прямой и уравнение прямой $y = kx + l$, которое нам известно из курса алгебры?

Очевидно, если уравнение $ax + by + c = 0$ разделить на b, то его действительно можно записать в виде $y = kx + l$. Но это можно сделать *только в случае* 6^0!

Например, прямой, изображенной на рисунке 1.14, соответствуют равносильные уравнения 4x-2г/ + 13 = 0 и $y = 2x + 6{,}5$. (Второе можно получить из первого, разделив его на Ь = -2 ф 0.)

Если $b = 0$ и $a \neq 0$, уравнение прямой можно записать в виде $x = -\frac{c}{a}$. Его удовлетворяют точки с произвольной ординатой и постоянной абсциссой. Это прямая, параллельная оси Oy (рис. 1.15).

Уравнение прямой *n:*

$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

n % Oy

можно записать

$y = kx + l;$

$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ b = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

n!! Oy

имеет вид

$x = \text{const};$

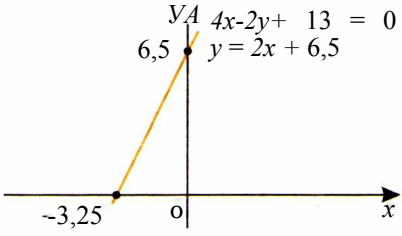


Рис. 1.14

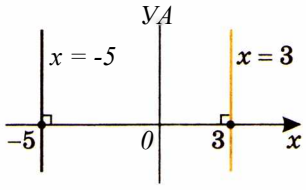


Рис. 1.15

$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

n || Ox

имеет вид

$y = \text{const};$

Случай $a = 0$ и $b \neq 0$ соответствует прямой $y = \frac{c}{b}$, точки которой имеют постоянную ординату и произвольную абсциссу. Это прямая, параллельная оси Ox (рис. 1.16).

Если $c = 0$, то координаты точки (0; 0) удовлетворяют уравнению прямой и она проходит через начало координат. В этом случае уравнение прямой можно записать в виде *прямой пропорциональности* $y = kx$ (рис. 1.17).

$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ c = 0 \\ 6 \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

имеет вид

$y = kx$ - прямая пропорциональность.

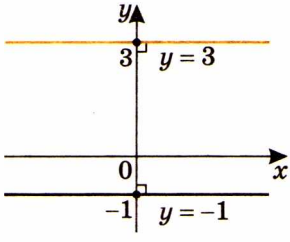


Рис. 1.16

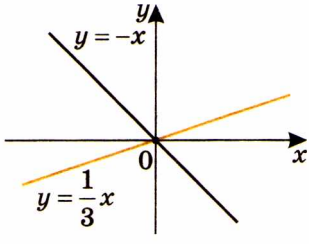


Рис. 1.17



Для любознательных

В процессе научных исследований человек стремится из уже известного получить новые знания, именуемые *выводом.* В древней Индии логики приводили такой пример. Пусть известно: «там, где дым, там и огонь» и «на холме - дым». На основании этой информации мы получаем новые знания - вывод: «на холме есть огонь». Если исходные данные были истинными, то не надо подниматься на холм, чтобы убедиться, что там есть огонь.

ВЫВОД. Общий вид уравнения прямой $ax + by + c = 0$. При этом:

- только при условии $b \neq 0$ уравнение прямой можно записать в виде $y = kx + l$; график прямой не параллелен оси Oy;
- при $b = 0$, $a \neq 0$ — прямая параллельна оси Oy; ее уравнение $x = m$ нельзя представить в виде $y = kx + l$;
- при $a = 0$, $b \neq 0$ — прямая параллельна оси Ox; ее уравнение $y = l$;
- при $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ — уравнение прямой пропорциональности $y = kx$.

Напомним:
$\triangleq$ - «обозначили как».

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ

Через две точки можно провести прямую и притом только одну - это аксиома геометрии. Запишем уравнение прямой, проходящей через две точки координатной плоскости $A(x_x; y_x)$ и $B(x_2; y_2)$.

Возможны два случая: прямая AB параллельна оси Oy и прямая AB не параллельна оси Oy.

СЛУЧАЙ 1.

Если прямая параллельна оси Oy, то абсциссы всех ее точек одинаковы. Т. е. это случай, когда $x_x = x_2 \triangleq X$. Уравнение искомой прямой: $x = X$.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, абсциссы которых одинаковы, $A(X; y_x)$ и $B(X; y_2)$, имеет вид $x = X$.

СЛУЧАЙ 2.

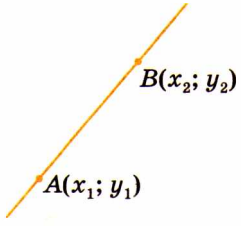
Пусть абсциссы заданных точек не равны между собой: $x_x \neq x_2$.

Искомая прямая не параллельна оси Oy, тогда ее уравнение можно записать в виде $y = kx + l$.

Точки A и B принадлежат этой прямой. Тогда их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$y_x = kx_x + l,\ y_2 = kx_2 + l.$$

Уравнение прямой AB:



- если $x_x = x_2 = n$ $x = n$;
- если $y_x = y_2 = m$ $y = m$;
- если $x_x \neq x_2$ $y = kx + l$,

где k и l находим из:

$$\begin{cases} y_x = kx_x + l \\ y_2 = kx_2 + l. \end{cases}$$



Для любознательных

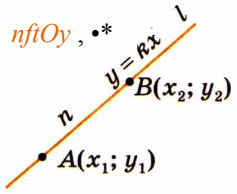
Наука о законах и формах мышления называется *логикой*. Выполнение законов логики - необходимое условие доказательности и истинности наших размышлений.

Закон тождества (один из основных четырех законов логики) требует, чтобы одно и то же размышление, которое приводится в данном рассуждении, при повторении имело один и тот же смысл.

Закон противоречия состоит в том, что не могут быть одновременно истинными два противоположных утверждения.

Закон исключенного третьего (дословно с латыни - «третьего не дано») утверждает, что из двух противоположных высказываний об одном и том же объекте одно обязательно является истинным (вспомните метод доказательства от противного).

Закон достаточного основания требует, чтобы каждое истинное утверждение было обосновано.



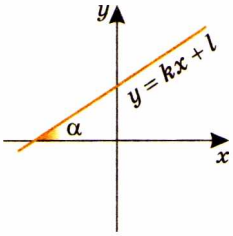
$Y_2 - Yi = b(x2-x\ i)$

Это система двух линейных уравнений для двух неизвестных коэффициентов *к и ї*. Если от второго уравнения отнять первое, получим

$$Yг\sim\cancel{У}\backslash\sim k(x_2 — *i),\ k=\frac{\cancel{Y_2}\ Yi}{x_2\text{-}x,}$$

Если подставить полученное значение *k* в одно из двух исходных уравнений системы, получим значение коэффициента *I*.

В рассматриваемом случае на координатной плоскости прямую можно изобразить так, как представлено на рисунке 1.18.



tg α = k

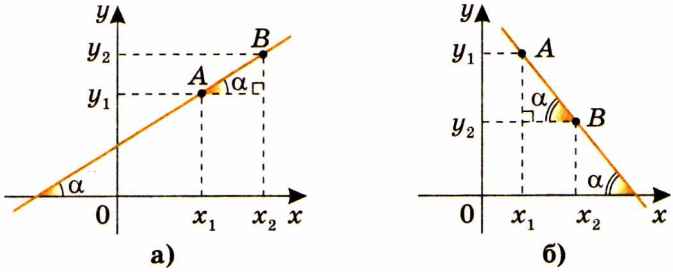
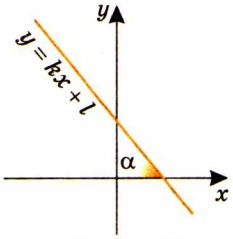


Рис. 1.18

Тогда: tga $= \frac{y2 - y1}{x_2 - x,} = к$, или $tg\cancel{A} = \frac{y2}{x_2 - x_1} = -к.$

Таким образом, коэффициент *k* в уравнении прямой *y = kx + I* с точностью до знака равен тангенсу угла, под которым заданная прямая пересекает прямую, совпадающую с осью абсцисс. Поэтому этот коэффициент называют *угловым коэффициентом прямой.*

k – угловой коэффициент



tg α = −k



НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ТРЕХ ТОЧЕК НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ

ш

Теорема. Три точки *C(x; y), A(xj y_y), B(x₂; y₂)* лежат на одной прямой тогда и только тогда, если

$$X = \frac{x_1 + \cancel{b}c_2}{1 + X};\quad У = \frac{Yi + \hat{}y_2}{1 + A,}.$$

(Т. е. существует такое число А., что указанные соотношения выполняются.)



Для любознательных

Английский математик *Чарльз Лютвидж Доджсон* (1832-1898) печатал свои сказки и сборники задач поисковой математики и логики под псевдонимом *Льюиса Кэрролла.* Какой из законов логики (стр. 25) нарушил в его сказке Чеширский Кот, беседуя с Алисой?

- А откуда Вы знаете, что Вы не в своем уме? - спросила Алиса.
- Начнем с того, что Пес в своем уме. Согласна? - ответил Кот.
- Допустим, - согласилась Алиса.
- Далее, - сказал Кот, - Пес рычит, когда сердится, а когда доволен - виляет хвостом. Ну а я мурлычу, когда доволен, и виляю хвостом, когда сержусь. Поэтому я не в своем уме.

I. Докажем *необходимое условие.*

Если точка С(ж; *у*) принадлежит прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Доказательство

Возможны два случая: С є [АВ] и С g [АВ].

(1) Точка С принадлежит отрезку АВ (рис. 1.19-а).

Этот случай был нами рассмотрен ранее (стр. 15). Если точка *С* делит отрезок АВ в отношении (АС|: \CB\ = *n : m,* то

$$x = \frac{mx_1 + nx_2}{n + m}, \quad x = \frac{x_1 + \frac{n}{m} x_2}{1 + \frac{n}{m}} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Аналогично $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, и утверждение условия выполняется.

(2) Точка С не принадлежит отрезку АВ (рис. 1.19-б).

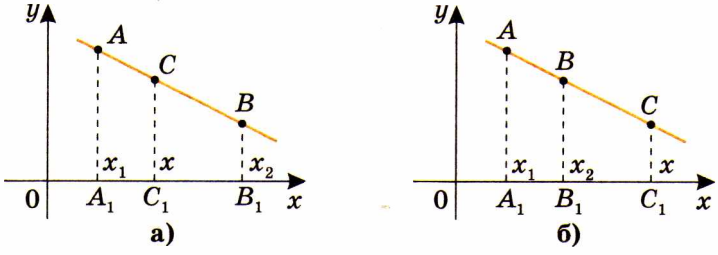


Рис. 1.19

Обозначим \AC\: \CB\ = *n : m = X.* По теореме Фалеса:

$$\frac{AA}{CA} = \frac{AC}{CB} = \frac{n}{m} = \lambda, \quad \left|\frac{x - x_1}{x_2 - x}\right| = \lambda.$$

Выражение под знаком модуля положительное (см. стр. 15), тогда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Аналогично $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, и утверждение условия выполняется.

Напомним:
є - «принадлежит»;
i - «не принадлежит»;
[АВ]-отрезок АВ.

НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$

а

Точки $(x;y)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ лежат на одной прямой.

Геометрия - познание всего сущего.
Платон
(IV в. до н. э.)

Для любознательных

В сказках Льюиса Кэрролла приведены чудесные примеры «доказательств», в которых герои нарушают закон достаточного основания:

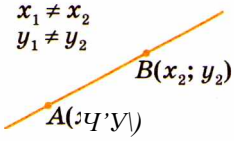
- Сними свою шляпу, - сказал Король Шляпочнику.
- Она не моя, - ответил Шляпочник.
- Краденная! - закричал Король и с триумфом повернулся к присяжным.
- Я их держу для продажи, - объяснил Шляпочник, - у меня своих нет, я ведь шляпочных дел мастер.

II. Докажем *достаточное условие* (утверждение, обратное утверждению I).

Если для точек *C(x; y),* A(Xj; y_1), $B(x_2; y_2)$ выполняются соотношения

$$x = \frac{X_e + Xx_2}{1 + X.}; \quad y = \frac{Y_1 + ^Y_2}{1 + я,},$$

то эти точки лежат на одной прямой.



Доказательство

Используем метод от противного. Пусть указанные в условии соотношения выполняются, но С г (АВ).

Возьмем на прямой АВ такую точку Р, чтобы [АР|: |СР| = *X.* Тогда (согласно необходимому условию I) координаты точки Р равны:

$$x_P = \frac{Xj + Xx_2}{1+X} \quad \text{и} \quad y_P = \frac{Yi + ^Yi}{1+X}$$

- координатам точки С, т. е. точки Р и *С* совпадают, что противоречит допущенному. Тогда утверждение условия - истинное.

Теорема доказана.

$\frac{y - y_i}{y_2 - y_x} = \frac{x - x_1}{X_2 - x.}$ *уравнения прямой в отрезках*

С Следствие. *Уравнение прямой в отрезках.* Уравнение прямой, которая проходит через точки А(х,; i/j) и $B(x_2; y_2)$ и не параллельна осям координат (Xj ^ x_2 и y_x Ф y_2), можно записать в виде $\frac{y - y_i}{y_2 - y_i} = \frac{x - x_1}{x_0 - x,}$.

$\frac{Y_3 - Y_i}{Y_2 - Y_1} = \frac{*_3 - *_1}{x_2 - x,}$ *необходимое и достаточное условия расположения трех точек на одной прямой*

Согласно теореме, все точки данной прямой (х; *у)* и только они удовлетворяют соотношениям

$$X = \frac{Xj + Xx_2}{1+X}, \quad y = \frac{Yi + ^Y_2}{1+X}.$$

Найдем из каждого соотношения выражения для *X* и приравняем их:

$$\frac{x - x.}{X_2 - X,} = \lambda = \frac{y - y_x}{y_2 - y_1}.$$

Для любознательных

Логика геометров, или методы доказательств, которые Евклид использовал для теорем, - это распространение общей логики.

Г. Лейбниц

Вернемся к закону исключенного третьего (стр. 25). Этот закон сопоставляет два утверждения, одно из которых - *общеутверждающее,* а второе - *частично возражающее.* Например: «Вокруг произвольного четырехугольника (вообще говоря) нельзя описать окружность» и «Вокруг некоторых четырехугольников можно описать окружность»; «Все четные числа - составные» и «Некоторые четные числа не являются составными».

Заметим, если сопоставлять два противоположных общеутверждающих высказывания, то они оба могут оказаться ложными. Например: «Все четные числа - составные» и «Все четные числа - несоставные» (существует третья возможность: «Некоторое четное число - несоставное» - это простое число 2).

Тогда условие расположения трех точек на одной прямой можно записать в виде

$$\frac{y_a - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку А(- 6; 7) параллельно оси ординат.

Решение

Искомая прямая параллельна оси *Оу,* тогда абсциссы точек этой прямой одинаковы и равны абсциссе точки А. Уравнение прямой $x = -6$.

Ответ: $x = -6$.

Пример 2. Заданы три точки: А(1;-3); В(-5; 4) и *С(3;* 1). Запишите уравнение прямой, которой принадлежит медиана *АМ* треугольника АВС.

Решение

1) Координаты середины отрезка *ВС* - точка $M(x_M; y_M)$ (Рис. 1.20):

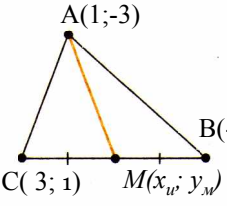


Рис. 1.20

$$x_M = \frac{-5 + 3}{2} = -1; \quad y_M = \frac{4 + 1}{2} = 2{,}5.$$

2) Найдем уравнение прямой *АМ.* Т.' к. $x_M * x_A$, то уравнение (АМ) можно искать в виде $y = kx + I$. Точки А и *М* лежат на этой прямой, тогда их координаты удовлетворяют искомому уравнению:

$$\begin{cases} -3 = A_T \cdot (-1) + I, \\ 2{,}5 = *(-1) + I, \end{cases} \quad г = -0{,}25, \; к = -2{,}75.$$

Ответ: $y = -2{,}75x - 0{,}25$.

Задание 3

1°. Найдите координаты точек пересечения с осями координат прямой:
а) $4x - 3y + 12 = 0$; б) $y = -4.x + 7$; в) $y = -0{,}5x - 2{,}5$.

Уравнения прямых, параллельных осям координат:

1) $\begin{cases} A(x_A; y_A) \in n \\ n \parallel Oy \end{cases}$ $x = x_A$

2) $\begin{cases} B(x_B; y_B) \in n \\ я \parallel Ox \end{cases}$ $y = y_B$

Напомним: *(АМ)* - прямая *АМ.*

Мы никогда не станем математиками, даже выучив наизусть все чужие доказательства, если наш разум неспособен самостоятельно решать проблемы.

Р. Декарт



Для любознательных

Считая каждое из утверждений истинным, определите, является ли первое из утверждений в каждой паре достаточным основанием (см. стр. 25) для второго.

1. «Треугольник АВС равен треугольнику *ABD*»\ «Треугольники *ABC* и *ABD* равновеликие».
2. «Это интересная книга»; «В этой книге прекрасные иллюстрации».
3. «Диагонали данного четырехугольника взаимно перпендикулярны»; «Данный четырехугольник - ромб».
4. «Из А следует В, и из В следует С»; «Из АследуетС».
5. «Утверждение p —» q истинное»; «Утверждение ~I q —» ⁻I p истинное». (Знак «~ı» означает «противоположноеутверждение».)

2°. Прямая задана уравнением $x - Ay + 8 = 0$. Какие из точек A(0; 2), B(-1; 1), C(2; 0,5), .0(8; 0) принадлежат этой прямой, а какие не принадлежат?

3°. Проверьте, проходит ли прямая г/ = 7х - 1 через точки A(1; -1), B(0; -1), C(1; 6), £>(-3; 2).

4°. Постройте на координатной плоскости прямые:

а) 3х - $6y$ + 1 = 0; б) х - y = 7; **в)** $y = 5x$; г) y = ^х-1; д) y = 3; **е)** $x = -2$.

5°. Постройте на координатной плоскости прямые, проходящие через точку $K(-4;$ 3) параллельно осям координат. Запишите их уравнения.

6°.Запишите уравнение прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку (-6; о).

7. Запишите уравнение прямой, параллельной оси абсцисс, которая отсекает на положительной полуоси ординат отрезок длиной 10 единиц.

8. Запишите уравнения прямых, параллельных оси абсцисс, каждая из которых отсекает на полуоси ординат отрезок длиной 4 единицы.

9. Известно, что график функции $y = ax + 5$ проходит через точку M(4; 13). Найдите значение параметра a.

10°. Найдите точки пересечения с осями координат прямой:

а) y = 3х - 1; б) 2х + $3y$ = 7; **в)** y = 5; г) х = 3; д) 4х - $3y$ + 12 = 0; е) 5х = $3y$.

11. Одна из вершин квадрата совпадает с началом координат, а противоположная вершина имеет координаты (-2; 2). Запишите уравнения прямых, которым принадлежат стороны квадрата.

12. Одна из вершин прямоугольника имеет координаты (0; 0), а противоположная вершина - координаты (5; -3). Запишите уравнения прямых, которым принадлежат стороны прямоугольника, если они параллельны осям координат.

13*. Одна из вершин квадрата лежит в точке (5; 5). Точка пересечения диагоналей квадрата имеет координаты (7; 7).

1) Составьте уравнения прямых, которым принадлежат стороны квадрата.

2) Найдите: а) длину стороны квадрата; б) длины диагоналей квадрата.

14°. Запишите уравнение прямой в виде $y = kx + I$ и найдите ее угловой коэффициент:

а) 2х - Ay = 5; б) 3х + y = 7; **в)** х- $2y$ - 3 = 0; г) 3х + 4г/ - 1 = 0; д) 3х = $5y$, **е)** $5y$ = 12.



Для любознательных

Софизм (от греческого «хитрый выкрутас», «выдумка», «ложное умозаключение») - размышление, содержащее специально допущенную логическую ошибку и приводящее к ложному выводу. Первым ввел софизмы *Протагор изАбдеры* (пр. 480-410 гг. до н. э.).

Чаще всего софизмы основаны на: внешнем подобии явлений; на специально подобранных ложных посылках; на том, что определенный факт выпадает из общей связи объектов; на двухзначности слов; на подмене понятий и т. п.

Попробуйте разгадать *софизм Н. Г. Чернышевского,* который он предложил в 1846 году своему брату Александру.

Квадрат любой стороны тупоугольного треугольника, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон этого треугольника.

Доказательство

В треугольнике ABC угол B тупой. Проведем перпендикуляр CD к прямой AB. Тогда $AC^2 = AD^2 + CD^2$ и $CD^2 = CB^2 - BD^2$. Подставим значение CD^2 из второго равенства в первое: $AC^2 = AD^2 + BC^2 - BD^2$. Отсюда $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$. НоAD=AB + BD, поэтому $AD^2 - BD^2 = AB^2$. Тогда $AC^2 - BC^2 = AB^2$.

Утверждение доказано?!

Чернышевский заканчивает письмо с софизмом словами: «Где-то здесь кроется обман; найдя его, ты сделаешь большую услугу любящему тебя брату Николаю Чернышевскому».

15. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М(1; -3), угловой коэффициент которой равен:

а)-2; б)^; b)1j; г) $\frac{3}{4}$-5^.

16. Прямая проходит через начало координат и имеет угловой коэффициент, равный 4. Запишите уравнение этой прямой. Принадлежит ли ей точка М(2; 5)?

17*. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки: а) А(-1; 0) и £(0; 2); б) А(-5; 16) и £(-5; 12,5); в) А(1; -2) и £(3; 2); г) А(1; -12) и £(23; -12).

18*. Составьте уравнение прямой, график которой проходит через точки А и £:
а) *А(4;* 0), £(0; 5); б) А(1; 1), £(2; 2); в)А(-1; 7), £(-1; 4); г) А(-3; 2), £(-1; 5);
д) А(7;-3),£(0; 0).

19*. Запишите уравнения каждой из четырех прямых, графики которых представлены на рисунке 1.21.

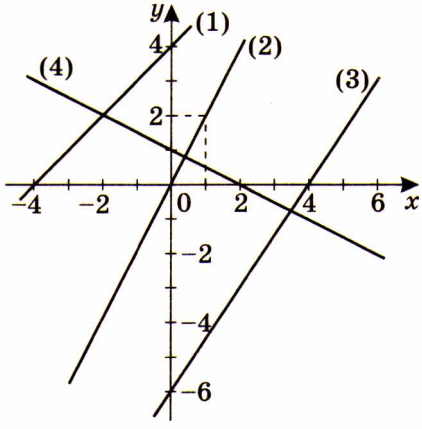


Рис. 1.21

20*. Определите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки *А* и £: а) А(0; 3), £(8; 1); б) А(-1; 3), £(4;-5); в) А(1; -4), £(-7; 1); г) А(-8; -1), £(-3; -5).

21*. Найдите градусные меры углов, образованных прямой с положительным направлением оси абсцисс:
а)y = x - 2;б) x + y - 3 = 0;в) y[3x - y - л/з = 0.

22*. Найдите коэффициенты *а* и *Ь* в уравнении прямой *ax + by* = 1, проходящей через точки А(1; 2) и £(2; 1).

23*. Составьте уравнение прямой, которая проходит через центры двух заданных окружностей:
а) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ и $x^2 + y^2 - 10x - 6y = 2$;
б) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$ и $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 3$.

24*. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку А(8; 2) и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 135°.

25*. Длины диагоналей ромба равны 8 единиц и 4 единицы. Запишите уравнения прямых, на которых лежат стороны ромба, если его большая диагональ принадлежит оси *Ox,* а меньшая - оси *Oy.*

26*. Вершины треугольника имеют координаты М(2; 6), *N(-6;* 0), *К(*-3; -4). Составьте: а) уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника;
б) уравнения прямых, которым принадлежат медианы треугольника.

27*. Проверьте, лежат ли на одной прямой четыре заданные точки:
а) (0; -2), (3; 0), (6; 2), (5; 7); б) (1; -2), (4; 1), (0; -5), (3; 0).

28*. Найдите ординату точки М(10; *у),* если она принадлежит прямой, проходящей через точки (2; 0) и (0; -3).

29*. Найдите абсциссу точки *К(х;* 4), если она принадлежит прямой, проходящей через точки (5; 0) и (0; 5).

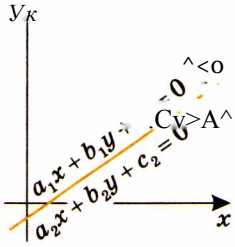
30*. Точка *К* лежит на одной прямой с точками А(2; 1) и £(-4; -2). Найдите координаты точки *К,* если известно, что они равны между собой.

31**. Найдите координаты вершины С треугольника *ABC* и запишите уравнения его сторон, если заданы координаты вершин А(3; 4) и £(-5; 6) и середина стороны *ВС* - точка М(-5; 3).

32**. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку А(-3; -1) и отсекает на координатных осях отрезки равной длины (считая от начала координат).

§ 3. Взаимное расположение двух прямых на координатной плоскости

Рассмотрим все три случая возможного взаимного расположения двух прямых на плоскости.



$n = m$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

ПРЯМЫЕ СОВПАДАЮТ

Если прямые совпадают, то их уравнения $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ - равносильны, т. е. описывают одно и то же множество точек координатной плоскости. Тогда они могут отличаться только умножением на некое число $X \neq 0$:

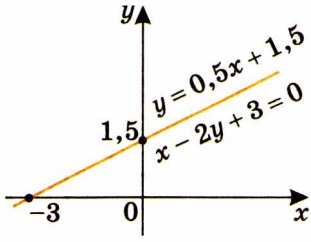
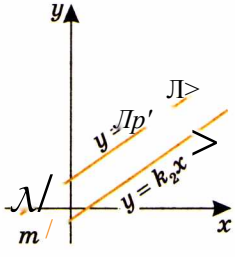


Рис. 1.22

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k.$$

Так, уравнения 2х-4у + 6 = 0 и $-x + 2y - 3 = 0$ равносильны, первое отличается от второго умножением на число -2: $\frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} = -2$. Они описывают одно и то же множество точек - одну прямую (рис. 1.22).

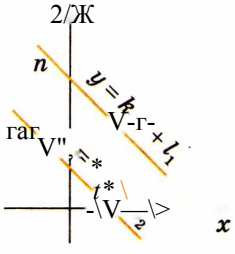


$n \parallel m$

Замечание. Мы рассмотрели случай, когда $a_{x_2} \neq 0$, $b_{x_2} \neq 0$ и $c_{x_2} \neq 0$. Если же какая-то из этих пар равна нулю, то ее нельзя включать в указанное выше соотношение (делить на нуль нельзя). Например, если $c_{x_2} = 0$, $a_{x_2} \neq 0$ и $b_{x_2} \neq 0$, имеем два уравнения прямой пропорциональности, которые будут описывать одну прямую при условии $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

ПРЯМЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ

$k_1 = k_2,\ l_1 \neq l_2$



Пусть прямые не параллельны осям координат. Тогда их уравнения можно записать в виде $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$.

Если эти прямые параллельны, то углы, образованные ими с прямой, лежащей на оси Ox, равны (рис. 1.23). Тогда равны значения тангенсов этих углов, а значит, и угловые коэффициенты прямых тоже равны: $k_1 = k_2$ (но $l_1 \neq l_2$).

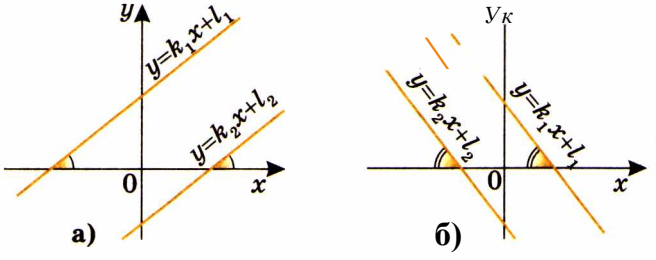


Рис. 1.23

Если такие прямые записаны в общем виде $a_x x + b_x y + C_j = 0$ и $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, то

$$K = -\frac{a_1}{b_1} k2 = -\frac{a_2}{b_2}.$$

Отсюда

$$\frac{a_2}{b_x} = \frac{a_к}{b_2}, \text{ еДЛ} \quad -.$$

Эти прямые не совпадают при условии

$$Z, = \frac{c_i}{\&1} \neq \frac{c_i}{\&2} \text{ , т. е. — } Ф.$$

Получили, что прямые параллельны при условии

$$\frac{a_2}{a_2} = \frac{6, c_2}{\neq}.$$

Например, прямые $2x-4y + 6 = 0$ и $x - 2y + 1 = 0$ параллельны, т. к. $\frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{6}{1}$.

Это означает, что система линейных уравнений

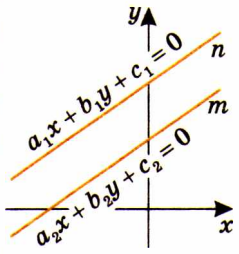
$$\begin{cases} 2x-4y + 6 = 0, \\ x-2y + 1 = 0 \end{cases}$$

не имеет решения. Действительно, если в уравнениях этой системы перенести в правые части их свободные члены и разделить первое уравнение на второе, то получим

$$\frac{2(x-2y)}{x-2y} = \frac{-6}{-1}, \quad \text{т. е. } 2 = 6,$$

чего быть не может.

Замечание. В случае $a_x - a_2 = 0$ или $b_t = b_2 = 0$ - прямые параллельны одной из координатных осей, а значит, параллельны между собой.



$\|$ПТ

$$* - \frac{b_1}{b_2} = к$$

$$5 = \frac{b_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$a_{1,2} \neq 0, b_{1,2} \neq 0$$

$$\begin{cases} a, = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow n \| m$$

$$\begin{cases} b_x = 0 \\ b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow n \| m$$



Для любознательных

Инспектор Петренко прибыл на место происшествия и опросил свидетелей.

Первый из них утверждал, что рядом с «Мерседесом» стояла белая машина, а немного дальше - синяя.

Второй свидетель заявил, что он учитель математики и потому хорошо запомнил, что машин было четыре. «Номер одной из них, - продолжил он, - 23-30, и она не желтая и не синяя. Рядом с машиной 32-30 стояла машина 30-23. Вторым в ряду машин был «Москвич», который стоял рядом с машиной красного цвета. А возле машины 23-30 «Мерседеса» не было».

Третий свидетель сказал, что номер белой машины был 32-30 и что сам он стоял возле второй машины.

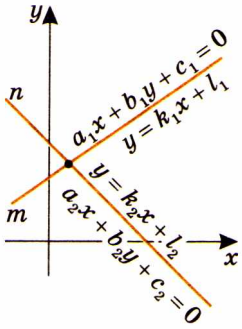
Четвертый запомнил, что рядом с «Москвичом» стоял «Запорожец».

Пятый свидетель оказался художником и хорошо запомнил, что единственная синяя машина стояла рядом с красной, при этом синяя машина - не «Москвич».

Сопоставив полученные данные, инспектор Петренко установил, какого цвета были «Жигули» и какая машина имела номерной знак 30-23.

Попробуйте и вы сделать то же самое.

ПРЯМЫЕ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ



$n \cap m$, $k_1 \neq k_2$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Если прямые пересекаются (имеют только одну общую точку), то они не совпадают и не параллельны (рис. 1.24). Тогда эти прямые образуют неравные углы с осью абсцисс *Ox*, и значения их угловых коэффициентов различны: $k_x \neq k_2$.

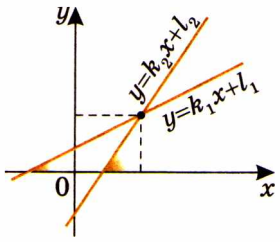


Рис. 1.24

В случае записи уравнения прямых в общем виде это условие означает, что $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, т. е. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Для того чтобы найти координаты точки пересечения двух прямых, надо решить систему двух линейных уравнений, которые задают эти прямые на координатной плоскости.

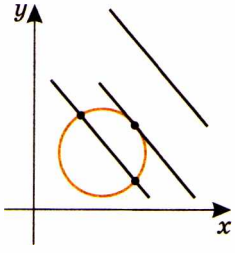
ВЫВОД

Система двух линейных уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

а) имеет бесконечное число решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;

б) не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

в) имеет единственное решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.



$$\begin{cases} y = kx + l \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \\ (x - a)^2 + (kx + l - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

D > 0 - пересечение;
D = 0 - касание;
D < 0 - нет, общих точек.

Замечание. *Для того, чтобы найти координаты общих точек прямой и окружности,* надо решить систему уравнений, одно из которых является уравнением данной прямой, а второе - уравнением заданной окружности. Возможны такие случаи:

а) система имеет два решения - *прямая пересекает окружность;*

б) система имеет одно решение - *прямая касается окружности;*

в) система не имеет решения - *прямая и окружность не имеют общих точек.*



Для любознательных

Дети шалили и случайно разбили вазу. Когда родители вернулись с работы, они спросили, кто именно разбил вазу. Дети ответили так.

Анна. Я не разбивала вазу, я сидела и читала. Маша знает, кто виноват.

Маша. Я вазу не разбивала, об этом знает Борис, т. к. мы с ним в это время разговаривали. Это сделала Анна.

Борис. Я не виноват. Это Данил, а с Машей я давно не дружу.

Данил. Я не виноват. Это Маша. Борис обманул, когда сказал, что вазу разбил я.

Каждый из детей только дважды сказал правду. Кто же разбил вазу?

ПРЯМЫЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ

Рассмотрим две взаимно перпендикулярные прямые, которые не параллельны осям координат: $y = k_1x + /j$ и $y = k_2x + l_2$ (рис. 1.25).

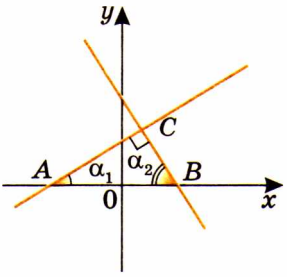


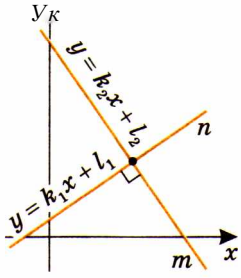
Рис. 1.25

Тангенсы острых углов, которые образуют эти прямые с осью *Ox,* равны tg oij = k_1 и tg a ₂ = $-k_2$ соответственно (см. стр. 26).

Из прямоугольного треугольника *ACB,* образованного этими прямыми и осью абсцисс, получаем:

a! = 90°-a_2; k_x =tgOj =tg(90°-a_2) = ctga_2 =$\frac{1}{\text{tga}_2 - k_2} = \frac{1}{\ldots}$.

Тогда, если две прямые взаимно перпендикулярны, то



$n \perp m$

$k_1 = -\frac{1}{k_2}$

'■'ï'

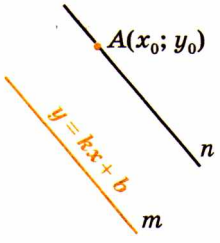
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку P(-1; 1) параллельно прямой $y = 2x - 3$.

Решение

1) Искомая прямая параллельна прямой с угловым коэффициентом 2. Тогда ее уравнение $y = 2x + 1$.
2) Эта прямая проходит через точку (-1; 1), тогда:
   $1 = 2\cdot(-1) + 1,\ 1 = 3.$

Ответ: $y = 2x + 3$.



Пример 2. На плоскости заданы точки A(0; 0), *B(* 1; -3), *D(-2;* 4). Какие координаты должна иметь точка *C,* чтобы четырехугольник *ABCD* был параллелограммом?

Решение

Обозначим координаты искомой точки C как x_0 и y_0.

1) *ABCD* - параллелограмм. Тогда (AB) || *(CD)* и *(AD)\\(CB).*
2) Уравнения (AB) и (AD) - уравнения прямой пропорциональности и имеют вид $y = kx$. Учитывая, что B(1; -3) є (AB), *D(-2;* 4) є (AD), получим уравнения (AB) и *(AB):* $y = -3x$ и $y = -2x$ соответственно.
3) *(CD)* || (AB), а *(CB)* || (AD). Тогда уравнения *(CD)* и *(CB)* имеют вид $y = -3x + m$ и $y = -2x + n$ соответственно.
4) Учитывая, что *(CD)* проходит через точку D(-2; 4), а *(CB)* - через *B* (1; -3), получим:
   $4 = -3 \cdot (-2) + m$ и $-3 = -2 \cdot 1 + n$; $m = -2$ и $n = -1$.
5) *(CD)* и *(CB)* проходят через точку C(x_0; y_0). Тогда

   y_0 = ~³*o + (-2) и Yo = 2*o + (-¹)-

Через A(x_0; y_0) проводим

$n \parallel m$

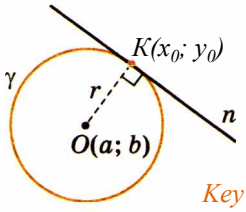
(n): \$y = kx + l$

\$y_0 = kx_0 + l$

$l = y_0 - kx_0$

Напомним:
є - «принадлежит»;
(AB) - прямая AB;
[AB] - отрезок AB.

Касательная n к окружности γ через точку K:



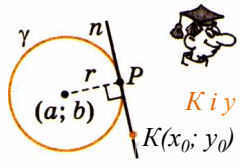
Key

(n) I" Oy ищем как $y=kx + l$:

$$\begin{cases} y_0 = kx_0 + \\ y_0 = -\frac{1}{k}x_0 + m \\ b = \frac{1}{k}a + m \end{cases}$$

ft

Не забудьте проанализировать случай $n \parallel Oy$



K i y

(n) -И" Oy ищем как $y = kx + l$:

$$\begin{cases} y_0 = kx_0 + l \\ I\, b = \frac{1}{k}a + m; \end{cases}$$

$(x - a)^2 + (kx + l - b)^2 = r^2$ имеет одно решение относительно x:

.0 = 0.

Из последней системы уравнений: $x_0 = -1$, $y_0 = 1$.

Ответ: С(-1; 1).

Пример 3. Запишите уравнение прямой, которая касается окружности $x^2 + y^2 - 4x - 6y = -8$ в точке $K(1; 1)$.

Решение

1) В уравнении окружности выделим квадраты двучленов относительно переменных *хии:*

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2.$$

Центр заданной окружности - точка 0(3; 2).

2) Абсциссы точек K и O не равны, тогда уравнение прямой OK, которая содержит радиус $[OK]$ окружности, можно искать в виде $y = kx + l$.

3) Точки 0(3; 2) и ЩЗ; 1) принадлежат (OK). Тогда

$$\begin{cases} 2 = 23 + l, \\ 1 = k + l \end{cases} \text{ и } \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ l = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4) Искомая касательная перпендикулярна (OK), уравнение которой $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = -2x + n$.

5) Точка $K(1, 1)$ принадлежит касательной, тогда

$$1 = -2 \cdot 1 + n \text{ и } n = 3.$$

Ответ: $y = -2x + 3$.

Пример 4. Запишите уравнение прямой, которая касается окружности $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ и проходит через точку $K(0; 5)$.

Решение

1) Пусть искомая прямая параллельна оси Oy или совпадает с ней, тогда ее уравнение имеет вид $x = c = 0$.

Подставим значение $x = 0$ в уравнение окружности - получим квадратное уравнение относительно y. Если оно имеет одно решение, то прямая $x = 0$ - касается окружности. Если это уравнение имеет два решения или не имеет решений, то $x = 0$ не является уравнением касательной.

Получаем: $(0 - 1)^2 + y^2 = 1$, $1 + y^2 = 1$ и $y = 0$ - единственное решение.

Вывод: прямая $x = 0$ - касательная.

Для любознательных

Запишите соотношения, которые описывают:

1) множество точек, равноудаленных от осей координат;
2) множество точек, равноудаленных от оси Oy на 2;
3) все точки плоскости, расположенные ближе к оси Oy, чем к оси Ox;
4) все точки извне квадрата, диагонали которого пересекаются в начале координат, а длина стороны равна 4.

2) Пусть искомая прямая не параллельна оси *Oy*, ее уравнение можно записать в виде $y = kx + l$. Учтем, что точка III(0; 5) принадлежит этой прямой: $5 = 0 + I$, т. е. уравнение искомой прямой $y = kx + 5$.

3) Прямая $y = kx + 5$ как касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку - точку касания. Тогда нужно найти такие значения $к$, при которых система уравнений

$$| y = kx + 5,$$

$$1(*-1)^2 + y^2 = 1$$

имеет единственное решение.

Подставив y из первого уравнения во второе, получим квадратное уравнение относительно x:

$$(1 + k^2)x^2 - 2(1 - bk)x + 25 = 0.$$

Его дискриминант приравняем к нулю:

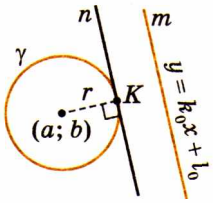
$$\frac{D}{4} = (1 - 5fe)^2 - 25(1 + fe^2) = 0,\ 1 - 10ft - 25 = 0,\ k = -2{,}4.$$

Вывод: прямая $y = -2, 4x + 5$ - касательная.

Ответ: $x = 0; y = -2{,}4x + 5$.

Касательная к окружности

$n \parallel m$



(n) ищем как $y = kx + l$, $k = k_0$:

$(x - a)^2 + (k_0x + l - b)^2 = r^2$

имеет одно решение относительно x:

D = o.

Пример 5. Запишите уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = x - 3$ и касается окружности $(x — I)^2 + y^2 = 1$.

Решение

1) Искомая прямая параллельна прямой $y = x - 3$, тогда ее уравнение $y = x + I$.

2) Точка касания $K(x_K; y_K)$ - единственная общая точка искомой прямой и заданной окружности. Тогда ее координаты - единственное решение системы

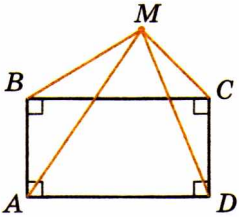
$$\begin{cases} Iy_K = x_K + \wedge \\ (x_K - I)^2 + y^2_K = 1 \end{cases}$$

3) Эта система имеет единственное решение, если равен нулю дискриминант уравнения $(x_K - I)^2 + (x_K + 1)^2 = 1$:

$$\frac{D}{4} = (1-1)^2 - 21^2 = 0,\ 1-1 = \pm y/21,\ 1 = -1 \pm y/2.$$

Имеем две касательные: $y = x-1 + 72$, $y = x-1-\wedge 2$.

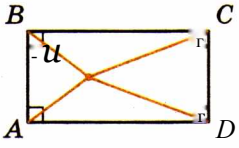
Ответ: $y = x-I + л/2$, $y = x-1-\backslash I2$.



⇓

$AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$

ii



Пример 6. Докажите самостоятельно, используя формулу расстояния между двумя точками координатной плоскости, такую теорему. При

Для любознательных

Запишите соотношения, описывающие такие множества точек:

1) часть плоскости между прямыми $y = 3xuy = x - 3$ (включая эти прямые);

2) всю полосу между прямыми $y = o$ и $y = 1$ (без этих прямых);

3) все внутренние точки квадрата с вершинами (o; o), (o; 1), (1; 1), (1; o) (включая точки на его сторонах).

этом подумайте, как удобнее расположить оси координат и будет ли зависеть ответ от их расположения.

III Теорема. Если $ABCD$ прямоугольник, то для произвольной точки M плоскости выполняется соотношение: $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

Задание 4

1. Определите взаимное расположение прямых (параллельны, совпадают или пересекаются). Если прямые пересекаются, найдите координаты точки их пересечения.

а) $x + 6y - 1 = 0$ и $x + 2y - 3 = 0$;
б) $3x + 6y - 1 = 0$ и $x - 2y - 1 = 0$;
в) $3x + 6y - 4 = 0$ и $9x + 18y - 3 = 0$;
г) $2x - y = 0$ и $4x = 2y$;
д) $x - 5 = 0$ и $4x - 20 = 0$;
е) $5x + 1 = 0$ и $4x - 3(y + 5 = 0$;
ж) $2x - 3y + 1 = 0$ и $x + y - 2 = 0$;
з) $y = 5x - 7$ и $y = 5x + 8$;
и) $y = 3x - 1$ и $y = 8x + 5$;
й) $y = 4x + 2$ и $y = 8x + 4$.

2**. Являются ли взаимно перпендикулярными прямые:

а) $y = 5x - 3$ и $y = 7 - 0{,}2x$;
б) $y = 4x + 1$ и $y = -4x + 1$;
в) $2x - 3y = 6$ и $3x + 2y = 1$;
г) $7x + 5y - 1 = 0$ и $5x - 7y + 4 = 0$;
д) $8x + 1y - 3 = 0$ и $Чу + 8x + 3 = 0$?

3*. При каком значении параметра m прямые будут параллельны:

а) $(m - 1)x + 3$ и $y = 3x - 7$; б) $mx - 3y = 5$ и $4x - (m + 1)y = 15$?

4**. Найдите значения параметра m, при которых прямые, заданные в условии предыдущей задачи, будут взаимно перпендикулярными.

5*. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку А параллельно заданной прямой: а) $y = 7x - 3$, А(-1; 4); б) $3x - y = 1$, А(1; 1); в) $3x + 2y = 6$, А(2; -3).

6**. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку B перпендикулярно заданной прямой:

а) $y = 8x - 3$, В(3; -1); б) $4x - y = 6$, В(-2; 6); в) $5x + 35y = 13$, Б(-4; -3).

7**. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку М(3; -4):

а) перпендикулярно прямой АВ, где А(2; 0), В(0; 2);
б) параллельно прямой СВ, где С(1; 1), D(5; 0).



Для любознательных

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ

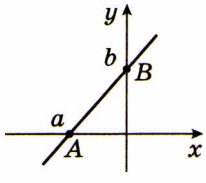
Теорема. Если прямая пересекает координатные оси в точках (a;0), **a ^ 0 и (0; *Ь*), *Ъ* * 0, то все точки этой прямой удовлетворяют уравнению** $\frac{x}{a} + \frac{y}{Ъ} = 1$,

которое называют *уравнением прямой в отрезках.*

Доказательство

Рассматриваемая прямая не параллельна оси Oy, ее уравнение можно представить в виде $y = kx + l$.

Координаты точек А(а; 0) и В(0; b) принадлежат этой прямой (см. рис.). Получаем систему уравнений



$$\begin{cases} 0 = ka + l, \\ b = k \cdot 0 + l; \end{cases} \quad \begin{cases} l = Ъ, \\ k = -\frac{Ъ}{a}. \end{cases}$$

Тогда уравнение заданной прямой имеет вид $y = -\frac{b}{a}x + Ъ$, т. е. $ay + Ъx = ab$.

Если разделить последнее уравнение на произведение $aЪ$, получим искомое соотношение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

8*. Найдите уравнения прямых, проходящих через точку пересечения заданных прямых 2x-7i/=1иг/ = x + 3 параллельно осям координат.

9**. Составьте уравнения прямых, на которых лежат высоты треугольника *ABC,* если A(4; 5), *B(*0; 0) и *C(*-6; 1).

10**. Найдите расстояние от точки *M(*4; -2) до прямой 3x - *4y* = 5.

11**. Найдите расстояние между параллельными прямыми 3x + 4г/ - 8 = 0 и 3x + 4г/ + 12 = 0.

12**. Запишите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку прямой 4x - *5y* = 20, заключенному между осями координат.

13**. Найдите координаты точки, симметричной точке A(-2; -2) относительно прямой *x* + *y* - 3 = 0.

14**, Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника *ABC,* если A(—1; -3), 5(1; 3)иC(0; 6).

15*. Даны точки M(-7; 3), *N(*5; 2), *P(*3; -3), *K(*-2; -4). Докажите, что четырехугольник с вершинами в серединах сторон четырехугольника *MNPK* - параллелограмм.

16*. Докажите, что четырехугольник *ABCD,* где A(-2; 10), 5(1; 3), C(-2; -4), 5(-5; 3), - ромб.

17**. Является ли треугольник с вершинами в точках M(4; -5), *N(7;* 6), *P(-7;* -2) прямоугольным?

18*. В каких точках прямая x - 2г/ - 4 = 0 пересекает окружность $x^2 + y^2$ - 14x - *10y* = 11 ?

19*. Две прямые пересекают окружность $x^2 + y^2 = 25$ в точках с ординатой 3 и с ординатой -4 соответственно. Запишите уравнения этих прямых.

20*. Уравнение окружности $(x - I)^2 + (y + 3)^2 = 36$. Найдите длины хорд, которые лежат на координатных осях.

21*. Запишите уравнение окружности с центром в начале координат, касающейся прямой *y* = x - 3.

22**. Найдите координаты центров окружностей, вписанной в треугольник *ABC* и описанной вокруг этого треугольника, если:
а)A(0; 0), 5(4; 0), *C(*0; 3); б)A(1; 2), 5(5; 2), C(1; 5).

23**. Две вершины треугольника *ABC* расположены в точках A(0; -2) и 5(2; 0), а третья C(x; *y)* лежит на прямой *y* = -*x*. Площадь треугольника *ABC* равна 8. Найдите значение x и *y,* если x < 0.

24**. Сколько общих точек имеют прямая *y* = ~*x* и окружность $(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 1$ в зависимости от параметра o?



Для любознательных

1. Найдите длины отрезков, которые отсекает на координатных осях прямая $\frac{X}{a} + \frac{I/}{b} = 1$ (вместе с началом координат). Как вы думаете, почему указанное соотношение называют уравнением прямой в отрезках?

2. Перечислите все случаи, когда уравнение прямой нельзя записать в виде уравнения прямой в отрезках.

3. Воспользуйтесь уравнением прямой в виде, предложенном на стр. 28, и запишите его для прямой, проходящей через точки *(a;* o) и (o; *Ь);* преобразуйте его к виду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

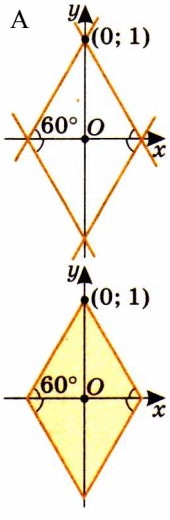
4. Почему уравнение, приведенное на стр. 29, также называют уравнением прямой в отрезках?

5. Воспользовавшись записью уравнения прямой в отрезках, решите такие задачи.

1) Запишите уравнение каждой прямой, изображенной на рисунке А.

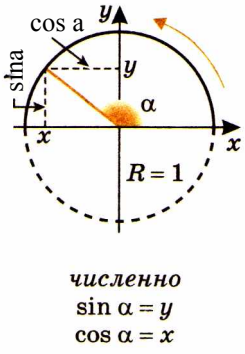
2) Запишите соотношения, которым удовлетворяют все точки окрашенной фигуры на рисунке Б.

А



§ 4 о Тригонометрические функции углов от 0° до 180°

До сих пор тригонометрические функции синуса, косинуса, тангенса и котангенса были определены только для углов от 0° до 90°. Расширим эти понятия.



На координатной плоскости с центром в начале координат *0(0;* 0) построим в I и II координатных четвертях полуокружность единичного радиуса. Обозначим через a угол между радиусом *OB* этой полуокружности и положительным направлением оси абсцисс (рис. 1.26).

Если угол a острый, то из прямоугольного треугольника *OCB* (рис. 1.26-а) получим:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{R},\ \cos a = \frac{OC}{R}.$$

Такие соотношения мы знаем с 8-го класса.

ПРИ *R=1* ЧИСЛЕННО:

sin a = *BC* = *y,* cos a = *OC* = *x,*

где *B(x; y).*

Подчеркнем, что последние равенства выполняются только численно.

Таким образом, если угол *BOC* острый, то значение синуса этого угла численно равно ординате точки *B(x; y),* а косинуса - его абсциссе:

sin a = *y,* cos a = *x.*

Рис. 1.26



Для любознательных

Термин *синус* латинского происхождения и означает «залив». Какая связь между заливом и синусом?

Дугу окружности можно уподобить изогнутому луку, а хорду, ее стягивающую, - тетиве этого лука. Индийский математик - составитель таблиц синусов - назвал полухорду тетивой.

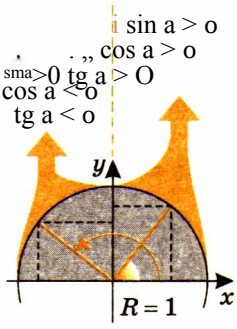
Один из арабских математиков, переводя индийский текст на арабский язык, перевел его правильно: полухорду назвал тетивой. Но арабский язык имеет такую особенность, что в нем выписываются согласные буквы, а гласные пропускаются. О том, какие именно гласные стоят в слове, пришлось определять из контекста. Слово «залив» на арабском имеет такие же согласные, как и слово «тетива». Переводчик, который позже переводил арабский текст на латинский язык, умудрился прочитать его как «залив», что на латинском звучит как «синус».

Аналогично будем определять синус и косинус для тупого угла (рис. 1.26-6), прямого, развернутого углов и угла, мера которого равна нулю (рис. 1.26-в).

Рассматривается конец радиуса единичной полуокружности с центром в начале координат (тот, что лежит на полуокружности); соответствующий угол откладывается от оси Ox против часовой стрелки.

Для произвольного угла меры от 0° до 180°:

- *синус угла - ордината (численно) конца радиуса единичной полуокружности, соответствующего этому углу',*
- *косинус угла - абсцисса (численно) конца радиуса единичной полуокружности, соответствующего этому углу.*



Координаты (x; *y)* точек единичной полуокружности изменяются в пределах: o < г/ < 1, -1<лс<1.

Поэтому для произвольного угла a из промежутка o° < a < 180° выполняются неравенства

o < sin a < 1, -1 < cos a < 1.

При этом:

- **для острого угла** a: sin a = *y* > o и cos a = *x* > o;
- **для тупого угла** a: sin a = z/ > o и cos a = *x* < o.

Найдем значение синуса и косинуса углов меры 0°, 90° и 180°. Для этого рассмотрим лучи *OA, OK* и *OM,* соответствующие этим углам (рис. 1.26-в). Учитывая, что *A(1;* 0), *K(0;* 1) и M(-1; 0), получаем:

sin 0° = 0, cos 0° = 1;
sin 90° = 1, cos 90° = 0;
sin 180° = 0, cos 180° = -1.

a	o°	90°	180°
sin a	o	1	o
cos a	1	o	-1
tga	o	—	o
ctga	—	o	—

Тангенсом угла a будем называть отношение **sina к cos a,** *а котангенсом угла* **a** *- отношение* **cos a к sin a.** Как известно, на нуль делить нельзя. Тогда это определение нужно дополнить условием, что число, на которое делят, не равно нулю. Тогда:

$$\text{tga} = \frac{\text{sina}}{\text{cosa}}, \text{ при a} \neq 90^\circ;$$

$$\text{ctga} = \frac{\cos a}{\text{sina}}, \text{ при a} \neq 0^\circ \text{ и a} \neq 180^\circ.$$

tga = sina/cosa, при a * 90°

ctga = cosa/sina, при a * o°, a Ф 180°

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла, которые мы изучали в 8-м классе для острых углов, будут правильными и для углов a с интервала 0° < a < 180°. Докажем это.

Для любознательных

Найдите геометрическое место точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и *B* равна заданной величине *c.* При каких значениях с задача не имеет решения?

Полуокружность, которую мы рассматривали, является дугой единичной окружности, уравнение которой имеет вид $x^2 + y^2 = 1$. Если подставить в это уравнение значения $y = \sin a$ и $x = \cos a$, то получим известное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1,$$

которое будет правильным для произвольных значений меры угла a из промежутка $0° < a < 180°$.

Правильными будут и другие, уже известные вам формулы:

$\operatorname{tg}^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, при $\alpha \neq 90°$	$\operatorname{ctg}^2 a + 1 = \frac{1}{\sin^2 a}$, при a g {0°; 180°}	$\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} a = 1$, при a g {0°; 90°; 180°}

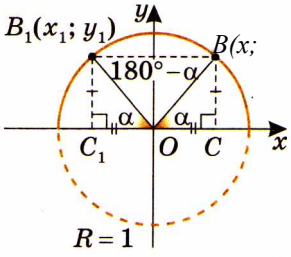


Рис. 1.27

Найдем соотношения между тригонометрическими функциями смежных углов, т. е. углов 180° - a и a.

Рассмотрим $AOCB$ и AOC_1B_1 (рис. 1.27). Они равны по гипотенузе и острому углу, тогда $y_x = y$, а $Xj = -x$. Таким образом,

$\sin (180° - a) = \sin a$,

$\cos (180° - a) = -\cos a$,

$\operatorname{tg} (180° - a) = -\operatorname{tg} a$ (при $a \neq 90°$),

$\operatorname{ctg} (180° - a) = -\operatorname{ctg} a$ (при $a \neq 0°$ и $a \neq 180°$).

Воспользовавшись полученным соотношением между тангенсами смежных углов, утверждение о значении углового коэффициента прямой (стр. 26) можно сформулировать так.

Угловой коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + l$ равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси абсцисс.



Для любознательных

1. Пусть у нас есть истинные утверждения: «Среди людей, имеющих телевизоры, есть не маляры»; «Люди, плавающие ежедневно в бассейне и не являющиеся малярами, не имеют телевизоров». Будут ли правильными тогда утверждения: а) «Не все те, кто имеет телевизор, ежедневно плавают в бассейне»; б) «Не все те, кто не имеет телевизора, ежедневно плавают в бассейне»?
2. В одной комнате три выключателя, а в другой - три лампочки. Каждый выключатель предназначен для одной лампочки. Как определить, какому из выключателей соответствует каждая лампочка, если в комнату с ними можно зайти только один раз?
3. Переключатель имеет 6 положений, при которых светится разное количество лампочек - от 0 до 5. Несколько лампочек перегорели. Может ли человек, не знакомый с работой этого выключателя, определить, какие лампочки перегорели? Как?

Замечание.

- При увеличении меры угла от 0° до 90° синус угла возрастает от 0 до 1, а косинус угла убывает от 1 до 0.
- При увеличении меры угла от 90° до 180° синус угла убывает от 1 до 0 (рис. 1.28-а), а косинус угла убывает от 0 до -1 (рис. 1.28-б).

Если $\alpha \in [90°; 180°]$:

sin α, $0 < \sin\alpha < 1$

cos α, $-1 < \cos\alpha < 0$

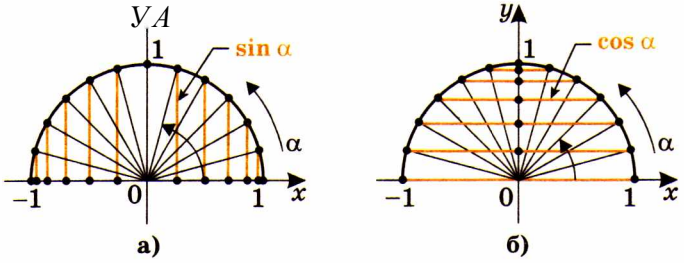


Рис. 1.28

Практическая работа 2

1. На развернутом двойном листе бумаги начертите декартову систему координат (за единицу возьмите 10 см). В I и II четвертях постройте полуокружность единичного радиуса с центром в начале координат. При помощи транспортира отметьте на полуокружности точки, которые делят ее на 12 равных частей. Подпишите, каким углам соответствуют эти точки.
2. Используя линейку, определите координаты каждой из отмеченных точек. Запишите значения тригонометрических функций углов, соответствующих этим точкам. Заполните таблицу.

	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
sin x													
cos x													
t gx													
ctg x													

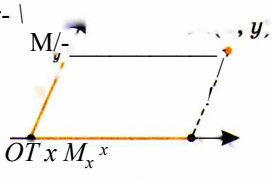
3. Увеличивается или уменьшается значение рассматриваемых тригонометрических функций при возрастании угла: **а)** от 0° до 90°; **б)** от 90° до 180°?

Для любознательных

Наряду с декартовой прямоугольной системой координат используют и другие системы координат на плоскости. На рисунке вы видите *декартову косоугольную систему координат.* Как определяют координаты точек в такой системе, понятно из рисунка.

Иногда удобно задавать на осях координат разные единицы масштаба (см., например, прило- ju *Mix-* \ жение 2).

Существуют системы координат, существенно > отличающиеся от декартовых. Примером является *У* полярная система координат, с которой вы сможете ознакомиться в § 20.



4. Пользуясь этой таблицей, найдите приближенные значения:
а) sin 165° + cos 120°; **в)** sin 75° cos 135°;
б) 2cos 105° - sin 120°; г) tg 150° : sin 135°.

Задание 5

1°. Известно, что 90° < a < 180°. Какой знак имеют значения cos *a,* sin oc, tg a, ctg a?

2°. Острым или тупым является угол Р треугольника, если значение его: а) косинуса отрицательное; б) тангенса отрицательное; **в)** котангенса положительное; г) косинуса положительное?

3°. Упростите выражение: а) sin (180° - x); б.) cos (180° - x); **в)** tg (180° - x).

4°. Упростите выражение: а) sin (90° - Р); б) cos (90° - Р); **в)** tg (90° - Р).

5. Упростите выражение:
а) 2sin (90° - a) - cos (180° - a);
б) cos (90° - a) + sin (180° - a);
в) tg(90° - Р) + 3ctg (180° - Р);
г) ctg(90° — (3) — tg (180° - Р).

6. Упростите выражение:
а) 2sin (90° - Р) - sin a + cos (180° - Р) + cos (90° - a);
б) cos (90° - a) + cos (180° - a) + sin a - sin (90° - a);
в) tg (90° - p) + 3ctg (90° - a) + 2 (tg a + tg p).

7. Упростите выражение: а) 1 - $\cos^2$ (90° - a); б) 1 - ($\cos^2$ (180° - a) + $\cos^2$ (90° - a)).

8*. Упростите выражение:

а) $\frac{1-2\sin^2(180°-p)}{1-2\sin^2(90°-P)}$.

б) $\frac{\sin^2(90°-P)}{1-\cos(90°-P)} \cdot \frac{\sin^2 p(1-\sin^2(180°-p))}{\sin^2(90°-P)(1-\cos^2(180°-P))}$.

г, $(1 + \text{eg},90° - m * (1 + \text{«}180° - m$ д) $\frac{\text{cte}^2 90° \quad \beta)(\text{ctg}^2(180° \quad \text{и+в}}{\text{tg}^2 P + 1}$.

9. Используя формулы перехода между значениями тригонометрических функций смежных углов, вычислите значение выражений:

а) cos 120°; б) sin 135°; В)tgl50°; Г) cos 135°; Д) ctg 150°.

10. Найдите значение выражения:

а) 2 cos 60° + N/3COS 150°; г) 3 cos 60° tg 45° tg 60°;

б) 5 sin 30° + ctg 135°; д) tg 150° sin 60° cos 40° - ctg 120° cos 150° cos 140°.

в) (cos 60° + sin 150°)(sin 30° - cos 150°);

11*. Найдите значение выражения:

а) 2 tg^2 120° + 4 $\cos^2$150°; г) tg^3 60° sin 120° - ctg^2 60° sin 150°;

б) 3 $\cos^2$150° + 5 $\sin^2$ 135°-tg^3 135°; д) sin 157° cos 67° + cos 23° sin 113°.

в) 3 $\cos^2$ 60° tg 135° tg^2 120°;



Для любознательных

1. Среди всевозможных прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой найдите треугольник с наибольшей биссектрисой прямого угла.

2. Среди всевозможных прямоугольных треугольников с заданной биссектрисой прямого угла найдите треугольник с наименьшей гипотенузой.

3. Через точку М, принадлежащую биссектрисе прямого угла, проведите прямую так, чтобы отрезок этой прямой ограниченный сторонами угла, был наименьшей длины.

4. Канал шириной 6 м имеет прямоугольный поворот, а) Какой наибольшей длины бревно можно сплавить этим каналом (толщиной бревна пренебрегаем)? б) Какой наибольшей длины бревно можно сплавить этим каналом, если диаметр такого бревна 40 см? в) Какой наибольшей ширины плот длиной 5 м может пройти этим каналом?

5. Коридор общежития, шириной 2 м и высотой 3 м, имеет прямоугольный поворот, а) Какой наибольшей длины доску можно пронести этим коридором, если ее толщина 4 см? Вопросы б) и в) (аналогичные к заданию 4) сформулируйте самостоятельно и ответьте на них.

12*. Известно, что 0° < a < 180°. Найдите значения sin a, tg a, ctg a, если:

а)cos a = -0,3; **б)** cos a = -0,2; e)cosa=—; rtcosa = -—.

13*. Известно, что 0° < P < 180°. Найдите значения sin (3, cos p, ctg p, если:

а) tg p = -1; **б)** tg p = -1,5; e)tgp = 3.

14. Найдите значение tg a, если sin a = 0,3.

15. Найдите значения cos a, tg a, ctg a, если: а) a - острый угол и sin a = 0,2;

б) a - тупой угол и sin a = 0,4; **в)** a - тупой угол и sina = —.

16*. Постройте угол, косинус которого равен: **а)** -1; **б)** —.

17*. Постройте угол, тангенс которого равен: **а) -1; б) -3.**

18*. Сравните тупые углы ы и р, если:

а) sin a < sin p; **б)** cos a > cos P; **в)** tg a > tg P; г) ctg a < ctg p.

19*. Сравните:

а) sin 130° и sin 150°; в)tg100° и tg 130°; д) sin 120° и sin 50°.

б) cos 100° и cos 140°; г) ctg 50° и tg 100°;

20**. Для острого угла a найдите соотношения между тригонометрическими функциями углов 90° + a и a, воспользовавшись тождеством 90° + a = 180° - (90° - a).

21*. Найдите сумму квадратов косинусов углов прямоугольного треугольника.

22*. Найдите сумму квадратов синусов углов прямоугольного треугольника.

23**. Упростите выражение (угол a - острый):

а) sin (90° + a) - cos a sin² a;

б) ctg² (180° - a) - cos² a ctg² a;

в) cos² (90° - a) + ctg² a cos² (90° + a);

г) (1 + cos (90° + a))(l + sin a);

д) (tg² a + 1) cos² (180° - a).

24**. Упростите выражение (угол a - острый):

а) $\frac{\sin(180°-a)\,\mathrm{tg}(a+90°)}{\cos(90°-a)\mathrm{tg}(a-90°)}$.

б) $\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 58°}+\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 32°}$

25**. Упростите выражение (угол a - острый):

а) $\frac{\mathrm{ctg}(90°-a)+\mathrm{ctg}(90°-P)+\mathrm{ctg}(90°-y)}{3(\mathrm{tgp}-\mathrm{tg}(180°-a))-2(\mathrm{ctg}(90°-a)+\mathrm{ctg}(90°-P))-\mathrm{ctg}(180°-y)}$;

б) $\frac{\mathrm{ctg}(90°-a)(\mathrm{tgP}+\mathrm{ctg}(90°-y))+\mathrm{ctg}(90°-P)\mathrm{tgy}}{\mathrm{tg}(180°-a)\mathrm{tg}(180°-P)+\mathrm{tgptgy}+\mathrm{tg}(180°-a)\mathrm{tg}(180°-y)}$.

26**. Найдите значение выражения, если tg a = 7:

а) $\frac{3\sin a+\cos a}{\cos a-3\sin a}$; б) $\frac{\sin^2 a}{1+\cos a}$.



Для любознательных

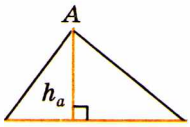
1. Из пункта, расположенного на берегу реки, отплывает к противоположному ее берегу катер со скоростью 40 км/ч. Скорость течения 5 км/ч. Под каким углом к берегу надо направить катер, чтобы причалить в ближайшей точке противоположного берега?

2. Под каким углом к берегу надо направить лодку, чтобы во время переправы через речку ее снесло течением как можно меньше? Скорость течения 6 км/ч, а лодки (относительно воды) - 3 км/ч.

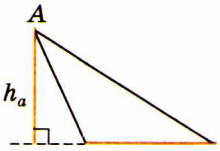
3. В остроугольном треугольнике высоту, медиану и биссектрису, проведенные из одной вершины, продлили до пересечения с описанной вокруг треугольника окружностью. Какая из полученных хорд будет наибольшей, а какая наименьшей?

4. Через данную точку M, расположенную вне заданной окружности, проведите секущую так, чтобы сумма расстояний от точек ее пересечения с окружностью до точки *M* была: **а)** наибольшей; б) наименьшей.

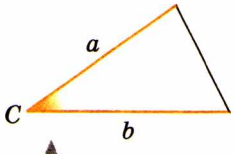
§ 5. Теорема синусов



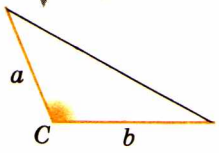
$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$



)



$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab \sin C$$



Теорема. Площадь треугольника равна полупроизведению двух его сторон на синус угла между ними.

Нужно доказать, что для всех возможных случаев - когда угол С треугольника АВС острый (рис. 1.29-а), тупой (рис. 1.29-б) или прямой (рис. 1.29-в) - площадь треугольника АБС можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2} \text{afesinC}.$$

Доказательство

I Площадь любого треугольника *ABC* можно вычис-

® лить по формуле $S = \frac{1}{2} ah_a$, где h_a - высота треугольника, проведенная к стороне *a* (рис. 1.29).

Из прямоугольного треугольника *ACD* получаем:

$h_a =$ fosin C, если угол С - острый (рис. 1.29-а);

$h_a =$ Ъsin (180° - С) = *b*sin С, если угол С - тупой (рис. 1.29-б).

Тогда $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ и утверждение теоремы выполняется.

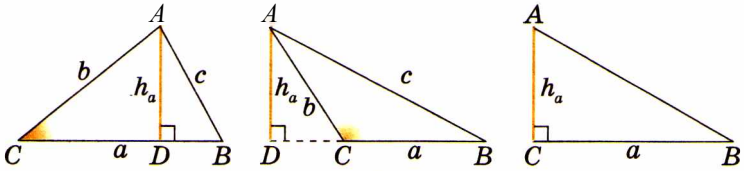


Рис. 1.29

Если угол С - прямой (рис. 1.29-в), то

$$\sin C = \sin 90° = 1$$

и площадь прямоугольного треугольника можно записать в виде:

$$S = \frac{1}{2} ab = S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Теорема доказана.

Теорема синусов. В треугольнике отношение длины стороны к синусу противолежащего угла - величина постоянная.

В треугольнике *ABC* против углов А, Б и С лежат стороны *а, Ь* и с. Надо доказать, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{Ь}{\sin Б} = \frac{c}{\sin C}.$$

Докажем эту теорему двумя способами.

СПОСОБ I

По теореме о площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}at\sin C,\ S = \frac{1}{2}ac\sin B,\ S = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

Из первых двух равенств получаем:

$$\frac{1}{2}a\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B \text{ и } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Из последних двух равенств получаем:

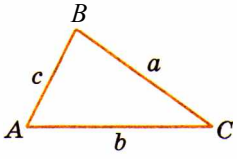
$$\frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A \text{ и } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Тогда:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Теорема доказана.

Теорема синусов



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

СПОСОБ II

Опишем вокруг треугольника ABC окружность и проведем диаметр $CD = 2R$ (рис. 1.30-1.32). Угол DBC - прямой, т. к. опирается на диаметр.

1) Если угол A - острый (рис. 1.30), он опирается на ту же дугу, что и угол CDB. Тогда $\angle CDB = \angle A$ и из прямоугольного треугольника CBD ($\angle B = 90°$) следует:

$$a = CD \cdot \sin D = 2R \cdot \sin A,\ \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

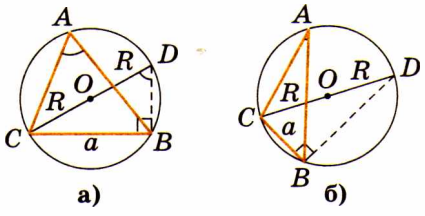


Рис. 1.30

2) Если угол A - тупой (рис. 1.31), то $\angle A + \angle CDB = 180°$ (т. к. четырехугольник $ABDC$ - вписанный)

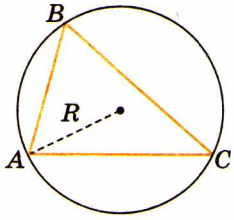
Для любознательных

Во времена Паскаля (XVI в.) математику обычно называли геометрией. Как-то 12-летний *Блез Паскаль* (1623-1662) спросил у отца, Этьена Паскаля, что такое «геометрия». Тот, не придавая своим словам особого значения, ответил, что это некая теория, изучающая способы черчения фигур и указывающая на соотношения между их элементами. Спустя некоторое время отец увидел, что сын сосредоточенно размышляет над сложенными из палочек треугольниками. Оказалось, что Блез как раз додумывал доказательство открытого им интересного факта: в любом треугольнике сумма всех трех углов вместе составляет два прямых угла. Тогда Этьен открыл шкаф с книгами и дал Блезу «Начала» Евклида. За год Блез изучил ее (как увлекательный роман), и вскоре его допустили на заседания научного парижского кружка, на основе которого позже была создана Парижская академия наук.

и $ZCDB = 180° - ZA$. Из треугольника CBD ($ZB = 90°$) следует:

$$a = 2R \sin(180° - A) = 2R \sin A, \quad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Расширенная теорема синусов



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3) Если угол A - прямой (рис. 1.32), то:

$$a = 2R, \sin A = \sin 90° = 1 \text{ и } \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

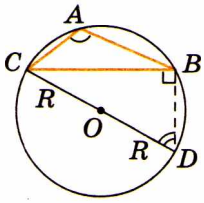


Рис. 1.31

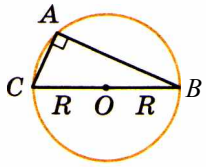


Рис. 1.32

Таким образом, для произвольного треугольника ABC

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Тогда:

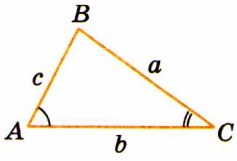
$$\frac{a}{\sin A} = 2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Теорема доказана.

Полученное выше соотношение, записанное в виде

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

еще называют *расширенной теоремой синусов.*



$ZA > ZC$

O

$a > c$

Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол и наоборот.

Следствие. Площадь треугольника ABC, вписанного в окружность радиуса R, равна: $S = \frac{abc}{4R}$.

Следует из формул: $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ и $\frac{c}{\sin C} = 2R$.



Используя теорему синусов, можно доказать утверждение, известное вам с 7-го класса, - против большей стороны лежит больший угол и наоборот. Предлагаем сделать это самостоятельно. (Не забудьте рассмотреть случай тупоугольного треугольника.)



Для любознательных

Шахматную доску закрыли 32 пластинками домино, каждая из которых закрывает ровно 2 клеточки. 8 пластинок закрывают 8 клеточек одной диагонали доски, при этом некоторые из них закрывают еще одну клеточку выше диагонали, а некоторые - ниже диагонали. Докажите, что в любом случае пластинок первого и второго указанных видов будет поровну.

Практическая работа 3

1. Начертите произвольный треугольник. Измерьте длины его сторон.
2. Измерьте градусные меры углов треугольника. Найдите, используя таблицы Брадиса или калькулятор, значения синусов этих углов.
3. Вычислите площадь треугольника через длины двух его сторон и синус угла между ними.
4. Проведите одну из высот треугольника. Измерьте ее длину. Вычислите площадь треугольника через длину этой высоты и сравните с полученным ранее значением площади.
5. Вычислите отношения длин сторон треугольника к значениям синусов противолежащих углов. Сформулируйте вывод.

Задание 6

1°. Найдите площадь треугольника* если две его стороны и угол между ними равны: **а)** >/8 см, 4 см и 45°; б) *у/8* см, 4 см и 135°; **в)** 6 см, 4 см и 150°; г) 6 см, 4 см и 30°.

2. По рисунку 1.33 найдите площади треугольников.

3°. Две стороны треугольника равны 8 см и 4>/2 см. Найдите угол между ними, если площадь треугольника составляет: а) 16 см^2; б) 8%/2 см^2.

4°. Площадь треугольника ABC равна 16 см^2, сторона AB = 8 см, $ZABC$ = 150°. Найдите сторону BC.

5. Найдите площадь треугольника по двум углам а и Р и радиусу R описанной вокруг него окружности.

6°. Найдите сторону треугольника, лежащую против его угла в 45°, если против второго угла этого треугольника градусной меры 60° расположена сторона длиной: **а) 3** см; б) **2л/з** см; **в)7б** см.

7°. Дан треугольник ABC, у которого AC = *42*, BC = 1, /ABC = 45°. Найдите угол BAC.

8е Дан треугольник ABC, у которого AC = \I2, BC = 1. Найдите угол ABC, если: **а)** /BAC = 45°; б) /BAC = 30°.

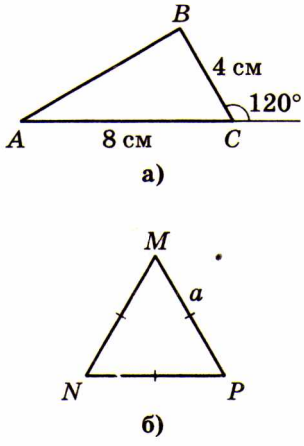


Рис. 1.33

9. Сумма двух сторон треугольника равна 18 см. Найдите длины этих сторон, если против них лежат углы: **а)** 60° и 45°; б) 30° и 135°; **в)** а и р.
10. Разность двух сторон треугольника равна *t*. Найдите длины этих сторон, если против них лежат углы: **а)** 60° и 45°; б) 30° и 90°; **в)** а и р.
11. Сторона треугольника равна *Ъ*, а прилежащие к ней углы равны а и р. Найдите периметр треугольника.
12. Найдите стороны треугольника, периметр которого равен *Р*, а два угла - а и р.
13°. Найдите радиус описанной вокруг треугольника окружности, если известно, что в нем против стороны 2 см лежит угол: **а)** 30°; б) 135°; в) 90°.
14°. Радиус описанной вокруг треугольника окружности равен $\sqrt{8}$ дм. Найдите длину стороны, которая лежит против угла меры: **а)** 45°; б) 150°; **в)** 135°.
15. Найдите радиус окружности, если в ней хорда длиной 12 см стягивает дугу градусной меры: **а)** 60°; б) 90°; **в)** 180°.
16. Радиус описанной вокруг трапеции окружности равен $\sqrt{8}$ дм. Найдите длину ее диагонали, если один из углов трапеции равен: а) 45°; б) 150°; в) 135°.
17. В окружность вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций равны.
18* Боковая сторона вписанной трапеции равна *а*, средняя линия — *Ъ*, а один из углов - 30°. Найдите радиус описанной окружности.

19*. Одна из боковых сторон трапеции образует с большим основанием угол а, а вторая боковая сторона, длиной *а,* образует с меньшим основанием угол (3. Найдите среднюю линию трапеции, если длина ее меньшего основания *Ь.*

20*. В правильный треугольник АВС вписали правильный треугольник *ТРН* так, что на сторонах АВ, *ВС* и АС лежат соответственно точки *Т, Р* и *Н.* Найдите отношение сторон этих треугольников, если *ZCHP* = (3.

21*. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 дм и 4 дм. Найдите радиус окружности, проведенной через вершины острых углов этого треугольника и середину большего из его катетов.

22*. В треугольнике АВС: ZA = а, ZC = у, АВ = с, AD - биссектриса. Найдите *BD.*

23*. Сторона треугольника равна *Ь,* а прилежащие к ней углы равны аир. Найдите биссектрису третьего угла.

24*. Острые углы треугольника равны аир. Биссектриса, проведенная из вершины третьего угла, равна *I.* Найдите периметр треугольника.

25*. Острые углы треугольника равны аир. Биссектриса, проведенная из вершины третьего угла, равна *I.* Найдите биссектрисы заданных углов.

26*. В треугольнике АВС длина медианы *ВМ* равна *т.* Найдите длину стороны *АВ,* если *ZABM* = а, *ZCBM* = р.

27**. В треугольнике *АВС: ВМ* - медиана, *ZABM = а, ZCBM* = р. Найдите *ВМ,* если известно, что *ВС = а.*

28*. Основания равнобокой трапеции равны 8 см и 16 см, боковая сторона - 5 см. Найдите радиус описанной вокруг этой трапеции окружности.

29**. Внутри острого угла отметили точку А и провели из нее перпендикуляры к сторонам угла. Расстояние между основаниями этих перпендикуляров равно 12 см. Найдите расстояние от точки А до вершины угла, если градусная мера угла: а) 30°; б) а.

30**. Внутри острого угла отметили точку А и провели из нее перпендикуляры к сторонам угла. Расстояние между основаниями этих перпендикуляров равно л/8 дм, а расстояние от А до вершины угла - 4 дм. Найдите градусную меру угла.

31**. Постройте треугольник по углу и радиусам описанной и вписанной окружностей.

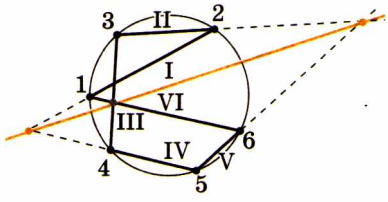
32**. Дан отрезок *АВ* и его точка С, которая не является серединой АВ. Найдите геометрическое место точек пересечения двух окружностей равных радиусов, проходящих: одна через точки А и С, вторая - через точки В и С.



Для любознательных

Блезу Паскалю не исполнилось еще и 17 лет, когда он открыл теорему, известную сегодня как *теорема Паскаля.* Об его открытии математики того времени узнали из афиш, напечатанных в количестве 50 экземпляров и расклеенных на стенах домов и церквей Парижа (в то время еще не было научных журналов).

Теорема Паскаля. Обозначим на окружности произвольным образом шесть точек и пронумеруем их в произвольном порядке: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (не обязательно в последовательности их расположения на окружности). Соединим эти точки отрезками I, И, III, IV, V согласно последовательности нумерации точек (см. рис.). Последним отрезком под номером VI соединим шестую точку с первой. Три точки пересечения прямых, на которых лежат полученные отрезки, взятые через два номера (I с IV, II с V, III с VI), будут лежать на одной прямой. (Далее см. стр. 53.)



§ 6. Теорема косинусов

Теорема косинусов. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

Докажем для произвольного треугольника ABC, что

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Доказательство

Введем систему координат с уд началом в точке C так, как показано на рисунках 1.34.

Тогда координаты точек A и B равны:

$A(b\cos C;\ b\sin C)$ и $B(a;\ 0)$.

Запишем квадрат расстояния между точками A и B:

$AB^2 = (b\cos C - a)^2 + (b\sin C - 0)^2 =$

$= b^2\cos^2 C - 2abcos\ C + a^2 + b^2\sin^2 C.$

Сгруппируем в этом выражении первое слагаемое с последним и учтем, что $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$:

$c^2 = b^2(\cos^2 a + \sin^2 a) + a^2 -$

$- 2abcos\ C = b^2 + a^2 - 2abcos\ C.$

Теорема доказана.



Следствие 1. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

$ABCD$ - параллелограмм с длинами сторон a, b и острым углом a (рис. 1.35). Его тупой угол равен 180° - a.

Из треугольников ABD и ABC по теореме косинусов получаем:

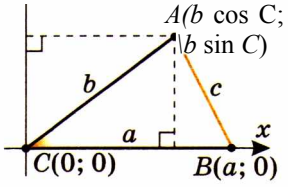
$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos a;$

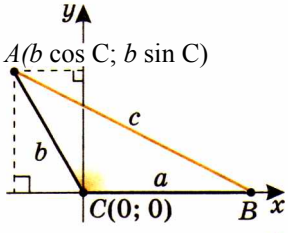
$AC^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\ (180° - a) =$

$= a^2 + b^2 - 2abcos\ (-\cos a).$

Сложив эти равенства, получим искомое соотношение:

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2.$$





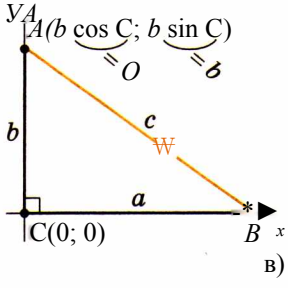


Рис. 1.34

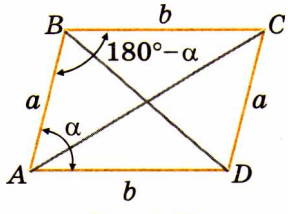
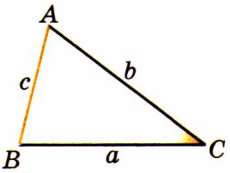
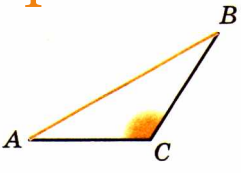


Рис. 1.35

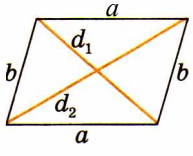
Теорема косинусов



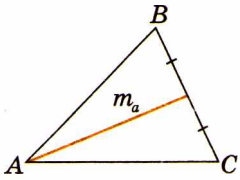
$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\ C$



Для параллелограмма:



$d_1^2 + d_2^2 = 2\ (a^2 + b^2)$



$$m_a = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4};$$

$$m_b = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4};$$

$$m_c = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Следствие 2. Квадрат медианы, проведенной к стороне треугольника равен полусумме квадратов двух других его сторон минус четверть квадрата стороны, к которой проводили медиану.

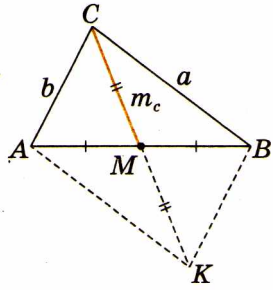


Рис. 1.36

Т. е. для медианы m_c треугольника ABC (рис. 1.36)

$$m_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}.$$

Доказательство

Продолжим медиану m_c на отрезок $MK = m_c$.

Полученный четырехугольник $ACBK$ - параллелограмм (т. к. $CM = MK$, $AM = MB$). Тогда, согласно следствию 1:

$$c^2 + (2m_f)^2 = 2(a^2 + b^2), \qquad m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Замечание. *Теорему косинусов иногда называют обобщенной теоремой Пифагора.* Действительно, если угол C прямой, то $\cos C = \cos 90° = 0$, и для гипотенузы c прямоугольного треугольника ABC, из теоремы косинусов, получаем: $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C = b^2 + a^2$ - утверждение теоремы Пифагора.

Для любознательных

Теоремы синусов и косинусов в задачах на доказательство

Традиционно обозначим в треугольнике ABC: через a, b, c - стороны, лежащие против вершин A, B, C, а медианы и высоты, проведенные к сторонам a, b, c, как m_a, m_b, m_c и h_a, h_b, h_c соответственно; R и r - радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника; S - его площадь.

1. **Опорная задача.** Докажите для треугольника ABC: $S = \frac{abc}{4R}$, $n_a = \frac{b}{2R}$

2. Точка D лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC. Докажите, что радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ABD и CBD, равны.

3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AP и CM. Точки P, и M_1 - симметричны точкам P и M относительно середин сторон BC и AB соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через вершину B и центр O окружности, описанной вокруг данного треугольника, делит отрезок P[M, пополам.

4. **Опорная задача. Докажите, что:** $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

5. Докажите, что $S = (a^2-(b-c)^2) \frac{\sin A}{1-\cos A}$.

6. Длины сторон параллелограмма равны a и b, длины диагоналей m и n. Докажите, что $a^4 + b^4 = m^2n^2$ тогда и только тогда, когда острый угол параллелограмма равен 45°.

Практическая работа 4

1. Начертите произвольный треугольник и измерьте длины его сторон.
2. Измерьте градусные меры углов треугольника. Найдите с помощью таблиц Брадиса или калькулятора значения косинусов этих углов.
3. С помощью соответствующих вычислений убедитесь, что для вашего треугольника выполняется теорема косинусов.

Задание 7

1°. Найдите неизвестную сторону треугольника АВС, если:

а) ZC = 60°, *AC* = 25 дм, *CB* = 40 дм; в) */B* = 60°, ВС = 6 см, *AC* = 2л/7 см;

б) ZC = 120°, *AC* = 3,5 м, *CB* = 4 м; г) ZB = 135°, ВС = 4 см, *AC* = *y/lO* см.

2°. Найдите длину диагонали *BD* четырехугольника *ABCD,* у которого ZC = 60°, ВС = 50 мм, *CD* = 35 мм.

3. Железный стержень длиной 5 дм согнули посередине под углом 120°. Вычислите расстояние между его концами (с точностью до о,1 см).

4*. Найдите равнодействующую двух сил в 3Н и 2Н, приложенных в одной точке под уголом 135°.

5. В параллелограмме *ABCD* стороны *AB* и *BC* равны 20 см и 12 см соответственно, а *ZD* = 120°. Найдите длину диагонали *AC.*

6. Определите вид треугольника (тупоугольный, остроугольный или прямоугольный), если его стороны равны: **а)** 3 см, 5 см, 7 см; б) 3 см, 4 см, 3 см; **в)** 3 см, 4 см, 5 см.

7*.Проверьте, является ли А*HPT* тупоугольным, если *Щ*-2; 5), Р(4; 8), Т(10; 6).

8. В треугольнике *ABC* стороны АВ, ВС и *AC* равны 15 см, 13 см и 14 см соответственно. Найдите: **а)** косинусы наибольшего и наименьшего углов треугольника; б) проекции сторон *AB* и ВС на прямую АС.

9. Пусть *AD* и ВС - основания равнобокой трапеции *ABCD.* Докажите, что $AC^2 = AD \blacksquare BC + AB^2$.

10. Длина оснований трапеции 3 см и 8 см. Одна из боковых сторон равна 5 см и образует с меньшим основанием угол 120°. Найдите диагонали трапеции.

11. Основания трапеции равны 6 см и 16 см. Одна из боковых сторон равна 10 см и образует с большим основанием угол 60°. Докажите, что трапеция равнобокая.

12. Диагонали параллелограмма равны 17 см и 19 см, а стороны относятся как 2:3. Найдите периметр параллелограмма.

13*. Диагонали параллелограмма равны 24 см и 28 см, а разность сторон - 8 см. Найдите площадь параллелограмма.

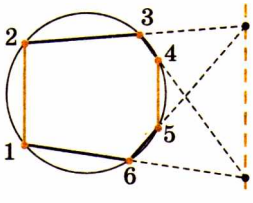
14. Стороны параллелограмма равны 6 м и 7 м. Найдите его диагонали, если одна из них длиннее второй на 4 м.

15*. Из одной точки *M* окружности провели хорды *MA* = 5 см и *MB* = 8 см. Хорда *AB* стягивает дугу в 120°. Найдите длину отрезка *AB,* если он и точка М лежат: **а)** по разные стороны от центра окружности; **б)** по одну сторону от центра окружности.



Для любознательных

1. Попробуйте поэкспериментировать с условием теоремы Паскаля (стр. 50), исследуя разные размещения точек на окружности и разные способы их нумерации. При этом может получиться, что две прямые, точку пересечения которых мы ищем, - параллельны. Тогда теорему Паскаля надо понимать так: прямая, проходящая через две другие заданные точки, параллельна указанным прямым (см. рис.).



2. В окружность вписана трапеция *MNPQ (MQ || NP).* Точка *A* - произвольная точка прямой, которой принадлежит диаметр, параллельный основаниям трапеции. Докажите, что $AM^2 + AQ^2 = AN^2 + AP^2$.

16*. Из одной точки окружности провели две хорды длиной 2л/2 см и 6 см. Концы этих хорд соединили отрезком, стягивающим дугу в 90°. Найдите длину указанного отрезка, если он и заданная точка окружности лежат: а) по разные стороны от центра окружности; б) по одну сторону от центра окружности.

17*. Медиана AM треугольника *ABC* образует со стороной *BC* угол 60°. Найдите сторону AC, если *BC* = 32 см, *AB* = 2>/97 см.

18*. Медиана треугольника, проведенная к стороне 20 см, образует с ней угол 60°. Сторона, лежащая против указанного угла, равна 2>/19 см. Найдите третью сторону треугольника.

19*. Биссектриса AP треугольника ABC образует со стороной *BC* угол 60°. Стороны AC и AB равны 6 см и 8 см соответственно. Найдите длину стороны *BC*.

20*. Найдите наибольшую медиану треугольника, стороны которого равны 7 см, 6 см и л/26 см.

21*. Разность двух сторон треугольника 8 см, третья сторона - 32 см, а медиана, проведенная к ней, - 28 см. Найдите периметр треугольника.

22*. Одна сторона треугольника больше медианы, проведенной к ней, на 4 см, а две другие стороны равны 28 см и 36 см. Найдите периметр треугольника и его площадь.

23*. Две стороны треугольника равны 6 см и 7 см; медиана, проведенная к меньшей из них, равна 5 см. Найдите третью сторону треугольника.

24**. Медианы треугольника равны 5 см, *J52* см и \/73 см. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

25**. Внутри угла меры 60° расположена точка A, удаленная от сторон этого угла на 2 см и 4 см. Найдите расстояние от точки A до вершины угла.

26**. Докажите, что разность квадратов двух сторон треугольника равна: а) разности квадратов их проекций на третью сторону; б) удвоенному произведению третьей стороны и проекции ее медианы на эту же сторону.

27*. В окружности с центром *O* хорда AB пересекает диаметр в точке *M* под углом 60°. Найдите *OM,* если AM = 10 см, *BM* = 4 см.

28**. Докажите, что медианы треугольника *ABC,* проведенные к сторонам *a* и *Ь,* взаимно перпендикулярны, если выполняется соотношение $a^2 + Ь^2 = 5c^2$.

29*. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит большая диагональ.

30**. Докажите, что в произвольном треугольнике: а) наибольшей стороне соответствует наименьшая из медиан; б) большая из медиан пересекает меньшую из сторон.

31**. Докажите, что для параллелограмма с острым углом в 45° произведение квадратов диагоналей равно сумме четвертых степеней двух его смежных сторон.

32**. По заданным отрезкам *a* и *Ь* постройте отрезок $\sqrt{a^4 + Ь^4}$.

33**. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Известно, что $AB^2 + BC^2 = AD^2 + CD^2$. Докажите, что /*ABC* = 90°.

34**. Докажите с помощью теоремы косинусов *теорему Птолемея:* если вокруг четырехугольника можно описать окружность, то произведение его диагоналей равно сумме произведений противолежащих сторон.

35**. Для медиан треугольника выполняется равенство: $m^2_a + m^2_b = 5m^2_c$. Правильно ли, что этот треугольник прямоугольный? Ответ обоснуйте.

36**. Для медиан треугольника выполняется неравенство: $m^2_a + m^2_b > 5m^2_c$. Каким будет угол C этого треугольника - тупым или острым? Ответ обоснуйте.



Для любознательных

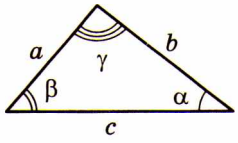
1. В треугольнике ABC высота *AH* равна медиане *BM*. Найдите угол *MBC*.
2. Установите зависимость между углами треугольника, если одну из его медиан видно из центра описанной окружности под прямым углом.

§7. Решение треугольников

Решением треугольника называют вычисление всех его основных элементов по трем заданным, если треугольник определен. (*Треугольник определен,* если по заданным элементам можно построить конкретный треугольник.)

Замечание. Набор заданных трех элементов не может быть произвольным. Например, нельзя определить треугольник задав три его угла.

Мы уже решали в 8-м классе такие задачи для прямоугольного треугольника. Теперь, пользуясь теоремами синусов и косинусов, можем находить стороны и углы произвольных треугольников.



a, **р, у,** *a, b, c,* - основные элементы треугольника

Рассмотрим решение треугольников на примерах. При этом будем использовать традиционные обозначения: в треугольнике АВС против угловА, В и С лежат стороны *a, b* и *c*.

Пример 1. По двум сторонам и углу между ними (рис. 1.37) найти все остальные основные элементы треугольника.

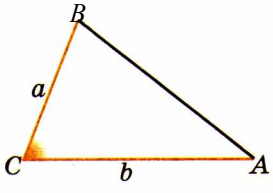


Рис. 1.37

Дано: *a, b, ZC.*
Найти: c, ZA, ZB.

1) По теореме косинусов

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}.$$

2) По теореме косинусов

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,be}.$$

3) $ZB = 180° - ZA - ZC.$

Треугольник определен,

? если

по данным элементам его можно однозначно построить.



Для любознательных

Впервые анализ и классификацию софизмов дал Аристотель (384-322 гг. до н. э.) в трактате «О софистических опровержениях» (см.: Аристотель. Собрание сочинений: В 4 т. - **М.,** 1978. - Т.2).

Разгадайте софизм **Н. Г.** Чернышевского. **В произвольном тупоугольном треугольнике длина стороны, противолежащей тупому углу, больше суммы длин двух других его сторон.**

Доказательство

1) Пусть в $\triangle ABC$ угол A - тупой. Тогда $ZA > ZB + ZC$.

2) По теореме синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, где R - радиус описаннои вокруг треугольника АВС окружности.

3) Из предыдущего: sin **А** : sin В : sin $C = a : b : c$.

4) Как известно, большему углу соответствует большее значение синуса. Тогда

$$a > b + \mathbf{c?!}$$

I Пример 2. По стороне и двум прилежащим к ней углам (рис. 1.38) найти все остальные основные элементы треугольника.

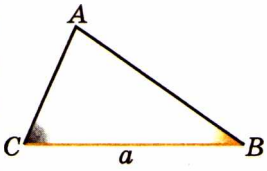
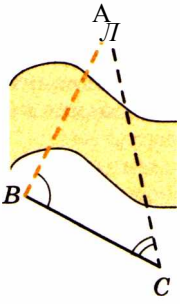


Рис. 1.38

Дано: *a*, /*C*, /*B*.
Найти: /*A*, *Ь*, *c*.

1) ZA = 180° -/*B*- /*C*.
2) По теореме синусов

$$Ъ = a\frac{\sin B}{\sin A}; \quad c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$



Пример 3. Дано длины трех сторон треугольника (рис. 1.39). Найти все его углы.

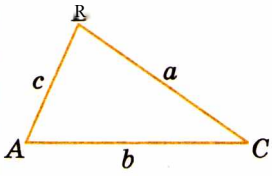


Рис. 1.39

Дано: *a*, *Ь*, *c*.
Найти: ZA, /*B*, /*C*.

1) По теореме косинусов

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

2) ZC = 180° - ZA - ZB.

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin(180°-(B+C))},$$

$$AB = \frac{BC \sin C}{\sin(B+C)}$$

Замечание. Последние два примера имеют смысл не при произвольных значениях заданных элементов, а только при условиях: ZC + ZB < 180° и *a* + *Ь*> *c*, *a* + *c*> *Ь*, *c* + *Ь*> *a* соответственно.

Умение решать треугольники может пригодиться и на практике. Например, если надо найти расстояние между двумя пунктами А и В, разделенными препятствием, можно воспользоваться примером 2. Надо выбрать на местности доступную точку *C* (см. рис. на поле), измерить расстояние *CB*, углы С и В, а затем по теореме синусов вычислить длину отрезка *AB*.



Для любознательных

Разгадайте софизм. **В любом треугольнике все углы равны.**

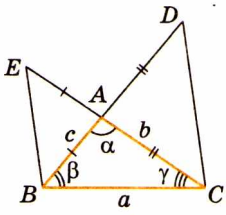
Доказательство

Пусть *ABC* - произвольный треугольник, углы и стороны которого обозначим так, как показано на рисунке.

ABEC и *ABDC*: /*E* = $\frac{\alpha}{2}$, *ZCBE* = P + $\frac{\alpha}{2}$ и ZD = “, /*BCD* = *y* + -, $\frac{\alpha}{2}$

по теореме синусов

$$\frac{Ъ + c}{\sin\left(P + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{Ь + c}{\sin\left(y + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$



Отсюда: sin^p + ^ J = sin^y + -^J и p = a.

Аналогично доказывается, что *a* = y?!

Нельзя обойти вниманием и четвертый случай решения треугольника по двум его сторонам и углом не между ними.

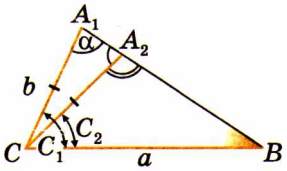


Рис. 1.40

Дано: *a*, *Ь*, *ZB*

Найти: c, ZA, *ZC*.

По теореме синусов

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b}.$$

Угол А может быть или острым, или тупым, т. к. sin (180° - a) = sin a, и имеем два решения: Aj = a < 90° или A_2 = 180° - a > 90° (рис. 1.40).

Тогда

ZC_1 = 180° − *ZB* - *a*,

ZC_2 = 180° − *ZB* - (180° - a) = a - *ZB*.

Понятно, что градусная мера угла треугольника не может быть отрицательной. Тогда второе решение существует, если *a* > *ZB*, т. е. когда *a* > *Ь* (в треугольнике против большего угла лежит большая сторона).

Если a < Ь, то получим только одно решение, т. е. треугольник *ABC* будет определен однозначно.

Очевидно, что *эта задача имеет одно решение, если заданный угол B - тупой.*

Если заданы *a*, *Ь*, *ZB*, то решение ЛАВС единственно в случаях:

1)a < *Ь;*

2) *ZB* - тупой.

Задание 8

1°. В треугольнике *ABC* против углов A, *B*, *C* лежат стороны *a*, *Ь*, *c*. Найдите неизвестные стороны и углы треугольника, если:

а) ZA = 25°, *ZB* = 48°, *a* = 27 см;

б) *ZC* = 30°, *ZB* = 48°, *b* = 70;

в) ZA = 85°, a = 30, *Ь* = 9,81;

г) *ZC* = 17°, c = 5, *Ь* = 8;

д) ZC = 51°, a = 15, *Ь* = 17,9;

е) ZC = 32°, *a* = 25, *Ь* = 40;

ж) *ZB* = 81°, *ZC* = 45°, *a* = 105 см;

з) ZA = 30°, *ZB* - *ZC* = 60°, *c* = 38;

и) ZA = 44°, *ZB* = 77°, c = 13;

й) a = 7, *Ь* = 8, c = 6.

2. Чтобы определить расстояние между доступной точкой С и недоступной точкой А (рис. 1.41), выбрали другую доступную точку *B*. Найдите АС, если *CB* = 100 м, ZC = 82°, *ZB* = 61°.
3. Определите ширину реки для таких геодезических измерений: ZA = 85°, ZC = 81°, AC = 490 м (рис. 1.42-а).
4. Определите длину озера (рис. 1.42-б) по таким данным: ZC = 48°, *b* = 56,7 м, *a* = 129 м.

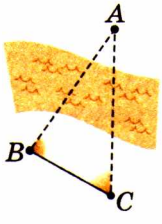
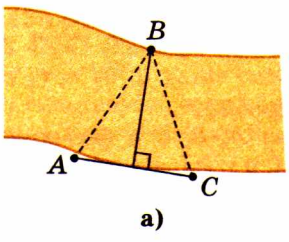
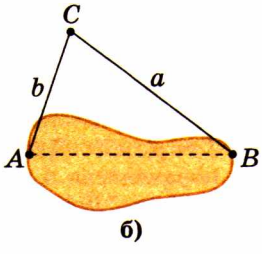


Рис. 1.41



а)



б)

Рис. 1.42

5*.Три дороги образуют треугольник *ABC*: *AB* - шоссе, *AC* и *CB* - грунтовые дороги. По шоссе можно ехать в два раза быстрее, чем по грунтовой дороге. Автомобилист хочет как можно быстрее попасть из пункта А в пункт *C*. Какой маршрут ему лучше выбрать - по прямой или в объезд, если: а) $ZCAB = 20°$, $ZABC = 120°$; б) $ZACB = 60°$, $ZCAB = 45°$?

6*. В 12.00 нарушитель съехал с основной магистрали и помчался по шоссе со скоростью 140 км/ч. В это время инспектор ГАИ получил сообщение и поехал по грунтовой дороге со скоростью 70 км/ч на перехват нарушителя. В каком случае инспектор успеет остановить нарушителя на перекрестке (рис. 1.43)?

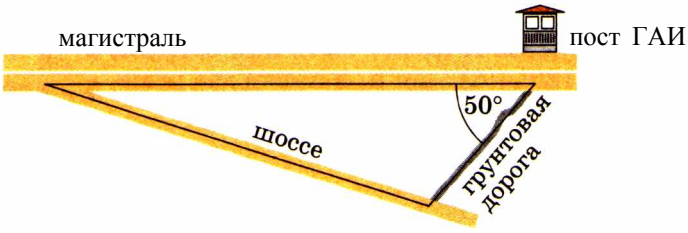


Рис. 1.43

7*. К одной точке приложили три силы: $F_1 = 10$ Н, $F_2 = 10$ Н, $F_3 = 20$ Н. Силы F_1 и F_2 приложены под углом 120°, а силы F_2 и F_3 - под углом 90°. Найдите равнодействующую этих сил.

8. В треугольнике *ABC* против углов A, B и C лежат стороны *a, b, c*. Высоты и медианы, проведенные к этим сторонам, обозначены как h_a, h_b, h_c и m_a, m_b, m_c соответственно; биссектрисы углов - l_a, l_b, l_c. Найдите неизвестные стороны и углы треугольника, если:

а) $ZA = 58°$, $ZB = 73°$, $b - c = 12$ см;
б) $ZA = 81°$, $ZB = 68°$, $a + c = 63{,}4$ см;
в) $ZA = 36°$, $ZB = 60°$, $a + b + c = 94$ см;
г) $h_a = h_b = 4$ см, $h_c = 6$ см;
д) $ZB = 48°$, $ZC = 68°$, $h_a = 32$ см;
е) $m_c = 11$ см, $a = 9$ см, $b = 19$ см;
ж) $m_c = 8$ см, c = 18 см, $b = 13$ см;
з) $m_a = 17$ см, $a = 24$ см, $h_a = 15$ см;
и) $h_a = 12$ см, $h_b = 15$ см, $h_c = 18$ см;
й) $ZA = 38°$, $ZB = 63°$, $l_c = 15{,}6$ см;
к) $h_a = 24$ см, $h_b = 20$ см, a = 24 см;
л) $a - b = 2$ см, $a - c = 5$ см, $ZB = 60°$.

9*. Длина минутной стрелки 60 мм, а часовой - 54 мм. Через какое время после полудня расстояние между концами стрелок впервые будет равно 90 мм?

10*. Чтобы найти расстояние между двумя недоступными точками АиВ (рис. 1.44), выбрали две доступные точки *C* и *D*. Найдите АВ по таким измерениям: $CD = 920$ м, $ZADC = 81°$, $ZBDC = 62°$, $ZDCB = 88°$, $ZACB = 32°$.

11*. Стороны треугольника равны 1 см и 2 см, а угол между ними - 60°. Через центр вписанной в этот треугольник окружности и концы третьей стороны проведена окружность. Найдите радиус этой окружности.

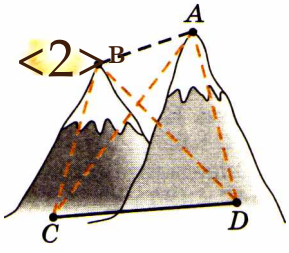


Рис. 1.44



Для любознательных

1. Докажите такую теорему.

Теорема. **Для углов** A, **B,** C **и биссектрис** l_A, l_B, l_C **треугольника** *ABC* **неравенства** $A < B < C$ **и** $i_д > i_в > l_C$ **являются равносильными.**

Совет. Докажите, что *меньшему углу треугольника соответствует большая биссектриса и наоборот.*

2. Дано длины сторон треугольника *ABC*. Найдите длины биссектрис этого треугольника.

12*. В треугольнике ABC: $AC = b$ и $\angle ABC = \beta$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки: A, C и центр вписанной в треугольник окружности.

13. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника со сторонами 13 см, 14 см, 15 см.

14**. Высоты треугольника пересекаются в точке H. Докажите, что радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников ABC, ABH, BCH и ACH, равны между собой.

15**. В остроугольном треугольнике ABC: $AB = 2$ см, $AC = 5$ см, $BC = 6$ см. Найдите с точностью до сотых расстояние от вершины B до ортоцентра треугольника (точки пересечения его высот).

16**. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AP и CH. Площадь треугольника ABC равна 18 см^2, площадь треугольника BPH - 2 см^2, а PH - $2\sqrt{2}$ см. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

17**. Через вершины A и B треугольника ABC проходит окружность радиуса r, пересекающая сторону BC в точке D. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, C и D, если AB = c, а AC = b.

18**. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную вокруг данного треугольника окружность в точках P и Q соответственно. Найдите радиус этой окружности, если AC = a, PQ = 1,2a.

19**. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла равна 18 см и образует с медианой гипотенузы угол 10°. Найдите длину гипотенузы.

20**. В треугольник вписаны три равные окружности так, что каждая из них касается двух сторон треугольника и все три окружности имеют одну общую точку. Найдите радиус этих окружностей, если радиусы описанной и вписанной окружностей данного треугольника равны r и R соответственно.

21**. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC, если: AB = 20; AC = 24; через вершину C, инцентр треугольника и точку пересечения биссектрисы угла A со стороной BC можно провести окружность с центром на AC.

22**. Докажите, что для углов произвольного треугольника ABC выполняются соотношения:

а) $\cos^2 A = \cos^2 C + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B \cos C$;

б) $\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B$;

в) $\sin B \sin C = \cos B \cos C + \cos A$;

г) $\dfrac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \dfrac{\cos A + \cos B}{1 - \cos C}$.

23**. Докажите, что $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$, где α и β - углы, сумма которых не превышает 180°.



Для любознательных

1. С помощью теоремы синусов докажите известный факт, что биссектриса угла треугольника делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам.

2. Прямая, проходящая через вершину прямого угла треугольника, образует с меньшим катетом угол 30° и делит гипотенузу на отрезки в отношении 1 : 2. Найдите длину гипотенузы, если длина меньшего катета равна >/3.

3. Постройте прямоугольный треугольник по его гипотенузе и биссектрисе острого угла.

4. Постройте треугольник по его стороне, противолежащему углу и биссектрисе этого угла (задача Паппа).

5. Постройте треугольник ABC по:

а) $\angle A$, m_a, l_a; **б)** $\angle A$, l_a, $2p$; **в)** h_a, h_b, l_c; **г)** h_a, m_a, l_a.

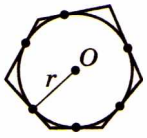
§® o Площадь треугольника и четырехугольника

Вы уже знаете некоторые формулы для вычисления площади треугольника, параллелограмма и трапеции. В этом параграфе мы их повторим и докажем еще несколько формул для вычисления площади плоских фигур.

ПЛОЩАДЬ ОПИСАННОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Площадь описанного многоугольника S можно вычислить, зная его полупериметр ***p*** и радиус г вписанной окружности: ***S =p-r.***

Описанный многоугольник



S=p r,
где ***p*** - полупериметр

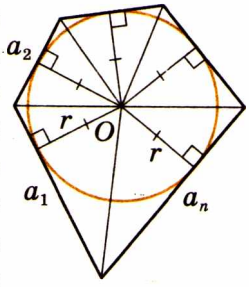


Рис. 1.45

Для доказательства этой формулы соединим центр ***O*** вписанной окружности с вершинами заданного многоугольника (рис. 1.45). В образованных треугольниках радиусы окружности, проведенные в точки касания, являются высотами. Площадь многоугольника равна сумме площадей этих треугольников:

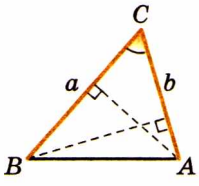
$$S = \frac{1}{2}a_1 \cdot r + \frac{1}{2}a_2 \cdot r + \ldots + \frac{1}{2}a_n \cdot r = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot r = p \cdot r.$$

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Для вычисления площади треугольника мы уже использовали формулы:

$$S = \frac{1}{2}ah, \quad S = pr, \quad S = \frac{1}{2}ab\sin C \text{ и } S = \frac{abc}{4R},$$

где ***p*** - полупериметр треугольника; г и Л - радиусы его вписанной и описанной окружностей; ***a*** и ***Ъ*** - длины двух его сторон, а ZC - угол между этими сторонами; h_a - длина высоты, проведенной к стороне ***a.***



$S_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b;$

$h_a : h_b = b : a;$

$S_\Delta = pr;$

$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$

Докажем еще несколько формул для вычисления площади треугольника:

(1) S = 2i?²sinA sinB sinC,

$$(2)\ S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A},$$

(3) ***S-yfp(p-a)(p-b)(p-c) - формула Герона,***

где a, ***b*** и ***c*** - длины сторон треугольника; ***A, B*** и C - меры его соответствующих углов (рис. 1.46); $p = \frac{a+b+c}{2}$;

1 ***R*** - радиус описанной окружности.

Для любознательных

Существует ли треугольник со сторонами 8 см и 3 см, у которого высота, проведенная к третьей стороне, равна среднему геометрическому двух других высот?

Доказательство

1. По расширенной теореме синусов $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$. Тогда

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

2. После подстановки в формулу (1) значения $R = \frac{a}{2 \sin A}$ получаем:

$$S = 2\frac{a^2}{4\sin^2 A} \sin A \sin B \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

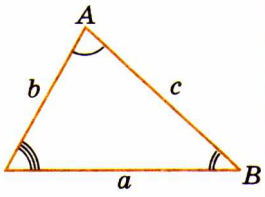
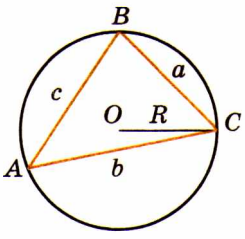


Рис. 1.46



3. Прежде чем перейти к доказательству *формулы Герона*, заметим, что

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{2p-2c}{2} = p-c;$$

$$\frac{b+c-a}{2} = p-a \text{ и } \frac{c+a-b}{2} = p-b.$$

Докажем формулу (3). Используя теорему косинусов, запишем

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Найдем теперь $\sin C$ из основного тригонометрического тождества, учитывая, что синус углов от 0° до 180° - величина неотрицательная:

$$\sin C = |\sin C| = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{(1-\cos C)(1+\cos C)}.$$

Рассмотрим преобразования каждого из подкоренных множителей отдельно:

$$1-\cos C = 1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{c^2-(a^2+b^2-2ab)}{2ab} = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab} =$$

$$= \frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab} = \frac{2(p-a)(p-b)}{ab};$$

$$1+\cos C = 1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} = \frac{2p(p-c)}{ab}.$$

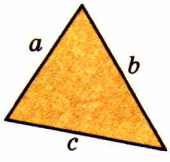
Тогда

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

«Л = 2R^2 sin A sin B sin C,

$$S_A = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$



Формула Герона

«Л

II

Л/p(p-a)(p-b)(p-c),

$p = (a+b+c):2$

Для любознательных

1. Дан треугольник *ABC*. Найдите геометрическое место таких точек M, чтобы треугольник *ABM* был равновеликим треугольнику ABC.
2. Три высоты треугольника меньше единицы. Может ли его площадь быть больше 10 квадратных единиц?
3. Среди всех равнобедренных треугольников, описанных вокруг данной окружности, найдите треугольник с наименьшей площадью.

Замечание. Формулу Герона легко доказать, пользуясь свойствами вневписанной окружности треугольника. Сделайте это самостоятельно, воспользовавшись следующей теоремой (или загляните на стр. 63).

Напомним:
[AB] - отрезок AB;
(AB) - прямая AB.

Теорема. Площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле

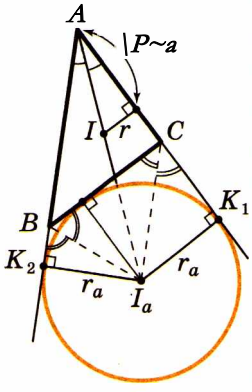
$$S = (p - a)r_a,$$

где r_a - радиус вневписанной окружности γ_a, которая касается стороны a треугольника ABC, p — полупериметр этого треугольника.

Доказательство

Пусть I и I_a - центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC соответственно; K и K_1 - точки касания этих окружностей к (AC); K_2 и K_2 ~ точки касания γ_a к [CB] и (AB) (рис. 1.47).

Вневписанная окружность



Центр I_a равноудален от [BC], (AB) и (AC).

$$AK_1 = AK_2 = p$$

$$r_a = p \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

$$\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a}$$

$$S_{ABC} = (P \sim {}_aK$$

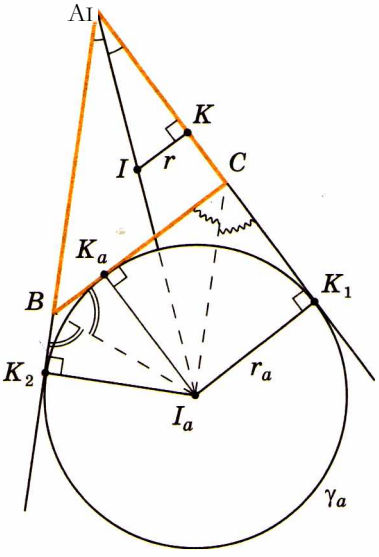


Рис. 1.47

1) Согласно опорному факту (см. форзац) AK- $-p-a.$ –

2) По свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки: $AK_X = AK_1$; $CK_X = CK_a$; $BK_a = BK_2$.

Тогда $AK_X + AK_2 = AC + CK_a + AB + BK_a = 2p$ і $AK = AK_2 = p$.

3) Из треугольников AKI и AK_1I_a следует:

$$r = (p-a)\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2} \text{ и } r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Отсюда: $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$; $= \frac{r_a}{p}$ и $r = \frac{(p-a)r_a}{p}$

4) Учтем, что $S = pr$. Тогда $S = p\frac{(p-a)r_a}{p} = (p-a)r_a$.

Теорема доказана.

ПЛОЩАДЬ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Как известно, диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника. Тогда из факта, что площадь треугольника равна полупроизведению его сторон на синус угла между ними, следует: площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

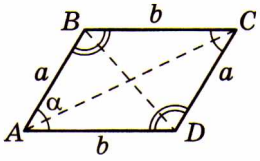


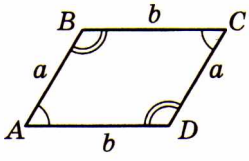
Рис. 1.48

Например, площадь параллелограмма, изображенного на рисунке 1.48, равна S = *ab* sin A = *ab* sin *B.*

Заметим, что по свойству параллелограмма

ZA+ZB= 180° и sinB = sin(180° -A) = sinA.

ABCD - ПАРАЛЛЕЛОГРАММ



$S = ab\sin A$

$=$

$ab\sin B$

$S = a \cdot h_a$

$=$

$b \cdot h_b$

$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \times \sin(\widehat{AC\ BD})$

III Т е о р е м а. Если d_1 и d_2 - диагонали произвольного четырехугольника, а а - угол между ними, то площадь этого четырехугольника равна

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin a.$$

Доказательство

Рассмотрим четырехугольник *ABCD* (рис. 1.49). Диагонали *AC* и *BD* делят его на четыре части - треугольники *ABK, BKC, CKD* и *AKD).* Тогда площадь этого четырехугольника равна сумме площадей указанных треугольников.

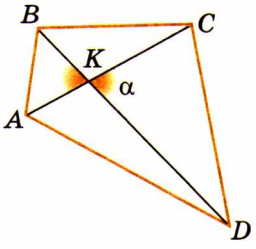


Рис. 1.49

Для любознательных

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ГЕРОНА

На рисунке изображена вневписанная окружность γ_a треугольника *ABC*, 1_a - центр этой окружности, *I* - инцентр треугольника *ABC*, *K* и K_1 - точки касания вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC к (AC).

$ZK\angle I_a = \frac{1 я0° — \angle C}{2} = ZKIC.$ Тогда д/^С *CKI*△

Из подобия треугольников *CKI* и $1_a K_x C$ следует:

$\frac{CK}{KI} = \frac{KI_a}{CK}$, т. е. $\frac{p-c}{r} = \frac{a}{r\ p-b}$ и $rr=(p-b)(p-c)$.

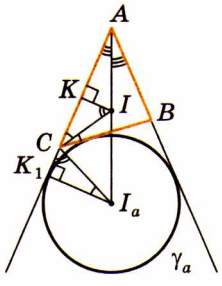
Запишем такие три равенства:

$$S=pr,\ S=(p-a)r_a,\ rr_a=(p-b)(p-c).$$

Перемножим первые два из них и учтем третье:

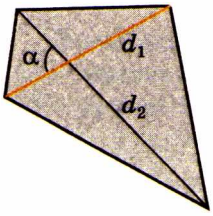
$$S^2 = PIP \sim a)(p-b)(p-c),$$

получим *формулу Герона* $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.



Докажите, что площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле

$S = \sqrt{rW c-}$



$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin a$

$S = \frac{1}{2} AK \cdot BK \sin a + \frac{1}{2} BK \cdot KC \sin(180° - a) +$

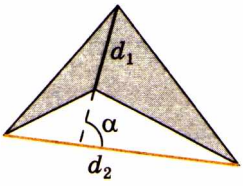
$+ \frac{1}{2} KC \cdot KD \sin a + \frac{1}{2} KD \cdot AD \sin(180° - a).$

Учтем, что $\sin(180° - a) = \sin a$ и вынесем общие множители:

$S = \frac{1}{2} BK (AK + KC) \sin a + \frac{1}{2} KD (KC + AD) \sin a =$

$= \frac{1}{2} (AK + KC)(BK + KD) \sin a = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin a.$

Теорема доказана.



Замечание. Полученная формула справедлива для любого четырехугольника, как выпуклого, так и невыпуклого (рис. 1.50). Доказательство этой формулы для невыпуклого четырехугольника предлагаем провести самостоятельно.

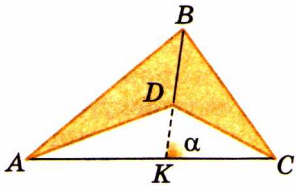


Рис. 1.50

Задание 9

1°. Найдите площадь треугольника, если две стороны и угол между ними равны:
а) 2 см, 3 см и 30°; б) 5 см, 4 см и 150°; в) $2\sqrt{3}$ мм, 6 мм и 60°; г) 4 дм, 2 дм и 135°.

2°. Вычислите площадь параллелограмма, если смежные стороны параллелограмма и угол между ними соответственно равны:
а) 6 см, 7 см и 150°; б) $2\sqrt{3}$ мм, 4 мм и 60°.

3°. Вычислите площадь параллелограмма, если диагональ, сторона параллелограмма и угол между ними соответственно равны:
а) 6 см, 8 см и 30°; б) $2\sqrt{3}$ мм, 8 мм и 60°.

4. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3 : 4, а гипотенуза равна 45 см. Найдите площадь треугольника.

5. Найдите площадь треугольника, если его сторона равна a, а прилежащие к ней углы составляют: а) 30° и 45°; б) 45° и 60°.

Для любознательных

1. Докажите, что площадь остроугольного треугольника можно вычислить по формуле $S = r \cdot p_в$, где r - радиус окружности, вписанной в этот треугольник, а $p_в$ - полупериметр *ортоцентрического* треугольника. Совет. Воспользуйтесь вневписанной окружностью заданного треугольника.

2. Докажите, что точка касания вневписанной окружности треугольника к его стороне, середина высоты, проведенная к этой стороне, и инцентр лежат на одной прямой.

3. Постройте треугольник по трем точкам - центрам его вневписанных окружностей.

4. Постройте треугольник по трем отрезкам - радиусам его вневписанных окружностей.

5. Постройте треугольник по: стороне; радиусу вневписанной окружности, касающейся заданной стороны; биссектрисе угла, лежащего против этой стороны.

6°. Вычислите площадь треугольника, стороны которого равны: а) 13 см, 14 см, 15 см; б) 4 см, 13 см, 15 см; в) 9 см, 10 см, 17 см; г) 13 см, 20 см, 21 см.

7. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, если его стороны равны: а) 13 см, 14 см, 15 см; б) 4 см, 13 см, 15 см; в) 9 см, 10 см, 17 см; г) 13 см, 20 см, 21 см.

8*. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках ***D, E, F.*** Найдите площадь треугольника ***DEF,*** если стороны треугольника ***ABC*** \ равны 6 см, 8 см, 10 см.

9*. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если биссектриса угла при основании делит: а) высоту, проведенную к основанию, на отрезки 15 см и 9 см; б) боковую сторону на отрезки 25 см и 30 см, считая от вершины.

10*. Высота, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, равна 24 см. Вычислите площадь треугольника, если: а) высота, опущенная на основание треугольника, равна 20 см; б) боковая сторона относится к основанию как 5:6.

11*. Гипотенуза прямоугольного треугольника относится к одному из катетов как 5:4. Вычислите площади частей треугольника, на которые его делит высота, проведенная к гипотенузе, если: а) разность отрезков, на которые эта высота делит гипотенузу, равна 7 см; б) разность отрезков, на которые биссектриса прямого угла делит гипотенузу, равна 5 см; в) разность отрезков, на которые биссектриса острого угла делит катет, равна 2 см.

12**. Инцентр прямоугольного треугольника удален от вершин его острых углов на $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{10}$ см. Найдите площадь треугольника.

13**. В треугольнике ABC известны две стороны: AB =112 см, AC = 108 см. На AB отметили такую точку M, что ***AM*** = 84 см. Через ***M*** провели прямые, делящие треугольник на части, площади которых (считая от вершины A) относятся как 1:2:3:4:5. Найдите длины частей, на которые эти прямые делят сторону AC.

14*. На сторонах треугольника ***ABC*** отметили точки D, ***E, F*** так, что ***AD : DB*** = = ***BE : EC = CF : FA*** =1:2. Найдите отношение площадей треугольников ABC и ***DEF.***

15*. Стороны треугольника ABC продлили так, что AB = BA_p BC = ***CB_V CA*** = CA,. Найдите отношение площадей треугольников ABC и ***$A^{\wedge}B_XC_X$.***

16*. Точка ***O*** - центр окружности, вписанной в треугольник ABC, стороны которого равны 15 см, 28 см, 41 см. Найдите площади треугольников AOB, AOC, ***BOC.***

17**. Точка касания, вписанной в прямоугольный треугольник окружности, делит его гипотенузу на отрезки длиной ***тип.*** Найдите площадь треугольника.

18**. Вписанная в треугольник ABC окружность радиуса r касается его сторон в точках ***D, E, F,*** при этом: AD ***=AE = т, BD = BF = п, CE = CF = t.*** Докажите, что площадь треугольника ***Ь*** = $\frac{mnt}{r}$.

19**. Медиана, проведенная из вершины прямого угла треугольника, равна 20 см. Серединный перпендикуляр к этой медиане пересекает больший катет в точке, удаленной от указанной медианы на 7,5 см. Найдите площадь треугольника.

20*. Наибольшая медиана прямоугольного треугольника равна ***т*** и наклонена к большему катету под углом 15°. Найдите площадь треугольника.

21**. Через точку M на стороне AB треугольника ABC проведите прямую, делящую треугольник на две равновеликие части.

22**. Через точку ***M*** на стороне AC треугольника ABC проведите две прямые, делящие треугольник на три равновеликие части.



Для любознательных

Две вершины треугольника ABC лежат в точках A(2; 2) и B(2; 0), а третья вершина ***C(x, y)*** принадлежит прямой ***x*** = 5. Найдите площадь треугольника ABC и координаты вершины C.

23*. Вычислите площадь трапеции, если: а) ее основания равны 8 см и 26 см, а углы при большем основании - 30° и 60°; б) основания равны 7 см и 55 см, а боковые стороны - 29 см и 35 см; в) высота трапеции равна 18 см, а диагонали - 30 см и 82 см; г) основания равны 10 см и 42 см, а углы при меньшем основании - 105° и 165°.

24*. Найдите площадь равнобокой трапеции, диагональ которой является биссектрисой острого угла, боковая сторона равна ***a,*** угол при большем основании - 60°.

25*. Найдите площадь равнобокой трапеции, если ее диагональ равна ***d*** и образует с большим основанием угол ***a.***

26*. Три меньшие стороны прямоугольной трапеции равны 8 см, 8 см и 10 см. Найдите ее площадь.

27*. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов одной из ее боковых сторон на 3 см и 9 см. Найдите площадь трапеции.

28*. Боковые стороны и высота трапеции равны 25 см, 30 см и 24 см соответственно. Вычислите площадь трапеции, если: а) биссектрисы острых углов трапеции пересекаются на меньшем основании; б) биссектрисы тупых углов трапеции пересекаются на большем основании.

29. Вычислите площадь трапеции, описанной вокруг окружности, если: а) трапеция прямоугольная, ее наименьшая сторона равна 6 см, а острый угол - 30°;
б) ; трапеция равнобокая, ее острый угол равен 60°, а радиус вписанной окружности - 4 см.

30. Вокруг окружности радиуса 12 см описана равнобокая трапеция. Ее боковая сторона делится точкой касания в отношении 4:9. Найдите площадь трапеции.

31. В равнобокую трапецию с площадью 200 см² и высотой, равной половине боковой стороны, вписали окружность. Найдите радиус этой окружности.

32. Площадь равнобокой трапеции равна 20 см², а радиус окружности, вписанной в эту трапецию, равен 2 см. Найдите все стороны трапеции.

33*. Вычислите площадь трапеции, если радиус вписанной в нее окружности равен 5 см, а радиус описанной - 6 см.

34**. Радиус окружности, вписанной в равнобокую трапецию, равен ***R,*** расстояние между точками касания этой окружности к боковым сторонам трапеции - 8 см. Найдите площадь трапеции.

35**. Длина меньшего основания трапеции - 70 см, центр вписанной в трапецию окружности удален от концов этого основания на 65 см и 75 см. Найдите площадь трапеции.

36**. Основания трапеции равны 89 см и 142 см, а диагонали - 120 см и 153 см. Найдите площадь трапеции.

37**. Прямые ***AB*** и ***CD,*** содержащие боковые стороны равнобокой трапеции ***ABCD,*** пересекаются под прямым углом. Площадь трапеции равна 12 см², а ее высота - 2 см. Найдите все стороны трапеции.

38**. Основания трапеции равны ***a*** и ***Б.*** Найдите длину отрезка, параллельного основаниям трапеции, который делит ее на две равновеликие части.

39**. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из ее боковых сторон на расстояние от середины второй ее боковой стороны до первой.

40**. Через середину диагонали ***BD*** выпуклого четырехугольника ***ABCD*** провели прямую, параллельную диагонали ***AC.*** Эта прямая пересекает сторону ***AD*** в точке ***E.*** Докажите, что отрезок ***CE*** делит четырехугольник ***ABCD*** на у равновеликие фигуры.



Для любознательных

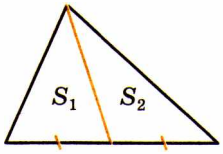
На шахматной доске расставили 15 фигур так, что в каждом горизонтальном ряду и каждом вертикальном ряду стоит хотя бы одна фигура. Докажите, что с доски можно убрать одну фигуру так, что все остальные все равно будут удовлетворять сформулированному выше правилу.

§ 9. Метод площадей в теоремах и задачах

Понятие площади можно использовать для доказательства теорем и решения задач. При этом в условии задачи может и не упоминаться о площади. В этом случае говорят, что используется ***метод площадей.***

При применении метода площадей часто используются известные опорные факты о площади:

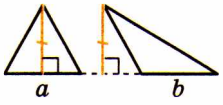
- медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника;
- если высоты треугольников равны, то их площади относятся как длины сторон, к которым проведены эти высоты.



$S_1 = S_2$

Из формулы для вычисления площади треугольника через синус одного из его углов следует опорный факт:

- площади треугольников, имеющие общий угол, относятся как произведения сторон треугольников, содержащих этот угол.



$S_1 : S_2 = a : b$

Методом площадей можно доказать уже известное * вам свойство биссектрисы треугольника.

Теорема. Если AL — биссектриса треугольника ABC, то $CL : LB = AC : AB$.

Доказательство

Пусть $AA = 2a$ (рис. 1.51).

Треугольники ACL и ABL имеют общую высоту, проведенную из вершины A. Тогда

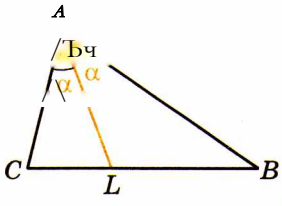
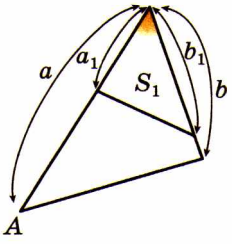


Рис. 1.51

$$CL : LB = S_{\triangle ACL} : S_{\triangle ABL} = \left(\frac{1}{2} AC \cdot AL \sin\alpha\right) : \left(\frac{1}{2} AB \cdot AL \sin\alpha\right) = AC : AB.$$

Теорема доказана.



$$\frac{S_1}{S} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a \cdot b}$$

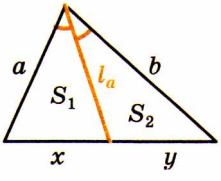
Рассмотрим доказательство (методом площадей) теоремы о точке пересечения медиан треугольника.

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.

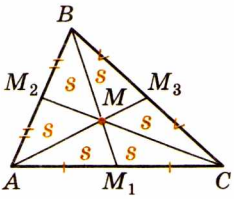
Пусть AD и BN - медианы треугольника ABC, пересекающиеся в точке M (рис. 1.52). Нужно доказать:

(1) прямая CM делит сторону AB пополам;

(2) AM: MD = 2:1.



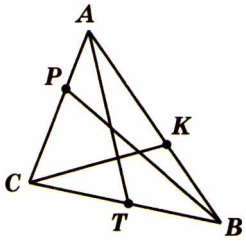
$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



BM: MM, =
= ***CM : MM₂ =***
= AM: ***MM₁*** = 2 :1

Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников площадью:

$$s = \frac{1}{6} S_{\triangle}$$



AT, BP, CK –
чевианы.

Доказательство

Обозначим площади треугольников, на которые медианы ***AD, BN*** и прямая ***CM*** делят треугольник ***ABC*** так, как показано на рисунке 1.52.

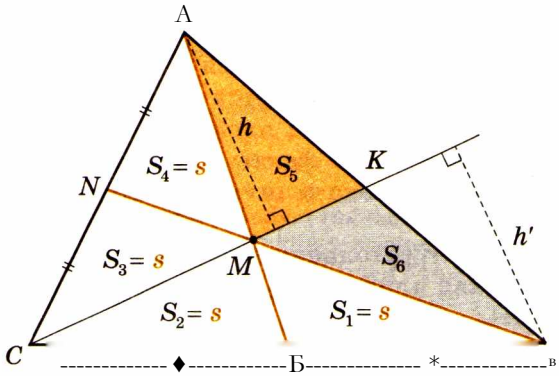


Рис. **1.52**

1) ***MD*** и ***MN*** - медианы треугольников ***CMB*** и ***CMA,*** тогда Sj = ***S₂ и S₃ = S₄.***
2) ***AD*** и ***BN*** - медианы треугольника ABC, тогда

$$IS_2 + S_3 + S_4 = Sj + S_6 + S_5,$$

$$|S_{1+}S_2 + S3 = S_4 + S_5 + S_6.$$

Отнимем от первого равенства второе:

$$S_4 - S, = S, - S_4 \text{ и } S, = S_4.$$

3) Имеем: Sj = ***S₂, S₃ = S₄, S_t*** = S_4. Отсюда:

$$S_2 = S_1 = S_4 = S_3 \pm s.$$

4) ***CM*** - общая сторона треугольников ***CMB*** и ***CMA,*** а ***S_CMB = 2s = S_CMA.*** Тогда соответствующие высоты этих треугольников равны: ***h~h'.*** –
5) ***MK*** - общая сторона треугольников ***AMK*** и ***BMK,*** а соответствующие высоты этих треугольников равны ***(h = h).*** Тогда ***S_AMK — S_BMK,*** т. е. S_5 — ***S₆***
6) Для треугольников ***AMK*** и ***BMK*** высота, проведенная из точки M, общая, а ***S_AMK*** = ***S_BMK.*** Тогда ***AK = KB,*** утверждение (1) теоремы доказано.
7) Треугольники ***AMC*** и ***CMD*** имеют общую высоту, проведенную из вершины C, а ***S_AMC : S_CMD = 2s : s =*** = 2 : 1 . Тогда ***AM : MD*** = 2 : 1 , и утверждение (2) теоремы доказано.

Теорема доказана.

Методом площадей можно доказать важную теорему, утверждение которой сформулировал и которую доказал итальянский математик Джованни Чева (1648-1734).

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на его противоположной стороне, называют ***чевианой*** (в честь Джованни Чевы).

Теорема Чевы. **На сторонах *BC, AC* и *AB* треугольника *ABC* расположены точки *X, Y* и *Z* соответственно** (рис. 1.53). **Для того чтобы чевианы *AX, BY* и *CZ* пересекались в одной точке, необходимо и достаточно,чтобы**

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

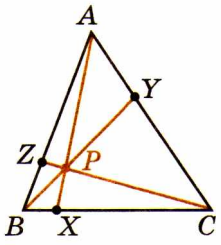


Рис. 1.53

Напомним:

Δ - «обозначили как»;

П - «пересекает»;

∈ - «не принадлежит»;

= - «совпадает»;

Φ - « не совпадает ».

Доказательство

I. НЕОБХОДИМОСТЬ

Если чевианы *AX, BY* и *CZ* пересекаются в одной точке, то выполняется соотношение

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

В треугольнике ABC (рис. 1.53):

$$BX:XC = S_{ABX} : S_{AXC} = S_{PBX} : S_{PXC},$$

$$(\triangle AX \sim \triangle PBX) \Rightarrow BX:XC = AB:PB,$$

Тогда:

$$BX:XC = AB:PB = (S_{ABX}-S_{PBX}) : (S_{AXC}-S_{PXC}) = S_{ABP}:S_{CAP}.$$

Аналогично $CY:YA = S_{BCP}:S_{ABP}$ и $AZ:ZB = S_{CAP}:S_{BCP}$.

Перемножим почленно три полученные равенства:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{S_{ABP}}{S_{CAP}}\cdot\frac{S_{CAP}}{S_{BCP}}\cdot\frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}=1.$$ Ч. т. д.

II. ДОСТАТОЧНОСТЬ

Если для чевиан *AX, BY* и *CZ* выполняется соотношение $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$, то они пересекаются в одной точке.

Пусть *AX* П *BY* = *P* и *CZ*. Проведем через точку *P* чевиану CZ_X, $Z_X \in AB$. Тогда по доказанному:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ_X}{Z_XB}=1 \quad\text{и}\quad \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1,$$

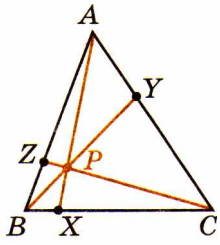
т. е. $Z_X = Z$, что противоречит допущенному.

Теорема доказана.

Следствие. ***Тригонометрическая форма теоремы Чевы.*** **На сторонах *BC, AC* и *AB* треугольника *ABC* расположены точки *X, Y* и *Z* соответственно. Для того чтобы чевианы *AX, BY* и *CZ* пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы**

$$\frac{\sin ACZ}{\sin ZCB}\cdot\frac{\sin BAX}{\sin XAC}\cdot\frac{\sin CBY}{\sin YBA}=1.$$

Теорема Чевы



$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

It

Чевианы AX, BY и CZ пересекаются в одной точке.

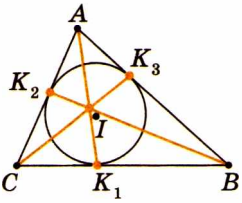
Тригонометрическая форма теоремы Чевы:

$$\frac{\sin ACZ}{\sin ZCB}\cdot\frac{\sin BAX}{\sin XAC}\times$$

$$\times\frac{\sin CBY}{\sin YBA}=1$$

По теореме синусов из треугольников ACZ и ZCB получим:

$$\frac{AZ}{ZC}=\frac{\sin ACZ}{\sin A}\cdot\frac{CZ}{ZB} \text{ и } \frac{AZ}{ZB}=\frac{\sin ACZ}{\sin ZCB}\cdot\frac{\sin B}{\sin \text{А}}, \text{ т. е. } \frac{AZ}{ZB}=\frac{\sin ACZ}{\sin ZCB}\cdot\frac{\sin B}{\sin A}.$$



$AK_1BK_2CK_3$ пересекаются в одной точке.

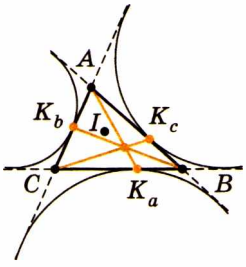
Аналогично

$$\frac{BX}{XC}=\frac{\sin BAX}{\sin XAC}\cdot\frac{\sin C}{\sin \text{Б}}\cdot\frac{CY}{YA} \text{ и } \frac{BX}{XC}=\frac{\sin CBY}{\sin YBA}\cdot\frac{\sin A}{\sin C}.$$

Для завершения доказательства осталось перемножить полученные равенства.

Следствие. **Следствиями теоремы Чевы являются такие известные теоремы.**

1. **Медианы треугольника пересекаются в одной точке.**
2. **Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**
3. **Высоты треугольника пересекаются в одной точке.**
4. **Прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие его периметр пополам, пересекаются в одной точке.**
5. **Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания к противолежащей стороне вписанной в треугольник окружности, пересекаются в одной точке.**
6. **Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания к противолежащей стороне вневписанной окружности данного треугольника, пересекаются в одной точке.**



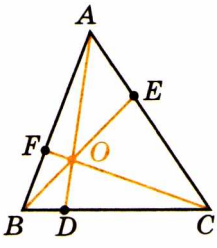
AK_a, BK_b, CK_c пересекаются в одной точке.

Доказательство этих следствий предлагаем провести **самостоятельно.**



Для любознательных

Французским математиком Жергоном в 1818 г. была доказана такая теорема.



Теорема Жергона. Если прямые AD, BE, CF проходят через вершины A, B, C треугольника ABC и пересекаются внутри треугольника ABC в точке О, то выполняются соотношения

$$(1)\ \frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1; \qquad (2)\ \frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=2.$$

Доказательство

Площади треугольников AOC и ABC (см. рис.) относятся как их высоты, которые относятся как OE к BE (если из точек B и O провести соответствующие перпендикуляры к AC - получим подобные треугольники). Тогда $\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}=\frac{OE}{BE}$. Аналогично $\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}=\frac{OD}{AD}$ и $\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{OF}{CF}$. Сложим полученные равенства:

$$\frac{OE}{BE}+\frac{OD}{AD}+\frac{OF}{CF}+\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$$

Опорная задача 1

Докажите, что если на двух пересекающихся в точке *A* прямых c и *Ъ*, отметить по две точки C и C_v *B* и B, соответственно (рис. **1.54**), **то**

$$\frac{S_{\dots}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{ABAC}{AB_1 AC_1}.$$

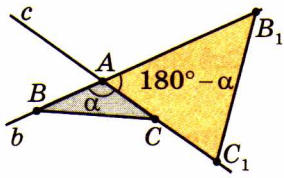
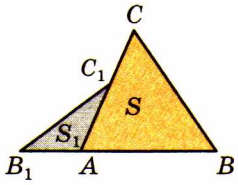


Рис. 1.54



$$\frac{S_{ABC}}{\text{^}AB_1C_1} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC \sin a}{\frac{AB_1}{2} \cdot AC_X \sin(180° - a)} = \frac{AB \cdot AC \sin a}{AB_1 \cdot AC_X \sin a}.$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}$$

Опорная задача 2

Докажите, что sin 2a = 2sinacosa, (угол a - острый).

Дано: ZB = 2a.

Доказать: sin2a = 2sinacosa.

sin2a = 2sinacosa

1) $AB = BC = 1$, BK – по построению (рис. **1.55**). Тогда $BK \perp AC$ и

$AK = AB\sin a = \sin a$,

$BK = AB\cos a = \cos a$.

2) $\text{^}ARC = \text{^}ABK$ SCBK. Отсюда.

$$\frac{1}{2}\sin 2a = 2\left(\frac{1}{2}\sin a \cos a\right)$$

и $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.

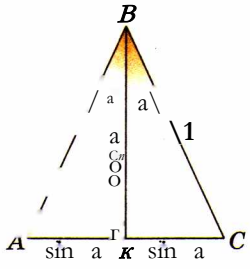
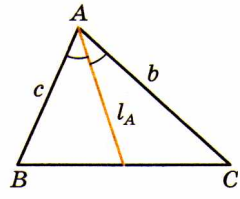


Рис. 1.55

Опорная задача 3

Докажите, что длину биссектрисы угла *A* треугольника *ABC* (рис. **1.56**) **можно вычислить по формуле**

$$l_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b + c}.$$



$$l_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b + c},$$

$$l_B = \frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a + c},$$

$$k = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a + b}$$

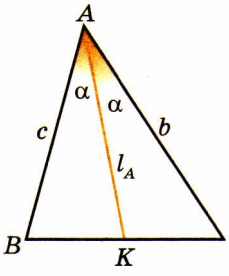


Рис. 1.56

1) $S_{A\ BC} = S_{ABK} + S_{CAK}$, тогда:

$$\frac{1}{2}cb\sin 2a = \frac{1}{2}cl_A\sin a + \frac{1}{2}bl_A\sin a.$$

Для любознательных

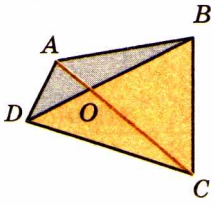
1. Докажите, что для произвольного значения ***a*** существует треугольник со сторонами $\sqrt{a^2 - a + 1}$, $\sqrt{a^2 + a + 1}$, $\sqrt{4a^2 + 3}$, площадь которого не зависит от ***a***.
2. Точки ***E*** и ***F*** - середины сторон ***BC*** и ***AD*** параллелограмма ***ABCD***. Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми ***AE***, ***ED***, ***BF*** и ***FC***, если площадь параллелограмма ***ABCD*** равна S.

2) Воспользуемся формулой sin2a = 2sinacosa (0.3.-2):

$2cb\sin\alpha\cos\alpha = (c+b)l_A \sin\alpha$. Отсюда $l_A = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

Опорная задача 4

Докажите, что в произвольном выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC делится точкой O пересечения диагоналей в отношении $AO : OC = S_{ABD} : S_{CBD}$ (рис. 1.57).



$AO : OC = S_{ABD} : S_{CBD}$

1) По построению: $AK \perp DB$, $CN \perp DB$; $AK = h_x$, $CN = h_2$.

2) $\angle AKO = 90° = \angle CNO$, $\angle AOK = \angle CON$ как вертикальные. Тогда $\triangle AOK \sim \triangle CON$ и $AO : OC = h_x : h_2$.

3) BD - общая сторона треугольников ABD и CBD. Тогда $S_{ABD} : S_{CBD} = \frac{1}{2}h_1 : \frac{1}{2}h_2 = AO : OC$.

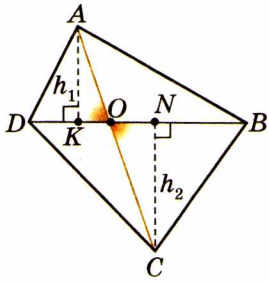
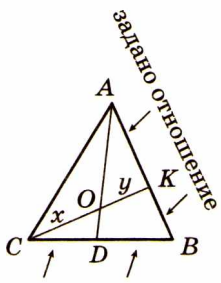


Рис. 1.57



задано отношение

$x : y$?

Запишите:

1) $x : y = S_{ACD} : S_{AKD}$.

2) $\angle ACD$, $\angle ADB$ = —

3) $\angle ADK$ ■ $\angle KDB$ ~ -■

4) Поделите (2) на (3).

Опорная задача 5

Точка K делит сторону AB треугольника ABC в отношении $AK : KB = 2:3$ (рис. 1.58). **В каком отношении медиана AD делит отрезок CK?**

Дано: $AK : KB = 2:3$; $AD = m_a$.

Найти: $CO : OK$.

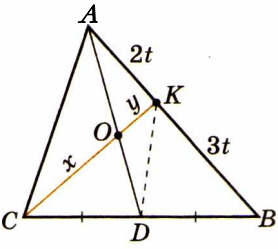


Рис. 1.58

Обозначим площадь треугольника ABC через S.

1) В четырехугольнике $AKDC$ согласно 0.3.-4:

$CO : OK = S_{ACD} : S_{AKD}$.

2) AD - медиана, тогда $S_{ACD} = S_{ABD} = \frac{1}{2}S$.

3) $AK : KB = 2:3$, тогда

Для любознательных

Опорная задача. Найдите площадь треугольника ABC по его высотам.

1) Площадь треугольника ABC равна:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c, \text{ тогда } \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}} = k, \; c = \frac{1}{h_c}k.$$

2) Треугольник ABC подобен (с коэффициентом подобия k) треугольнику $A_1B_1C_1$, стороны которого: $a_1 = h_a$, $b_1 = h_b$ и $c_1 = \frac{1}{h_c}k$.

3) Площадь S_1 треугольника $A_1B_1C_1$ найдем по формуле Герона. Искомая площадь треугольника $S = k^2S_1$.

^ADK • $S_K DB$ - 2 .'3 и ~$S_{ADK} S_{ABB}$ _ 2 5 = _ (_ S) = – 2 (1 ^ 1 * 5^* t Все исследуй, lie I предоставь разуму первоеместо. I I ^yj в д о н э) Пифагор . . .

4) $CO:OK = \frac{1}{2}S:\frac{1}{2}S = \frac{5}{2}$.

Ответ: $CO : OK = 5:2$.

Задание 10

1*. Площадь прямоугольного треугольника в 4 раза меньше площади квадрата, построенного на его гипотенузе. Найдите острые углы треугольника.

2*. Докажите, что для любого треугольника отношение периметра к одной из его сторон равно отношению высоты этого треугольника, опущенной на указанную сторону, к радиусу вписанной в треугольник окружности.

3*. Докажите, что для произвольного треугольника со сторонами a, $Ъ$, c и площадью S выполняется неравенство $aЪ + ac + Ъc > 6S$.

4**. Докажите, что площадь четырехугольника не превышает произведение полусумм его противоположных сторон.

5**. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 см и 5 см, одна из диагоналей которого 6 см. Найдите стороны треугольника, если диагонали параллелограмма параллельны двум сторонам треугольника, а меньшая сторона параллелограмма лежит на третьей стороне треугольника.

6**. Докажите, что сумма расстояний от произвольной внутренней точки правильного треугольника до его сторон не зависит от расположения этой точки.

7**. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон - величина постоянная для данного треугольника.

8**. Дан $ZAOB$ = 120°, OC - его биссектриса. Точка M расположена внутри угла AOC и удалена на $a, Ъ, c$ от OA, OB, OC соответственно. Докажите, что $b = a + c$.

9*. Две окружности с центрами в точках O_v 0_2 и радиусами 21 см, 35 см пересекаются в точках А и B, при этом Z0,A0_2 = 120°. Найдите АВ.

10**. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилегающие к боковым сторонам трапеции, являются равновеликими с площадью, равной среднему геометрическому площадей треугольников, прилежащих к основаниям трапеции.

11*. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, в 8 раз больше площади треугольника. Найдите острые углы треугольника.

12**. Докажите: если разность двух сторон треугольника равна разности высот, проведенных к этим сторонам, то указанные стороны лежат против острых углов.

13**. Каждая из двух высот треугольника не меньше обеих сторон, к которым проведены эти высоты. Найдите углы треугольника.

14**. Каждая из двух высот треугольника делит его на две равновеликие части. Найдите углы треугольника.

15*. Окружность с центром на гипотенузе прямоугольного треугольника касается его катетов, равных 21 см и 28 см. Найдите ее радиус.

16*. Полуокружность с центром на гипотенузе треугольника делит ее на отрезки 30 см и 40 см. Найдите ее радиус.



Для любознательных

1. Постройте треугольник по его высотам. Совет. См. опорную задачу на стр. 72.

2. Высоты одного треугольника равны соответственно высотам второго. Докажите равенство этих треугольников.

3. Высоты одного треугольника соответственно пропорциональны высотам второго. Докажите подобие этих треугольников.

17**. Полуокружность с центром на одной из сторон треугольника касается двух других его сторон *a* и *Ь.* Радиусы полуокружности, проведенные в точки касания, образуют угол *a.* Найдите расстояние между точками касания и радиус полуокружности.

18**. Точка *O* - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Площади треугольников OAB, *OBC* и *OAC* равны 30 см², 52 см² и 74 см² соответственно. Найдите стороны треугольника *ABC.*

19**. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Площади треугольников, прилежащих к основаниям трапеции, равны p^2 и q^2. Докажите, что площадь трапеции равна $(p + q)^2$.

20**. Диагонали выпуклого четырехугольника *ABCD* при пересечении в точке *O* делят его на четыре треугольника: *AOB, BOC, COD, AOD.* Докажите, что

o . c _ c .c
'-'лов °COD "^BOC AOD'

21**. Диагонали выпуклого четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *O.* Докажите, что треугольники *AOB* и *COD* равновеликие тогда и только тогда, когда *BC* || *AD.*

22**. Пусть *K, L, M, N* - середины сторон AB, *BC, CD* и *DA* выпуклого четырехугольника *ABCD* соответственно; отрезки *KM* и *LN* пересекаются в точке *O.* Докажите, что $S_{AKON} + S_{CL0M} = S_{BKOL} + S_{DN0M}$.

23**. Диагонали выпуклого четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *P.* Даны площади *AABP, ABCP* и *ACDP.* Найдите площадь *AADP.*

24**. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника, площади которых выражены целыми числами. Докажите, что произведение этих чисел является точным квадратом.

25**. Диагонали выпуклого четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *P.* При этом $S^2_{ABP} + S^2_{CDP} = S^2_{ir;} + S^2_{ADp}$. Докажите, что *P* - середина одной из диагоналей.

26**. Внутри выпуклого четырехугольника *ABCD* отметили три точки, не лежащие на одной прямой: P_v P_2 и P_s. При этом сумма площадей $AABP_п$ и $ACDP_п$ равна сумме площадей $ABCP_п$ и $AADP_п$ для каждого $п$ є {1; 2; 3}. Докажите, что *ABCD* - параллелограмм.



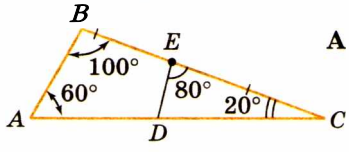
Для любознательных

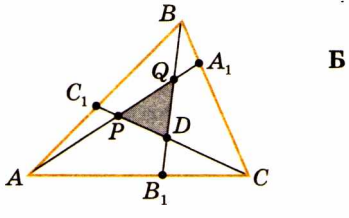
1. Найдите площадь треугольника, если заданы длины всех его медиан.
Совет. Вспомните опорную задачу о площади треугольников, на которые делят заданный треугольник его медианы (стр. 68).

2. В треугольнике *ABC* точка *E* - середина стороны *BC,* точка D лежит на стороне *AC; AC* = 1; *ZBAC* = 60°; *ZABC* = 100°; *ZACB* = 20°; *ZDEC* = 80° (рис. А). Найдите сумму площади *AABC* и удвоенной площади *ACDE.*

3. В треугольник T_a = *AAjA.yAj* вписан треугольник $T_ь$ = $AB_jB_2B_3$, а в треугольник $T_ь$ вписан треугольник T_c = $AC_tC_2C_a$. Стороны треугольников T_a и $T_ь$ попарно параллельны. Найдите площадь треугольника $T_,$ если известны площади треугольников T_a и T_c.

4. Точки A,, B, и C_t делят стороны треугольника ABC в отношениях BA,: A_XC = *p,* CB_X: B,A = *q;* *AC*: C;B = f. Точки пересечения отрезков A4.,, BB, и CC, расположены и обозначены так, как показано на рисунке Б. Найдите отношение площадей треугольников *PQD* и ABC.





Б

5. Докажите, что для длин сторон *a, Ь, c* треугольника ABC, его площади *S,* радиусов r и *R* вписанной и описанной окружностей треугольника выполняется неравенство

$$\frac{9r}{2S} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{19R}{4S}.$$

§ 10. Метод координат как способ решения геометрических задач

Чтобы проиллюстрировать эффективность применения метода координат, рассмотрим решение трех задач предложенным методом и геометрическим способом. В каждой из этих задач нужно построить окружность, что, с точки зрения аналитической геометрии, равносильно составлению уравнения искомой окружности или определению ее радиуса и координат центра.

Покажем, что применение метода координат может значительно облегчить поиски решения. С этой целью для каждой задачи рассмотрим решение двумя способами: первый - методом координат; второй - используя элементарную геометрию.

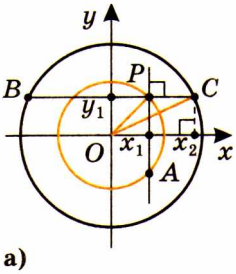
Характерно, что решения первым способом проводятся по одному плану и идейно похожи, а решения вторым - имеют мало общих черт и основываются на использовании разных теорем.

Что бы ты не изучал, - ты учишься для себя.

Гай Петроний
(Рим, пр. 66 г.)

Пример 1. Через произвольную точку ***P*** меньшей из двух концентрических окружностей радиусов йиг, провели прямую, пересекающую большую окружность в точках Б и С. Перпендикуляр к ***(BC),*** проведенный через точку ***P,*** пересекает меньшую окружность в точке А. Найдите |РА|² + |РБ|² + ***|PC|².***

Первый способ



а)

Через центр ***O*** данных окружностей проведем оси ***Ox*** || ***BC*** и ***Oy*** (рис. 1.59-а). В выбранной системе координат:

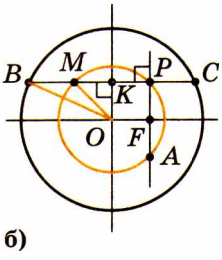
P(x1; y1), A(x1; -y1), C(x2; y2), B(-x2; y2).

Запишем искомую сумму:

|РА|² + |РБ|² + ***|PC|²*** = (2г/1)² + ***(x1 + x2)²*** + ***(x1*** - x2)² = 2(Xj² + 1y²) + ***2(x2²*** + ***y1²)*** = = 2г² + 2 ***R².***

Суть координатного метода - выразить зависимости между элементами геометрической фигуры с помощью алгебраических соотношений.

Второй способ



б)

Рис. 1.59

Проведем через центр окружностей прямые ***FO*** || ***BC*** и ***OK 1 BC*** (рис. 1.59-б). Тогда: ***MK = KP, BK=KC, PF = FAn PB = BK + KP, PC = BK - KP, OK² + KP²*** = г², ***OK² + BK² = R².***

Искомая сумма равна:

(BK + KP)² + ***(BK*** - ***KP)²*** + (2***OK)²*** = = 4 ***OK²*** + 2 ***BK²*** + 2 ***KP²*** = 2 ***(OK²*** + + ***BK²)*** + 2 ***(OK² + KP²)*** = ***2r²*** + 2Б².

Пример 2. Через точки А(4; 1) и Б(11; 8) проведите окружность, касающуюся оси ***Ox.***

I

Первый способ

| Очевидно, что искомая окружность лежит выше I оси ***Ox.*** При этом она касается оси ***Ox.*** Тогда ордината центра окружности равна ее радиусу: ***b*** = r. Поэтому уравнение искомой окружности имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - r)^2 = r^2, \text{ или } (x - a)^2 + y^2 - 2ry = 0.$$

Подставляя в это уравнение последовательно координаты точек A и ***B,*** получим равенства

$$(4 - a)^2 + 1 - 2r = 0, \quad (11 - a)^2 + 64 - 16r = 0.$$

Отсюда: $a_x = 7;\ a_2 = -1$; $b_x = r_x = 5$; $b_2 = r_2 = 13$.

Таким образом, существуют две окружности, удовлетворяющие условию задачи:

$$(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 25 \text{ и } (x + 1)^2 + (y - 13)^2 = 169.$$

Второй способ

Анализ

Пусть прямая ***AB*** пересекает ось ***Ox*** в точке C, а окружность касается этой оси в точке ***D.***

Длина отрезка ***CD*** - среднее геометрическое (пропорциональное) отрезков касательной ***CB*** и ***CA.***

Искомая окружность проходит через три точки: ***A, B*** и ***D.***

План построения

1. Проводим прямую ***AB,*** получаем ***C*** - точку ее пересечения с осью ***Ox*** (рис. 1.60).

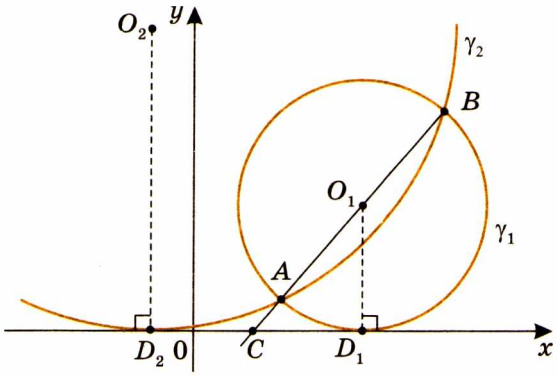


Рис. 1.60

2. Имея отрезки ***CB*** и ***CA,*** строим отрезок $t = \sqrt{CB \cdot CA}$ (как среднее пропорциональное).

Решение задач ***координатным методом:***

1) строим прямоугольную систему координат;

2)находим координаты точек;

3) определяем расстояние между точками, составляем уравнения прямых и т. п.;

4)анализируем полученные соотношения.

Прямоугольную систему координат можно вводить произвольным образом - результат не зависит от выбора системы координат. Однако от того, насколько удачно это сделано, зависит рациональность решения, уровень сложности и время получения искомого результата.



Для любознательных

На прямой ***π*** задано три точки A, B и C, Be [AC]. С одной стороны от прямой ***π*** построили равносторонние треугольники ***AMB*** и ***BNC.*** Докажите, что середины отрезков ***MC, NA*** и точка B - вершины правильного треугольника.

Совет. Выберите точку B за начало координат, а прямую ***π*** - за ось абсцисс.

3. Откладываем на оси Ox от точки C отрезок t (две возможности) - получаем точки D_x и D_2.
4. Строим две окружности y, и y_2, которые проходят через точки А, B, D_t и В, А, Несоответственно.

Доказательство

По построению имеем: $CD_X - CD_2 = t = |ICB \blacksquare CA|$, окружности y_x и y_2 проходят через три точки A, B, D_x и A, B, D_2 соответственно.

Доказать: D_x и D_2 - точки касания окружностей оси Ox.

Закончить доказательство предлагаем гамостоятельно.

Пример 3. Даны две взаимно перпендикулярные прямые и точка А, удаленная от одной из них на расстояние в два раза большее, чем от другой. Постройте окружность, проходящую через точку А и касающуюся заданных прямых.

Первый способ

Направим вдоль заданных прямых оси координат Ox и Oy (рис. 1.61). Тогда А(2; 1), искомая окружность лежит в первой четверти координатной плоскости и координаты центра окружности равны ее радиусу: $a = b = r$. Тогда уравнение искомой окружности имеет вид:

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2.$$

Подставим в это уравнение координаты точки А:

$$(2 - r)^2 + (1 - r)^2 = r^2, \text{ или } r^2 - 6r + 5 = 0.$$

Отсюда: $r_x = 1$; $r_2 = 5$. Таким образом имеем две окружности, удовлетворяющие условию задачи:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ и } (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

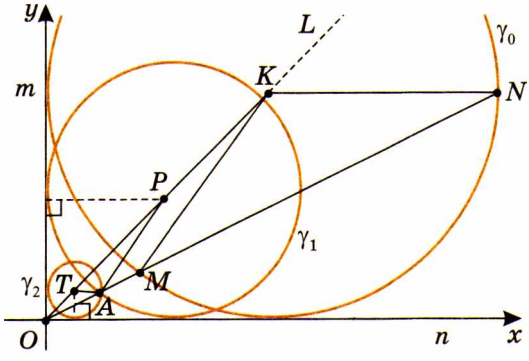


Рис. 1.61

Второй способ

Анализ

Если построить в первой четверти произвольную окружность, касающуюся осей Ox и Oy, то она будет гомотетичной искомой окружности с центром гомотетии в точке O.

Применение координатного метода не требует рассмотрения сложных геометрических конфигураций,проведения дополнительных построений и их обоснований. Координатный метод позволяет алгоритмизировать решение геометрических задач.

Каждая решенная мной задача становилась образцом, служившим далее для решения других задач.

Рене Декарт, «Размышления о методе»

План построения

1. Строим окружность y_0, касательную к осям Ox и Oy (ее центр K лежит на биссектрисе OL координатного угла).
2. Проводим прямую OA - она пересекает окружность y_0 в точках M и N.
3. Через точку А проводим прямые, параллельные прямым KN и KM - они пересекают биссектрису OL в точках T и Р соответственно.

Точки P и T - центры искомых окружностей y_x и y_2, радиусы которых равны PA и TA соответственно.

Доказательство

По построению имеем: OL - биссектриса угла O; K - центр окружности y_0, которая касается Ox и Oy; $AT \,||\, KN$; $AP \,||\, KM$; $r_x = PA$; $r_2 = TA$.

Доказать: окружности y, и y_2 касаются Ox и Oy.

Справедливость построения следует из теорем о подобии фигур. Предлагаем провести доказательство самостоятельно.

Опорная задача

Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей этого треугольника.

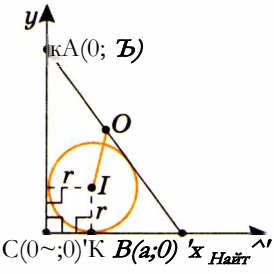


Рис. 1.62

Как известно, центр вписанной в треугольник окружности - инцентр I (точка пересечения биссектрис треугольника), а центр описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности O - середина гипотенузы. Тогда имеем следующую задачу (рис. 1.62).

Дано: $\angle C = 90°$, $CB = a$, $AC - b$, $AO = OB$, I - ин-

---

1) Расположим начало координат в точке C, а оси координат направим вдоль катетов треугольника. Тогда: А(0; b), $B(a;$ 0), С(0; 0), $1(r; r)$.

2) $0(x_0; y_0)$ - середина отрезка AB, тогда: $x_0 = \frac{a}{2}$, $y_0 = \frac{b}{2}$.

3) Учитывая, что в прямоугольном треугольнике $r = \frac{a + b - c}{2}$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, найдем расстояние между точками $1(r; r)$ и $0(x_0; y_0)$:

$$OP = (r - x_0)^2 + (r - y_0)^2 = 2r^2 - 2r(x_0 + y_0) + x_0^2 + y_0^2 = 2r(r - x_0 - y_0) + x_0^2 + y_0^2 =$$

$$= (a + b - c)\left(-\frac{c}{2}\right) + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{c^2}{2} + \frac{1}{4}(a^2 + b^2) - \frac{a+b}{2}c = \frac{3}{4}c^2 - \frac{a+b}{2}c.$$



Для любознательных

Вы, безусловно, знаете, что точка, движущаяся по плоскости так, что остается равноудаленной от двух неподвижных точек А и B, описывает прямую - серединный перпендикуляр к [АВ]. А вот какую кривую опишет точка, если расстояние от нее до неподвижной точки A будет в определенное число раз больше расстояния до неподвижной точки В? Оказывается это будет окружность ***(окружность Аполлония).*** Попробуйте это доказать. Если вам это не удастся, загляните в приложение 1.

Ответ. $\sim^{1}_{2}\{a^2 + b^2)^2 - 2(a + 6)\sqrt{a^2 + b^2}$.

Для сравнения попробуйте решить эту задачу без использования метода координат. (Перпендикуляр *IK,* опущенный из точки *I* на катет *CB,* делит его на отрезки r и *a* - *r.* Из прямоугольного треугольника *IKB* можно найти *IB* и $\mathrm{tg}\frac{jg}{}$. Теперь из треугольника *BOI,* по теореме косинусов, найдите *01,* выразив $\cos\frac{^2B}{}$ через $\mathrm{tg}\frac{B}{2}$.)

Задание 11

1. Докажите методом координат, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от всех его вершин.

2*. Используя метод координат, докажите теорему о средней линии треугольника.

3*. Докажите, что в трапеции: а) отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен полуразности оснований; б) сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон плюс удвоенное произведение оснований.

4*. В ромб *ABCD* с углом 45° вписана окружность радиуса *R.* Докажите, что для произвольной точки окружности *M* выполняется равенство $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \frac{5}{2}AB^2$.

5*. Площадь прямоугольника *ABCD* равна 48, а длина его диагонали - 10. В плоскости прямоугольника выбрали такую точку *K,* что *KB = KD=* 13. Найдите расстояние от точки *K* до наиболее удаленной от нее вершины прямоугольника.

6**. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике: а) сумма квадратов диагоналей равна удвоенной сумме квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон; б) сумма квадратов сторон равна сумме квадратов его диагоналей плюс квадрат удвоенного расстояния между серединами диагоналей.

7*. Докажите, что суммы квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до противолежащих друг другу вершин прямоугольника равны между собой.

8°. Вокруг окружности единичного радиуса описан квадрат *ABCD.* Докажите, что расстояния *a, Ь, c, d* от произвольной точки окружности до вершин квадрата *A, B, C, D* связаны соотношением: а) $a^2 + Б^2 + c^2 + d^2 = 12$; б) $a^2c^2 + b^2d^2 = 10$.



Для любознательных

В следующих задачах используются традиционные обозначения для элементов треугольника ABC.

1. Докажите, что среди всех треугольников с фиксированными значениями меры угла *A* и площадью S наименьшую длину стороны *a* имеет равнобедренный треугольник с основанием *a.*

2. Докажите, что среди всех треугольников с фиксированными углом *A* и полупериметром *p* найбольшую площадь имеет равнобедренный треугольник с основанием *a.* Совет. Вспомните опорные задачи вневписанной окружности.

3. Рассмотрите множество всех остроугольных треугольников с заданными стороной *a* и углом A. Найдите наибольшее значение суммы квадратов длин сторон *Ь* и *c.*

4. Пусть *O* - центр окружности, описанной вокруг треугольника *ABC,* а точка *M* - его центроид. Докажите, что прямая *OM* перпендикулярна медиане *CK* тогда и только тогда, когда $a^2 + Б^2 = 2c^2$.

9**. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями, пересекающимися в точке P. Докажите, что середины сторон AB, CD и точки O, P - вершины параллелограмма.

10*. Найдите геометрическое место точек плоскости: а) сумма расстояний от которых до двух заданных точек A и B - величина постоянная, равная длине отрезка AB; б) модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек A и B - величина постоянная, равная длине отрезка AB.

11*. Найдите (методом координат) геометрическое место точек, равноудаленных от двух заданных точек.

12*. Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до двух заданных точек - величина постоянная.

13**. Дан равносторонний треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек M таких, что $MC^2 = MA^2 + MB^2$.

14**. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек M для каждой из которых: а) $MB^2-MA^2= 2AB^2$; б) $2AM^2-BM^2=$ 2AB^2; в) $AM^2 + 2BM^2= 6AB^2$.

15**. Задан квадрат со стороной 2a. Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до вершин этого квадрата - величина постоянная и равна 12a^2.

16*. Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до заданных точек A(2; -3) и B(2; -1) - величина постоянная, равная 6.

17**. Заданы две точки: A и B. Найдите геометрическое место точек M, для которых $AM : MB = k, k*0$.

18**. Постройте геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют соотношению:

а) $\sqrt{(x-2)^2} = 2\sqrt{(y+1)^2}$;

б) $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 3$;

в) -*/(*-2)^2 +{y-lf -л](x-2)^2 +(y-4)^2 =3;

г) $\left|\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x-5)^2 + (y-5)^2}\right| = 5$;

д) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

е) y](y-if =-Jl-(x-lf.

Задания для повторения главы I

1°. Какой четверти принадлежит точка $M(x; y)$, если: а) $x > 0$; $y > 0$; б) $X < 0$; $y > 0$; в) $x < 0$; $y < 0$?

2°. Запишите формулы для вычисления расстояния между точками: а) $A(x_B; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$; б) $A(x_A; y_A)$ и началом координат.

3°. Запишите уравнение окружности радиуса r с центром в: а) точке $Q(a;b)$; б) начале координат.

4°. Запишите координаты середины отрезка AB, если: а) $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B; y_B)$; б) $A(x_A; y_A)$ и B(0; 0).

5°. Запишите уравнение прямой в общем виде.

6°. Запишите условие параллельности прямых: а) $a_x x + b_1 y + c$, = 0 и $a_2 x + b_2 y + c_2 =$ = 0; б) $y = k^x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$.

7°. Дайте определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла от 0° до 180°.

8°. Запишите основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

9°. Запишите соотношения между тригонометрическими функциями углов: а) 90° - a и a; б) 180° - a и a.

10°. Сформулируйте теорему: а) синусов; б) косинусов.

11. Докажите теорему: а) синусов; б) косинусов.

12*. Сформулируйте: а) расширенную теорему синусов; б) следствия из теоремы косинусов.

13°. Запишите формулы для вычисления площади треугольника: а) Герона; б) по двум сторонам и углом между ними; в) через радиус вписанной окружности; г) через радиус описанной окружности.

14*. Как относятся площади двух треугольников, имеющих: а) одну общую сторону; б) одну общую высоту; в) один общий угол.

15. Как относятся площади двух частей треугольника, на которые его делит: а) медиана; б*) прямая, проходящая через вершину треугольника и делящая его противолежащую сторону в отношении $m:n$.

16°. Заданы координаты вершин треугольника: A(-7; 1), B(5; -4), C(5; 1). Найдите: а) координаты середины стороны AB; б) длину стороны AB; в) уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB; г) проверьте, принадлежит ли указанной окружности точка C.

17. Две окружности заданы уравнениями: $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 20$ и $x^2 + y^2 - 2x = 0$. а) Найдите координаты центров данных окружностей; б) найдите радиусы этих окружностей; в) запишите уравнение окружности с центром в середине отрезка, соединяющего центры заданных окружностей, и радиусом, равным среднему арифметическому радиусов заданных окружностей; г) определите, пересекаются ли заданные окружности.

18*. Как записать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, ни абсцисса, ни ордината которых не совпадают?

19. Как записать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, у которых равны: а) ординаты; б) абсциссы?

20°. Постройте на координатной плоскости прямую, заданную уравнением:
а) $y = 4$; в) $x + 3 = 0$; д) $3x + 2y = 0$; ж) $3y - 2x = 1$;
б) $x = -1$; г) $y=2x-3$; е) $4y-3x = 0$; з) $x + y = 0$.

21*. Найдите координаты точек пересечения прямой $y = ax$ с окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

22. При каких значениях параметра a окружность $x^2 + y^2 = 4$ касается прямой:
а*) $y = 2a$; б*) $x = -4a$; в**) $y = ax + 2$; г) $ax + (a - 2)y + 4 = 0$?

23. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку B(2; 3) и:
а) параллельна оси ординат; в) через начало координат;
б) параллельна оси абсцисс; г*) через точку A(1; 4).

24. Составьте уравнения прямых, представленных на рисунке 1.63 (стр. 82).

25. Найдите уравнение прямой, которая проходит через точку A(3; 5) и образует с положительным направлением оси абсцисс угол: а) 45°; б) 135°.

26. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку A(-1; 5) и:
а) параллельна оси абсцисс; б) параллельна оси ординат; в*) параллельна биссектрисе I и III координатных углов; г*) параллельна прямой $y = 2x$; д*) параллельна прямой $y = 1 - 3x$; е**) перпендикулярна прямой $y = 2x$.

27. Постройте треугольник ABC по координатам его вершин: A(5; 5), $B(-5;$ 6), C(1; -4). Найдите: а) длину стороны AC; б) уравнение прямой AC; в*) площадь треугольника ABC; г) координаты середины стороны AC; д*) уравнение медианы BM; е**) уравнение прямой, содержащей высоту ДЯ; ж**) координаты точки H - основания высоты BH; з**) длину высоты BH.

28. Найдите координаты точек пересечения окружности $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ с осью ординат.

29*. Без построения определите, пересекаются ли окружности: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ и $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

30**. При каких значениях параметра a окружности $(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 4$ и $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ будут касательными?

31. Стороны параллелограмма равны $2\sqrt{3}$ см и 4 см, а один из его углов составляет 30°. Найдите диагонали параллелограмма.

32. Является ли треугольник со сторонами 30 см, 26 см и 28 см тупоугольным?

33**. Биссектриса треугольника пересекает противолежащую сторону под углом 60° и делит ее на отрезки 3 см и 4 см. Найдите длину этой биссектрисы.

34*. Медиана треугольника, проведенная к стороне длиной 32 см, образует с ней угол 120°. Сторона, лежащая против указанного угла, равна $2\sqrt{97}$ см. Найдите третью сторону треугольника.

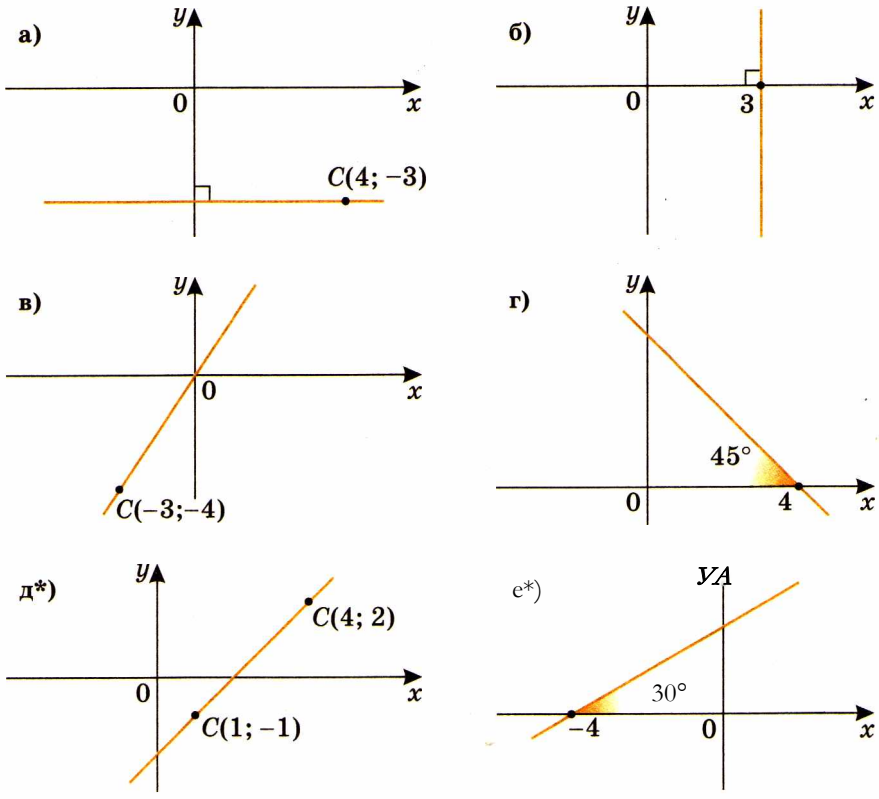


Рис. 1.63

35*. Сторона треугольника равна ***a,*** а прилежащие к ней углы - а и р. Найдите высоту треугольника, проведенную к заданной стороне.

36**. По заданному периметру ***P*** найдите стороны треугольника, если его острые углы равны а и р.

37. Найдите радиус описанной окружности, неизвестные стороны и неизвестные углы треугольника АВС, если АВ = 3 см, ZC = 45°, ***ZB*** = 30°.

38**. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.

39*. Выведите формулу для вычисления площади четырехугольника через длины его диагоналей.

40**. Диагональ ***BD*** делит выпуклый четырехугольник ***ABCD*** на два треугольника, площади которых относятся как 2:3. В каком отношении эта диагональ делит отрезок ***AC?***

41. Вычислите площадь треугольника, если:
а) две его стороны равны 2 см и 6 см, а угол между ними - 150°;
б) стороны треугольника равны 15 см, 26 см и 37 см;
в*) две стороны равны 25 см и 40 см, а высота, проведенная к третьей, - 24 см;
г) два угла треугольника равны а и р, а высота, проведенная из вершины третьего угла, - й;
д*) два угла треугольника равны а и р, а биссектриса третьего угла - ***I;***
е*) две стороны треугольника равны 1 и >/15, а медиана, проведенная к третьей стороне, - 2.

42. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, если:
а) высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки 4 см и 16 см;

б) катеты относятся как 3 : 4, а гипотенуза равна 25 см;
в) разность катетов равна 2 см, а гипотенуза - 10 см;
г*) биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки 15 см и 20 см;
д*) высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см и делит ее на отрезки, разность которых - 7 см;
е*) биссектриса острого угла делит катет на отрезки 20 см и 16 см.

43. Вычислите площадь параллелограмма, если:
а) диагонали параллелограмма равны 15 см и 20 см, а угол между ними - 30°;
б) стороны и диагональ равны 13 см, 14 см и 15 см соответственно;
в*) две высоты, проведенные из вершины тупого угла, равны 12 дм и 15 дм, а угол между ними - 30°.

44*. Вычислите площадь ромба, если:
а) перпендикуляр, проведенный из вершины тупого угла ромба на сторону, делит ее на отрезки 7 см и 18 см, считая от вершины острого угла;
б) сумма его диагоналей равна 34 см, а сторона - 13 см;
в) разность диагоналей равна 14 см, а сторона - 13 см;
г) высота равна 24 мм, а диагонали относятся как 3 : 4.

45*. Вычислите площадь трапеции, если:
а) ее основания равны 18 см и 13 см, а боковые стороны - 3 см и 4 см;
б) ее основания равны 11 мм и 4 мм, а диагонали - 9 мм и 12 мм.

46*. Вычислите площадь равнобокой трапеции, если:
а) ее основания равны 40 дм и 24 дм, а диагонали - взаимно перпендикулярны;
б) ее основания равны 50 см и 14 см, а диагональ - 40 см;
в) ее основания равны 39 см и 15 см, а диагонали - перпендикулярны к боковым сторонам;
г) ее основания равны 50 см и 30 см, а боковая сторона - 26 см;
д) ее основания равны 11 см и 25 см, а диагонали являются биссектрисами тупых углов.

47*. Вычислите площадь прямоугольной трапеции, если:
а) разность ее оснований равна 7 см, большая боковая сторона - 25 см, а меньшая диагональ является биссектрисой прямого угла;
б) один из ее углов равен 135°, а основания - 2 см и 4 см.

48*. В параллелограмме ***ABCD*** угол ***BAD*** равен 60°, а сторона АВ - 3 см. Биссектриса угла ***A*** пересекает сторону ***BC*** в точке ***E.*** Вычислите площадь треугольника ***ABE.***



Для любознательных

В предлагаемых задачах используются традиционные обозначения для элементов треугольника ***ABC.***

1. Докажите для углов и сторон Л ABC: ctgA + ctgB + ctgC = $\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

2. На сторонах треугольника ABC ($S^{\wedge} \triangleq S$) извне построены квадраты с центрами A_v B,, C_r Пусть a_v b_v c_x - длины сторон треугольника AjBjCj, а Sj - его площадь. Докажите, что:

а) $aI + B_1^2 + c_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S;$ б) S, - S = $(a^2 + b^2 + c^2)$: 8.

3. Один из попугаев ***A, B, C*** всегда говорит правду, один - всегда лжет, а один - хитрит: иногда говорит правду, а иногда неправду. На вопрос: «Кто ты?» - они ответили так:

A: - Я врунишка!
B: - Я хитрец!
C: - Я честный попугай!
Кто из них врунишка, а кто хитрец?

49**. Медианы AN и BM треугольника ABC, равны 6 см и 9 см соответственно, пересекаются в точке K. При этом угол AKB равен 30°. Найдите площадь треугольника ABC.

50**. В треугольник вписана окружность радиуса 4 дм. Одна из сторон треугольника точкой касания делится на отрезки 6 дм и 8 дм. Найдите две другие стороны.

51**. Вершины треугольника соединили с центром вписанной окружности. Полученные отрезки разделили треугольник на 3 части, площади которых равны 28, 60 и 80 квадратных единиц. Найдите стороны треугольника.

52**. Докажите, если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь можно выразить в виде произведения длин отрезков, соединяющих середины противолежащих сторон.

53**. Докажите, если отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон выпуклого четырехугольника равны, то его площадь можно выразить в виде полупроизведения диагоналей.

Готовимся к тематической аттестации № 1

Вариант I

1. Найдите координаты середины отрезка AB, если A(-7; 2), B(-3; 4).
2. Запишите уравнение окружности с центром в точке A(-3; 4), радиус которой равен 5 см.
3. Какие из точек A(3; 6), B(2; 4), C(0; 7), D(2; 0), K(-5; 5) лежат на прямой $5x + 3y - 22 = 0$?
4. Найдите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.
5. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Вычислите наибольшую из высот треугольника.

Вариант II

1. Найдите длину отрезка AB, если A(-7; 9), B(-4; 5).
2. Точка C(0; 1) - середина отрезка AB. Найдите координаты точки B, если A(-2; -1).
3. Какие из точек A(1; 2), B(3; 4), C(-4; 3), D(0; 5), K(5; -1) лежат на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$?
4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку K(-2; 5) параллельно прямой $y = 4x - 2$.
5. Найдите наименьшую высоту треугольника, стороны которого равны 7 м, 8 м и 9 м.

Готовимся к тематической аттестации № 2

Вариант I

1. Постройте угол a, если tg a = -0,4.
2. Стороны треугольника равны 16 см, 6 см и 14 см. Вычислите угол между наибольшей и наименьшей сторонами треугольника.
3. В треугольнике одна из сторон равна 32 см и образует с другой стороной угол 45°, а третья сторона имеет длину 28 см. Найдите неизвестную сторону треугольника.
4. Сторона треугольника равна $9\sqrt{3}$ см, а противолежащий ей угол - 60°. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника.

Вариант II

1. Вычислите sin a и tg a, если cos a = -0,8.
2. Существует ли треугольник ABC, у которого: BC = 0,3; AC = 0,8; sin A = 0,4?
3. Определите вид треугольника, если его стороны равны 8 см, 4 см и 5 см.
4. Диагонали параллелограмма равны 7 см и 11 см, а стороны относятся как 6 : 7. Вычислите периметр параллелограмма.



Глава II

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ^^гХЛИНА окружности.* ПЛОЩАДЬ КРУГА

В этой главе мы возвращаемся к рассмотрению многоугольников - будем изучать свойства правильных многоугольников, использовать свойства многоугольников для решения геометрических задач. Кроме того, вы узнаете об одной очень важной в науке и технике постоянной - числе ***π*** («пи»), которое связано с измерением длины окружности и площади круга. Чудесным образом число ***π*** появляется в разнообразных математических и нематематических исследованиях, которые на первый взгляд очень далеки от геометрии. Этот факт еще раз подчеркивает целостность и единство наук, изучающих окружающий мир.

§ 11. Основные свойства правильных многоугольников и вычисление их элементов

Напомним: ***правильным называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.*** Простейшие примеры правильных многоугольников - равносторонний треугольник и квадрат.

Из сказанного следует, что два одноименных правильных многоугольника с равными сторонами - равны, т. е. их можно совместить наложением.

Многоугольник называется ***вписанным*** в окружность, если все его вершины лежат на окружности.

Многоугольник называется ***описанным*** вокруг окружности, если все его стороны касаются окружности.

'$A, \ldots A_n$ - правильный

* $\angle A_1 = \angle A_2 = \ldots = \angle A_n$

$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$ =

[=AA

Одноименные многоугольники - одинаковое число сторон.

Ш Теорема. Правильный многоугольник является вписанным в окружность и описанным вокруг окружности.

Доказательство

Обозначим меру угла рассматриваемого многоугольника $A_1A_2...A_n$ через а. Рассмотрим три последовательные вершины Ар A_2 и A_3 правильного многоугольника (рис .2.1).

Точку пересечения биссектрис углов Aj иA_2 обозначим через O.

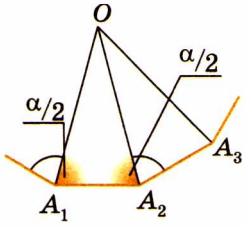


Рис. 2.1

Имеем:

$$ZOAjA_2 = ZOAjjAj = a : 2.$$

Тогда треугольник A_xOA_2 равнобедренный и $OA_2 = OA_г$

У треугольников A_1OA_2 и A_2OA_3: сторона OA_2 - общая, $ZOA_2A_1 = \frac{(X}{2} = ZOA_2A_3$, $A,A_2 = AgAg$. Тогда эти треугольники равны и $OA_3 = OA_2 = OA_v$ $ZOA_3A_2 = ZOA\hat{}A\hat{} = \frac{a}{2}$.

$A_1...A_n$ - правильный

$B_1...B_n$ - правильный

$a = b$

U

$A_X''-A_n = B_v..B_n$

Отсюда:

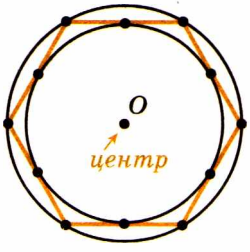
- точка O равноудалена от вершин A_v A_2, A_3;
- точка O является пересечением биссектрис углов A_x, A_2 и A_3.

Если провести аналогичные рассуждения для тройки вершин A_2, Ад, A_4 этого многоугольника и т. д., то в результате получим, что точка O равноудалена от всех вершин многоугольника и является точкой пересечения биссектрис всех его углов (т. е. равноудалена от всех его сторон).

Тогда точка O - центр описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника.

Теорема доказана.

Правильный многоугольник является вписанным в окружность и описанным вокруг окружности.



Для правильного многоугольника центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

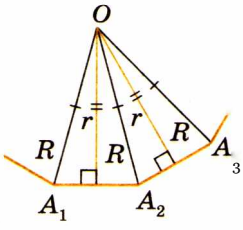


Рис. 2.2

Замечание. *Радиус описанной окружности - боковая сторона рассматриваемых равнобедренных треугольников. Радиус вписанной окружности - высота, проведенная к основанию этих треугольников* (рис. 2.2).



Для любознательных

Квадратный лист бумаги разрезали на шесть частей, каждая из которых имеет форму выпуклого многоугольника. Пять из этих частей потерялись, а та, что сохранилась, имеет форму правильного восьмиугольника. Можно ли по этой части восстановить начальные размеры квадрата?

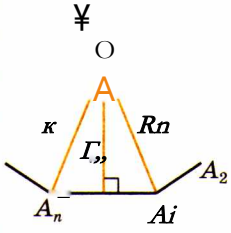
Следствие 1. Вписанная и описанная окружности правильного многоугольника имеют общий центр.

Его называют ***центром правильного многоугольника.***

Отрезок, соединяющий центр правильного многоугольника с серединой его стороны, еще называют ***апофемой правильного многоугольника.*** Она равна радиусу вписанной в этот многоугольник окружности.

$A_1A_2...A_n$ - ПРАВИЛЬНЫЙ

Центр $A_1A_2...A_n$ - центр вписанной и описанной окружностей.



r_n - *апофема*

Следствие 2. Из центра правильного многоугольника все его стороны видны под одним и тем же углом, градусная мера которого равна $\frac{360^\circ}{n}$, где n — число сторон (вершин) этого многоугольника.

Угол, под которым из центра правильного многоугольника видна его сторона, называют ***центральным углом*** этого многоугольника.

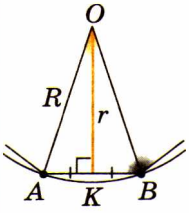


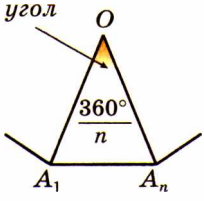
Рис. 2.3

Найдем радиус R описанной окружности и радиус r вписанной окружности для правильного n-угольника со стороной a.

Пусть A и B - две соседние вершины правильного многоугольника (рис. 2.3).

Тогда $AB = a$, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$, $OA = R$ и $OB = R$, а апофема $OK = r$.

центральный угол



В равнобедренном треугольнике AOB высота OK - медиана и биссектриса, поэтому

$$AK = KB = \frac{a}{2},\ \angle AOK = \angle BOK = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{180^\circ}{n}.$$

Напомним.
≡ - «совпадает», « тождественное равенство».

Из прямоугольного треугольника AKO ($\angle K = 90^\circ$):

$$R = AK : \sin \angle AOK = a : \left(2\sin\frac{180^\circ}{n}\right),$$

$$R_n = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$$

$$r = AK \cdot \operatorname{ctg}\angle AOK = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

$$r_n = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$$

Найдем площадь правильного n-угольника. Искомая площадь $S = n \cdot S_{AOB}$. Тогда:

$$S_n = n\frac{ah}{2} = \frac{1}{2}P_n r_n \Rightarrow S_n = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n};\quad S_n = \frac{n}{2}a^2\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

$$S_n = \frac{1}{2}P_n r_n$$

$$S_n = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$$

$$S_n = \frac{n}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n}$$

Тут P_n - периметр правильного многоугольника.

В частности, при $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$ получим следующие равенства.



Для любознательных

$A_1...A_n$ - правильный многоугольник. Точка M - точка окружности, описанной вокруг него. Докажите, что $MA_1^2 + MA_2^2 + ... + MA_n^2$ не зависит от расположения точки M на окружности.

ПРАВИЛЬНЫЙ

Запомним
для общей описанной окружности радиуса R:

$$r_3 = \frac{R}{2}$$

$$r = \frac{a_4}{2} = \frac{S_2}{2}R$$

$$R_6 = a_6 = 2r_3$$

Для ПРАВИЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА $n = 3$:

$$R_3 = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad r_3 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R_3 = 2r_3,$$

$$S_3 = \frac{1}{2}a\,a\sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Для ПРАВИЛЬНОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА $n = 4$:

$$R_4 = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad r_4 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}45^\circ = \frac{a}{2}; \quad R_4 = \sqrt{2}r_4; \quad S_4 = a^2.$$

Для ПРАВИЛЬНОГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА $n = 6$:

$$R_6 = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a; \quad r_6 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad R_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}r_6,$$

$$S_6 = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Замечание. При решении задач, в том числе и на построение, полезно помнить соотношения:

$$r_3 = \frac{R_3}{2}; \quad r_4 = \frac{a_4}{2}; \quad 2R_3 = a_3\sqrt{3}; \quad R_4 = a_4\sqrt{2}; \quad r_6 = a_6.$$

Отметим еще одно свойство правильных многоугольников с одинаковым числом сторон, вытекающее из подобия равнобедренных треугольников, основания которых - стороны соответствующих многоугольников, а вершины - их центры. Все соответственные линейные элементы подобных треугольников пропорциональны (коэффициент пропорциональности равен коэффициенту подобия). Тогда для двух правильных одноименных многоугольников:

Правильные A_n - A_n, B_n - B_n:

$$\frac{a}{b} = \frac{r_A}{r_B} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{P_A}{P_B}$$

- *отношение радиусов описанных окружностей равно отношению радиусов вписанных окружностей, а также отношению сторон этих многоугольников и отношению их периметров;*
- *отношение площадей равно квадрату отношения, о котором говорилось в предыдущем пункте.*



Для ПРАВИЛЬНОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА $n = 5$:

$$R_5 = \frac{a}{2\sin 36^\circ}; \quad r_5 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}36^\circ;$$

$$R_5 = r_5\cdot\frac{1}{\sin 36^\circ\operatorname{ctg}36^\circ} = \frac{r_5}{\cos 36^\circ}.$$

Найдем значение тригонометрических функций угла меры 36°. Для этого воспользуемся формулой

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ (стр. 71) и $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (форзац).

Имеем: $\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ\cos 18^\circ$;

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}};$$

$n = 3$

$$r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2r_3,$$

$$S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°} = \sqrt{1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$

$\sin 36° = 2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\sqrt{(3 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5 - \sqrt{5}};$

$\cos 36° = \sqrt{1 - \sin^2 36°} = \sqrt{1 - \frac{2(5 - \sqrt{5})}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} =$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}).$

Тогда для правильного пятиугольника:

$$S_5 = \frac{a \cdot 4}{2\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}} \cdot \frac{a\sqrt{2}(5 - \sqrt{5})}{16} = \frac{a^2}{4}(\sqrt{5} + 1).$$

Теорема. Если a_n и a_{2n} — стороны правильных n-угольника и $2n$-угольника, вписанных в окружность радиуса R, то выполняется соотношение

$$a_{2n}^2 = 2R(R - r_n) = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

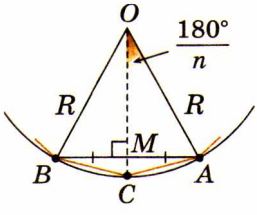


Рис. 2.4

Доказательство

Пусть AB - сторона правильного n-угольника, а точка C делит дугу AB пополам (рис. 2.4). Соединим точки A и C, B и C. Отрезки AC и BC - стороны правильного n

$n = 4$

$r_4 = \frac{a}{2}$

$R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}r_4$

$S_4 = a^2$

$n = 6$

$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = R_6$

$S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$n = 5$

$r_5 = \frac{a}{4}\sqrt{5 + 1}$

$R_5 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}$

Для любознательных

Теорема. НЕРАВЕНСТВО ПТОЛЕМЕЯ. Для произвольного выпуклого четырехугольника *ABCD* выполняется неравенство $AC \cdot BD < AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

Доказательство

Отложим на лучах AB, AC и AD отрезки AB', AC' и AD', длины которых равны $R^2 : AB$, R^2: AC и R^2: AD соответственно.

1) Имеем: AB : $AC = AC' : AB'$, $\angle CAB$ - общий, тогда $\triangle ABC \sim \triangle AC'B'$.

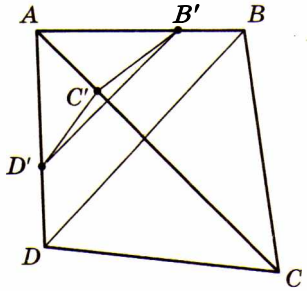
2) Коэффициент подобия треугольников ABC и $AC'B'$ равен $k = \frac{R^2}{AB \cdot AC}$. Поэтому $B'C' = \frac{R^2 \cdot BC}{AB \cdot AC}$.

Аналогично $C'D' = \frac{R^2 \cdot CD}{AC \cdot AD}$ и $B'D' = \frac{R^2 \cdot BD}{AB \cdot AD}$.

3) Для сторон треугольника $AD'B'$:

$$B'D' < B'C' + C'D'.$$

4) Умножим последнее неравенство на $AB \cdot AC \cdot AD$ и используем выражения, найденные для $B'C'$, $C'D'$, $B'D'$, - получим искомое неравенство.



2л-угольника, вписанного в ту же окружность радиуса *R*. Имеем:

$$OA = OC = OB = R,\ AB = a_n,\ OM = r,\ AC = a_{2n}.$$

Из треугольника AOC найдем по теореме косинусов AC^2 и учтем, что $OM = CM \cos \frac{180^\circ}{n}$ и

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2},$$

$$a_{2n}^2 = AC^2 = 2R^2 - 2R \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n} = 2R^2 - 2Rr =$$

$$= 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$



Теорема доказана.

Если *R* — общий:

$a_{in} = 2R(R - r_n)$

$< = 2R^2 -$

$-2R\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{}}$

Используя эту теорему, можно, например, записать через радиус описанной окружности *R* длины сторон правильных 8-угольника и 12-угольника.

$a_4 = \sqrt{2}$, $r_4 = \frac{a_4}{2}$; $a_6 = R$, $r_6 = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$, тогда

$$a_8^2 = 2R(R - r_4) = 2R\left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = R^2(2 - \sqrt{2});$$

$$a_{12}^2 = 2R(R - r_6) = 2R\left(R - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right) = 2R^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$



Для любознательных

МНОГОУГОЛЬНИКИ С ВЕРШИНАМИ В УЗЛАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКИ

Рассмотрим на координатной плоскости систему прямых, заданных уравнениями $x = m$ и $y = n$, где m, n - целые числа. Эти прямые задают решетку из квадратов, или ***целочисленную решетку.*** Вершины этих квадратов - точки с целочисленными координатами - называют ***узлами целочисленной решетки.***

1. Существует ли правильный треугольник с вершинами в узлах целочисленной решетки?
2. Докажите, что при $n \neq 4$ правильный n-угольник нельзя расположить так, чтобы все его вершины оказались в узлах целочисленной решетки.
3. Можно ли прямоугольный треугольник, длины сторон которого выражены целыми числами, расположить так, чтобы его вершинами были узлы целочисленной решетки, а ни одна из сторон не принадлежала линиям решетки?
4. Докажите теорему, которую называют ***формулой Пика.***

Теорема. **Если вершины многоугольника (не обязательно выпуклого) расположены в узлах целочисленной решетки, при этом внутри многоугольника содержится n узлов решетки, а на его сторонах - r таких узлов, то площадь многоугольника равна $n + 0{,}5r - 1$.**

5. Вершины треугольника расположены в узлах целочисленной решетки, при этом на сторонах треугольника других узлов нет, а внутри него содержится только один узел - точка *M*. Докажите, что *M* - центроид данного треугольника. Совет. Воспользуйтесь формулой Пика.

ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

При построении будем использовать только циркуль (можно чертить окружности и откладывать равные отрезки) и линейку без делений (можно проводить прямые через две заданные точки). Вспомните опорные задачи построения, которые вы изучали раньше (см. стр. 277-278).

Построение правильного треугольника

Выполняется как опорная задача построения треугольника по трем его сторонам - нужно соединить две произвольные точки плоскости и использовать полученный отрезок как сторону правильного треугольника.

Замечание. Правильный треугольник, вписаный в заданную окружность, можно построить, воспользовавшись соотношением г. $_{o} = \frac{Яз}{2}$ (рис. 2.5).

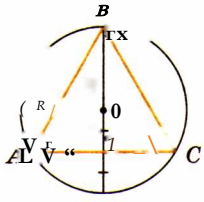


Рис. 2.5

Построение правильного четырехугольника - квадрата

Анализ

Диагонали квадрата являются взаимно перпендикулярными диаметрами описанной вокруг квадрата окружности.

План построения

1. Начертим окружность с центром ***O*** и проведем диаметр ***AB*** (рис. 2.6). ***A***
2. Строим прямую, перпендикулярную ***AB*** в точке О, - получим диаметр ***CD.*** Четырехугольник ***ACBD*** - искомый.

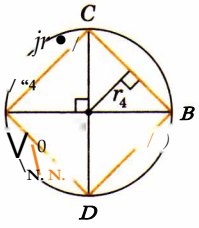


Рис. 2.6

Доказательство

По построению имеем. AB и ***CD*** – диаметры, ***AB1CD.***

Доказать-. ACBD - квадрат.

1) Углы четырехугольника прямые, т. к. опираются на диаметры. Тогда ***ACBD*** - прямоугольник.
2) Градусные меры дуг ***AC*** и ***CB*** равны (составляют по 90°). Тогда хорды АС и ***CB*** равны, ***ACBD*** - квадрат. Ч. т. д.

А какие еще способы построения квадрата вы можете предложить?

Построение правильного шестиугольника

Способ I

Анализ

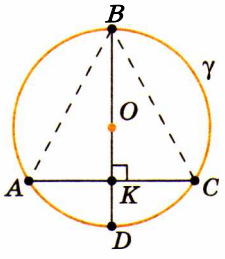
Учтем, что $a_6 = R$.

План построения

1. Начертим окружность с центром ***O*** (рис. 2.7).

Дана окружность — строим вписанные правильные:

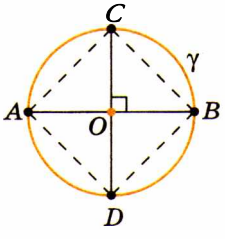
ТРЕУГОЛЬНИК



1) ***OD*** -» ***OK*** = ***KD;***
2) AC lOD вт. K;
3) ***(OD)*** П у = В.

Напомним:
(OD) - прямая ***OD;***
П - «пересекает».

КВАДРАТ

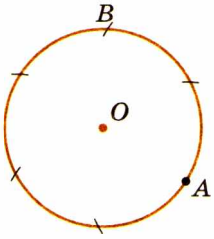


AB LCD в т. О.

Дана окружность — строим вписанный правильный

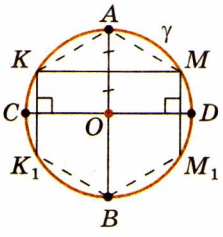
ШЕСТИУГОЛЬНИК

Способ I



Из произвольной точки окружности *A* делаем засечки раствором циркуля *R*.

Способ II



1) $R \to \gamma$;
2) *CD 1 AB* через *O*;
3) *KM* - серед, пер. к АО;
4) $KK_X \pm CD$, ММ, 1 *CD*.

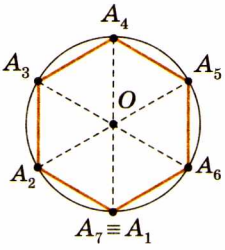


Рис. 2.7

2. Из произвольной точки окружности А, делаем засечку раствором циркуля, равным радиусу окружности, - имеем точку A_2.
3. Аналогично строим точки A_3, A_4, A_5, A_6. Шестиугольник $A\hat{}A.jA.Ji\hat{}AA_3\hat{}$ - искомый.

Доказательство

По построению имеем:

$\Lambda A_2 = a_n A_3 = a_n \Lambda = a_a = a_o \Lambda = \hat{}$-

Доказать: (1) $A_7 = A_X$; (2) $A_1 A_2 A_3 A_4 A A_e$ - правильный.

1) Треугольники OA_xA_2, $OA\hat{}$, ..., $OA_5A_в$ - равносторонние по построению, их углы равны по 60°, т. е. $\smile yA_xA_2 = \smile A{<}A_3 = ... = wA_5A_6 = \hat{}АД = 60°$. Тогда $ZA_1OA_7 = 6 - 60° = 360°$. Утверждение (1) доказано.
2) Стороны полученного шестиугольника равны по построению. Его углы равны между собой, т. к. $ДОА_1A_2 = ... = ДОА_дА_1$. Тогда шестиугольник $A_1A_2A_3A_4AA_6$ - правильный. Утверждение (2) доказано.

Способ II

План построения

1. Начертим окружность радиуса *R* с центром *O* (рис. 2.8).
2. Проведем диаметр *AB* и строим диаметр *CD* _L AB, затем серединный перпендикуляр *KM* к радиусу *AO*.
3. Строим точки K_x и M_x, симметричные точкам *K* и *M* относительно *CD*.

AMM_XBK_XK - искомый шестиугольник.

Доказательство проведите самостоятельно (учитывая, что $a_6 = R = 2r_3$, $AK = AM = R$).

Замечание. Если построен правильный n-угольник, то легко построить правильный 2n-угольник (например, с помощью серединных перпендикуляров к сторонам правильного n-угольника и описанной вокруг него окружности - см. рис. 2.8).

Постройте правильный восьмиугольник и правильный двенадцатиугольник самостоятельно.

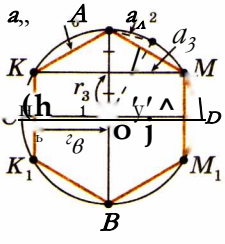


Рис. 2.8

Для любознательных

1. Докажите, что в правильном пятиугольнике: а) две диагонали, проведенные не из одной вершины, делятся точкой пересечения *в крайнем и среднем отношении* (см. стр. 224); б) один из отрезков, образованных при пересечении диагоналей, равен стороне этого пятиугольника.
2. Докажите, что $a_| = a_0^2 + {}_6 a^2$, где a_n - сторона правильного «-угольника, вписанного в окружность радиуса *R*.

Построение правильного десятиугольника

Анализ

1. Сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна

$$a_{10} = 2R\sin 18^\circ = R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} = R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

2. Отрезок длины $l = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}$ — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами R и $\frac{R}{2}$.

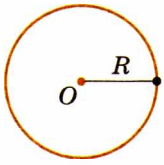
План построения

1. Начертим окружность произвольного радиуса R с центром O.
2. На произвольной прямой отложим отрезок, равный R, и разделим его пополам - имеем отрезок $\frac{R}{2}$.
3. Строим прямоугольный треугольник по катетам R и $\frac{R}{2}$ - имеем его гипотенузу $l = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}$.
4. Строим отрезок $a_{10} = l - \frac{R}{2}$.
5. На окружности от произвольной ее точки A_1 делаем засечки раствором циркуля a_{10} - получаем точки $A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ (точка A_{11} - совпадает с точкой A_1). Многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{10}$ - искомый.

Докажите это самостоятельно (что $A_{11} \equiv A_1$).

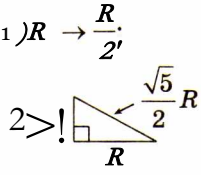


Дана окружность —



строим вписанный правильный:

ДЕСЯТИУГОЛЬНИК



$$a_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{4}$$

Построение правильного пятиугольника

Очевидно, если построен правильный десятиугольник, то, последовательно соединяя вершины этого многоугольника через одну, получим правильный пятиугольник.

Но можно построить правильный пятиугольник и иным способом, исходя из уже известной вам формулы:

$$a_5 = R\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2} = R\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}R\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - R\cdot\frac{R}{2}}.$$

Действительно, строить отрезок $t = \frac{\sqrt{5}}{2}R$ $= \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}$ если задан отрезок R, мы уже умеем. Осталось вспомнить, как строится среднее геометрическое $\sqrt{l\cdot\tau}$ двух заданных отрезков (см. стр. 278).

ПЯТИУГОЛЬНИК

1) $R \to \frac{R}{2}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}R$;

2) $\tau = \frac{\sqrt{5}}{2}R$,

3) $a_5 = \sqrt{l\cdot\tau}$.

Практическая работа 5

1. Постройте окружность. Проведите хорду окружности AB, равную ее радиусу, хорду $BC = AB$, хорду $CD = AB$ и т. д. Сколько таких хорд вы смогли провести? Совпадает ли конец последней хорды с точкой A? Измерьте стороны и углы полученного многоугольника. Является ли он правильным?
2. Постройте окружность и проведите в ней два взаимно перпендикулярных диаметра AC и BD. Разделите каждую из дуг AB, BC, CD, AD пополам. Середину каждой дуги соедините с ее концами. Измерьте углы и стороны полученного многоугольника. Является ли он правильным?

Практическая работа 6

1. С помощью транспортира и линейки постройте многоугольник с равными сторонами и равными углами по 108°. Обозначьте его вершины A_1, A_2, A_3, ... Сколько вершин имеет этот многоугольник? Является ли он правильным?
2. Можно ли было определить до построения многоугольника, сколько у него будет вершин? Сделайте соответствующие вычисления.
3. Постройте серединные перпендикуляры к двум сторонам многоугольника. Точку пересечения этих перпендикуляров обозначьте через O.
4. Постройте окружность с центром O и радиусом, равным OA_1. Лежат ли вершины многоугольника на этой окружности?
5. Постройте биссектрисы двух внутренних углов многоугольника. Что можно сказать о точке их пересечения I?
6. Опустите из точки O перпендикуляр OM на сторону AB. Постройте окружность с центром в точке O и радиусом, равным OM. Каким является многоугольник по отношению к этой окружности?

Задание 12

1°. Найдите углы при вершинах и центральные углы правильного:
а) восьмиугольника; б) двенадцатиугольника; в) шестнадцатиугольника.
2°. Сколько вершин имеет правильный многоугольник, у которого центральный угол равен: а) 30°; б) 12°; в) 24°?
3°. Сколько вершин имеет правильный многоугольник, внутренний угол которого равен: а) 150°; б) 135°; в) 140°?
4°. Сколько вершин имеет правильный многоугольник, внешний угол которого равен: а) 36°; б) 24°; в) 60°?
5. Может ли правильный многоугольник иметь внутренние углы градусной меры:
а) 20°; б) 48°?
6. Впишите в окружность правильный:
а) шестиугольник; б) восьмиугольник; в) двенадцатиугольник.
7. Опишите вокруг окружности правильный:
а) треугольник; б) шестиугольник; в) квадрат; г) восьмиугольник.



Для любознательных

1. *Триангуляцией* многоугольника называют разделение его на треугольники, имеющие следующие свойства. Эти треугольники или имеют общую сторону или общую вершину, или не имеют общих точек (т. е. вершина одного треугольника не может лежать на стороне другого). Докажите, что для любого многоугольника треугольники триангуляции можно покрасить в три цвета так, что треугольники, имеющие общую сторону, будут разного цвета.

Совет. Воспользуйтесь методом индукции (см. стр. 246).

2. Многоугольник разделен своими непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что вершины многоугольника можно раскрасить в три цвета так, что вершины каждого из полученных треугольников будут разного цвета.

8. По заданной стороне a постройте правильный:
а) восьмиугольник; б) двенадцатиугольник; в) квадрат; г) восьмиугольник.

В заданиях 9-14 обозначено: n - число сторон правильного многоугольника (га-угольника); a_n - сторона вписанного правильного га-угольника; b_n - сторона описанного правильного га-угольника; R или R_n - радиус окружности, описанной вокруг правильного га-угольника; г или r_n - радиус окружности, вписанной в правильный га-угольник (его апофема).

9. Найдите сторону правильного га-угольника, если:
а) га = 3; i? = 12; в) га = 6; i? = 3; д) n = 4; R = 8;
б) га = 3; г = 2; г) га = 6; г = 2; е) га = 4; г = 2.
10. По данной стороне $a_n = a$ найдите R, если:
а) га = 3; S) га = 4; в) п = 6; г) n = 8; д) га = 12.
11. По данной стороне $a_n = a$ найдите b_n, если:
а) га = 3; б) га = 4; в) га = 6; г) га = 8; д) л = 12.
12. По данной стороне $a_n = a$ найдите апофему, если:
а) га = 3; б) га = 4; в) га = 6; г) га = 8; д) га = 12.
13*. Используя калькулятор или таблицу Брадиса, найдите:
а) o_7, если R = 12; в) R, если a_{10} = 6;
б) a_n, если г = 3; г) b_n, если a_5 = 14.
14*. Докажите, если шестиугольник и треугольник вписаны в одну окружность, то:
а) $r_6 \sim 0{,}5a_3$; в) $r_8 = 0{,}5\Lambda_8 л/2 + л/2$; д) $r_{12} = 0{,}5R_{12}yj2 - л/з$•
б) $a_8 = i?_8 л/2 - \sqrt{} \setminus 2$; г) $a_{12}R \setminus j2 - л/з!$
15*. Определите длины диагоналей правильного восьмиугольника, если дано: а) радиус Д описанной окружности; б) длина его стороны a.
16*. Определите длины диагоналей правильного двенадцатиугольника, если дано: а) радиус R его описанной окружности; б) длина его стороны a.
17*. В окружность радиуса R вписан правильный га-угольник. Середины его сторон последовательно соединены. Найдите сторону полученного многоугольника, если: а) га = 6; б) га = 8.
18*. В окружность вписан правильный восьмиугольник. Найдите его сторону, если сторона квадрата, вписанного в ту же окружность, равна 8 см.
19*. В окружность вписан правильный восьмиугольник со стороной 4 см. Найдите сторону вписанного в эту окружность:
а) квадрата; б) треугольника; в) шестиугольника.
20*. В окружность вписан правильный двенадцатиугольник со стороной a. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.
21**. В окружность радиуса 12 см вписан правильный четырёхугольник $ABCD$, в который вписана окружность, а в окружность вписан правильный треугольник KMN. Найдите периметр этого треугольника.
22*. Найдите отношение площадей правильных треугольника, четырехугольника и шестиугольника, если: а) они описаны вокруг одной окружности; б) они вписаны в одну окружность; в) стороны их равны.
23*. В правильном двенадцатиугольнике середины сторон через одну последовательно соединили. Найдите сторону образовавшегося шестиугольника, если сторона двенадцатиугольника равна a.
24*. В правильном восьмиугольнике середины сторон через одну последовательно соединили. Найдите сторону образовавшегося квадрата, если сторона двенадцатиугольника равна a.



Для любознательных

Докажите, если А, B, C, D - четыре последовательные вершины правильного семиугольника, то выполняется соотношение $\frac{111}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

25*. Выразите площадь правильного шестиугольника через:
а) его сторону; б) бо́льшую диагональ; в) меньшую диагональ.

26**. Из квадратного листа бумаги сделали восьмиугольник. Сначала построили четверти окружностей с центрами в вершинах данного квадрата и радиусом, равным половине диагонали квадрата. Затем точки их пересечения со сторонами квадрата последовательно соединили отрезками. По ним отрезали углы квадрата. Найдите отношение площадей исходного квадратного листа бумаги и полученного восьмиугольника.

27*. Правильный треугольник со стороной ***a,*** отрезав углы, превратили в правильный шестиугольник. Найдите сторону шестиугольника.

28*. Сторона правильного треугольника равна ***Б.*** Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник, и сторону вписанного в эту окружность:
а) треугольника; б) квадрата; в) шестиугольника.

29*. Сторона правильного треугольника ABC равна ***a.*** На его сторонах AB, ***BC*** и ***CA*** от вершин A, B и C соответственно отложили отрезки A4, = ***a*** : 3; BB, = ***a*** : 3; CC, = ***a*** : 3. Найдите радиус вписанной в треугольник $A_JB_1C_J$ окружности.

30**. Впишите в заданную окружность правильный:
а) пятиугольник; б) десятиугольник.

31**. ./V равных окружностей касаются друг друга и заданной окружности радиуса ***R.*** Найдите радиус этих окружностей, если: а) ***N*** = 3; б) ***N*** = 4; в) ***N*** = 6.

32*. Правильные треугольник, четырехугольник и шестиугольник имеют равные периметры. Найдите отношение их площадей.

33*. Пол выстилают паркетинами, имеющими форму правильных многоугольников двух видов. Приведите примеры такого паркета.

34**. Найдите наименьшее число ромбов, из которых можно сложить правильный шестиугольник. Какую особенность имеют эти ромбы?

35**. Дан квадрат со стороной ***a.*** Извне квадрата на каждой из его сторон построили по трапеции так, что верхние основания трапеций вместе с их боковыми сторонами образуют правильный двенадцатиугольник. Найдите площадь такого двенадцатиугольника.

36**. Как вписать в правильный шестиугольник правильный треугольник:
а) наименьшего периметра; б) наибольшего периметра?

37**. Впишите в заданную окружность правильный пятнадцатиугольник и запишите длину его стороны через радиус данной окружности.



Для любознательных

1. Известно, что для некоторого выпуклого шестиугольника ABJCAJBCJ выполняются равенства: AB, = BjC, CA, = A,B, BC, = C,A, ZA + ZB + ZC = = ZA, + ZB, + ZC,. Докажите, что площадь треугольника A^C, равна половине площади шестиугольника.

2. Докажите, что у правильной звезды, изображенной на рисунке, закрашено ровно половину площади.



3. Длина каждой из сторон выпуклого шестиугольника ***ABCDEF*** меньше единицы. Докажите, что длина одной из диагоналей AD, ***BE*** и ***CF*** меньше единицы.

Совет. Воспользуйтесь неравенством Птолемея (стр. 89).

4. Семиугольник $A_1...A_7$ вписан в окружность, притом центр этой окружности расположен внутри семиугольника. Докажите, что сумма углов при вершинах A_2, A_3 и A меньше, чем 450°.

5. В олимпиаде по математике на первенство района принимает участие 100 школьников. Известно, что среди любых четырех участников всегда есть хотя бы один, знакомый с другими тремя. Докажите, что среди этих школьников есть такой участник, который знаком со всеми другими 99 участниками.

§ 12» Длина окружности и дуги окружности. Радианная мера угла

Представьте себе нитку, сложенную в форме окружности так, что ее концы соединены (рис. 2.9). Возьмем эту нитку за концы и развернем в отрезок. Длина такого отрезка и будет ***длиной окружности.***

Если вписать в окружность правильный многоугольник (рис. 2. 10-а) или описать вокруг этой окружности правильный многоугольник (рис. 2.10-б), то длины их периметров будут тем ближе к искомому значению длины окружности, чем больше сторон имеют эти многоугольники.



Рис. 2.9

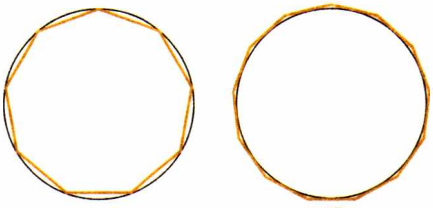
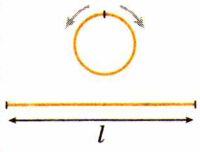


Рис. 2.10

Длина окружности ***I***



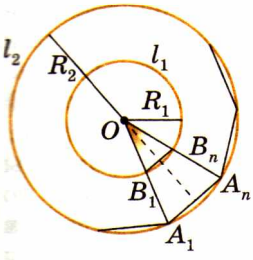


Рис. 2.11

Возьмем две окружности с общим центром и произвольными радиусами. Впишем в них многоугольники с одинаковым числом сторон ***n*** так, как показано на рисунке 2.11 (стороны их параллельны).

Центральный угол этих многоугольников равен $\frac{360°}{n}$, а стороны равны соответственно

$2R_1 \sin\frac{180°}{n}$ и $2R_2 \sin\frac{180°}{n}$.



Для любознательных

1. Дано два правильных треугольника. Разрежьте их на наименьшее число частей так, чтобы из них можно было сложить шестиугольник.
2. Дано четыре одинаковых правильных шестиугольника. Разрежьте их на наименьшее число частей так, чтобы из них можно было сложить правильный шестиугольник.
3. Дано три правильных шестиугольника. Как, сделав наименьшее число разрезов этих фигур, разделить их на части, из которых можно сложить правильный шестиугольник?
4. Тришка отрезал от кафтана квадратный кусок. Потом разрезал его на 9 треугольных латок и сложил в три кучки по три латки. Может ли быть так, что любые две латки из какой-то одной кучки равны между собой, а из разных - не равны?

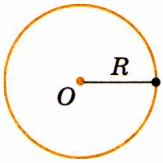
Для одноименных правильных многоугольников:

$$\frac{P_1}{2R_1} = \frac{P_2}{2R_2} = \ldots = \underbrace{= n \sin\frac{180^\circ}{n}}_{t}$$

зависит только от я

$$\frac{k}{2R_1} = \frac{k}{2R_2} = \ldots = \pi$$

«const» - *постоянная*



$l = 2\pi R$

Если $R=1$,

$\pi = \frac{l}{2}$ <— численно

$3{,}14 < \pi < 3{,}15$

I Тогда периметры этих многоугольников:

$$P_1 = r_a \cdot 2R_1 \sin\frac{180^\circ}{n} \text{ и } P_2 = r_a \cdot 2R_2 \sin\frac{180^\circ}{r_a}.$$

Отсюда: $\frac{P_1}{2R_1} = \frac{P_2}{2R_2} = \ldots = r_a \cdot \sin\frac{180^\circ}{я}$.

Чем больше число га, тем ближе значения периметров соответствующих многоугольников к длинам окружностей l_1 и l_2. Получаем:

$$\frac{l_1}{2R_1} = \frac{l_2}{2R_2} = \ldots = \text{const}.$$

Это и есть одна из важнейших констант (постоянных) математики - ***число к («ка»).***

Таким образом, длина окружности радиуса R равна

$$г = 2яй.$$

Если в это выражение подставить $R = 1$, то получим, что число π численно равно длине единичной полуокружности. Его приблизительное значение 3,14159...



Замечание. 1. Приближенное значение $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$ встречается в египетских папирусах Ринда (XX-XVII в. до н. э.).

2. ***к-*** буква греческого алфавита. С нее начинается слово, в переводе с греческого означающее «край» или «граница круглого тела». Эта постоянная настолько важна в жизни человечества, что на протяжении тысячелетий математики упорно работали над одним ее вычислением.

3. Значение этого числа вычисляли через периметры описанных и вписанных многоугольников еще во времена Древней Греции. Так, Архимед, вписывая в окружность правильные многоугольники, вычислил первые три знака числа π. Голландский математик Роумен (XVI в.) нашел 17(!) знаков этого числа. В XX в., когда на помощь пришли ЭВМ, было определено несколько десятков тысяч знаков числа π. Знать значение постоянной я с такой точностью вам необязательно, а вот то, что $3{,}14 < к < 3{,}15$, следует запомнить.



Для любознательных

1. Остроугольный треугольник расположен внутри окружности. Докажите, что радиус этой окружности не меньше радиуса окружности, описанной вокруг данного треугольника. Будет ли такое утверждение правильным для тупоугольного треугольника? Почему?
2. Докажите, что периметр остроугольного треугольника не меньше, чем $4R$.
3. Докажите, что замкнутую ломаную единичной длины можно поместить в окружность, радиус которой равен 0,25.
4. В окружность единичного радиуса вписан многоугольник, длины сторон которого находятся в пределах от 1 до $\sqrt{2}$. Сколько сторон имеет этот многоугольник?

В окружности центральному углу 1° соответствует дуга длиной в $\frac{1}{360}$ длины всей окружности, т. е. $\frac{\kappa R}{Tso}$.

Тогда длина дуги градусной меры n° равна

$$l_n = \frac{\pi R}{180} n.$$

Рассмотрим общий центральный угол (градусной меры n°) нескольких концентрических окружностей (рис. 2.12). Отношение длины каждой дуги образованных секторов к радиусу соответствующей окружности равно $\frac{l_n}{R} = \frac{\pi}{180} n^\circ$ и зависит только от величины угла. Тогда такое отношение можно рассматривать как меру угла и *измерять угол в радианах.*

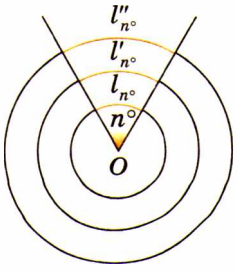


Рис 2.12

Полному углу градусной меры 360° соответствует 2л радиан.

Развернутый угол имеет π радиан:

л радиан = 180° => 1 радиан = $\frac{180^\circ}{\pi}$ « 57°18/;

180° = k радиан => 1° = $\frac{K}{180}$ радиан * 0,017 радиан.

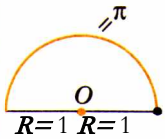
Тогда *угол градусной меры n° имеет радианную меру*

$$\text{и}_k^{71} = \frac{}{180}\ \pi \text{ радиан},$$

а *угол радианной меры k имеет градусную меру*

$$n^\nu = \frac{180^\circ}{\Lambda} \blacksquare k.$$

Например: 30° = 30 $\cdot \frac{\pi}{180} = \frac{71}{"6} \approx \frac{3{,}14\ 1}{\sim 6 \sim * 2}$ РадД'.



1 радиан = $\frac{180^\circ}{\pi}$

1° = $\frac{\text{тг}}{180^\circ}$ радиан

1 радиан к 57°18'

1° а 0,017 радиан

πрад = 180°

^ рад = 90°

$\frac{\pi}{3}$ рад = 60°

$\frac{\pi}{4}$ рад = 45°

$\frac{\pi}{6}$ рад = 30°



Для любознательных

Число л численно равно длине единичной полуокружности. Если удваивать число сторон вписанных и описанных многоугольников, можно получать все больше и больше знаков числа π. Удивляют достижения древних геометров, в частности Архимеда (287-212 гг. до н. э.). Он, используя алгебру, хитроумно выпрямляя ломаную из сторон вписанного и описанного 96-угольника, пришел к выводу, что значение π лежит в пределах от $3\frac{10}{71}$ до 3^. Такая разность правой и левой границ числа равна $(3\frac{1}{7} - 3\frac{10}{71})$, несущественно отличается от 0,002. Это означает, что Архимед вычислил значение л с погрешностью не более как 0,001! Мы до сих пор пользуемся достижением Архимеда, работая с приближенным значением ті » 3,14.

30° *0,52 рад

45° * 0,79 рад

60° » 1,0 рад

90° «1,6 рад

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{180°}{\pi}$ — 90°;

Зрад = 3 .-^51 ~ з . 1Ё22 » 172e'.
π 3,14

k (радиан)	л	$\frac{л}{2}$	$\frac{я}{3}$	$\frac{п}{4}$	$\frac{л}{6}$
п°	180°	90°	60°	45°	30°

Практическая работа 7

1. Начертите окружность радиуса 8 см. Впишите в окружность правильный четырехугольник. Измерьте его сторону и найдите периметр P_4.
2. Постройте правильные восьмиугольник и шестнадцатиугольник, вписанные в окружность радиуса 8 см. Измерьте их стороны, найдите их периметры P_8 и P_{16}.
3. Вычислите отношения периметра каждого многоугольника к диаметру окружности. Полученные результаты запишите в таблицу.

	с п 4	с П 8	п = 16
$P_п$			
$\frac{P_п}{d}$			

4*. Выполните задания предыдущих пунктов для описанных правильных многоугольников.

5. Сделайте вывод.

Практическая работа 8*

1. Начертите окружность единичного радиуса и впишите в нее правильный восьмиугольник.
2. Опишите вокруг единичной окружности правильный восьмиугольник.
3. Измерьте длины сторон построенных восьмиугольников, вычислите их периметр.
4. Оцените значение числа $л$, используя полученные значения периметров этих многоугольников и запишите результат в виде: ... $< л <$ ... .

Задание 13

1°. Вычислите длину окружности, радиус которой: а) 10 см; б) 0,5 м; в) 3,14 мм.

2°. Заполните таблицу, используя формулу для вычисления длины окружности.

C			18л		9,42			320,28
R	5	7		0,7		34,5	1/3	

3°. Как изменится длина окружности, если ее радиус: а) увеличится вдвое; б) уменьшится втрое; в) уменьшится в k раз; г) увеличится на 1 см?

4. Как изменится радиус окружности, если длину окружности: а) увеличить в $п$ раз; б) уменьшить в $п$ раз?



Для любознательных

В древности как приближенное значение $л$ использовали такие числа: 3; ^Ïo; $\frac{22}{7}$; YY3 $\frac{355}{113}$. Оцените погрешность использования таких приближений $п$.

5. Найдите длину окружности, описанной вокруг: а) правильного треугольника со стороной ***а;*** б) прямоугольного треугольника с катетами ***а*** и ***Ь;*** в) равнобедренного треугольника с основанием ***а*** и боковой стороной ***Ь;*** г) прямоугольника со стороной ***а*** и острым углом а между диагоналями; д) правильного шестиугольника, площадь которого равна 24%/з см^2.

6. Стороны прямоугольника равны 5 см и 9 см. Найдите длину окружности, описанной вокруг этого прямоугольника.

7. Найдите длину окружности, вписанной в: а) квадрат со стороной ***а;*** б) равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой с; в) прямоугольный треугольник с гипотенузой ***с*** и острым углом а; г) равнобедренный треугольник с углом при основании а и высотой ***h,*** проведенной к основанию.

8. Периметр правильного треугольника равен 24\/3 см. Вычислите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

9*. Длина окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника, равна 60л см. Вычислите периметр этого треугольника, если длина его основания - 48 см.

10**. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, удален от вершин его острых углов на >/6 см и л/ЇО см. Найдите длину этой окружности.

11. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный «-угольник со стороной 6 см, если: а) ***п*** = 3; б) ***п = 4;*** в) ***п*** = 6.

12. Диаметр вала колодца равен 32 см, глубина колодца (до уровня воды) - 6,5 м. Сколько раз нужно повернуть ручку вала, чтобы достать ведро воды?

13. Барабан лебедки сделал 5 оборотов. На сколько поднялся при этом груз, если диаметр барабана равен 0,5 м?

14*. Сколько оборотов за 1 с делает колесо электровоза, если скорость электровоза 72 км/ч, радиус колеса 1 м? Колесо катится по рельсам без проскальзывания.

15*. Пять одинаковых труб длиной 50 см каждая и диаметром 200 мм нужно запаковать в ящик прямоугольной формы. Вычислите размеры ящика, на изготовление которого потребуется наименьшее количество материала.

16°. Найдите длину дуги окружности радиуса 6 см градусной меры: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

17°. Сколько градусов содержит центральный угол, если соответствующая ему дуга окружности составляет: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{6}$; д) $\frac{2}{3}$; е) $\frac{3}{4}$ части окружности?

18°. Найдите длину дуги окружности радиуса ***R*** = 1 м, если ее градусная мера: а) 45°; б) 30°; ~~в)~~ 120°; г) 60°30'.

19. Две точки делят окружность на две дуги. Градусная мера одной из них в 11 раз больше, чем второй. Найдите градусные меры этих дуг.

20. Две точки делят окружность на две дуги, разность градусных мер которых равна 60°. Найдите градусные меры этих дуг.

21. Расстояние между серединами зубцов колеса, измеренное по дуге его окружности, равно 47 мм, диаметр колеса - 60 см. Сколько зубцов имеет колесо?

22*. При повороте дороги на 30° сделали закругление радиусом 500 м. На сколько метров сократилась длина пути?



Для любознательных

То, что отношение длины окружности к ее диаметру является величиной постоянной, было выдающимся открытием. Еще в старину люди широко использовали это число во время строительства пирамид и оросительных систем, начислении налогов и т. д.

В Вавилоне это отношение считали равным 3. Такая неточность приводила к ошибкам в строительстве. Считается, что Вавилонская башня упала потому, что люди прогневили Всевышнего. А может быть, это произошло из-за числа ***к*** - расчеты были неточными?

23*. Поезд движется со скоростью 50 км/ч по дуге, радиус которой равен 2 км. На какой угол он повернется за 45 с?

24. Длина хорды равна ***a***. Найдите длину дуги, которую стягивает хорда, если она соответствует центральному углу: а) 60°; б) 90°; в) 120°.

25. По данной длине дуги ***l*** найдите стягивающую ее хорду, если градусная мера этой дуги: а) 30°; б) 45°; в) 90°.

26°. Найдите радианную меру углов: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°.

27*. Мотоцикл двигался в течение 45 с по дуге окружности радиуса 2 км. Найдите скорость мотоцикла, если мера этой дуги 0,18 рад.

28**. Сторона квадрата равна ***a***. Каждая вершина квадрата - центр окружности радиуса ***a***. Вычислите периметр криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами этих окружностей (рис. 2.13).

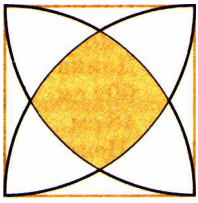


Рис. 2.13

29**. Через две соседние вершины квадрата проходит окружность так, что касательная, проведенная к ней из третьей вершины, равна удвоенной стороне квадрата. Найдите длину этой окружности, если площадь квадрата равна 10 см^2.

30**. Сторона правильного шестиугольника равна ***a***. Каждая вершина квадрата - центр окружности радиуса ***a***. Найдите длину линии - розетки, образованной дугами этих окружностей (рис. 2.14).

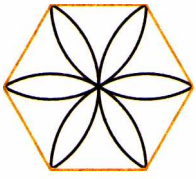


Рис. 2.14

31*. При пересечении двух окружностей их общая хорда стягивает дуги, равные 45° и 60° соответственно. Какая окружность имеет большую длину? Ответ обоснуйте.

32*. Вокруг двух равновеликих прямоугольников описали окружности. Будут ли эти окружности равновеликими? Ответ обоснуйте.

33*. Диаметр окружности разделен на ***n*** равных частей, и на каждой из них, как на диаметре, построена окружность. Найдите зависимость между длиной данной окружности и суммой длин построенных окружностей.

34**. Докажите, что площадь кольца равна произведению ширины кольца и длины окружности, равноудаленной от внутренней и внешней границ кольца.

35**. Диаметр одного колеса вдвое больше диаметра второго. Первое колесо делает один оборот в 1 с, а второе - в 2 с. На внешней окружности первого колеса зафиксировали точку А, а второго - ***B***. Какая точка быстрее пройдет путь в 1 км (по окружностям), если колеса начали вращаться одновременно?

36**. Окружность радиуса r касается шести окружностей такого же радиуса, которые касаются друг друга. Образованная фигура охвачена концентрическим кольцом, равновеликим сумме площадей заданных семи окружностей. Найдите ширину этого кольца.



Для любознательных

Несмотря на популярность в среде математиков, число, которое мы сегодня знаем как «число л», на протяжении многих столетий до XVIII в. не имело определенного символического обозначения. Первым обозначил его греческой буквой ***к*** в 1706 г. английский учитель ***Вильям Джонс.*** Но работы провинциального учителя мало кто читал. И только ***Леонард Эйлер*** - «первая скрипка» в науке XVIII в. - принял это удобное обозначение и стал использовать его в своих работах.

Рекорд докомпьютерной эры вычисления числа ***к*** — 707 знаков - установил английский математик ***Вильям Шенке.*** В 1937 г. их поместили на купол галереи парижского Дворца Открытий. Но позже компьютерная проверка показала, что в 520-м знаке Шенке допустил ошибку и последние 180 знаков его вычислений неправильные!

§ 13 Площадь круга, кругового сектора и сегмента

Напомним, что ***кругом*** называется внутренняя часть плоскости, ограниченная окружностью (вместе с точками окружности). Это - множество точек плоскости, удаленных от центра окружности на расстояние, не превышающее радиус окружности.

Центр соответствующей окружности называется ***центром круга,*** а радиус этой окружности - ***радиусом круга.***

Рассмотрим круг радиуса ***R.*** Опишем вокруг него правильный многоугольник (рис. 2.15). Пусть он имеет ***n*** сторон. Площадь правильного я-угольника равна

$$S_n = \frac{1}{2} P_n R,$$

где P_n - его периметр.

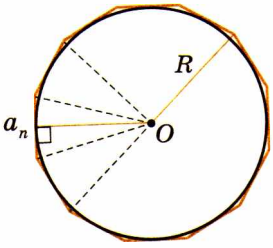


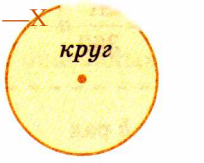
Рис. 2.15

С увеличением числа сторон многоугольника его периметр все больше и больше DZ приближается к длине окружности $2\pi R$, а площадь - к ® площади круга. Тогда площадь такого многоугольника с увеличением ***n*** приближается к числу

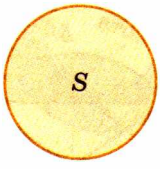
$$S = \frac{1}{2} 2\pi RR = \pi R^2.$$

Такое же значение для площади круга получим, если в заданную окружность будем вписывать правильный многоугольник. Только, если в предыдущем случае с увеличением числа сторон многоугольника ***n*** последовательность площадей описанных многоугольников была убывающей, то для вписанных многоугольников она будет возрастающей.

Получается: площадь описанного многоугольника больше площади круга и при больших ***n*** приближается к значению πR^2; площадь вписанного многоугольника меньше площади круга и при больших ***n*** приближается к значению πR^2. Тогда площадь самого круга равна πR^2.



$$\frac{S_1}{R_1^2} = \frac{S_2}{R_2^2} = \text{const}$$



$S = \pi R^2$

Площадь круга вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2.$$

Найдем тепер площадь кругового сектора и сегмента.

Напомним, что ***круговым сектором*** называется часть центрального угла окружности, которая ограничена дугой этой окружности - ***дугой сектора*** (рис. 2.16). На рисунке 2.16 представлены два сектора с дугами ***AMB*** и ***ANB.***

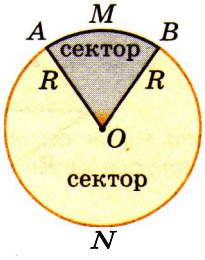


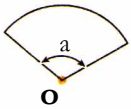
Рис. 2.16



Рассмотрим сектор круга радиуса R, который соответствует центральному углу a (рис. 2.17). Площадь круга равна πR^2, тогда площадь сектора с центральным углом 1 равна $\frac{\pi R^2}{360}$.

Площадь сектора с градусной мерой центрального угла $a = n^\circ$ вычисляется по формуле

$$S_{сек} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n.$$



Если соответствующий центральный угол имеет радианную меру $a = k$ рад, то

$$S_{сек} = \frac{\pi R^2}{2\pi} k = \frac{1}{2} R^2 k.$$

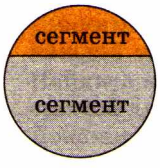
a = л^и

$S_{сек} = \frac{\pi R^2}{360} n$ 71

a = к рад

$S_{сек} = \frac{1}{2} R^2 k$

Сегментом называется часть круга, ограниченная хордой и соответствующей дугой (рис. 2.18). Указанную хорду называют ***основанием сегмента***, а отрезок диаметра, перпендикулярного ей и расположенного внутри сегмента, - его ***высотой*** (рис. на поле).



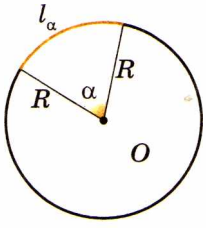
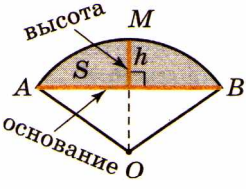


Рис. 2.17



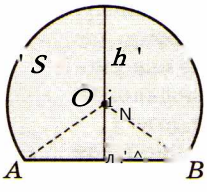
Рис. 2.18

Для ***вычисления площади сегмента, градусная мера дуги которого меньше 180°*** (меньше π радиан), его удобно рассматривать как часть сектора. Площадь такого сегмента равна разности площадей сектора и равнобедренного треугольника с хордой в основании и боковыми сторонами - радиусами окружности (рис. 2.19).



$S = S_{сек} - S_{\triangle AOB}$.

Если рассматривать ***сегмент, градусная мера дуги которого больше 180°*** (больше π радиан), то его площадь будет равна сумме площадей сектора и равнобедренного треугольника с хордой в основании и боковыми сторонами - радиусами окружности (рис. 2.20).



$S = S_{сек} + S_{\triangle AOB}$

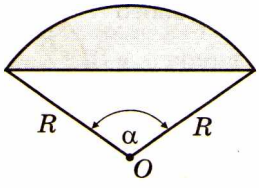


Рис. 2.19

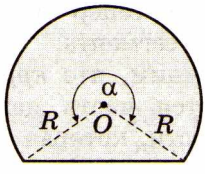


Рис. 2.20

Практическая работа 9

1. Начертите окружность радиуса 8 см. Вычислите площадь круга ***S,*** ограниченного окружностью, по известной вам формуле, приняв за л и 3,1415.
2. Постройте вписанный в окружность правильный четырехугольник и найдите его площадь S_4. Постройте правильные вписанные в эту же окружность восьмиугольник и шестнадцатиугольник. Проведите в них апофему. Измерьте апофемы и стороны восьмиугольника и шестнадцатиугольника, вычислите их площади S_8, S_{16}.
3. Найдите разность между площадью каждого из построенных многоугольников и площадью круга S - S_n и заполните таблицу.

	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
S_n			
IS-SJ			

4*. Выполните задания предыдущих пунктов для правильных описанных многоугольников.

5. Сделайте вывод.

Задание 14

1°. Вычислите площадь круга, радиус которого равен: **а)** 2 см; б) 15 мм; **в) л/3.**

2°. Используя формулу для вычисления площади круга, заполните таблицу.

S			36		144л			3,14
R	3	5		2/7		18,5	7_3	

3°. Как изменится площадь круга, если его радиус: **а)** увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 5 раз?

4°. Во сколько раз увеличится площадь круга, если его диаметр увеличить: **а)** в 2 раза; б) в 4 раза; **в)** в ***т*** раз?

5°. Найдите площадь кругового кольца (рис. 2.21), ограниченного двумя концентрическими окружностями радиусов: **а)** 4 см и 6 см; б) 4,5 м и 6,5 м; **в)** ***а*** и ***b (а > Ъ).***

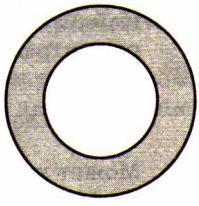


Рис. 2.21

6. Вычислите площадь круга, если длина окружности равна 16л см.

7. Найдите площадь круга, описанного вокруг: **а)** прямоугольника со сторонами ***а и Ь; б)*** прямоугольного треугольника с катетом ***а*** и противоположным углом а; **в)** равнобедренного треугольника с углом при основании а и высотой ***h,*** проведенной к основанию.

8. Найдите площадь круга, вписанного в: **а)** равносторонний треугольник со стороной ***а;*** б) прямоугольный треугольник с катетом ***а*** и прилежащим к нему острым углом а; **в)** равнобедренный треугольник с боковой стороной ***а*** и углом а между боковыми сторонами; **г)** равнобокую трапецию с большим из оснований ***а*** и острым углом ***а.***



Для любознательных

Римский архитектор ***Витрувий*** (I в. до н. э.) использовал грубое приближение числа л, что привело к просчетам в строительстве и разрушению известного Римского театра.

И в наше время некоторые ультрамодные конструкции не выдерживают испытаний на прочность из-за «шалостей» числа л. Например, московский «Аквапарк» разрушился, возможно, именно по этой причине.

9. Найдите отношение площади круга к площади вписанного в него: а) квадрата; б) правильного треугольника; в) правильного шестиугольника.
10. Найдите отношение площади круга к площади описанного вокруг него правильного: а) треугольника; б) четырехугольника; в) шестиугольника.
11. Найдите отношение площади кругов, вписанного в правильный треугольник и описанного вокруг него.
12. Найдите отношение площади круга, описанного вокруг квадрата, к площади круга, вписанного в него.
13. Что больше - площадь круга, построенного на отрезке a как на диаметре, или площадь полукруга, построенного на отрезке $2a$ как на диаметре? Ответ обоснуйте.
14*. Вокруг правильного треугольника площади S описана окружность, а вторая окружность вписана в заданный треугольник. Найдите площадь кольца, образованного окружностями.
15*. Вокруг круга площади S описан ромб с острым углом в 30°. Найдите площадь ромба.
16*. Для ремонта водопроводной сети две водопроводные трубы диаметров 3 дм и 4 дм хотят заменить одной трубой с той же пропускной способностью. Каким должен быть ее диаметр?
17. Длина окружности цирковой арены 41 м. Найдите диаметр и площадь арены.
18*. Сколько кругов диаметра 50 см можно вырезать из листа жести прямоугольной формы размеров 130 × 225 см? Какая часть листа останется?
19*. Какой толщины слой нужно снять с круглой медной проволоки площади сечения 1156 мм², чтобы проволока прошла сквозь круглое отверстие диаметра 38,5 мм?
20*. Токарь должен обточить вал диаметром 24 см так, чтобы площадь его поперечного сечения стала в 2 раза меньше. На сколько сантиметров ему нужно уменьшить диаметр вала?
21*. Вокруг круглой клумбы радиуса 3 м хотят сделать декоративное кольцо из гальки шириной 0,5 м. Сколько нужно гальки, если на 1 м² используется 0,7 дм² гальки?
22°. Найдите площадь сектора круга радиуса R, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: а) 40°; б) 90°; в) 150°; г) 240°; д) 300°; е) 330°.
23°. Найдите площадь сектора круга радиуса 6 см, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: а) $\frac{\pi}{10}$; б) 0,75я; в) $1\frac{5}{6}$я.
24°. Может ли сектор круга быть его сегментом? Ответ обоснуйте.
25. Из круга радиуса 10 см вырезали сектор с дугой в 60°. Найдите площадь оставшейся части круга.
26. Площадь сектора с центральным углом в 72° равна S. Найдите радиус сектора.
27. Дан круг радиуса R. Найдите площадь сектора этого круга с длиной дуги, равной: а) R; б) I.
28. Найдите площадь кругового сегмента, ограниченного хордой в 7 см и дугой в 90°.
29*. Найдите площадь кругового сегмента с основанием $a\sqrt{3}$ и высотой $\frac{a}{2}$.



Для любознательных

Знаете ли вы, что третьего месяца четырнадцатого дня каждый год празднуется Всемирный день числа я - фанаты легендарного числа собираются в Интернете?

Любой житель Земли может принять участие в глобальном проекте «Pi-Hex». И это не просто игры компьютерных гурманов, а серьезный научный проект. Например, в 2000 г. научная команда планеты Земля вычисляла отдельные знаки записи числа я в двоичной системе.

30*. Дан круг радиуса R. Найдите площадь части круга, расположенную вне вписанного в нее: а) квадрата; б) правильного треугольника; в) правильного шестиугольника.

31*. Три равных окружности радиуса 6 см попарно касаются друг друга. Найдите площадь: а) круга, дуга которого проходит через точки касания этих окружностей; б) площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей; в) круга, вписанного в криволинейный треугольник, который ограничивают дуги этих окружностей.

32*. Сторона квадрата на рисунке 2.22 равна 8 см. Найдите площадь закрашенной фигуры.

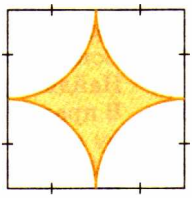


Рис. 2.22

33*. На рисунке 2.23 вы видите четверть окружности и полуокружность. Найдите площадь закрашенной фигуры.

34**. В прямоугольный треугольник с длинами катетов a и b вписан полукруг так, что его центр располагается на гипотенузе треугольника. Найдите площадь этого полукруга.

35**. С центрами в вершинах квадрата построены круги радиусов a. Найдите площадь части плоскости, общей для всех построенных окружностей, если сторона квадрата равна a.

36**. Одна хорда полуокружности делит другую ее хорду пополам. Какая из этих хорд отсекает от данной полуокружности сегмент большей площади? Ответ обоснуйте.

37**. Две равные полуокружности радиуса r наложили так, что их диаметры параллельны, а середина дуги каждой совпадает с центром другой. Найдите площадь общей части полуокружностей.

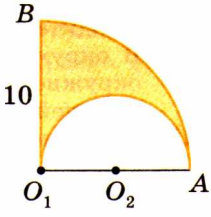


Рис. 2.23

38**.. Высота правильного треугольника равна r и является диаметром окружности. Найдите длину части окружности, расположенную внутри треугольника.

39**. В круговой сектор с центральным углом a вписан круг. Найдите отношение площади сектора к площади круга.

40**. К двум внешне касающимся друг друга окружностям провели общую касательную. Найдите площадь фигуры, ограниченной дугами окружностей и касательной, если радиусы окружностей равны r и R.

41**. Сектор с центральным углом 60° разделен прямой, перпендикулярной к его оси симметрии, на две равновеликие части. Периметр какой из этих частей меньше?

Задания для повторения главы II

1. Какую фигуру называют многоугольником?
2. Какой многоугольник называют выпуклым?
3. Какой многоугольник называют правильным?
4. Сформулируйте свойства: а) выпуклых многоугольников; б) правильных многоугольников.
5. Запишите для правильного гс-угольника формулы вычисления площади, радиусов вписанной и описанной окружностей через длину его стороны.
6. Запишите формулу для определения площади правильного и-угольника через радиус описанной вокруг него окружности.
7. Объясните смысл числа я через длину окружности единичного радиуса.
8. Запишите градусную меру угла, равного: а) я радиан; б) 2 радиана; в) 1 радиан; г) r радиан.



Для любознательных

В 1949 г. американский математик Дон фон Нейман вычислил на одной из первых вычислительных машин 2037 знаков числа π. Позже, в 1958 г., было вычислено 10 ООО знаков числа π, в 1961 г. - 100 000, а в 1973 г. - миллион.

9. Запишите радианную меру угла, равного: а) 180°; б) 360°; в) 1°; г) $n°$.
10. Запишите формулы для определения длины окружности и дуги окружности, радиус которой R.
11. Запишите формулы для определения площади круга радиуса R и его круговых сектора и сегмента.
12. Найдите сумму углов выпуклого: а) двадцатиугольника; б) пятнадцатиугольника.
13. Сколько вершин имеет выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна: а) 1080°; б) 1980°?
14. Может ли мера угла a правильного многоугольника быть: а) 165°; б) 125°?
15. Вокруг правильного /i-угольника со стороной 3 см описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.
16. В правильный тг-угольник вписана окружность радиуса 3 см. Найдите сторону n-угольника, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

17*. Сколько диагоналей имеет: а) десятиугольник; б) пятнадцатиугольник?

18. Сколько вершин имеет выпуклый многоугольник, у которого: а) все углы по 150°; б*) четыре угла по 125°, а остальные - по 152°?

19*. В окружность радиуса $R = 12$ см вписан правильный четырехугольник $ABCD$, в который вписана окружность, а в нее - правильный треугольник KMN. Найдите периметр этого треугольника.

20*. В окружность вписан правильный треугольник ABC, в который вписана окружность, а в нее - правильный четырехугольник $KLMN$. Найдите радиус большей окружности, если периметр четырехугольника равен 16 см.

21*. Окружность касается двух сторон треугольника, а его центр лежит на третьей стороне. Найдите радиус окружности, если: а) две стороны, касающиеся окружности, равны a и b, а угол между ними - а; б) треугольник равносторонний, длина его высоты - h.

22. Внутри квадрата со стороной 4 см сделано отверстие в виде круга площади 4,5 см^2. Найдите площадь образованной фигуры.

23*. Окружности радиуса 4 см внутренним образом касаются n одинаковых окружностей, которые попарно касаются друг друга. Найдите площадь криволинейного многоугольника, ограниченного этими окружностями, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

24*. Найдите острый угол ромба, если его площадь равна 32 см^2, а длина окружности, вписанной в этот ромб, составляет 4л см.

25. В окружность вписан квадрат, а в квадрат - окружность. Найдите площадь кольца, образованного окружностями, если сторона квадрата равна 4 см.

26*. В окружность вписан правильный шестиугольник, а в него - окружность. Площадь кольца, образованного окружностями, равна $9n$ см^2. Найдите сторону шестиугольника.



Для любознательных

Для того чтобы запомнить значение числа л, придумывали много «правил». Вот одно из них: «Три я взял с полки». В этой фразе номер слова - номер цифры числа, а количество букв в слове - цифра, стоящая в соответствующем разряде.

Вот еще одно «правило» (начало XX в.): «Кто и шутя и скоро пожелаеть пи узнать, число уже знаеть». Эта фраза «работает» по тому же принципу, что и предыдущая. При этом нужно сохранять старую орфографию, учитывать и твердый знак.

Попробуйте и вы придумать свое «правило».

Рекорд по запоминанию числа л установил в 2004 г. украинский врач из Львова *Андрей Слюсарчук*. Он за 10 дней выучил 500 000 знаков числа л. До этого «рекордсменом числа л» был японец, который выучил 42 000 знаков за 10 лет.

27**. Найдите наименьшую и наибольшую диагонали правильного десятиугольника, сторона которого равна 1.

28**. Докажите, если в выпуклом (2л + 1)-угольнике, вписанном в окружность, все углы равны, то этот (2га + 1)-угольник - правильный.

29**. Найдите отношение площади правильного пятиугольника к площади треугольника, образованного стороной этого пятиугольника и двумя диагоналями, выходящими из концов этой стороны.

30**. Диагонали A_xA_6 и $A\hat{}A_A$ правильного двадцатиугольника пересекаются в точке B. Докажите, что треугольники A,A_2B и AgA_gB - правильные, а диагональ AjA_6 равна диаметру окружности, вписанной в этот многоугольник.

Готовимся к тематической аттестации № 3

Вариант I

1. В правильном многоугольнике сумма внутренних углов равна 5580°. Найдите число сторон и диагоналей многоугольника.
2. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его угол составляет 144°?
3. Стороны двух правильных пятиугольников относятся как 5:7. Площадь большего пятиугольника равна 98 см². Найдите площадь меньшего пятиугольника.
4. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна $>/\bar{6}$ см. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту же окружность.

Вариант II

1. В правильном многоугольнике 14 диагоналей. Найдите число его сторон и сумму внутренних углов.
2. Вычислите внутренние и внешние углы правильного га-угольника, если л = 15.
3. Площади двух правильных шестиугольников относятся как 4:9. Сторона меньшего шестиугольника равна 12 см. Найдите сторону большего шестиугольника.
4. В квадрат со стороной 8 см вписана окружность. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в эту же окружность.

Готовимся к тематической аттестации № 4

Вариант I

1. Найдите длину окружности, диаметр которой равен 10 см.
2. Радиус окружности равен 6 см. Найдите длину дуги градусной меры 120°.
3. Найдите радианную меру угла, равного 75°.
4. Найдите площадь сектора круга радиуса 5 см, если соответствующий сектору центральный угол равен 105°.

Вариант II

1. Найдите длину окружности, радиус которой равен 4 см.
2. Длина дуги окружности - 15 см, а ее градусная мера - 18°. Найдите радиус окружности.
3. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна л : 12.
4. Найдите площадь сектора круга радиуса 10 см, если дуга сектора равна 210°.



Для любознательных

Древние египтяне за площадь круга брали число, равное (8с?/9)², где d - диаметр круга. Это означает, что число л у них равнялось (16/9)², что точнее, чем у вавилонян (стр. 101). Чтобы получить эту формулу, египтяне приближенно рассматривали круг как квадрат, у которого от каждого угла отрезан прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами, равными третьей части стороны квадрата. Оцените ошибку, если за л взять (16/9)².

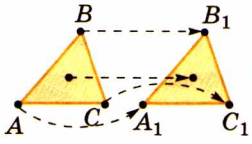


Глава III
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

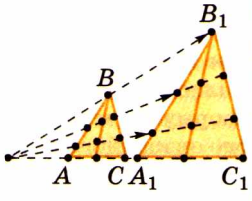
В этой главе мы рассмотрим одну из очень важных тем геометрии - преобразование фигур на плоскости (говорят «преобразование плоскости»). Идея преобразования одной фигуры в другую - одна из ведущих идей современной математики. Ее используют в различных разделах математики для доказательства необычных и сложных теорем.

Мы только коснемся этой необычайно интересной темы, поскольку она выходит далеко за рамки школьного курса математики.

§ 14. Геометрические преобразования на плоскости и их свойства



В 7-м классе равные отрезки, углы, треугольники мы определили как фигуры, которые можно совместить наложением. Тогда любой точке одной из равных фигур (например, треугольников) мы можем поставить в соответствие определенную точку второй фигуры. Понятно, что при этом расстояние между двумя точками одного из пары равных треугольников равно расстоянию между соответствующими точками другого треугольника и углы между соответствующими отрезками двух равных треугольников тоже равны.



Если рассматривать два подобных треугольника, то и в этом случае любой точке одного из этих треугольников можно поставить в соответствие определенную точку другого. Именно это мы и делали в 8-м классе, например, при увеличении рисунка. Понятно, что теперь расстояние между двумя точками одного

треугольника не будет равно расстоянию между соответствующими им точками второго треугольника, а углы - сохраняются.

Геометры не могли обойти вниманием такие интересные свойства геометрических фигур. Их изучение и обобщение привело к появлению понятия ***геометрического преобразования.***

Говорят, что задано геометрическое преобразование, если указан способ, как каждой точке А одной фигуры поставить в соответствие единственную точку A_x другой фигуры. (При этом разным точкам АиВ соответствуют разные точки A_1иВ$_1$.)

Исходное множество точек называют ***прообразом,*** а полученное - ***образом.***

Замечание. Если осуществить второе такое преобразование, в котором прообраз и образ поменяются местами, то такое преобразование называют ***обратным*** первому.

Геометрические преобразования, сохраняющие расстояния между парами точек, называют движением.

При таких преобразованиях не изменяются меры углов; форма и размеры фигуры (т. е. фигуры прообраза и образа равны). Мы будем изучать следующие виды движения: ***параллельный перенос, поворот, симметрия.***

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Sggk ***Параллельным переносом называется преобразование, при котором две произвольные точки АиВ фигуры-прообраза переходят в точки A_x и*** Bj ***фигуры-образа так, что AA_X=*** BB, ***или AA_X || BB_V или точки А, A_x, В, B_r лежат на одной прямой.***

Если AA_r || BB_1 и $AA_X = BB_V$ то четырехугольник AAjBjB - параллелограмм.

Подчеркнем, что точки А и В - произвольные точки фигуры-прообраза. Для других ее точек ***С, К,*** ... (образы C_v K_v ...) получим параллелограммы ***CC^B^B,*** CC^A, ..., стороны которых CC_X $=AA_X = BB_X$ = ... (рис. 3.1).

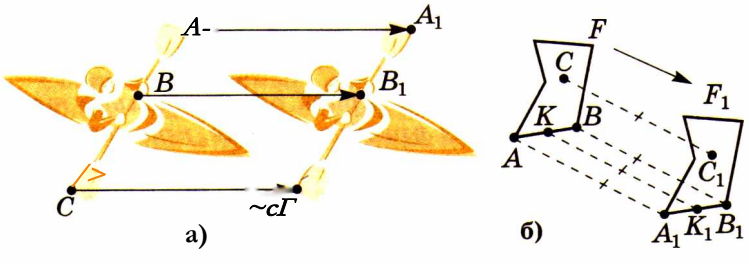
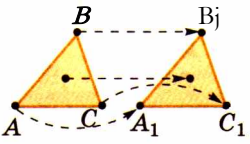


Рис. 3.1

AABC=$AA_1B_1C_1$

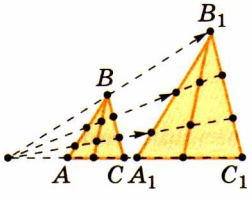


Преобразование:

AABC —ь AA\B\C

прообраз —»образ

AABC^$AA_1B_1C_1$



Обратное преобразование:

AABC <—AA^BjCj

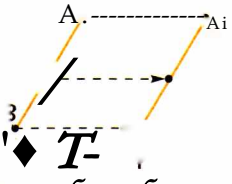
образ <— ***прообраз***

параллельный ^ перенос $\rightarrow A_1B_1$

AAx || BBj

AAi = BBj

.....



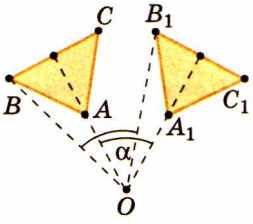
прообраз образ

ПОВОРОТ

\ Поворотом с центром в точке О на угол а *называется преобразование, при котором произвольная точка А фигуры-прообраза переходит в точку A_x фигуры-образа так, что А и A_x расположены на одном расстоянии от точки О и* $\angle AOA_x = a$.

$\triangle ABC \xrightarrow{\text{поворот}} \triangle A_x B_x C_x$

а - угол поворота



О - центр поворота

Т. е. точки *А* и A_x расположены на окружности с центром в точке *О,* а центральный угол AOA_x этой окружности равен а (рис. 3.2).

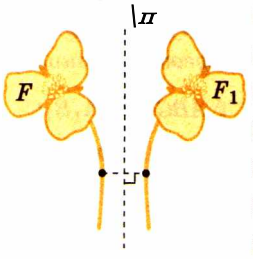
Подчеркнем, что мы рассматривали произвольную точку *А* фигуры-прообраза. Если взять другую ее точку *В,* то образ этой точки B_x будет лежать на одной окружности с точкой *В,* центром которой будет та же точка *О,* а угол BOB_x также равен а (рис. на поле).

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

Осевой симметрией относительно прямой - оси симметрии - называется преобразование, при котором произвольная точка А фигуры-прообраза переходит в точку A_x фигуры-образа так, что ось симметрии является серединным перпендикуляром отрезка $A A_x$

С осевой симметрией вы знакомы с 7-го класса, и пример, приведенный на рисунке 3.3, вам понятен.

$F \xrightarrow{\text{осевая симметрия}^1} Fy$



п - ось симметрии

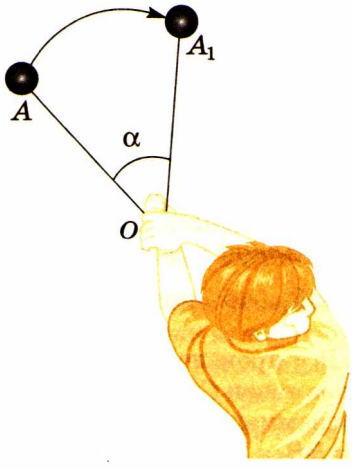


Рис. 3.2

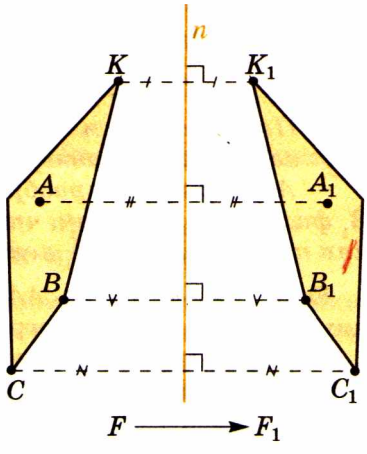


Рис. 3.3

ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Центральной симметрией относительно точки О называется преобразование, при котором произвольная точка А фигуры-прообраза переходит в точку A_x фигуры-образа так, что точки А, О и A_x лежат на одной прямой и $A_x O = AO$ (рис. 3.4).

Заметим, что такой вид симметрии является случаем поворота на 180°.

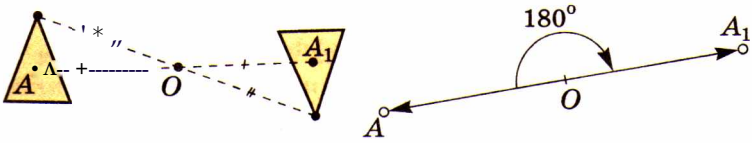
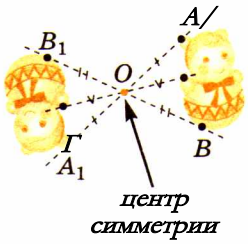


Рис. 3.4

центральная симметрия F ---- F1



ГОМОТЕТИЯ

Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k называется преобразование, при котором произвольная точка A фигуры-прообраза переходит в точку A_x фигуры-образа так, что точки A, O, A_x лежат на одной прямой и $A_xO = |k|'AO$ (рис. 3.5).

Гомотетия сохраняет форму фигуры, но не ее размеры. Коэффициент гомотетии может быть как положительным (рис. 3.5-а), так и отрицательным числом (рис. 3.5-б).

F ---- гомотетия ---> F_1

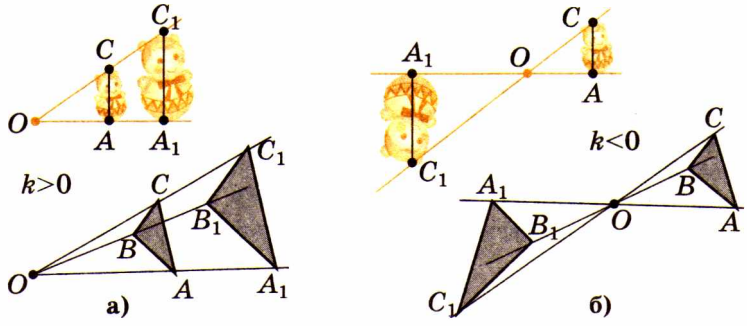
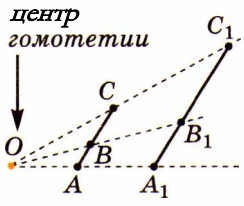


Рис. 3.5

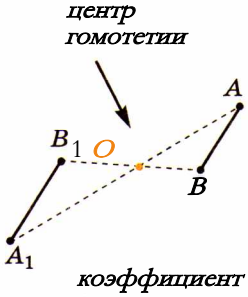


коэффициент гомотетии

$\frac{OA_1}{OA} = k>0$

При k > 0 точки A и A_x лежат на прямой O A по одну сторону от точки O, а при k <0 - по разные.

Пусть фигура ***F*** переходит в фигуру F_x преобразованием гомотетии с центром О и коэффициентом ***k.*** Рассмотрим две произвольные точки АиВ фигуры ***F.*** Им соответствуют точки A_x и B_x фигуры F_v При этом $OA_x : OA = |k| = OB_1 : OB$; $ZA_1OB_1 = ZAOB$, т. к. эти углы или совпадают (при $k > 0$), либо являются вертикальными (при $k < 0$). Тогда ААjОВ,~ $AAOB$ с коэффициентом подобия $|k|$, и $A_1B_1 : AB = |й|$. Аналогично получаем: $B_rC_x : BC = |k|$, $A_XC_X : AC = |\&|$. Следовательно треугольник-прообраз и треугольник-образ - подобны, т. к. их соответственные стороны пропорциональны.



коэффициент гомотетии

$\frac{OA_1}{OA} = |k| < Q$

Мы доказали такое свойство гомотетии.

Соответственные линейные элементы гомотетичных фигур пропорциональны с коэффициентом |fe|, а углы при гомотетии не изменяются.

Гомотетия с коэффициентом $k = -1$ является центральной симметрией. Действительно, при гомотетии с центром ***O*** и коэффициентом $k = -1$ любой точке ***A*** фигуры-прообраза соответствует (как образ) такая точка А,, чтобы ***O*** была серединой отрезка AA_X (см. рис. 3.4).

Преобразованием подобия с коэффициентом k называется преобразование, при котором отношение расстояния между произвольными двумя точками фигуры-образа к расстоянию между соответствующими двумя точками фигуры-прообраза равно k (рис. 3.6).

Если при таком преобразовании точке A соответствует образ A_v а точке B - B_v то $A_1B_1 : AB = k$. Понятно, что коэффициент подобия не может быть отрицательным.

Преобразование подобия можно представить как преобразование, полученное ***последовательным выполнением преобразований*** гомотетии (с коэффициентом, модуль которого равен ***k)*** и движения.

$F \xrightarrow{\text{подобие с коэффициентом } k} F^*$

$\frac{A\phi i}{AB} = £>o$

Например, на рисунке 3.7 мы использовали гомотетию с коэффициентом 2 и поворот на 30° - оба с центром в точке О. А на рисунке 3.6 треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC с k = 0,8, можно получить выполнив последовательно: гомотетию с центром в точке В и коэффициентом 0,8; преобразование поворот на 10° относительно точки ***B;*** параллельный перенос.

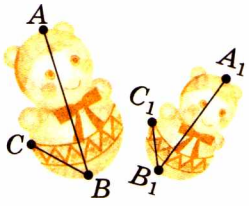


Рис. 3.6

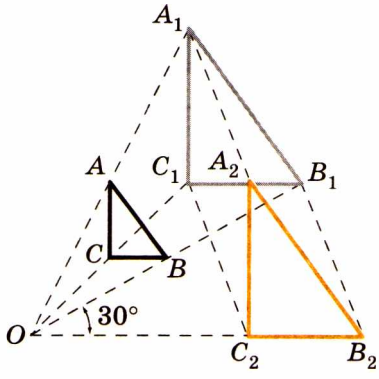
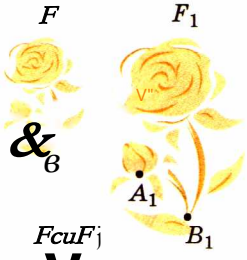


Рис. 3.7



$FcuF_j$ **V** *подобны с k*

Если применить преобразование подобия к треугольнику, то получим треугольник, подобный исходному, т. к. стороны этих треугольников пропорциональны (рис. 3.7).

Тогда можно сформулировать определение подобия двух треугольников таким образом. *

Два треугольника подобны, если один можно получить из другого преобразованием подобия.

Аналогично формулируется и ***определение подобия двух плоских фигур.***

^ ***Две фигуры называются подобными, если одну можно получить из второй преобразованием подобия.*** То, что фигура F подобна фигуре F_x, записывают как $F \overset{k}{\sim} F_p$ или $F \sim_3 F_x$ (если надо указать коэффициент подобия).

В подобных фигурах все линейные элементы пропорциональны с коэффициентом подобия k, а углы сохраняются.

Теперь мы имеем возможность сформулировать определение равенства двух фигур на языке математики.

Две фигуры называются равными, если они переходят друг в друга движением.

Понятно, что данное определение и определение равенства фигур (отрезков, углов, треугольников), как мы понимали его ранее (через совмещение), тождественны.

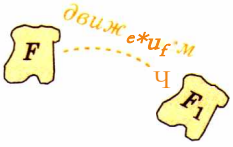
Все рассмотренные нами преобразования имеют такие СВОЙСТВА:

- прямая преобразовывается в прямую, луч - в луч, отрезок - в отрезок;
- углы между прямыми сохраняются;
- если точка ***B*** принадлежит отрезку АС, то ее образ B_x принадлежит отрезку А,С, (образу отрезка АС);
- отношение длин отрезков одной прямой сохраняется.

Эти свойства следуют из равенства или подобия соответствующих треугольников фигур образа и прообраза.

Замечание. Отношение длин отрезков разных прямых, вообще говоря, не сохраняется.

СВОЙСТВА рассмотренных преобразований:



$F = F_1$

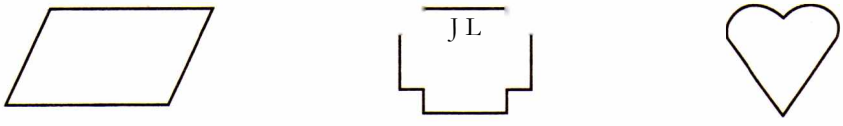


1-(АВМАА);
[АВ)-> [ДВ,);
[АВ]-» [АД].

2. ZA-> ZA, = ZA.
3. Сє[АВ]-»С,є[ДВ,].
4. $AC:CB = A_1C_1$ -.С&, если С є (АВ).

Практическая работа 10

1. Обозначьте две точки А и С, соедините их отрезком.
2. Через точки А и С проведите параллельные прямые и отложите на них от этих точек (в одном направлении) равные отрезки АА, и СС,. Соедините точки А, и С,.
3. Сравните длины отрезков: ***AC*** и А,С,; АА, и СС,. Как называется способ, с помощью которого вы получили из отрезкаАС отрезок А,С,? Сделайте вывод.
4. Вырежьте из бумаги по две фигуры, аналогичные изображенным на рисунке 3.8.



а) б) в)

Рис. 3.8

5. Наклеивая вырезанные фигуры на лист бумаги, осуществите параллельный перенос каждой из них (подсказка на рисунке 3.9). Объясните свои действия.

Для любознательных

Из соображений подобия двух произвольных окружностей можно легко получить постоянную я. Действительно, отношение двух линейных элементов подобных фигур равно их коэффициенту подобия: Z, : $Z_2 = k = R_x : R_2$.

Тогда: $\frac{K}{П_1 R_2}$ 2 Д, 2 R_2 и $\frac{к}{}$ $= \frac{и}{} = \ldots = \frac{l}{2R} = K =$ const.

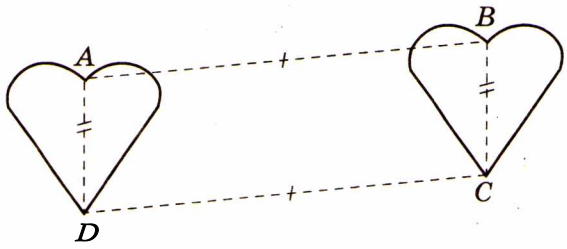


Рис. 3.9

Задание 15

1°. В какую фигуру переходит прямая при параллельном переносе?
2°. Может ли прямая при параллельном переносе перейти сама в себя?
3°. Существует ли параллельный перенос, при котором одна сторона прямоугольника переходит в другую его сторону?
4. Существует ли параллельный перенос, при котором одна сторона треугольника переходит в другую его сторону?
5. Начертите треугольник ABC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, который получается из треугольника ABC параллельным переносом так, чтобы образовалась трапеция ABBjC,.
6*. В равнобокой трапеции острый угол равен 60°. Докажите, используя параллельный перенос, что меньшее основание трапеции равно разности большего основания и боковой стороны.

Практическая работа 11

1. Начертите отрезок АВ. Отметьте точку О, не принадлежащую отрезку АВ.
2. Проведите луч OA и постройте луч OM (в правой полуплоскости относительно OA) так, чтобы $\angle AOM = 50°$. На луче OM отложите отрезок OA_1, равный OA.
3. Проведите луч ОВ и постройте луч ON (в правой полуплоскости относительно ОВ) так, чтобы $\angle BON = 50°$. На луче ON отложите отрезок OB_1, равный ОВ.
4. Соедините точки Aj и B_1. Сравните длины отрезков АВ и A_1B_1.
5. Как называется способ, с помощью которого вы получили из отрезка АВ отрезок А,В,? Сделайте вывод.

Практическая работа 12

1. Вырежьте из бумаги по одной фигуре, из изображенных на рисунке 3.10.

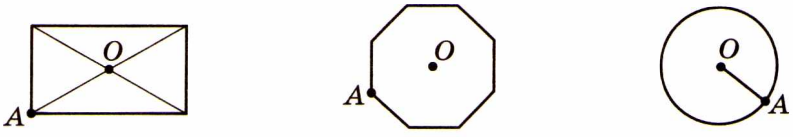


Рис. 3.10

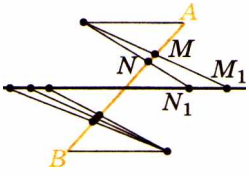


Для любознательных

Пример Георга Кантора (1845-1918). Множеству точек произвольного отрезка можно поставить в соответствие множество точек всей прямой.

Кантор предлагал сделать это так, как показано на рисунке.

Можно ли поставить в соответствие множеству точек луча множество точек отрезка?



2. С помощью иголки (циркуля), обводя контуры фигур, осуществите поворот каждой из них вокруг:
   1) точки А против часовой стрелки на угол: а) 130°; б) 180°;
   2) точки ***О*** по часовой стрелке на угол: а) 75°; б) 360°;
   3*) какой-то точки, не принадлежащей фигуре, на угол: а) 60°; б) 360°.

Задание 16

1°. Постройте отрезок A_1B_1, в который переходит отрезок ***АВ*** поворотом вокруг заданной точки О на: а) 100° по часовой стрелке; б) 45° против часовой стрелки.
2. Постройте треугольник, в который переходит заданный треугольник ***АВС*** поворотом вокруг точки А по часовой стрелке на угол 150°.
3. Постройте окружность, в которую переходит заданная окружность с центром ***О*** поворотом вокруг точки А по часовой стрелке на угол 60°, если: а) точки А и О совпадают; б) точки А и О не совпадают.
4*. Докажите, что поворотом квадрата вокруг точки пересечения его диагоналей на 90° квадрат отображается сам на себя.
5*. Точка ***В*** - точка пересечения биссектрис равностороннего треугольника ***FGH.*** Докажите, что в результате поворота вокруг точки ***В*** на угол 120° треугольник ***FGH*** отображается сам на себя.
6*. Назовите фигуры, которые можно отобразить на самих себя поворотом вокруг некоторой точки на угол: а) 45°; б) 60°; **в)** 120°. Где вы видели такие фигуры в природе и в технике?

Практическая работа 13

1. Начертите отрезок ***АВ.*** Проведите прямую ***п*** так, чтобы она не пересекала отрезок ***АВ.***
2. Из точек А и В опустите перпендикуляры ***АН*** и ***ВК*** на прямую ***п.***
3. На продолжениях отрезков ***АН*** и ***ВК*** за точки ***Ни К*** отложите отрезки $HA_X = AH$ и ***КВ***, = ***ВК*** соответственно.
4. Соедините точки Aj и В, отрезком.
5. Сравните длины отрезков АВ и $A,B_Г$ Сделайте вывод.
6. Какие точки отрезков АВ и А,В, симметричны относительно прямой ***п***?
7. Постройте произвольные треугольник и четырехугольник, проведите прямую ***п,*** не пересекающую их. Постройте фигуры, симметричные треугольнику и четырехугольнику относительно прямой ***п.***

Задание 17

1. Выполните преобразование осевой симметрии: а) четырехугольника относительно одной из его сторон; б) параллелограмма относительно одной из его диагоналей; в) треугольника относительно его средней линии.
2. Сколько осей симметрии имеют две заданные точки? Сделайте рисунок.
3°. Даны точки А, В и М, не лежащие на одной прямой. Постройте точку, симметричную точке ***М*** относительно прямой АВ.
4*. Сколько осей симметрии имеют две прямые? Рассмотрите всевозможные случаи размещения этих прямых на плоскости относительно друг друга.



Для любознательных

Докажите такие свойства ***ортоцентрического треугольника*** (треугольника с вершинами в основаниях высот заданного треугольника).

1. Треугольник, образованный отрезками, соединяющими точки пересечения продолжения высот остроугольного треугольника с описанной вокруг него окружностью, гомотетичен ортоцентрическому треугольнику. (Найдите центр и коэффициент гомотетии соответствующего преобразования.)
2. Радиус окружности, описанной вокруг треугольника, вдвое больше радиуса окружности, описанной вокруг его ортоцентрического треугольника.

Практическая работа 14

1. Проведите отрезок АВ. Обозначьте точку О, не принадлежащую отрезку АВ.
2. На продолжениях отрезков AO и BO за точку O отложите отрезки: $OA_1 = OA$ и $OB_1 = OB$.
3. Соедините точки A_1 и B_1 отрезком.
4. Сравните длины отрезков АВ и A_1B_1. Сделайте вывод.
5. Какие точки отрезков АВ и A_1B_1 симметричны относительно точки О?
6. Начертите произвольные треугольник и четырехугольник, отметьте точку O вне их. Постройте фигуры, симметричные изображенным относительно точки O.

Задание 18

1. Выполните преобразование центральной симметрии треугольника относительно: а) точки, не принадлежащей треугольнику; б) одной из его вершин; в) середины одной из его сторон; г) точки пересечения его медиан.
2. Выполните преобразования центральной симметрии: а) четырехугольника относительно точки пересечения его диагоналей; б) трапеции относительно середины одного из ее оснований.
3. Сколько центров симметрии имеют две точки?

4*. Сколько центров симметрии имеют две прямые? Рассмотрите всевозможные случаи размещения этих прямых на плоскости относительно друг друга.

5**. В каком случае три прямые имеют бесконечное число центров симметрии?

6**. В каком случае имеют один центр симметрии: а) две прямые; б) три прямые; в) n прямых?

Практическая работа 15

1. Проведите отрезок АВ. Отметьте точку О, не принадлежащую отрезку АВ.
2. Проведите луч ОА (с началом в точке O) и отложите на нем отрезок ОА, = 20А
3. Проведите луч OB (с началом в точке В) и отложите на нем отрезок ОВ, = $2OB$.
4. Соедините точки А, и В, отрезком. Сравните длины отрезков АВ и А,В,. Сделайте вывод.
5. Как называется геометрическое преобразование отрезка АВ в отрезок A_tB_t?
6. Продолжите лучи ОА и OB в другую сторону (за точку О) и отложите на этих продолжениях отрезки $OA_2 = 1{,}5OA$ и $OB_2 = 1{,}50B$.
7. Соедините точки A_r и B_2 отрезком. Сравните длины отрезков АВ и A_2B_2. Сделайте вывод.
8. С каким коэффициентом гомотетичны отрезки: а) АВ и А,Bj; б) АВ иA_2B_2? Будут ли гомотетичными отрезки A_1B_1 и A_2B_2?

Задание 19

1. Выполните гомотетию квадрата $ABCD$ с центром гомотетии в одной из вершин этого квадрата и коэффициентом гомотетии $k = 1{,}2$.
2. Постройте фигуру, гомотетичную данному четырехугольнику с коэффициентом Ь-2 и центром гомотетии в точке пересечения диагоналей заданного четырехугольника.

3°. Как расположены гомотетичные точки относительно центра гомотетии, если коэффициент гомотетии - отрицательное число?



Для любознательных

На поле разметили участок $ABCD$ квадратной формы. Дожди размыли границы участка, остались только колышки в центре участка и по одному колышку на сторонах АВ и CD. Возможно ли по этим данным возобновить границы участка? Можно ли решить эту задачу, если третий колышек будет не на стороне CD, а на стороне ВС?

4*. Выполните гомотетию данного треугольника с центром гомотетии в одной из его вершин и коэффициентом гомотетии: а) $k = -\frac{2}{3}$; б) $k = \frac{4}{3}$.

5*. Какая фигура образуется в результате преобразования гомотетии двух пересекающихся прямых, если за центр гомотетии взять точку их пересечения?

6*. Постройте фигуру, гомотетичную углу, с центром гомотетии в его вершине.

7.** Отрезки АВ и AjBj параллельны, АВ $\neq A_1B_1$. Являются ли они гомотетичными? Если да, то найдите центр гомотетии. Сколько центров гомотетии имеют эти отрезки?

8**. Треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC с центром гомотетии в вершине B. Докажите, что точки А, С, A_x, C_x - вершины трапеции. При каком условии четырехугольник ACA_1C_1 будет параллелограммом?

9**. Сколько центров гомотетии имеют две окружности разных радиусов, центры которых не совпадают и которые: **а)** не пересекаются; **б)** пересекаются; в) касаются друг друга внешне; г) касаются друг друга внутренне? Как найти эти центры?

10**. Сколько центров гомотетии имеют две окружности равных радиусов, центры которых не совпадают и которые: **а)** не пересекаются; б) пересекаются; в) касаются друг друга внешне? Как найти эти центры?

11**. Сколько центров гомотетии имеют две концентрические окружности?

Практическая работа 16

1. Постройте произвольный четырехугольник $ABCD$. На продолжении отрезка AD за точку D отложите отрезок AA_X - 1,5AD. На продолжении отрезка DC за точку C отложите отрезок CCj = 1,5DC. На продолжении отрезка DB за точку B отложите отрезок BBj = 1,5DB.
2. Соедините (последовательно) точки А„ B_r и С,. Сравните отношение сторон четырехугольников $ABCD$ и A^C^: AD и A^D, DC и DC_VAB hAjBj, BC и B_XC_V Что можно сказать про эти четырехугольники? Сделайте вывод.

Задание 20

1°. Определите вид фигуры, подобной: **а)** треугольнику; б) четырехугольнику; в)трапеции.

2. Докажите, что фигура, подобная окружности, будет окружностью.
3. Начертите план участка земли прямоугольной формы длиной 10 м и шириной 4,5 м в масштабе 1 : 100.
4. Определите площадь усадьбы, план которой изображен на рисунке 3.11 в масштабе 1 : 1000.

5*. Подобны ли прямоугольники, если: **а)** диагональ одного прямоугольника делит его угол в отношении 2 : 1, а в другом - стороны относятся как 2:1; б) сторона одного прямоугольника равна половине диагонали, а в другом прямоугольнике диагональ образует с одной стороной угол в два раза меньше, чем с другой стороной?

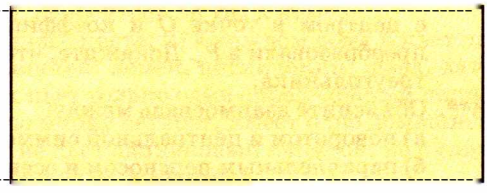


Рис. 3.11

6*. Подобны ли ромбы, если: **а)** тупой угол одного ромба вдвое больше его острого утла, а разность углов второго ромба равна 60°; б) диагональ одного ромба равна его стороне, а сторона второго ромба образует с одной из его диагоналей угол 30°?

Практическая работа 17

1. Постройте произвольный треугольник АВС.
2. Выполните поворот треугольника ABC на 100° относительно вершины А по часовой стрелке.

3. Постройте треугольник, симметричный треугольнику, полученному в п. 2, относительно точки A.
4. Выполните поворот треугольника, полученного в п. 3, на 80° по часовой стрелке.
5. Сравните положение треугольника ABC и треугольника, полученного в п. 4.

Практическая работа 18

1. Постройте произвольный треугольник KLM. Отметьте точку O, не принадлежащую треугольнику KLM.
2. Постройте треугольник, гомотетичный треугольнику KLM относительно точки O с коэффициентом 2.
3. Осуществите поворот треугольника, полученного в п. 2, на 45° относительно точки O по часовой стрелке.
4. Постройте треугольник, симметричный полученному треугольнику в результате выполнения п. 3 относительно одной из его сторон.
5. Подобен ли треугольник, полученный в п. 4, треугольнику $KLM1$ Ответ обоснуйте. Сделайте вывод.

Задание 21

1. Каким еще преобразованием является гомотетия с коэффициентом $k = -1$?

2*. Докажите, что гомотетию с коэффициентом k можно заменить на гомотетию с коэффициентом $-k$ и поворотом вокруг центра гомотетии на развернутый угол.

3. Могут ли два подобных треугольника быть негомотетичными? Могут ли два гомотетичных треугольника не быть подобными?

4*. Даны два треугольника. Две стороны одного из них параллельны двум сторонам другого. Будут ли эти треугольники гомотетичными? Будут ли эти треугольники подобными? Ответ обоснуйте.

5**. Гомотетия с центром в точке O_x и коэффициентом k_x отрезок AB преобразует в отрезок AjBj. Гомотетия с центром 0_2 и коэффициентом k_2 преобразует отрезок AjBj в отрезок A_2B_2, который равен отрезку AB. Докажите, что отрезок A_2B_2 можно получить из отрезка AB параллельным переносом или центральной симметрией и что $|A_1Дг_2| = 1$.

6**. Отрезок AB преобразован в отрезок A_1B_1 последовательными преобразованиями центральной симметрии и гомотетии с общим центром O, не принадлежащим отрезку AB, и коэффициентом гомотетии k. Докажите, что точки A, B, A_v B_x - вершины трапеции. В каком отношении делятся диагонали трапеции точкой их пересечения?

7**. Точку P повернули вокруг точки O на 60°, а потом в результате гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $k = 2$ полученную ранее точку P_r преобразовали в P_2. Докажите, что точки P_2, O и P - вершины прямоугольного треугольника.

8**. Объясните взаимосвязь между:
а) поворотом и центральной симметрией;
б) параллельным переносом и осевой симметрией;
в) поворотом вокруг некоторой точки и осевой симметрией;
г) центральной симметрией и гомотетией.



Для любознательных

Дан выпуклый четырехугольник. Нужно разделить его на 4 части и сложить из них четырехугольник, равновеликий данному. При этом у полученного четырехугольника два основных элемента (две стороны, или два угла, или сторона и угол) заданы.

Совет. Используйте преобразование движения.

§ 15. Подобие многоугольников

Напомним, что две фигуры называются ***подобными,*** если одну можно получить из второй преобразованием подобия: $F_j \sim F_2$ (СТр. 114).

Теорема. Если два одноименных многоугольника имеют соответственно пропорциональные стороны и соответственно равные углы, то эти многоугольники подобны.

Пусть у многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ (рис. 3.12): $\angle A_1 = \angle B_1$, $\angle A_2 = \angle B_2$, ..., $\angle A_n = \angle B_n$, $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \ldots = \frac{A_nA_1}{B_nB_1} = k$.

Надо доказать, что $A_1A_2...A_n \sim B_1B_2...B_n$.

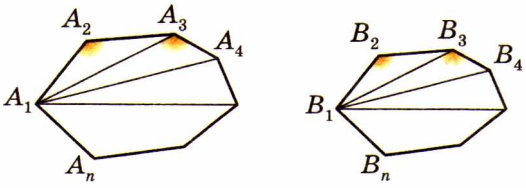


Рис. 3.12

Доказательство

1) По условию $B_2B_1 : A_2A_1 = k = B_3B_2 : A_3A_2$ и $\angle A_2 = \angle B_2$.

Тогда $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$. Откуда $B_3B_1 : A_3A_1 = k$, $\angle A_1A_3A_4 = \angle B_1B_3B_2$. $\angle B_1B_3B_2 = \angle B_1B_3B_4$.

2) $B_3B_1 : A_3A_1 = k = B_3B_4 : A_3A_4$ и $\angle A_1A_3A_4 = \angle B_1B_3B_4$.

Тогда $\triangle A_1A_3A_4 \sim \triangle B_1B_3B_4$ и $\triangle A_1A_2A_3A_4 \sim \triangle B_1B_2B_3B_4$... ■

Повторяя аналогичные логические шаги, получим, что $A_1A_2...A_n \sim B_1B_2...B_n$. Ч. т. д.



Для любознательных

ЗАДАЧА ЭЙНШТЕЙНА. Альберт Эйнштейн считал, что (в его времена) эту головоломку могли решить только 2 % населения. Заметим, что сейчас этот процент несколько выше. Интересно, относитесь ли Вы к нему?

Дано: 1) есть пять домов - все разного цвета; 2) в каждом доме живет по одному человеку разных национальностей: немец, англичанин, швед, датчанин и норвежец; 3) каждый из них пьет только один определенный напиток, курит только одну определенную марку сигарет, имеет одно домашнее животное; 4) никто из этих жителей не пьет одинаковый напиток, не курит сигарет одной марки, не держит одинаковых животных.

Определите: кто держит дома рыбку.

Подсказки: 1) англичанин живет в красном доме; 2) швед держит собаку; 3) датчанин пьет чай; 4) зеленый дом расположен рядом с белым, левее от него; 5) житель зеленого дома пьет кофе; 6) человек, курящий «Pall Mall», держит птицу; 7) житель среднего дома пьет молоко; 8) житель желтого дома курит «Dunhill»; 9) норвежец живет в первом доме; 10) тот, кто курит «Marlboro», живет рядом с тем, кто держит кошку; 11) человек, имеющий лошадь, живет возле того, кто курит «Dunhill»; 12) тот, кто курит «Winfield», пьет пиво; 13) норвежец живет возле голубого дома; 14) немец курит «Rothmans»; 15) тот, кто курит «Marlboro», живет рядом с тем, кто пьет воду.

I СВОЙСТВА ПОДОБНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

I В подобных фигурах все соответственные линейные

$A_1...A_n \sim B_1...B_n$ **(элементы пропорциональны с коэффициентом, рав-**

$\Rightarrow$

$\angle A_1 = \angle B_1, ...,$

$\angle A_n = \angle B_n,$

$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = ... = \frac{A_nA_1}{B_nB_1} = k;$

I ным коэффициенту подобия, а углы меж

сохраняются. Тогда:

• подобные многоугольники имеют соответственно I пропорциональные стороны и соответственно рав- | ные углы;

| • отношение периметров двух подобных многоуголь- ников равно коэффициенту их подобия;

• площади двух подобных многоугольников относят- * ся как квадрат их коэффициента подоби

$\angle A_1 = \angle B_1, ..., \angle A_n = \angle B_n$ > I Последнее утверждение следует из отношения пло-

$S_{A_1...A_n} = k^2 S_{B_1...B_n}$. I щадей треугольников, на которые эти многоугольники | делятся диагоналями, проведенными из соответствен- ных вершин (рис. 3.12).

Практическая работа 19

1. Начертите произвольный многоугольник. Измерьте длины его сторон и градусные меры углов.
2. Постройте подобный ему многоугольник с коэффициентом подобия 2.
3. Сравните с коэффициентом подобия отношения длин соответственных диагоналей этих многоугольников, отношение их периметров.
4. Вычислите площади этих многоугольников и сравните их отношение с коэффициентом подобия.

Задание 22

1°. Два многоугольника подобны. Сторона одного из них относится к соответственной стороне другого как 2:3. Найдите коэффициент подобия и отношение мер соответственных углов.

2°. Два шестиугольника подобны с коэффициентом подобия 3. Найдите отношение их: а) периметров; б) площадей.

3°. Отношение площадей двух подобных двенадцатиугольников равно 2. Найдите отношение их периметров.

4°. Стороны многоугольника относятся как 3 :4 : 5 :6 : 2. Найдите стороны подобного ему многоугольника, если его периметр равен: а) 80 см; б) 60 см.

5. На рисунке 3.13 изображены два подобных многоугольника. Найдите *x, y, z, α* и β.

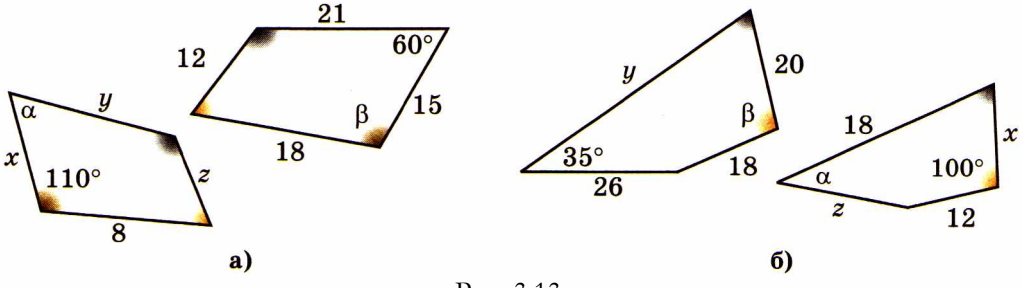


Рис. 3.13

6. Дан квадрат *ABCD,* площадь которого равна 16 см². Найдите сторону квадрата, площадь которого: а) в 4 раза меньше площади данного квадрата; б) в 9 раз меньше площади данного квадрата; **в)** в 3 раза больше площади данного квадрата.
7. Стороны прямоугольника равны 8 см и 6 см. Вычислите периметр подобного ему прямоугольника, диагональ которого равна 50 см.

8. Одна из сторон и диагональ прямоугольника равны 8 см и 10 см соответственно. Вычислите площадь подобного ему прямоугольника, меньшая сторона которого равна 24 см.

9. Сторона и высота ромба равны 25 см и 24 см соответственно. Вычислите периметр подобного ему ромба, большая диагональ которого равна 90 см.

10. Диагонали ромба равны 6 см и 8 см. Вычислите площадь подобного ему ромба, высота которого равна 48 см.

11*. Два ромба имеют равные острые углы. Большая диагональ первого равна 40 см. Найдите сторону этого ромба, если: **а)** диагонали второго ромба относятся как 3 : 4; б) меньшая диагональ и сторона второго ромба относятся как 6 : 5.

12*. Диагональ ромба равна его стороне. Во втором ромбе угол между стороной и диагональю равен 30°. Подобны ли эти ромбы? Ответ обоснуйте.

13*. Сторона одного прямоугольника равна половине его диагонали, а во втором прямоугольнике диагональ делит угол на части, отношение мер которых равно 2:1. Подобны ли эти прямоугольники? Ответ обоснуйте.

14*. На сторонах прямоугольного треугольника построены попарно подобные пятиугольники так, что стороны треугольника являются их соответственными сторонами (рис. 3.14). Докажите, что площадь пятиугольника, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей пятиугольников, построенных на катетах.

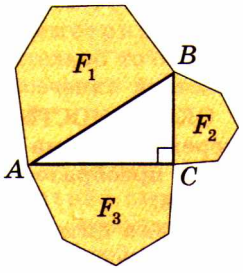


Рис. 3.14

15*. В треугольник, образованный сторонами AB, AD и диагональю ***BD*** параллелограмма ***ABCD,*** вписан параллелограмм ***AKPM*** так, как показано на рисунке 3.15. Найдите стороны параллелограмма ***ABCD,*** если ***AK*** = 3 дм, ***AM*** = 5 дм и ***AK*** : ***KB*** = 2:3.

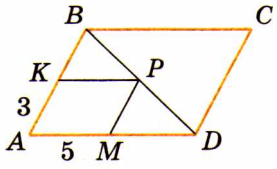


Рис. 3.15

16*. Докажите, что ромбы подобны, если: **а)** отношения соответственных диагоналей этих ромбов равны; б) отношение радиусов вписанных в эти ромбы окружностей равно отношению их сторон.

17*. Докажите, что параллелограммы подобны, если: **а)** равны их острые углы и отношения соответственных сторон; б) диагонали этих параллелограммов делят их острые углы на соответственно равные углы.

18*. Докажите подобие двух равнобоких трапеций, если: **а)** их острые углы равны, а диагонали являются биссектрисами этих углов; б) их тупые углы равны, а диагонали являются биссектрисами этих углов.

19*. Дан четырехугольник ***ABCD.*** Постройте четырехугольник, площадь которого: **а)** в 2 раза меньше площади заданного четырехугольника; б) в 3 раза больше площади заданного четырехугольника.

20*. Докажите, что в подобных многоугольниках: **а)** соответственные диагонали пропорциональны соответственным сторонам; б) диагонали, проведенные из соответственных вершин, делят многоугольники на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников.

21*. Докажите, если два многоугольника делятся соответственными диагоналями на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников, то такие многоугольники подобны.



Для любознательных

«Крестики-нолики-3» - игра в «крестики-нолики», в которой выигрывает тот, кто первым поставит 3 свои метки на одной прямой.

На бумаге в клетку нарисуйте многоугольник с наименьшим числом клеточек, такой, чтобы, играя на нем в крестики-нолики-3, тот, кто начинает игру, всегда выигрывал. Запишите его выигрышную стратегию.

§ 16. Группы симметрии фигур

Фигуру называют центрально-симметричной, а точку О - ее центром симметрии, если преобразованием симметрии относительно точки О фигура переходит сама в себя. Например, окружность - центрально-симметрична, а центром ее симметрии является центр этой окружности.

Фигуру называют симметричной относительно ее оси симметрии п, если преобразованием симметрии относительно прямой п фигура переходит сама в себя. Например, вы знаете с 7-го класса, что биссектриса угла является осью его симметрии, равнобедренный треугольник симметричен относительно высоты, проведенной к его основанию.

ОКРУЖНОСТЬ **переходит сама в себя преобразованиями:**
- осевая симметрия относительно любого диаметра окружности;
- центральная симметрия относительно центра окружности;
- поворот с центром в центре окружности на произвольный угол.

Преобразования, переводящие данную фигуру саму в себя, будем называть группой симметрии этой фигуры.

Например, ***для окружности группой симметрии*** будет:
- осевая симметрия относительно произвольного диаметра этой окружности (рис. 3.16-а);
- центральная симметрия относительно ее центра (рис. 3.16-б);
- поворот с центром в центре окружности на произвольный угол (рис. 3.16-в).

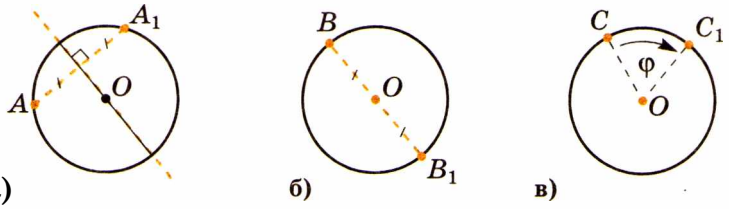


Рис. 3.16

Понимание того, какие именно преобразования являются группой симметрии данной фигуры, поможет в поисках решения задачи и очень упростит этот процесс.

Группа симметрии равностороннего треугольника:
- осевая симметрия относительно каждой из высот треугольника (рис. 3.17-а);
- поворот относительно центра треугольника на 120° и 240° (рис. 3.17-б).

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК **переходит сам в себя преобразованиями:**
- осевая симметрия относительно каждой из высот треугольника;
- поворот относительно центра треугольника на 120° и 240°.

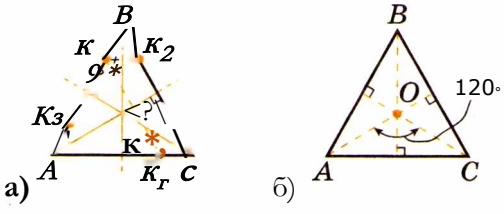


Рис. 3.17

Группа симметрии равнобедренного треугольника:

— осевая симметрия относительно высоты, проведенной к основанию (рис. 3.18).

Группа симметрии параллелограмма:

- центральная симметрия относительно точки пересечения диагоналей (рис. 3.19).

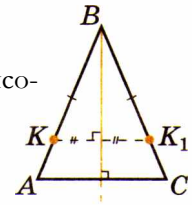


Рис. 3.18

Группа симметрии ромба:

- осевая симметрия относительно диагоналей (рис. 3.20);

— центральная симметрия относительно точки пересечения диагоналей (как параллелограмм).

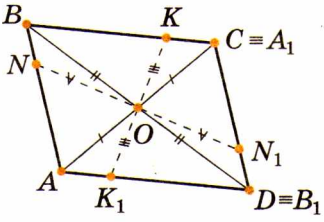


Рис. 3.19

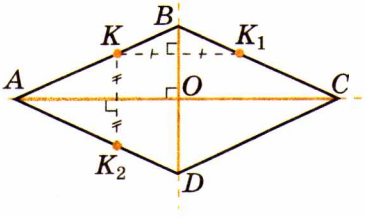


Рис. 3.20

Группа симметрии прямоугольника:

- осевая симметрия относительно прямых, проходящих через середины противолежащих сторон (рис. 3.21);

— центральная симметрия относительно точки пересечения диагоналей (как параллелограмм).

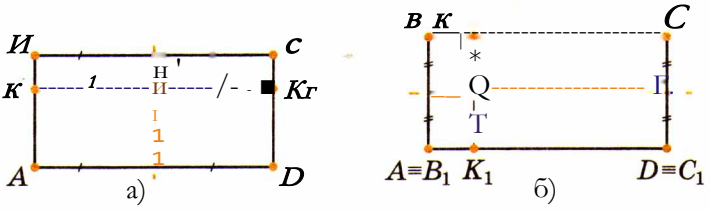


Рис. 3.21

Группа симметрии квадрата:

- осевая симметрия относительно диагоналей (как ромб);
- осевая симметрия относительно прямых, проходящих через середины противолежащих сторон (как прямоугольник);
- центральная симметрия относительно точки пересечения диагоналей (как параллелограмм).

Переходят сами в себя преобразованиями:

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК
- осевая симметрия относительно высоты, проведенной к основанию.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ
- центральная симметрия относительно точки пересечения диагоналей.

РОМБ
- осевая симметрия относительно диагоналей;
- центральная симметрия относительно точки пересечения диагоналей.

КВАДРАТ
- осевая симметрия относительно диагоналей;
- осевая симметрия относительно прямых, проходящих через середины противолежащих сторон;
- центральная симметрия относительно точки пересечения диагоналей.



Для любознательных

Как-то американского математика профессора **Реймонда** М. **Смаллиана,** известного своими логическими задачами и софизмами, пригласили выступить на заседании студенческого математического клуба. Профессора представил логик Мелвин Фитинг, который когда-то учился у Смаллиана. Речь Фитинга действительно была речью ученика Смаллиана. Он сказал: «Я имею честь представить вам профессора Смаллиана, который докажет вам, что или он не существует, или вы не существуете, но при этом неизвестно, кто именно не существует».

Практическая работа 20

1. Вырежьте из бумаги: круг, квадрат, прямоугольник, ромб, параллелограмм, равнобокую трапецию, равносторонний треугольник, равнобедренный треугольник.
2. Среди полученных фигур найдите те, вокруг которых можно описать окружность, и отметьте центры этих окружностей.
3. В четырехугольниках отметьте точки пересечения диагоналей, а в круге - центр. Обведите каждую фигуру на листе бумаги.
4. Проверьте, принадлежит ли поворот к группе симметрии каждой из фигур. Для этого: совместите фигуру с ее изображением на бумаге; вставьте иголку (циркуля) в отмеченную точку; поворачивайте фигуру вокруг этой точки. Сделайте вывод и запишите его.
5. Сгибая вырезанные фигуры, проверьте, принадлежит ли осевая симметрия к группе симметрии каждой из фигур. Сделайте вывод и запишите, сколько осей симметрии имеет каждая из ваших фигур.

Задание 23

1°. Какие из данных букв имеют ось симметрии: Ф, В, П, О, Т, ПП, Е, З?
2. Сколько осей симметрии имеют: а) отрезок; б) луч; в) две пересекающиеся прямые?
3. Докажите, что прямая, которой принадлежит биссектриса угла, является осью его симметрии.
4°. Какие из известных вам четырехугольников имеют ось симметрии?
5. Сколько осей симметрии имеет: **а)** круг; б) полуплоскость; в) полукруг; г) часть плоскости между двумя параллельными прямыми?
6. Докажите, что разносторонний треугольник не имеет осей симметрии.
7. Имеют ли центр симметрии: **а)** отрезок; **б)** луч; в) две пересекающиеся прямые?
8°. Какие из данных букв имеют центр симметрии: О, М, Ж, Х, Ф?
9*. Сколько центров симметрии имеют две параллельные прямые?
10. Может ли треугольник иметь центр симметрии?
11*. Может ли фигура иметь более одного центра симметрии?
12**. Докажите, что если четырехугольник имеет центр симметрии, то он - параллелограмм.
13**. Придумайте фигуру, которая имеет несколько осей симметрии, но не имеет ни одного центра симметрии.
14**. Докажите: если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет и центр симметрии.
15*. Назовите фигуры, которые отображаются сами на себя поворотом вокруг некоторой точки на угол: **а)** 90°; б) 120°; в) 52°.
16*. Назовите преобразование, при котором каждая прямая плоскости переходит в параллельную прямую или сама в себя.
17*. Докажите, что при центральной симметрии каждый луч переходит в луч, противоположный ему.
18**. Найдите группу симметрии выпуклого четырехугольника с перпендикулярными диагоналями, у которого две смежные стороны равны и который не является ромбом.



Для любознательных

1. На окружности с диаметром AB отметили произвольную точку X (не совпадает с A и B). С центром в точке X провели окружность, касательную к AB в точке H, которая пересекает данную окружность в точках K и P; точка M - точка пересечения XH и KP. Докажите, что $XM = MH$.

2. На хорде AB окружности с центром O отметили произвольным образом точку X (не совпадает *с A и B*). Через точки X, A и O провели вторую окружность, которая пересекает первую в точке P. Докажите, что $PX = XB$.

§ 17. Метод использования свойств геометрических преобразований при решении задач

Рассмотрим примеры использования геометрических преобразований. При этом мы будем опираться на их свойства: образом прямой является прямая; образом полупрямой - полупрямая; образом угла - угол, равный данному; образ точки, принадлежащей отрезку, принадлежит образу отрезка; отношения отрезков прямой сохраняются. При этом заметим, что отношение длин отрезков разных прямых, вообще говоря, не сохраняется.

Пример 1. Двое друзей по очереди кладут на квадратный стол пятикопеечные монеты (одну за один ход). Монету можно положить только на свободное место. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Докажите, что тот, кто ходит первым, всегда может выиграть.

Решение

Первый игрок первым ходом кладет монету в центр стола, а потом - симметрично ходу второго игрока (относительно центра стола). Понятно, что при такой стратегии первый игрок всегда имеет возможность сделать ход после хода второго игрока.

Пример 2. Через общую точку А двух окружностей y_1 и y_2 проведите прямую так, чтобы эти окружности отсекали на ней равные хорды.

План построения

1) Строим окружность y_3, симметричную окружности y_2 относительно точки ***A*** (рис. 3.22): на прямой OjA отложим отрезок $A0_3 = A0_2$; с центром в точке 0_3 радиусом, равным радиусу окружности y_2, проводим окружность y_3.

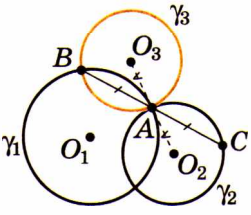


Рис. 3.22

2) Обозначим y_3 П $y_1 \triangleq B$. Прямая АВ - искомая.

Доказательство

Обозначим (АВ) П $y_2 \triangleq$ С и докажем, что [AB] = [AC]. Точки ***B*** и С - симметричны относительно центра симметрии А. Тогда отрезки АВ и АС равны. Ч. т. д.

Пример 3. В четырехугольнике ***ABCD*** углы при вершинах ***B*** и ***D*** - прямые, АВ = ***BC,*** а высота ***BH*** = 1. Найдите площадь четырехугольника ***ABCD.***

Решение

Повернем треугольник ***ABH*** вокруг точки ***B*** на 90° (рис. 3.23).

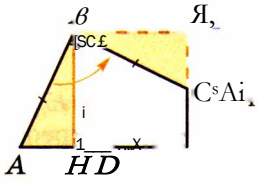


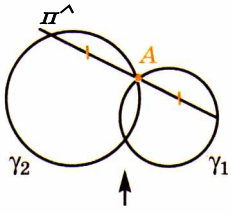
Рис. 3.23

Симметрия, независимо от широты трактовки понятия, является той идеей, с помощью которой человек на протяжении столетий стремился постичь и сотворить порядок, красоту и совершенство.

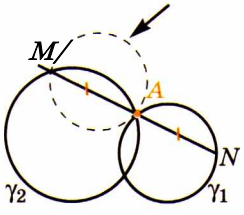
Г. Вейль

Ищите симметрию !

СТРОИМ:



симметрично к y_i относительно т. ***A***



MN – **искомая**

Напомним:

(AB) - прямая АВ;

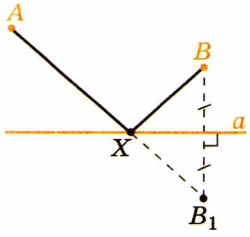
[АВ] - отрезок АВ;

П - знак пересечения;

$\triangleq$ - «обозначили как».

Образованный четырехугольник HBH_XD - квадрат со стороной 1. Его площадь равна 1. Тогда и площадь четырехугольника $ABCD$ тоже равна 1.

Пример 4. Опорная задача. Даны прямая a и две точки A и B с одной стороны от нее. Найдите на прямой a такую точку M, чтобы сумма длин отрезков AM и MB была наименьшей.



$AX + XB$- *наименьшее для Xe a*

Решение

Рассмотрим точку B_x, симметричную точке B относительно заданной прямой a (рис. 3.24). Тогда для произвольной точки K с a: $KB = KB_V$ и $AK + KB = AK + KB_X > AB_\Gamma$.

Искомая точка M - точка пересечения AB_X и a.

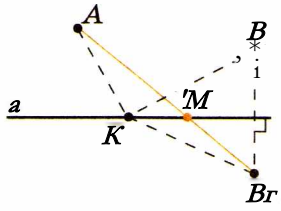
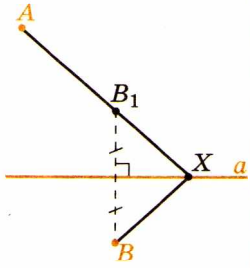


Рис. 3.24

Пример 5. Опорная задача. Даны прямая a и две точки A и B по разные стороны от нее. Найдите на прямой a такую точку M, чтобы значение выражения $|AM - MB|$ было наибольшим.



IAX - XB\ - *наибольшее для Xe a*

Решение

Рассмотрим точку B_x симметричную точке B относительно заданной прямой a (рис. 3.25). Тогда для произвольной точки $K \in a$ имеем: $KB = KB_X$ и

$|AK - KB| = |AK - KB_1| < AB_1 = |AM - MB_1|$.

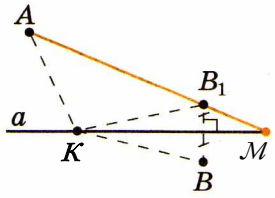
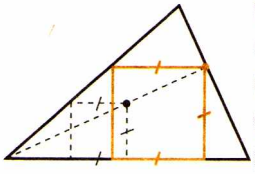


Рис. 3.25

Искомая точка M - точка пересечения AB_X и a.

Пример 6. Дан треугольник ABC. Постройте квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC данного треугольника и по одной - на сторонах AB и BC.



так можно вписать квадрат $

План построения

Из произвольной точки M_0 стороны AB проведем $M_0K_0 \pm AC$ и построим квадрат $K_0M_0E_0P_0$ (рис. 3.26).

Проведем прямую AE_0 до пересечения со стороной BC в точке E.

Строим прямоугольник $MEPK$ - искомый.

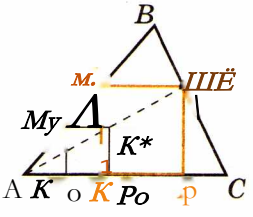
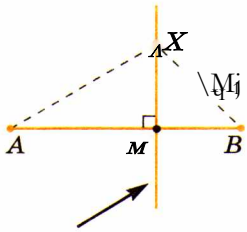


Рис. 3.26

Доказательство

I Квадрат $K_0M_0E_0P_0$ переходит в прямоугольник $KMEP$ преобразованием гомотетии относительно точки A с коэффициентом $\frac{AE}{AE_0}$. Тогда $KMEP$ - квадрат.

Пример 7. Опорная задача. Дан отрезок AB. Докажите, что геометрическим местом точек M, для которых $AM^2 - BM^2 = k^2$ $(k^2 < AB^2)$, будет прямая, перпендикулярная к AB.



ГМТ, для которых $AX^2 - XB^2 = \text{const}$

Доказательство

1) Найдем на отрезке AB точку D, для которой $AD^2 - BD^2 = k^2$ (рис. 3.27). Учитывая, что $AD + DB = AB$, получим: $(AD - DB)(AD + DB) = k^2$, $2AD = k^2 : AB + AB$.

2) Докажем, что для произвольной точки M прямой, проходящей через D перпендикулярно к AB, выполняется такое же соотношение.

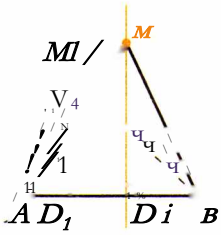


Рис. 3.27

Из прямоугольных треугольников AMD и BMD получим:

$AM^2 - AD^2 = MD^2 = MB^2 - DB^2$.

Отсюда: $AM^2 - BM^2 = AD^2 - DB^2 = ft^2$.

3) Докажем (от противного), что не существует иных точек плоскости с таким свойством.

Пусть существует точка $M_1 \not\equiv M$, для которой $AM_1^2 - BM_1^2 = ft^2$. Проведем $M_1D_1 \perp AB$, $D_1 \in AB$.

Тогда $AD^2 - D_xB^2 = AM_1^2 - BM_1^2 = ft^2 = AD^2 - BD^2$.

Отсюда:

$(AD_1 + BD_1)(AD_1 - BD_1) = ft^2 = (AD + BD)(AD - BD)$.

Учтем, что $(AD + BD) = AB = (AD_1 + BD_1)$:

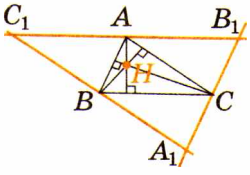
$AB(2AD_1 - AB) = ft^2 = AB(2AD - AB)$, тогда $AD_1 = AD$.

Т. е. $D_x = D$, что противоречит допущенному.

Ч. т. д.

Напомним:
i - «не принадлежит»;
$\not\equiv$ - «не совпадает».

Пример 8. Опорная задача. Докажите, что ортоцентр треугольника является центром окружности, описанной вокруг треугольника, образованного прямыми, проходящими через вершины заданного треугольника параллельно его сторонам.



Мы уже доказывали этот факт раньше и установили, что именно поэтому три высоты треугольника пересекаются в одной точке. Вернемся к этой задаче, обогащенные знаниями о геометрических преобразованиях.

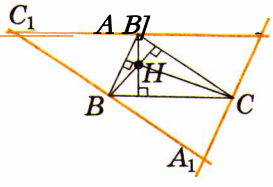


Рис. 3.28

$B_1C_1 \parallel BC$

$A_1B_X \parallel AB$

$C_1A_1 \parallel AC$

H - центр описанной окружности вокруг $A_1B_1C_1$

Доказательство

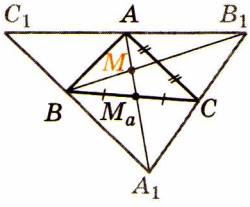
Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 3.28), притом:



Для любознательных

В центре квадратного пирога есть изюминка. От пирога можно отрезать треугольный кусок по прямой, пересекающей две его смежные стороны в точках, которые не совпадают с вершинами фигуры. От оставшегося пирога можно таким же образом отрезать следующий кусок и т. д. Можно ли таким образом отрезать кусок пирога с изюминкой?

I A_1C_1 || CA, B_1C_1 || BC и $A_1B_1$1 | AB. Тогда А$A_1B_1C_1$ ~ $AABC$ I $(ZA_X = ZA; ZB_X = ZB; ZC_1 = ZC)$.



I Найдем коэффициент подобия этих треугольников. ABA_XC - параллелограмм, тогда $BA_X = AC$. Аналогично: $C_XB = AC$. Тогда $C_XA_X = 2AC$ и искомый коэффициент ® подобия $k = 2$.

I Точка B - середина C_XA_V тогда BH - серединный (перпендикуляр к стороне CjAj треугольника $A_XB_XC_X$. I Аналогично: CH и AH - серединные перпендикуляры к A_XB_X и CjB_x. Следовательно H - центр окружности, описанной вокруг треугольника $A_XB_XC_V$ и высоты А ABC -» Л $AфxCi$ I треугольника ABC пересекаются в одной точке.

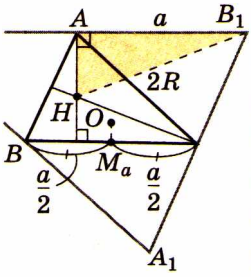
гомотетией с * Преобразованием подобия (k = 2) ДABC -> $AA_1B_1C_1$, $k = -2$*и центром* { при этом: А ->A_V B^B_X, C C_x, O —> H и т. д.

в центроиде M jНапример, середина отрезка BC (точка M_a) перейдет *треугольника* ABC: в A (середину отрезка C_XB_X). Точка M, расположенная на AM_a вдвое ближе к M_a, чем к А, перейдет сама в себя * (рис. на поле). Тогда M - центроид треугольника ABC.

$A \to A_1$
$_{M_A}$
$O \% H$
R -> $HB_X = 2R$ |

^ Получили: преобразование A ABC —> Д $A_XB_1C_1$ — гомотетией относительно точки M с коэффициентом k = -2.

I Отсюда следуют такие опорные факты.



1. O -> H, M_a —>• А с $k = -2$ относительно точки M, тогда $HA = 2OM_a$; аналогично $HB = 20M_b$, $HC = 2OM_c$ (M_b иМ-$_c$середины сторон *Ьяс* треугольника ABC).

$$HA = 20M_a, HB = 20M_b, HC = 20M_C$$

2. O -> H, A -> A_v тогда радиус описанной окружности R —> $|HA_X|$ и HA_X = 2R; аналогично $HB_X = HC_X = 2R$.

$$HA_1 = HB_1 = HC_1 = 2R$$

$AH = 20M_a$ j

$AH^2 = 4R^2 - a^2$ j

I 3. Из Д$HB.A_1$ (рис. на поле): HB^2. - AB^2.=AH^2= $4R^2$ - a^2.

$$AH^2 = 4M^2 — a^2, BH^2 = 4R^2 — b^2, CH^2 = 4R^2-c^2$$

4. Площадь Sj треугольника $A_1B_1C_1$ равна k^2 ■ S = 4S, где | S - площадь треугольника ABC.

$S_X = 4S$

Задание 24

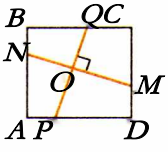
1. Даны угол и точка M внутри этого угла. Постройте отрезок с концами на сторонах заданного угла так, чтобы точка M делила этот отрезок в отношении 1:2.
2. Населенные пункты А и B расположены на разных берегах реки, берега которой параллельны. При этом прямая AB не перпендикулярна к берегам. Где надо построить мост, чтобы путь от А до В был наименьшим?
3. Постройте отрезок заданной длины а, параллельный заданной прямой I, с концами на: а) двух данных прямых; б) двух данных окружностях.
4. Постройте трапецию по: а) основаниям и диагоналям; б) боковой стороне, диагоналям и углу между ними.
5. Постройте равносторонний треугольник, у которого центр - заданная точка O, а концы одной из сторон лежат на двух данных прямых.
6. Постройте равнобедренный треугольник по заданному углу а между равными сторонами, заданной точке А - вершине этого угла так, чтобы две другие вершины треугольника лежали на: а) двух данных прямых; б) двух данных окружностях.

7. Постройте равносторонний треугольник по положению его центра и расстояниям от двух вершин до заданной точки M.
8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр которой расположен внутри этого четырехугольника. Сумма углов AOB и COD равна 180°. Докажите, что сумма расстояний от центра окружности до сторон этого четырехугольника равна его полупериметру.
9. Внутри равностороннего треугольника ABC отметили точку M. Докажите, что из отрезков MA, MB и MC всегда можно построить треугольник. Найдите углы этого треугольника, если $\angle AMB = \phi_x$, $\angle BMC = \phi_2$, $\angle AMC = (\rho_r$
10. Постройте квадрат, у которого диагональ принадлежит данной прямой, а концы второй диагонали расположены на другой заданной прямой и окружности.
11. Точки K и N лежат на сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC. На стороне BC треугольника ABC найдите такую точку P, чтобы периметр треугольника KPN был наименьшим.
12. Постройте треугольник по вершине A и прямым, на которых лежат биссектрисы углов B и C.
13. Даны три попарно пересекающиеся прямые a, b и c. Постройте такой отрезок, чтобы прямая b пересекала его под прямым углом и делила пополам, а концы этого отрезка лежали на прямых a и c. Всегда ли задача имеет решение?
14. На реке два острова. Туристам на лодке надо с одного острова попасть на второй и побывать (по очереди) на обоих берегах реки. Проложите маршрут для туристов так, чтобы их суммарный путь был наименьшим. Берега реки можно считать параллельными.
15. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки K, M, N и E так, что $KMNE$ - параллелограмм. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих параллелограммов совпадают.
16. Постройте отрезок с серединой в заданной точке и концами на: а) двух заданных окружностях; б) двух заданных прямых.
17. Постройте квадрат с центром в заданной точке O так, чтобы две его параллельные стороны или их продолжения проходили через две заданные точки M и N.
18. Постройте трапецию $ABCD$ по двум данным непараллельным прямым AC и BD, середине боковой стороны и точке на прямой BC.
19. Постройте треугольник ABC по положению вершины C и двум прямым, которые содержат медианы, проведенные из вершин A и B.
20. Постройте ромб по острому углу и сумме диагоналей.
21. Впишите в заданный угол окружность, проходящую через заданную точку внутри этого угла.
22. Впишите в заданный равнобедренный треугольник: а) квадрат со стороной на основании треугольника и с двумя вершинами на его боковых сторонах; б) прямоугольник со стороной на основании треугольника, двумя вершинами на его боковых сторонах и диагоналями, параллельными равным сторонам треугольника.
23. Найдите геометрическое место точек, делящих пополам хорды данной окружности, проходящие через общую точку A, если: а) A принадлежит окружности; б) A не принадлежит окружности.
24. Найдите геометрическое место точек, делящих в отношении 1 : 3 секущие данной окружности, проведенные из одной точки A.
25. Постройте окружность, проходящую через две заданные точки и касающуюся заданной прямой.
26. Постройте квадрат, три вершины которого лежат на трех заданных параллельных прямых.



Для любознательных

В квадрате $ABCD$ провели два взаимно перпендикулярных отрезка MN и PQ (см. рис.). Докажите, что сумма периметров четырехугольников $APON$ и $CQOM$ равна сумме периметров четырехугольников $BNOQ$ и $DMOP$.



§ 18. Параллельный перенос на координатной плоскости

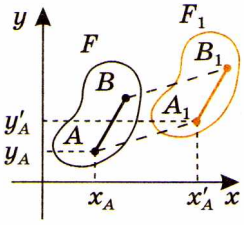
Напомним, что ***при параллельном переносе все точки фигуры перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.*** Т. е. две **произвольные точки *A* и *B* фигуры-прообраза переходят в точки A_1 и B_1 фигуры-образа так, что точки *A, B*, B_1, A_1 или образуют параллелограмм,** или лежат на одной прямой.

Обозначим координаты точек Л, A_1, В, B_x (рис. 3.29) как $A(x_A; y_A)$, $A^x'_B, y'_A)$, $B(x_B; y_B)$, $B_1(x'_B | y'_B)$. Имеем:

1) AB || AjB_x и $AK \| Ox$ || A_XM, тогда $ZBAK = ZB^M$;

2) $AB = A_1B_1$ и $ZBAK = ZB^M$, тогда $AABK =$ AA^M;

3) $x_B - x_A = AK$ ■■ $A^M = x'_B - x'_A$.



F---------- >F_1 параллельным переносом

ABEJAJ - параллелограмм.

$x'_A - x_A = x'_B - x_B = x$

$y'_A - y_A = y'_B - y_B = m$

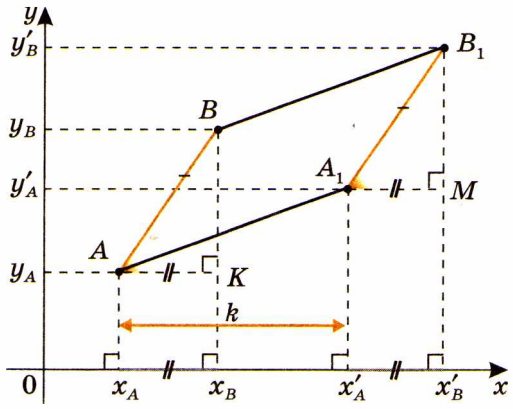


Рис. 3.29

Мы рассмотрели случай $x_B > x_A$.

Если $x_A > x_B$, то согласно предыдущему имеем $x_A - x_B = x'_B - x'_A$, т. е. соотношение $x_B - x_A = x'_B - x'_A$ выполняется.

Параллельный перенос:

$(*; y) \to (x + k; y + m)$

Если $x_B = x_A$, то $AB \| Oy$ и A^ЦАВЦОу, т. е. тогда: $x_B - x_A = 0 = x'_B - x'_A$

В случае, если точки А, В, B_x, A_1 лежат на одной прямой, очевидно, что соотношение $x_B - x_A = x'_B - x'_A$ тоже выполняется.

Мы доказали, что при параллельном переносе для двух произвольных точек А и В фигуры-прообраза, которые переходят в точки A_1 и В фигуры-образа, выполняется соотношение: $x_B - x_A = x'_B - x'_A$. Тогда для этого преобразования $x'_B - x_B = x'_A - x_A = k$ — величина постоянная. Обозначим ее через *k*. Зная значение *k*, можно для данного преобразования по абсциссе точки-прообраза определить абсциссу точки-образа:

$$x'_A = x_A + k, \; x'_B = x_B + k, \; \ldots .$$

Аналогично получаем: $y'_A = y_A + m, y'_B - y_B + m, \; \ldots .$

Тогда преобразованию параллельный перенос можно дать и такое определение.

Параллельным переносом называется преобразование, при котором произвольная точка **(*; у)** *фигуры-прообраза переходит в точку* **(ж + k; у + т)** *фигуры-образа.*

Сравним длины отрезков ***AB*** и A_XB_X:

$$AB^2 = (x_в - x_A)^2 + (y_в - y_A)^2 = ((x_в + k) - (x_A + k))^2 + ((У_В + т) \sim (y_A + т))^2 = A_1B_1^2$$

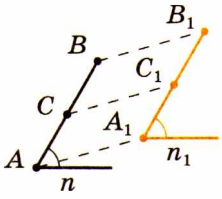
Получили: $AB = A_1B_1$, т. е. расстояния сохраняются, и ***параллельный перенос*** является ***движением,*** как и отмечалось ранее.

Замечание. Пользуясь координатным методом, докажите СВОЙСТВА преобразования ***параллельный перенос.***

1. **При параллельном переносе прямая переходит в параллельную ей прямую (или сама в себя).**
2. **Если при параллельном переносе точки** *A, B, C* **переходят в точки** $A_v B_x$, **С, и при этом точка** *C* **лежит на отрезке** *AB,* **то точка С, лежит на отрезке** A_XB_X.
3. **Углы между прямыми сохраняются.**
4. **Композиция (т. е. последовательное выполнение) двух параллельных переносов является параллельным переносом.**

Совет. Воспользуйтесь методом от противного.

СВОЙСТВА параллельного переноса:



1- ***(AB)*** —>(AjBj) I (AB)

2. С є ***[AB]***
↓
C є [АД]

3. ***(АВУп = (A1B1Уп1***

4. F -> Fx -> F2 параллельным переносом

JJ

F^F2 параллельным переносом

Практическая работа 21

1. Начертите декартову систему координат и произвольный треугольник в ней. Обозначьте его вершины как А, В, С и запишите их координаты.
2. Запишите координаты точек A_v, B_x и C_v абсциссы которых на 3 единицы больше абсцисс точек А, В и С, а ординаты на 2 единицы меньше ординат точек А, В и С соответственно.
3. В той же координатной плоскости (см. п. 1) начертите треугольник бвершинами в точках $A_р$ B,, С, и проверьте: **а)** равны ли отрезки CC_V BB_V AA_X; б) параллельны ли отрезки СС,, ВВ,, ААj; **в)** равны ли соответствующие стороны треугольников ***ABC*** и AjBjCj. Объясните почему. Равны ли треугольники АВС и АДС,?
4. Что можно сказать об углах треугольников ***ABC*** и $A_XB_XC_X1$ Сделайте вывод.
5. Найдите разность между координатами середин соответствующих сторон треугольников АВС и AjBjC,. Сделайте вывод.
6. Проверьте, параллельны ли медианы, проведенные к сторонам АВ и A_XB_X треугольников ***ABC*** и AjBjCj. Сделайте вывод.

Для любознательных

1. Докажите, что при параллельном переносе окружность переходит в окружность.

2. Дан треугольник ***ABC.*** Точка ***M*** лежит внутри этого треугольника и двигается параллельно его стороне ***BC*** до пересечения со стороной ***CA,*** далее - параллельно АВ до пересечения с ВС, потом - параллельно АС до пересечения с АВ и т. д. Докажите, что через какое-то число шагов траектория движения точки замкнется.

Задание 25

1°. Выполните параллельный перенос точек A(2; 5), B(0; -7), C(3; 0) на 3 единицы параллельно оси абсцисс в положительном направлении. Запишите координаты построенных точек.

2°. Выполните параллельный перенос точек A(0; 2), C(-3; 4), 0(0; 0) на 5 единиц параллельно оси ординат в отрицательном направлении. Запишите координаты построенных точек.

3. При параллельном переносе, заданном формулами $x_x = x - 3$, $y_x = y + 2$, точка A отображается в точку A,. Найдите координаты точки Aj, если: а)A(-2; 4); б)A(11; 8); в)A(-3; 0).

4. Существует ли параллельный перенос, при котором: а) точка A(2; 1) переходит в точку Aj(4; 3), а точка B(1; 0) - в точку B_t(0; -1); б) точка *C(-2;* 1) переходит в точку Cj(-l; 0), а точка *P(*1; -3) - в точку PД0; -4)?

5. При параллельном переносе, заданном формулами $x_x = x + 8$, $y_x = y - 1$, точка *B* отображается в точку B_v Найдите координаты точки *B,* если: а) ВДО; 4); б)B_1(-12;9);в)B_1(-5;-4).

6. Запишите формулы параллельного переноса, при котором: а) точка C(-4; 7) отображается в точку C,(8; -3); б) точка £)(0; 5) отображается в точку .0,(7; 8).

7. При параллельном переносе точка A(3; -7) отображается в точку A,(—5; 1). В какую точку отображается точка: а) B(-8; 6); б) *F(*3; 17)?

8. При параллельном переносе точка 0(0; 0) переходит в точку B(3; 0). Найдите координаты прообраза точек: а)A,(-5; 4); б) B,(-12; 9).

9*. При параллельном переносе вершина A(1; 3) треугольника ABC переходит в вершину *K(*5; -3) треугольника *KLM.* Найдите координаты двух других вершин полученного треугольника *KLM,* если B(6; 1), C(—1; -1).

10. Вершины треугольника ABC имеют координаты: A(1; 1), B(-1; 2), C(0; 9). Найдите координаты вершин образа этого треугольника, полученного параллельным переносом: x, = $x + 3$; $y_x = y - 2$.

11*. При параллельном переносе центр окружности $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ перешел в точку (-10; 6). Запишите соответствующие формулы этого преобразования.

12*. Даны координаты концов отрезка M(4; -6) и iV(-6; 8). Найдите параллельный перенос, при котором середина отрезка перейдет в начало координат. Найдите координаты концов отрезка-образа при таком преобразовании.

13*. Укажите координаты центра окружности-образа и найдите ее уравнение для параллельного переноса $x_1 = x-1$;г/, = г/ + 2, если уравнение соответствующего прообраза имеет вид: а) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 1 = 0$.

14*. Прямая $3x - 2y = 1$ после параллельного переноса проходит через точку: а) (0; 3); б) начало координат; в) (-1; 7). Найдите уравнение прямой после переноса.

15**. Постройте отрезок, концы которого принадлежат двум данным параллельным прямым, а середина находится в заданной точке.

16**. Постройте геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух заданных прямых будет величиной постоянной.



Для любознательных

Параллельный перенос поможет вам в решении следующих задач.

1. Даны угол ABC и прямая *I.* Постройте прямую, параллельную *I,* на которой стороны заданного угла ABC отсекают отрезок заданной длины *a.*

2. Даны две окружности и прямая *I.* Постройте прямую l_v параллельную /, так, чтобы: а) расстояние между точками пересечения l_X с данными окружностями имело заданное значение *a;* б) обе данные окружности отсекали на прямой Zj равные хорды; в) обе данные окружности отсекали на прямой Z, хорды, сумма (или разность) которых равна заданному отрезку *a.*

§ 19. Преобразование симметрии на координатной плоскости

ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ

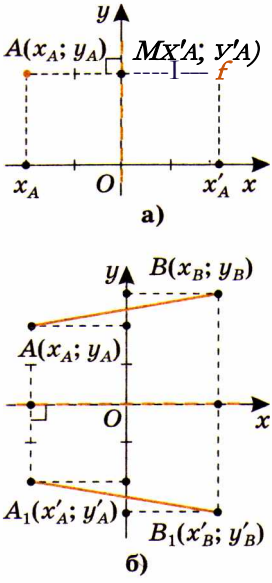


Рис. 3.30

При преобразовании осевой симметрии удобно направить одну из координатных осей вдоль оси симметрии. Тогда легко найти координаты точки-образа такого преобразования.

Если ось симметрии совпадает с осью *Oy* (рис. 3.30-а), **то ординаты соответствующих точек образа и прообраза равны, а их абсциссы противоположны:**

$$y'_A = y_A, x'_A = -x_A$$

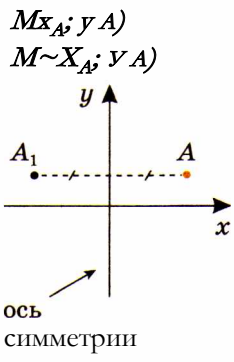
Если ось симметрии совпадает с осью *Ox* (рис. 3.30-б), **то абсциссы соответствующих точек образа и прообраза равны, а их ордината — противоположны:**

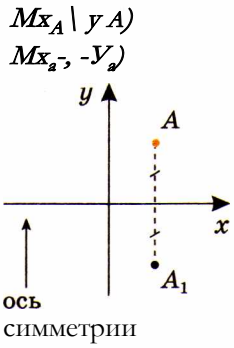
$$x'_A = x_A, y'_A = -y_A$$

Убедимся, что расстояние между точками при преобразовании осевой симметрии не изменяется.

Выберем осью абсцисс ось симметрии (рис. 3.30-б). Тогда

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 =$$
$$= (x_B - x_A)^2 + ((-y_B) - (-y_A))^2 = A_1B_1^2.$$





Для любознательных

Преобразование осевой симметрии легко записать, если совместить одну из координатных осей с осью симметрии. А как найти координаты точки, симметричной заданной, относительно прямой, не совпадающей с осью координат *Oy* (или *Ox*)?

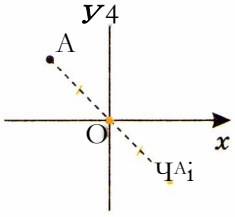
Если это прямая $x = a$ (или $y = b$), т. е. она параллельна одной из осей координат, надо ось *Oy* (или *Ox*) параллельным переносом $x' = x - a$ ($y' = y - b$) совместить с осью симметрии. Затем выполнить преобразования симметрии и обратного параллельного переноса. Тогда **точка, симметричная точке** $A(x_A; y_A)$ **относительно прямой** $x = a$ **(или** $y = b$**), имеет координаты** $A_1(-x_A + 2a; y_A)$ **(или** $A_2(x_A; -y_A + 2b)$**).**

А если ось симметрии *(п)* - прямая $y = kx + l$, не параллельная осям координат? Есть две возможности.

1. Последовательно выполняя параллельный перенос и поворот, совместить одну из осей координат с осью симметрии; после осевой симметрии осуществить обратные преобразования параллельного переноса и поворота.

2. Записать уравнение прямой, перпендикулярной к (/г) и проходящей через заданную точку *A;* найти координаты *P* - точки пересечения этого перпендикуляра с *(п);* записать условие того, что эта точка *P* является серединой отрезка AA_1 и найти координаты точки А,.

Mx_A | y_A)
i
AA-XAI -YA)



Получили: АВ = $A_xБ_i$; расстояния действительно сохраняются и ***рассмотренное преобразование осевой симметрии является движением.***

ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

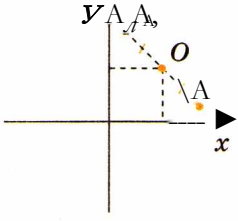
При преобразовании центральной симметрии удобно за начало координат выбирать центр симметрии.

Тогда, если точка $A(x_A; y_A)$ преобразованием симметрии относительно точки O(0; 0) переходит в точку $A_1(x'_A; y'_A)$, то и абсцисса, и ордината точки изменяют знак на противоположный $x = -x'_A$ и $y = -y_A$ (рис. 3.31-а). Это следует из равенства (по гипотенузе и острому углу) двух прямоугольных треугольников *AOK* и *A₁OM* (рис. 3.31-б).



0(x₀; y o) - центр симметрии

Mx_A; y A)
i
AI(-x_A+2x_0; -y_A+2y_0)



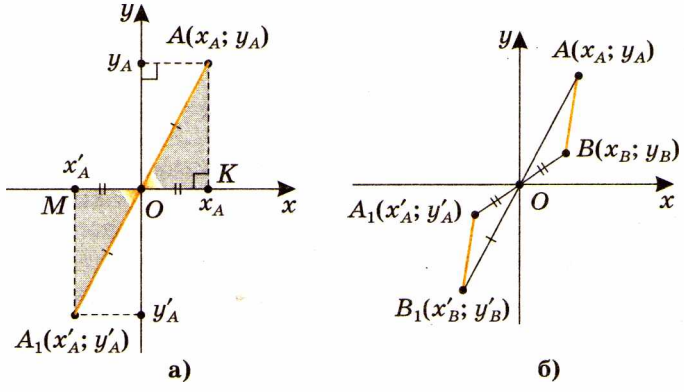


Рис. 3.31

Убедимся, что расстояние между точками при таком преобразовании не изменяется. Поместим начало координат в центр симметрии (рис. 3.31-б):

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = ((-x_B) - (-x_A))^2 + ((-y_B) - (-y_A))^2 = A_1B_1^2.$$

Тогда $AB = A_1B_1$, расстояния действительно сохраняются и ***преобразование центральной симметрии является движением.***

СВОЙСТВА преобразований симметрии:

1. (AB) -+ (AjBJ)
2- [AB) -> [AjBJ)
3- [AB] —> [AjBJ
4. C є [AB]
I
C, є [AjBJ
5. /г"т =n_1^m_1

Пользуясь координатным методом, докажите такие СВОЙСТВА ***преобразований симметрии.***

1. Прямая переходит в прямую.
2. Полупрямая переходит в полупрямую.
3. Отрезок переходит в отрезок.
4. Если точки A, B и C переходят в точки A_1, B_1, C_1 и при этом точка C лежит на отрезке AB, то точка C_1 лежит на отрезке A_1B_1.
5. Углы между прямыми сохраняются.

Замечание. Если центр симметрии $0(x_0; y_0)$ не совпадает с началом координат, то координаты

точки А,, симметричной точке $A(x_A; y_A)$, несложно получить из условия, что точка O является серединой отрезка AA_x:

$$x_O = \frac{x_A + x_1}{2};\ x_1 = -x_A + 2x_O \quad y_O = \frac{y_A + y_1}{2};\ y_1 = -y_A + 2y_O.$$

Практическая работа 22

1. Начертите декартову систему координат и отметьте точки А(2; 3), /3(5; 0), С(0; -7).
2. Постройте точки, симметричные точкам ***A, B, C*** относительно: а) оси ***Ox;*** б) оси ***Oy.*** Запишите координаты полученных точек.

Практическая работа 23

1. Начертите декартову систему координат и в ней треугольник с вершинами в точках А(-5; 5), В(-1; 3), С(-5; 1).
2. Постройте треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, полученные преобразованием симметрии треугольника АВС относительно осей ***Ox*** и ***Oy*** соответственно.
3. Найдите координаты вершин треугольников $A_xB_xC_y$ $A_2B_2C_2$ и сравните их с координатами вершин треугольника ***ABC.*** Сделайте вывод.

Задание 26

1°. Точка А(х; ***y)*** отображается осевой симметрией относительно оси ***Ox*** в точку А,(2; -5). Определите координаты точки А.

2. Две точки симметричны относительно оси ***Ox.*** Впишите их пропущенные координаты: а)А(5; ...) и А,(...; -2); б)0(...; 4) и 0,(12; ...); в) М(2; 0) иМ,(...; ...).

3. Две точки симметричны относительно оси ***Oy.*** Впишите их пропущенные координаты: а) А(...; 7) и А,(3; ...); ***б) F(A;*** ...) и F_x***(...;*** -2); в)ЛГ(0; ...) и K_x***(...;*** 3).

4°. Относительно какой из координатных осей симметричны две точки: а) А(7; 2) и А,(—7; 2); б) ***B(***-3; -2) и В,(-3; 2)?

5. Среди точек А(1; 5), В(3; -2), С(-1; 5), 0(0; -7), ***E(***5; -1), ***F(***0; 7), G(-2; 3), Я(4; 0), ***K(***0; 4), L(2; 1), М(1; -10) выберите пары точек: а) симметричные относительно оси ***Ox;*** б) симметричные относительно оси ***Oy.***

6*. Координатные оси являются осями симметрии квадрата. Точка ***K(***4; -4) - середина одной из его сторон. Найдите координаты вершин квадрата.

7*. Прямые ***x*** = -2, ***y*** = 3 - оси симметрии прямоугольника ***ABCD.*** При этом С(-7; -1). Найдите координаты остальных вершин прямоугольника.

8**. Дана точка А(3; 4). Найдите координаты точки: а) А,, симметричной точке А относительно прямой ***y = x;*** б) A_2, симметричной точке А относительно прямой ***y = -x.***



Для любознательных

О любимом способе доказательства «чего угодно» Реймонда Смаллиана.

Этот метод имеет только один недостаток - воспользоваться им может тот, кто хотя бы немного умеет показывать фокус с картами.

Продемонстрируем этот метод на примере. Пусть вам нужно доказать кому-то, что вы - граф Дракула. Тогда вы говорите своему оппоненту: «Из всей логики вам необходимо знать всего лишь - если задано два утверждения ***p*** и ***q,*** при этом ***p*** - истинное, то хотя бы одно из утверждений ***(p, q)*** - истинное». Это вряд ли кто-то будет оспаривать. «Чудесно, - говорите вы и вынимаете из кармана колоду карт: - Вы видите, эта карта красной масти». И с этими словами вы кладете карту красной масти рисунком вниз на левую руку «жертвы» и просите накрыть эту карту правой рукой. «Пусть ***p*** - утверждение о том, что вы держите карту красной масти, а ***q*** - о том, что я граф Дракула. Согласны ли вы, что или ***p,*** или ***q*** истинно?» Ваша «жертва» соглашается. «А теперь откройте карту!» - приказываете вы. «Жертва» послушно открывает карту и видит, что она черной масти! «Тогда, - завершаете вы свое «доказательство», - утверждение ***q*** - истинно, и я - граф Дракула!»

9**. Даны точки A(~2; 3) и B(4; -3). Запишите уравнение прямой, относительно которой эти точки симметричны.

10**, Точки A(2; 7) и A_t(4; -1) симметричны относительно некоторой прямой. Составьте уравнение этой прямой. Какой точке будет симметрична точка $B(-2; 6)$ относительно этой прямой?

11**. Даны точки A(-1; 5) и $B(4; -6)$. Найдите координаты точек, симетричних точкам A и B: а) относительно прямой $2x-3y=0$; б) относительно прямой $x + 2y = 4$.

12**. Запишите уравнение окружности, которая симметрична окружности $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$ относительно прямой: а) $y = x$; б) $y - x + 2$; в) $y = 2x - 1$.

13**. Вершины ромба лежат на прямых $y = x, y = -x$. Середина одной из сторон имеет координаты (1; 2). Найдите координаты всех остальных сторон ромба.

14**. Точки M и N расположены в разных полуплоскостях относительно прямой I. Найдите координаты точки X прямой I, для которой биссектриса угла MXN принадлежит прямой I.

15**. Точки A и B расположены в разных полуплоскостях относительно прямой I. Найдите координаты точки X прямой I, разность расстояний от которой до точек A и B будет наибольшей.

16**. Точки A и B расположены в одной полуплоскости относительно прямой I. Найдите координаты точки X прямой I, сумма расстояний от которой до точек A и B будет наименьшей.

17**. Постройте треугольник по вершине и двум прямым, на которых лежат биссектрисы двух других углов.

18**. Постройте ромб по острому углу и сумме диагоналей.

19**. Постройте треугольник по точкам, симметричным центру описанной вокруг него окружности относительно его сторон.

Практическая работа 24

1. Начертите декартову систему координат и в ней треугольник с вершинами в точках A(1; 1), B(2; 4), C(7; 0).
2. Выполните преобразование симметрии точек A, B, C относительно начала координат и обозначьте соответствующие точки как A_p B_v C_v
3. Найдите координаты вершин треугольника $A_1B_1C_1$ и сравните их с координатами вершин треугольника ABC. Сделайте вывод.

Практическая работа 25

1. Начертите декартову систему координат и в ней произвольный треугольник KMN.
2. Постройте треугольники $K_1M_1N_1$ и $K_2M_2N_2$, симметричные треугольнику KMN относительно осей Ox и Oy соответственно.
3. Постройте треугольник $K_3M_3N_3$, симметричный треугольнику KMN относительно начала координат.
4. Какие из треугольников совместились? Сделайте вывод.

Задание 27

1°. Постройте точки, симметричные точкам A(3; -2), B(0; 5) и C(-2; -4) относительно начала координат. Запишите их координаты.

2°. Точка A отображена симметрией относительно начала координат в точку Aj(-3; 4). Найдите координаты точки A.



Для любознательных

1. Определите координаты точки N, симметричной точке M(2; 3), относительно прямой AB, если: а)A(2; 1), B(0; 1);б)A(3; 1), B(1; -1).

2. Найдите уравнение прямой, в которую переходит прямая $y = 2$ при повороте вокруг: а) точки (0; 2) на 30°; б) начала координат на 45°.

3. Сторона квадрата равна 2. Запишите его одним уравнением, если стороны этого квадрата параллельны осям координат, а его центр расположен в точке: а) (0; 0); б) (2; 0); в) (0; -3); г) (-1; 4).

3°. Точки В(3; ...) и ВД...; -1) симметричны относительно начала координат. Определите пропущенные координаты точек.

4°. Точка Л имеет координаты (а; ***Б).*** Найдите координаты точки, симметричной точке А относительно начала координат.

5. Среди точек А(-1; 5), В(3; -2), С(0; 0), ***D(***5; 1), ***F(l;*** -5), ***G(7;*** 0), ***H(***-3; 2) выберите пары точек, которые симметричны относительно начала координат.

6*. Точка А(-3; 4) отображается осевой симметрией относительно оси ***Оу*** в точку $А_г$. Точка A_x отображается осевой симметрией относительно оси ***Ох*** в точку A_r. Точка A_2 отображается центральной симметрией относительно начала координат в точку A_3. Запишите координаты точек $А_,$ $А_2$, $А_3$.

7. Дана точка А(3; 7). Найдите координаты точки, симметричной точке А относительно: а°) начала координат; б*) точки В(3; 2); в*) точки С(-1; -6).

8*. Даны точки А(-3; 8), В(12; -4). Найдите центр симметрии точек А и В.

9. Вершины треугольника расположены в точках А(3; 4), В(-1; 0), С(2; -3). Найдите координаты вершин треугольника, симметричного данному относительно: а) начала координат; б* вершины А; в*) точки М(1; 1).

10*. Известны три вершины параллелограмма ***ABCD:*** А(2; 7), В(-1; 4), С(-3; -5). Найдите координаты центра симметрии параллелограмма и координаты точки D.

11*. Запишите уравнение окружности, которая симметрична окружности $(x - 3)^2 + (г/ + 2)^2 = 7$ относительно точки ***К(***5; 4).

12. Составьте уравнение прямой, симметричной прямой $2x - 3y = 6$ относительно: а*) начала координат; б**) точки М(1; 3).

13**. Докажите, что центры симметрии середин противолежащих сторон четырехугольника совпадают.

14**. Постройте отрезок с серединой в заданной точке и концами на: а) двух данных прямых; б) данной прямой и данной окружности; в) двух данных окружностях.

15**. Постройте параллелограмм с центром симметрии в заданной точке и вершинами на: а) трех данных прямых; б) двух прямых и окружности; в) трех окружностях.

16**. Попробуйте решить задачи 7 и 9, используя параллельный перенос.

17**. Диагонали ромба лежат на прямых ***y=xяy= -x.*** Точка (1; 2) - середина одной из его сторон. Найдите координаты вершин ромба.

18**. Найдите координаты концов отрезка, если координаты его середины (3; 4), а концы лежат на прямых: а)г/ = 2х + 5иг/ = 0,5* - 1; б) $y = 2x + 5$ и $y = -3x - 2$.



Для любознательных

Докажите опорные факты.

1. Преобразование симметрии относительно начала координат - композиция преобразований симметрии относительно осей ***Ох*** и ***Оу.***

2. Преобразование симметрии относительно точки $(x_a \mid y_a)$ - композиция осевых симметрий относительно прямых $X = x_0$ и $y = y_o$.

Осевая симметрия - это те «кирпичики», из которых можно «построить» все остальные преобразования движения на плоскости. Убедитесь в этом сами, решая следующие опорные задачи.

3. Докажите, что композиция двух центральных симметрий является параллельным переносом.

4. Докажите, что композиция параллельного переноса и центральной симметрии является центральной симметрией.

5. Докажите, что композиция двух осевых симметрий является: а) параллельным переносом, если их оси симметрии параллельны; б) поворотом вокруг точки О, если их оси пересекаются в точке ***О.***

6. Докажите, что композиция поворота вокруг точки ***О*** и осевой симметрии относительно прямой, проходящей через точку ***О,*** является осевой симметрией.

7. Докажите, что любое преобразование движения можно представить как композицию поворота, параллельного переноса и осевой симметрии.

8. Докажите, что любое преобразование движения можно представить в виде не более чем трех осевых симметрий.

§ 20. Полярная система координат и преобразование поворот на координатной плоскости

В аналитической геометрии (стр. 9, 11, 272) применяются не только прямоугольные системы координат, а и много иных систем. Среди них одна из наиболее популярных - ***полярная система координат,*** отличающаяся простотой и удобством, например при описании преобразования поворот.

Определим понятие ***полярных координат точки.***

На плоскости зададим точку ***О (полюс)*** и полупрямую ***Ох (полярную ось),*** с началом в точке О. Отметим на плоскости произвольную точку ***Р,*** построим отрезок ***ОР*** и обозначим длину этого отрезка через р, а угол ***РОх*** - через ср (рис. 3.32-а). (Угол отклоняется от ***Ох*** против часовой стрелки.)

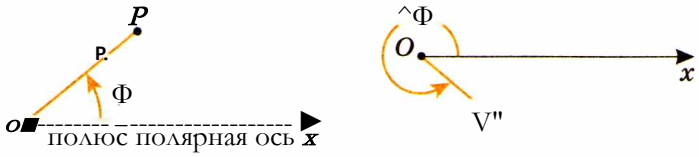


Рис. 3.32

Полярными координатами точки Р называют р и (р: р - ***полярным радиусом*** этой точки, а ф - ее ***полярным углом.***

Заметим, что градусная мера полярного угла может быть больше 180°, например, если точка расположена относительно полярной оси так, как показано на рисунке 3.32-б.

Тот, кто занимался в туристических секциях, легко поймет, что движение по азимуту основывается на том же принципе, что и полярные координаты.

С помощью полярных координат можно задавать на плоскости различные множества точек. Например, очень просто записать уравнение окружности с центром в полюсе. Если радиус окружности равен ***R,*** то и полярный радиус произвольной точки окружности (и только для точек этой окружности) равен ***R.*** Тогда уравнение этой окружности имеет вид: р = ***R.***

Рассмотрим пример спиралей. (Заметим, при описании спиралей мера угла ф может превышать полный угол. После того как полярная ось сделает первый полный оборот, мерой полярного угла ф будет сумма радианной меры угла ***РОХ*** (рис. 3.32-а) и полного угла, т. е. 2л; после второго оборота к мере угла ***РОХ*** прибавляется 2 ■ ***2к*** и т. д.). Уравнение р = ф изображает спираль - с увеличением меры угла (в радианах) увеличивается значение радиуса р.

Другую ***спираль*** описывает уравнение $\rho = \frac{1}{\varphi}$. Тут малым значениям ф соответствуют большие значения р, и наоборот. При увеличении ф значение р уменьшается - спираль «накручивается» на точку ***О.***

Изобразите эти две спирали самостоятельно.

Замечание. Значение угла ф в последних уравнениях удобно подавать не в градусах, а в ***радианах*** (см. стр. 99).

Уравнение р = аф, где ***а*** - постоянное положительное число, определяет бесконечную линию, которую называют ***спиралью Архимеда*** (рис. 3.33).

Проведем на рисунке 3.33 из точки O луч OL и обозначим точки его пересечения со спиралью Архимеда в порядке их размещения на OL (считая от точки O) как $A_1, A_2, A_3, \ldots$.
Пусть угол A_1Ox (мера его меньше 2π) равен γ радиан. Точке A_1 будет соответствовать угол $\gamma + 2\pi$, A_3 - угол $(\gamma + 4\pi)$ и т. д. Тогда

$$OA_1 = a\gamma,\ OA_2 = a(\gamma + 2\pi),$$
$$OA_3 = a(\gamma + 4\pi), \ldots.$$

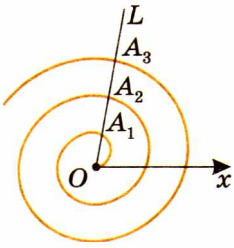


Рис. 3.33

Отсюда: $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = 2\pi a$. Таким образом, расстояние между соседними точками пересечения спирали с лучом OL — величина постоянная. Заметим, что этот вывод не зависит от направления луча OL.

От уравнения фигуры в прямоугольных декартовых координатах можно перейти к уравнению этой фигуры в полярных координатах и наоборот.

Если взять за полярную ось положительную часть оси Ox прямоугольной декартовой системы координат, а за полюс O - начало координат (рис. 3.34), то можно найти зависимость между прямоугольными декартовыми координатами точки $(x; y)$ и ее полярными координатами $(\rho; \varphi)$:

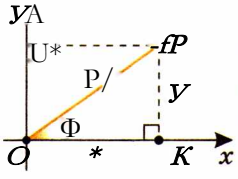


Рис. 3.34

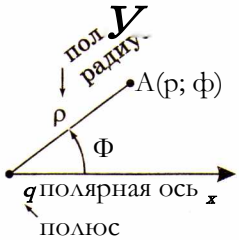
$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

Из прямоугольного треугольника OPK находим, что

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Мы получили ***формулы для перехода от декартовой системы координат к полярной и наоборот.***

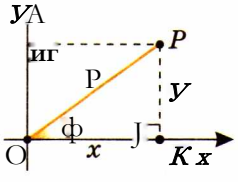
Замечание. Для того чтобы можно было пользоваться такими зависимостями для произвольного положения точки на плоскости, надо определить тригонометрические функции углов больших 180°. Их определяют аналогично тому, как мы это сделали для углов, не превышающих развернутый угол (стр. 40), т. е. через координаты единичной окружности.



A(ρ; ф)

полярные координаты

Связь между декартовой и полярной системами:



$$X = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi.$$
$$P = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$



Для любознательных

1. Какое множество точек описывает уравнение $\varphi = a$, где a - некоторая постоянная мера угла (например, 45°)?
2. Запишите соотношение, определяющее соответствующее ГМТ плоскости в декартовых координатах: а) $\varphi = 45°$; б) $\rho < 5$; в) $\rho > 2$; г) $\varphi < 30°$.

Рассматривается конец радиуса единичной окружности с центром в начале координат (тот, что лежит на полуокружности); соответствующий угол откладывается от оси Ox против часовой стрелки.

Для произвольного угла:

- *синус угла - ордината (численно) конца радиуса, соответствующего этому углу;*
- *косинус угла - абсцисса (численно) конца радиуса, соответствующего этому углу.*

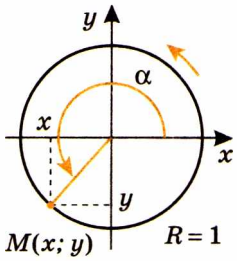


Рис. 3.35

То есть численно (в обозначениях рисунка 3.35):

$$x = \cos a,\ y = \sin a,\ \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a},\ \operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a}.$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОВОРОТ

Теперь попробуем с помощью полярной системы координат описать преобразование поворот. Для этого за центр поворота возьмем полюс ***O.***

Пусть точка ***A*** фигуры-прообраза имеет полярные координаты ***A(p$_A$;*** cp$_Л$) (рис. 3.36). После поворота на угол а относительно центра поворота ***O*** точка ***A*** переходит в точку Aj(p$_A$; ф$_л$ + а).

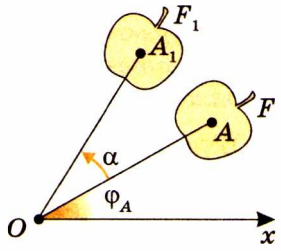


Рис. 3.36

Таким образом, ***произвольная точка*** (р; ф) ***фигуры-прообраза переходит поворотом на угол а вокруг полюса О в точку*** (р; ф + а) ***фигуры-образа.***

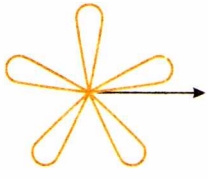
Тогда в декартовой системе координат (начало - ***O,*** оси ***Ox*** совпадают) координаты соответствующей точки-образа имеют вид: $x_A = p_л \cos(\phi_л + a)$; ^$_Д$ = Р$_Л$^{зin}(Ф$_Л$ $^{+ a}$)-

Практическая работа 26

1. Начертите полярную ось и постройте точки, заданные полярными координатами:
   а) $P\left(4; \frac{\pi}{2}\right)$; б) O; в) L; г) $(7\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4})$; д) $S(2; 0)$.
2. Начертите декартову систему координат с началом в полюсе вашей полярной системы координат так, чтобы ось ***Ox*** содержала полярную ось.
3. Найдите абсциссы и ординаты точек ***P, O, L, U*** и ***S.***



Для любознательных



Сейчас вам еще тяжело понять преимущества записи уравнений кривых в полярной системе координат (т. к. вы еще только начинаете изучать тригонометрию). Но иногда полярная система координат значительно удобнее декартовой. Например, цветок, который вы видите на рисунке, задается уравнением р = sin 5<р.

Попробуйте построить ***кардиоиду,*** которую можно задать уравнением р = 1 - sin ф. Напомним, что эту кривую описывает точка окружности, если последняя катится (без проскальзывания) вдоль равной ей неподвижной окружности (см. «Геометрия-7»).

Практическая работа 27

1. Начертите декартову систему координат и в ней треугольник ABC.
2. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, образованный преобразованием симметрии треугольника ABC относительно начала координат.
3. Постройте треугольник $A_2B_2C_2$, образованный преобразованием поворот треугольника ABC вокруг начала координат на 90°, и треугольник $A_3B_3C_3$, образованный преобразованием поворот треугольника ABC вокруг начала координат на 180°.
4. Найдите координаты вершин треугольников ABC, $A_XB_XC_V$ $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ и сравните их. Сделайте вывод.

Задание 28

1. Найдите декартовы координаты точек, заданных в полярной системе координат:

а) $G\left(3; -\frac{\pi}{4}\right)$; **б)** $E\left(8; \frac{3\pi}{4}\right)$; в) $\left(4; \frac{\pi}{6}\right)$; г) $M\left(12; -\frac{2\pi}{3}\right)$; **д)** $T(3; \pi)$.

2. Найдите полярные координаты точек, заданных в декартовой системе координат:

а) (0; 3); б) (8; 0); в)(-Т2;Т2); г) (-Тб; -V2); Д)(3;373).

3. В декартовой системе координат заданы точки: А(3; 0), В(-2; 0), С(5; 2), D(-l; -3). Найдите координаты образов этих точек после поворота на 90°: а) по часовой стрелке; б) против часовой стрелки.
4. В декартовой системе координат точка М(2; ...) отображается поворотом вокруг начала координат на 90° против часовой стрелки в точку M_1(-5; ...). Найдите пропущенные координаты точек.
5. Найдите пропущенные декартовы координаты точек М(-3; ...) и М,(5; ...), если известно, что точка M_1 - образ точки M при повороте ее вокруг начала координат на 90° по часовой стрелке.
6. Найдите декартовы координаты вершин прямоугольника, полученного поворотом прямоугольника с вершинами в точках А(-3; 2), B(3; 2), С(3; -2), D(-3; -2) вокруг начала координат: а) на 90°; б) на 180°.
7. Постройте кривую, заданную в полярной системе координат уравнением:

а)р = 1; б)р = 4; в)ф = $\frac{\pi}{4}$;г)<р = 0; д)ф $\frac{\pi^2}{3}$ = 0; е) р = 1 - совф.

8. В полярной системе координат заданы точки $A\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$; $B\left(4; -\frac{\pi}{6}\right)$. Какие координаты имеют образы этих точек при повороте относительно полюса на: а) $-\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{3}$?
9. Вершины треугольника заданы в полярных координатах: А^З; ^j, В^б; ^j, $C\left(2; \frac{2\pi}{3}\right)$. Найдите координаты вершин фигуры-образа $A_1B_1C_1$ при повороте треугольника ABC на $\frac{\pi}{3}$ вокруг полюса.
10. Центр окружности радиуса 3 находится в точке М^5; $\frac{4\pi}{3}$). Постройте образ этой окружности, полученный ее поворотом вокруг полюса на $\frac{\pi}{4}$. Укажите координаты центра окружности.
11. Запишите уравнение в полярной системе координат, если в декартовых координатах оно имеет вид: а) $x^2 + y^2 = 4$; б) $x^2 + y^2 = 3$; в) $y = \sqrt{3}x$; г) $y^2 - x^2 = 0$.

Задания для повторения главы III

1. Какое преобразование фигур на плоскости называется движением?
2. Какое преобразование называется параллельным переносом?
3. Какое преобразование называется: а) центральной симметрией; б) осевой симметрией?
4. Какое преобразование называется поворотом?
5. Какое преобразование называется: а) гомотетией; б) подобием?
6. Какие фигуры называются подобными? Как относятся площади таких фигур?
7. Запишите формулы параллельного переноса на координатной плоскости.
8. Какие свойства параллельного переноса и преобразования подобия вы знаете?
9. Даны: точка, прямая, отрезок, треугольник, четырехугольник. Как выполнить для этих фигур: а) параллельный перенос; б) поворот; в) симметрию относительно точки; г) симметрию относительно прямой?
10. а*) Как выполнить сначала гомотетию, а потом поворот треугольника относительно определенной точки? Какой треугольник вы при этом получите? Можно ли получить такой же треугольник, осуществив только одно преобразование? Какое это преобразование? б**) А если центры поворота и гомотетии - разные точки? в*) А если сначала выполнить поворот, а потом гомотетию?

11*. Докажите: если при параллельном переносе отрезок AB переходит в отрезок AjBj, то и середина отрезка АВ переходит в середину отрезка AjB,.

12*. Уравнение $F(x; y) = 0$ задает некоторое множество точек на плоскости. Как записать уравнение геометрического места точек, которые симметричны заданным относительно: а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) биссектрисы первого и третьего координатных углов; г) биссектрисы второго и четвертого координатных углов?

13*. Уравнение $F(x; y) = 0$ задает некоторое множество точек на плоскости. Как записать уравнение геометрического места точек, которые симметричны заданным относительно начала координат?

14*. Точка (3; -2) при параллельном переносе перешла в точку (3; 4). В какую точку перейдет при этом преобразовании точка (3; 4)? А точка (0; 0)?

15. Запишите формулу параллельного переноса, при котором из точки В(-3; -7) можно получить точку А(-3; -5).

16. Дана точка А(-3; -1). Найдите: а) координаты точки А„ симметричной точке А относительно оси абсцисс; б) координаты точки A_2, симметричной точке А относительно оси ординат; в) координаты точки A_3, симметричной точке А относительно начала координат; г*) координаты точки A_4, симметричной точке А относительно точки В(1; -5); д*) координаты точки A_5, полученной из точки А поворотом на 270° относительно начала координат по часовой стрелке.

17. Найдите координаты точки, симметричной точке А(-2; -2) относительно: а*) биссектрисы первого и третьего координатных углов; б*) биссектрисы второго и четвертого координатных углов; в**) прямой $x + y - 3 = 0$.

18. Запишите уравнение прямой, симметричной прямой $y = 2x - 2$ относительно: а*) начала координат; б*) оси абсцисс; в*) оси ординат; г**) прямой $x + y - 3 = 0$.

19*. Сколько существует преобразований движения, которые преобразовывают сам в себя: а) квадрат; б) правильный шестиугольник?

20*. На координатной плоскости заданы точки А(1; 2) и В(5; 5). Движением эти точки переходят в точки А,(2; 3) и B_x(7; 3) соответственно. В какую точку при этом преобразовании переходит точка $M(-2; -3)$?

21**. На плоскости заданы две прямые, пересекающиеся под углом 45°. После двух последовательных преобразований симметрии относительно данных прямых точкаА перешла в A_p а точка В - в В,. Найдите угол между прямыми АВ и А,#,.

22**. При параллельном переносе точкаА перешла в $A_{l?}$ а прямая I - в 1_y Запишите уравнение прямой 1_y если: а) А(-2; 5), A_x(3; -4), а уравнение прямой I имеет вид $2x - 3y - 1 = 0$; б) А(4; 7), Aj(-3; 13), а уравнение прямой I имеет вид $3x + 4y = 5$.

23**. Какое наименьшее число вершин может иметь многоугольник, у которого есть две оси симметрии и они пересекаются под углом: а) 30°; б) 10°; в) 87°?

24**. Даны прямая l и точка А. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для которых существует поворот на угол 60° с центром на прямой Z, отображающий точку А в M.

25*. Гомотетия с центром О переводит точку А в А,. Постройте точку B_v в которую переходит произвольная точка плоскости B при этом преобразовании.

26*. На плоскости даны два параллельных отрезка. Сколько существует преобразований гомотетии, которые переводят один отрезок во второй? Постройте центры этих гомотетий.

27*. На плоскости даны два параллельных отрезка AB и KM. Найдите ГМТ центров гомотетий, при которых отрезок AB переходит в отрезок A_XB_V принадлежащий KM.

28**. На плоскости заданы окружность и точка А. Какую кривую опишет середина отрезка АВ, если точка B будет двигаться по заданной окружности?

29*. Докажите, что четырехугольник, имеющий центр симметрии, - параллелограмм.

30*. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что этот шестиугольник имеет центр симметрии.

31**. Докажите, что ни одна фигура не может иметь ровно двух центров симметрии.

32**. Докажите, если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет и центр симметрии.

33**. Четырехугольник имеет ось симметрии. Докажите, что этот четырехугольник - или равнобокая трапеция, или он симметричен относительно диагонали.

34**. Докажите, что выпуклый га-угольник будет правильным тогда и только тогда, когда он переходит сам в себя поворотом на угол 360° : n относительно некоторой точки.

35**. Постройте правильный треугольник так, чтобы его вершины находились на трех заданных параллельных прямых.

36**. Дан угол и точка внутри него. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла и проходящую через заданную точку.

37**. Впишите в данный треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

38**. Впишите в заданный треугольник ABC треугольник $A_XB_XC_V$ стороны которого параллельны сторонам данного треугольника KLM.

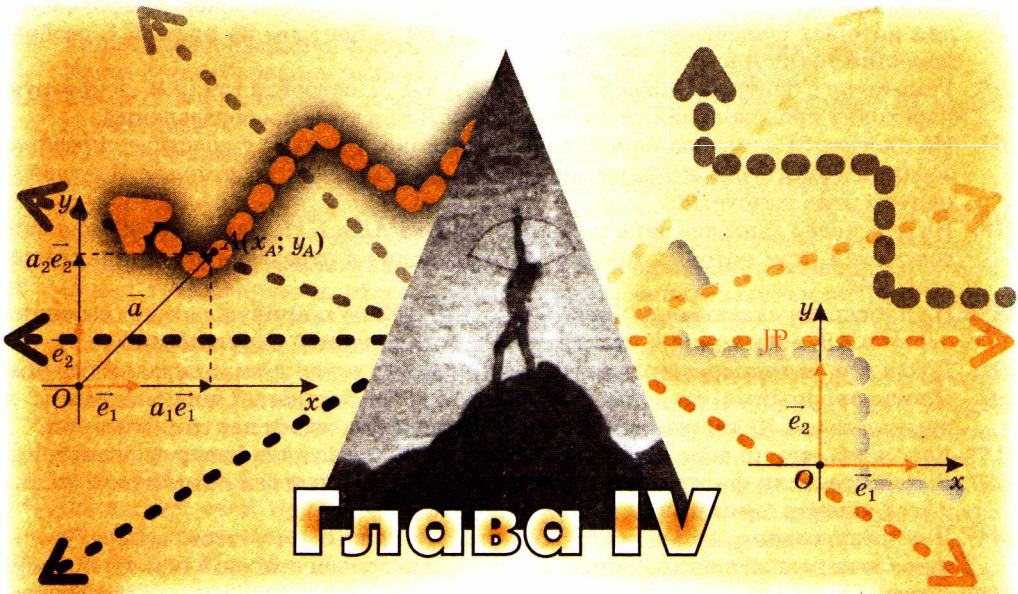
Готовимся к тематической аттестации № 5

Вариант I

1. Найдите координаты точки, симметричной точке А(- 2; 1) относительно оси абсцисс.
2. Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$. Найдите координаты центра симметрии данной окружности.
3. Постройте трапецию, гомотетичную трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с центром гомотетии А и коэффициентом гомотетии 2. Найдите отношение площадей этих трапеций.
4. В какую прямую переходит прямая $y = 2x$ преобразованием симметрии относительно прямой $x = 0$?

Вариант II

1. Найдите координаты точки, симметричной точке B(1; -3) относительно оси ординат.
2. Даны точки А(2; -3) и $B(0;$ -1). Найдите координаты центра симметрии отрезка АВ.
3. Постройте трапецию, гомотетичную трапеции $ABCD$ (AB 11 CD) с центром гомотетии А и коэффициентом гомотетии 0,5. Найдите отношение площадей этих трапеций.
4. В какую прямую переходит прямая $y = x$ преобразованием симметрии относительно прямой $y = 0$?

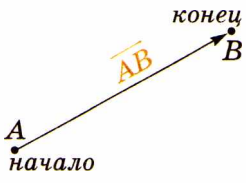


Глава IV

ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

В этой главе вы познакомитесь (или продолжите знакомство) с величинами, которые, кроме числового значения, характеризуются еще и направлением в пространстве, - векторами. Векторы широко используются в физике и математике, особенно в геометрии. При этом открытие Декарта, рассмотренное нами в первой главе, дает возможность значительно упростить описание свойств векторов и их использование при решении задач.

§ 21 о Понятие вектора[1]



ВЕКТОР - направленный отрезок

Многие физические величины, такие как сила, перемещение материальной точки, скорость, ускорение и т. д., характеризуются не только числовым значением, но и направлением в пространстве. Такие величины называются ***векторными величинами,*** или ***векторами.***

Вектором называется направленный отрезок, т. е. отрезок, для которого определены начало и конец (см. рис. на поле).

Замечание. Величины, характеризующиеся только числовым значением, - длина, площадь, масса, температура и другие - называются ***скалярными величинами,*** или ***скалярами.***



[1] Примечание для учителя, Если в 8-м классе вы работали по учебнику Галины Апостоловой, то материал, представленный в § 21-23 данного учебника, уже знаком вашим ученикам и требует только повторения.

На рисунке 4.1 вы видите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{n}$.

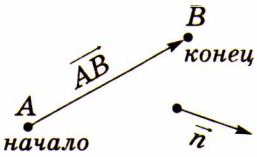
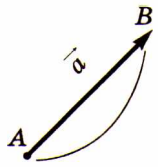


Рис. 4.1

Вектор $\overrightarrow{AB}$ отличается от отрезка AB тем, что точки A и B, ограничивающие вектор AB, не равноправны (имеют разный смысл): точка A - ***начало вектора,*** а точка B - его ***конец.***

Две точки плоскости A и B задают два разных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$. Длины этих векторов равны, а направления - противоположны. Такие векторы называют ***противоположными.***



$|\vec{a}| = AB$

Модуль вектора

Модулем вектора называется его длина. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ - длина отрезка AB (рис. 4.2), обозначается как |AB|. Модуль вектора $\vec{n}$ обозначается как |й|.

Нулевым вектором называется вектор, длина которого равна нулю (его начало и конец совпадают). Его обозначают как 0. Он не имеет направления.

Нулевой вектор $\vec{0}$ не имеет направления:

A

$A = B \bullet |\vec{a}| = 0$

B

Коллинеарными называются два вектора, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

Например, все векторы, изображенные на рисунке 4.3, - коллинеарны^ Коллинеарность векторов будем обозначать так: ***а*** |⎤ ***Ъ;с*** ⎡| ***т,...***

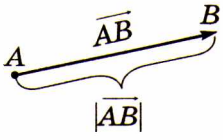
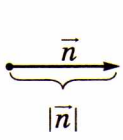


Рис. 4.2



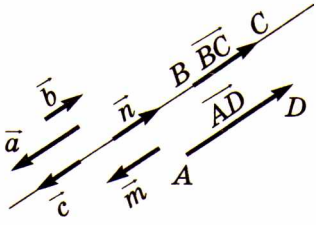
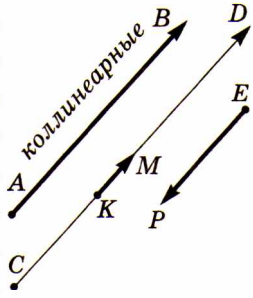


Рис. 4.3

Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору плоскости.

Ненулевые коллинеарные векторы бывают или *сонаправленные,* т. е. одинаково направленные (рис. 4.4), или *противоположно направленные* (рис. 4.5).



$AB \,||\, CD \,||\, PE$



Для любознательных

1. Постройте перпендикуляр к заданной прямой, пользуясь только линейкой с двумя делениями (штрихами). Подчеркнем, что использовать линейку для изображения дуги (вместо циркуля) нельзя. Нельзя также использовать параллельность или перпендикулярность ее сторон.
2. С помощью только линейки (без делений) постройте к диаметру заданной полуокружности перпендикуляр, исходящий из заданной точки: а) вне данной полуокружности; б) на данной полуокружности; в) внутри данной полуокружности.

Два коллинеарных ***вектора, расположенные на одной прямой, сонаправлены, если их направления совпадают*** (рис. 4.4-а), ***и противоположно направлены, если нет*** (рис. 4.5-а).

Два коллинеарных ***вектора, расположенные на параллельных прямых, сонаправлены, если они лежат в одной полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через начала этих векторов*** (рис. 4.4-б), и ***противоположно направлены, если в разных*** (рис. 4.5-б).

На рисунке 4.4 вектор $\vec{c}$ сонаправлен с вектором $\vec{e}$, а вектор $\vec{a}$ - с вектором $\vec{b}$. На рисунке 4.5 вектор $\vec{p}$ противоположно направлен вектору $\vec{l}$, а вектор Я - вектору $\vec{r}$.

Сонаправленность и противоположную направленность векторов будем обозначать так, как показано на рисунках 4.4 и 4.5 соответственно.

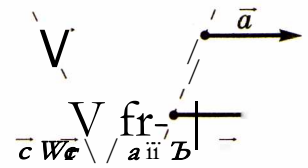


Рис. 4.4

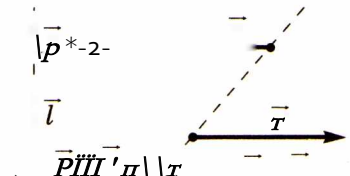


Рис. 4.5

Два ненулевых вектора называются равными, если равны их модули и они сонаправлены.

На рисунке 4.6 представлены равные векторы $\vec{AB} = \vec{CD}$.

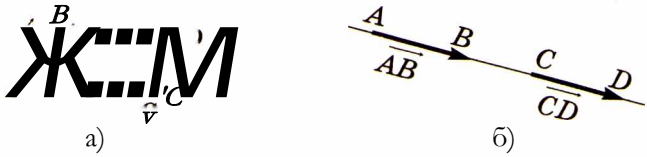


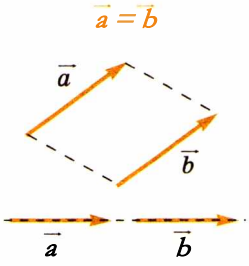
Рис. 4.6

На рисунке 4.6-а четырехугольник $ABDC$ - параллелограмм ($\vec{AB} = \vec{CD}$, $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$). Тогда вектор $\vec{AB}$ можно получить из вектора $\vec{CD}$ (или $\vec{CD}$ из $\vec{AB}$) параллельным переносом. Заметим, что в случае, когда векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ лежат на одной прямой (рис. 4.6-б), они тоже отображаются друг в друга параллельным переносом. Тогда определение равенства векторов можно сформулировать и так.

Два ненулевых вектора называются равными, если их можно совместить параллельным переносом.

Из этого определения следуют СВОЙСТВА ***равных векторов:***

1. Любой вектор равен самому себе: $\vec{a} = \vec{a}$.
2. Если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.



a tt b и |a| = |b|

a ---параллельным переносом---> b

СВОЙСТВА:

1. $\vec{a} = \vec{a}$
2. $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$

$\Downarrow$

$\vec{a} = \vec{c}$

Практическая работа 28

1. Отметьте на листе бумаги три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Начертите все векторы с началом или концом в этих точках. Запишите все полученные векторы и укажите начало и конец каждого из них.
2. Отметьте на листе бумаги три точки A, B и C, лежащие на одной прямой. Начертите все векторы с началом или концом в этих точках. Запишите все полученные векторы и укажите начало и конец каждого из них.
3. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Изобразите несколько векторов: а) сонаправленных с вектором $\vec{a}$; б) сонаправленных с вектором $\vec{b}$; в) противоположно направленных с вектором $\vec{a}$; г) противоположно направленных с вектором $\vec{b}$.
4. Начертите два вектора, которые: а) имеют равные модули и неколлинеарны; б) имеют равные модули и сонаправлены; в) имеют равные модули и противоположно направлены.
5. Запишите, какие из векторов, полученных в п. 4: а) равные; б) противоположные.

Практическая работа 29

1. Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{EK}$ так, чтобы: а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{EK}$ были коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}| = 2$ см, $|\overrightarrow{CP}| = 1$ см, $|\overrightarrow{KE}| = 3{,}5$ см; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CP}$ были коллинеарны, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{KE}$ не были коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}| = 1$ см, $|\overrightarrow{CP}| = 2{,}5$ см, $|\overrightarrow{KE}| = 3$ см.
2. Используя соответствующий масштаб, начертите вектор, изображающий: а) перемещение туриста из пункта A на 5 км на юг; б) перемещение туриста из пункта A на 10 км на восток; в) перемещение туриста из пункта A на $5\sqrt{2}$ км в юго-западном направлении.
3. Используя соответствующий масштаб, начертите вектор, изображающий движение самолета сначала на 200 км на восток (из пункта A в пункт B), а потом на 300 км на юг (из пункта B в пункт C). Начертите вектор, изображающий движение самолета из исходной точки A в конечную точку C.

Практическая работа 30

1. Начертите параллелограмм $ABCD$ и трапецию $QWRF$. Запишите все пары коллинеарных векторов, определенных сторонами: а) параллелограмма $ABCD$; б) трапеции $QWRF$.
2. Начертите параллелограмм $KMPE$ и обозначьте через O точку пересечения его диагоналей. Пусть: $\overrightarrow{MK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{KP} = \vec{n}$, $\overrightarrow{MO} = \vec{d}$, $\overrightarrow{KO} = \vec{c}$. Выпишите все векторы с началом или концом в точках K, M, P, E и O, которые равны вектору: а) $\vec{a}$; б) $\vec{n}$; в) $\vec{d}$; г) $\vec{c}$.
3. Начертите ненулевой вектор $\vec{a}$ и отметьте три точки A, B и C. Отложите вектор $\vec{a}$ от точек A, B и C.
4. Начертите прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Обозначьте середину стороны AB через M. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}$; б) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MB}$.



Для любознательных

1. На карте указано положение трех маяков: A, B и C. Маяки A и B с корабля видны под углом a, а маяки B и C - под углом p. Найдите на карте место корабля.

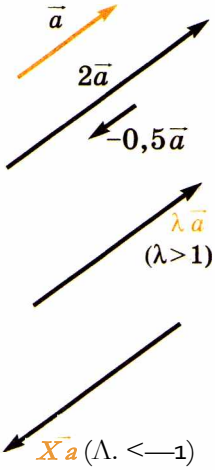
2. Два маяка A и B обозначены на карте и видны с корабля под углом a. После того как корабль прошел некоторое расстояние прямолинейным курсом, эти же самые маяки стали видны с корабля под углом p. Найдите на карте место корабля, если на корабле есть инструменты, с помощью которых можно устанавливать длину пройденного пути и его направление.

§ 22. Действия над векторами

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ и произвольного числа k произведением $\vec{a}\cdot k = k\cdot\vec{a}$ называется вектор $\vec{b}$, сонаправленный с $\vec{a}$, если $k > 0$, и противоположно направленный с $\vec{a}$, если $k < 0$, модуль которого $|\vec{b}| = |k| \cdot |a|$. При $k = 0$ имеем 0.

На рисунке 4.7 вы видите несколько произведений вектора на число.



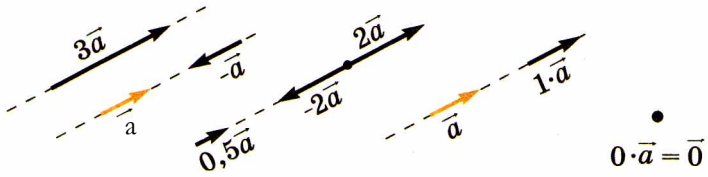


Рис. 4.7

Если $k = 0$, то произведение $k \cdot \vec{a}$ равно нулевому вектору.

Если $k=1$, получаем вектор $\vec{a}$, равный данному.

Если $k = -1$, получаем вектор $-\vec{a}$, по модулю равный вектору $\vec{a}$ и противоположно направленный, т. е. противоположный .

Докажем, что любой вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, можно представить в виде $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то они отличаются только длиной: $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$ и $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

Если векторы противоположно направлены, то аналогично предыдущему рассмотрим векторы $-\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда получаем, что $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$, но теперь $k < 0$.

Правильным будет и обратное утверждение: если $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ — коллинеарны. Правильность этого утверждения следует из определения умножения вектора на число.

Из определения произведения вектора на число следует такое его СВОЙСТВО:

$$X \cdot (P\vec{a}) = (X \cdot P)\vec{a}.$$

Для любознательных

1. Лодка пересекает реку перпендикулярно ее берегам за 30 мин. Ширина реки 3 км, а скорость течения 2,1 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и угол между направлением течения и направлением собственной скорости лодки. (Совет. Найдите тригонометрическую функцию искомого угла и воспользуйтесь единичной окружностью и транспортиром.)
2. Из какой точки земного шара должен вылететь самолет, чтобы, после того как он пролетит 100 км вдоль меридиана на юг, потом 100 км вдоль параллели на восток, потом 100 км вдоль меридиана на север, снова попасть в начальную точку?

Понятие равенства векторов дает возможность отложить вектор, равный данному, от произвольной точки плоскости.

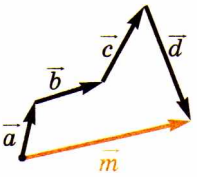
Пусть имеем ненулевые векторы $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$, ..., $\vec{a_n}$. *Отложим от произвольной точки плоскости вектор* $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a_1}$, *потом от точки* A_2 - *вектор* $\overrightarrow{A_2A_3}=\vec{a_2}$ *и т. д.* (рис. 4.8). *В конце концов отложим от точки* A_n *вектор* $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=\vec{a_n}$. *Соединим точки* A_1 *и* A_{n+1}. *Вектор* $\overrightarrow{AA_{n+1}}$ *будем называть суммой заданных векторов*:

$$\overrightarrow{AA+1}=\vec{d_1}+\vec{d_2}+\ldots+\vec{d_n}.$$

Такой способ получения суммы векторов называется ***правилом многоугольника.***

$\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$

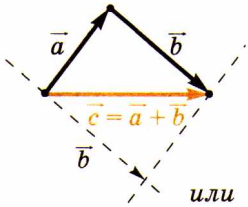
По правилу многоугольника:



Сумму двух неколлинеарных векторов находят или ***по правилу треугольника,*** или ***по правилу параллелограмма*** (рис. 4.9).

$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

По правилам: треугольника



или параллелограмма

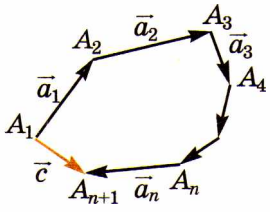


Рис. 4.8

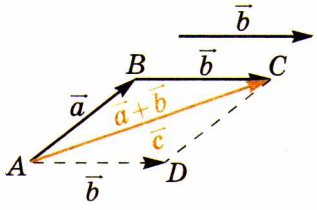


Рис. 4.9

Правило треугольника следует непосредственно из правила многоугольника для случая двух слагаемых.

Например, если искать сумму двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то по правилу многоугольника надо от произвольной точки A (рис. 4.9) отложить вектор $AB = \vec{a}$, потом от точки B отложить $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Получили треугольник ABC и $AB + BC = AC$. (Обратите внимание: буква, обозначающая конец одного вектора-слагаемого и начало второго, повторяется и «исчезает».)



$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{O}$

Таким образом, найти вектор $\vec{c}$ - сумму двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - можно с помощью такого правила.

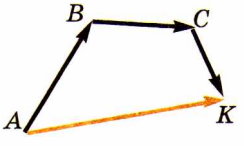


$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$

Правило треугольника. ***Разместить векторы a и b так, чтобы начало вектора b совпадало с концом вектора a:***

- ***началом вектора*** $(\vec{a} + \vec{b})$ ***будет начало вектора a;***
- ***концом вектора*** $(\vec{a} + \vec{b})$ ***будет конец вектора b.***

Чтобы найти сумму двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу параллелограмма, проведем через точки C и A предыдущего случая прямые, параллельные AB и BC (рис. 4.9), - получим параллелограмм $ABCD$.



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AX}$

Тогда $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, а вектор $\overrightarrow{AC}$ совпадает с диагональю параллелограмма $ABCD$. То есть найти вектор $\vec{c}$ - сумму двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - можно с помощью такого правила.

Правило параллелограмма. ***Разместить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпали; через концы векторов провести прямые, параллельные прямым, которые содержат данные векторы:***

- ***началом вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ будет начало векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;***
- ***концом вектора $(\vec{a}+\vec{b})$ будет противоположный этой точке конец диагонали образованного параллелограмма.***

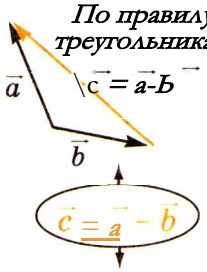
Понятно, что из определения суммы векторов следуют такие ее СВОЙСТВА:

СВОЙСТВА:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$;
3. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$;
4. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a} + (-\vec{b})$.

1. $\vec{a} + \vec{b}=\vec{b} + \vec{a}$;
2. $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$;
3. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$;
4. $\vec{a} - \vec{b} =\vec{a} + (-\vec{b})$.

По правилу треугольника:



Из последнего соотношения следует: ***чтобы найти разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, надо к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $(-\vec{b})$*** - правило параллелограмма.

На рисунке 4.10-а: $\overrightarrow{AK} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = -\vec{B}$, вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ - по правилу параллелограмма ($ADCB$ - параллелограмм). Соединим точки B и K - получим параллелограмм $ACBK$ (т. к. $CB \parallel AK$ и $CB = AK$). Тогда $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AC}$ и разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (вектор $\vec{c}$) можно найти по такому правилу.

По правилу параллелограмма:

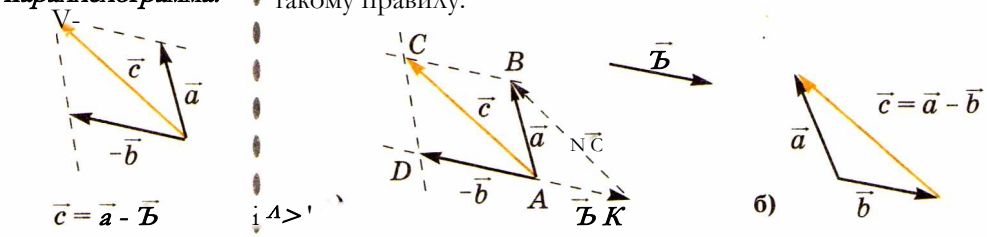


Рис. 4.10

Правило треугольника. ***Разместить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы начала векторов a и b совпадали (рис. 4.10-б):***

- ***началом вектора $(\vec{a} - \vec{b})$ будет конец вектора $\vec{b}$;***
- ***концом вектора $(\vec{a} - \vec{b})$ будет конец вектора $\vec{a}$.***

Практическая работа 31

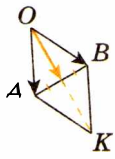
1. Начертите ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$ и постройте векторы $0 \cdot \overrightarrow{AB}$, $1 \cdot \overrightarrow{AB}$, $-1 \cdot \overrightarrow{AB}$, $\left(1 : |\overrightarrow{AB}|\right) \cdot \overrightarrow{AB}$. Измерьте длину вектора $\left(1 : |\overrightarrow{AB}|\right) \cdot \overrightarrow{AB}$ и убедитесь, что она равна единице.



Для любознательных

Опорная задача. Докажите: если точка N — середина отрезка AB, то для произвольной точки O плоскости выполняется равенство: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{ON}$.

Совет. Продлите отрезок ON на равный ему отрезок и воспользуйтесь правилом параллелограмма сложения векторов.



2. Начертите два сонаправленых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. С помощью масштабной линейки найдите $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$. Постройте вектор $(|\vec{b}| : |\vec{a}|) \cdot \vec{a}$ и убедитесь в том, что он равен вектору $\vec{b}$.
3. Начертите два противоположно направленых вектора $\vec{c}$ и $\vec{p}$ так, чтобы $|\vec{c}| = 2$ см, $|\vec{p}| = 4$ см. Постройте вектор $(-|\vec{p}| : |\vec{c}|) \cdot \vec{c}$ и убедитесь, что он равен вектору $\vec{p}$.
4. Начертите три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. С помощью циркуля и линейки постройте векторы: а) $\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-\vec{b}$, $-\vec{c}$; б) $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $0{,}5\vec{c}$; в) измерьте длины этих векторов и убедитесь в том, что: $|\vec{a}| = |\vec{a}|$, $|0{,}5 \cdot \vec{c}| = 0{,}5|\vec{c}|$, $|2 \cdot \vec{a}| = 2|\vec{a}|$.
5. Начертите ненулевой вектор $\vec{a}$. Постройте вектор $\vec{p} = \lambda\vec{a}$. Постройте векторы: $-\vec{a}$, $1{,}5\vec{a}$, $2\vec{a}$, $6\vec{a}$. Укажите, как направлен каждый из полученных векторов относительно вектора $\vec{p}$, и выразите их длины через $|\vec{p}|$.

Практическая работа 32

1. Начертите попарно коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Постройте суммы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$.
2. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$. По правилу многоугольника постройте вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$.
3. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых не совпадают: а) отметьте произвольную точку A и по правилу треугольника постройте сумму $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$; б) отметьте другую точку M и по правилу параллелограмма постройте сумму $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{MP}$; в) с помощью чертежных инструментов убедитесь, что $AC = MP$.
4. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. С помощью циркуля и линейки постройте векторы: а) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; б) убедитесь, что вектор $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ равен вектору $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Практическая работа 33

1. Начертите два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Докажите (построением), что $|\vec{a} + \vec{b}| < |a| + |b|$.
2. Начертите два ненулевых вектора $\vec{r}$ и $\vec{n}$. С помощью циркуля и линейки постройте векторы: а) $\vec{r} - \vec{n}$; б) $\vec{n} - \vec{r}$. Какие векторы вы получили?
3. Начертите два ненулевых вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Постройте векторы: а) $\vec{x} + 2\vec{y}$; б) $0{,}5\vec{y} + \vec{x}$; в) $\vec{y} - 3\vec{x}$; г) $2\vec{y} + \vec{x}$; д) $-\vec{y} - \vec{x}$; е) $0 \cdot \vec{y} - 2\vec{x}$; ж) $1{,}5\vec{y} - 0 \cdot \vec{x}$.

4*. Начертите произвольный параллелограмм $ABCD$. Обозначьте произвольную точку на этом же листе бумаги через X. Постройте векторы $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}$ и $\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$. Убедитесь, что полученные векторы равны. Изменится ли результат, если изменить положение точки X? Ответ обоснуйте.



Для любознательных

С помощью произвольной точки X любой вектор можно представить в виде суммы или разности двух векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB}; \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}.$$

Это иногда облегчает решение задач, и такой метод называют ***методом прокола***, а точку X - ***полюсом***.

Например, докажем методом прокола, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме их длин.

Пусть $ABCD$ - трапеция (BC || AD), а M и N - середины сторон AB и DC. Тогда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{XN} - \overrightarrow{XM}$. Учтем (см. стр. 154), что:

$$2\overrightarrow{XN} = \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{XC}, 2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}.$$

Тогда $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} - \overrightarrow{XB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. Утверждение доказано.

§ 23. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два неколлинеарных вектора, то любой третий вектор $\vec{c}$ можно представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y - пара чисел. Таким образом: на плоскости любой вектор можно разложить по двум неколлинеарным векторам.

Любой вектор можно разложить по двум неколлинеарным векторам.

Для доказательства этого утверждения проведем через начало A и конец C вектора $\vec{c}$ прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 4.11). Мы получили параллелограмм $ABCD$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$ коллинеарные. Тогда $\overrightarrow{AB} = x\vec{a}$. Аналогично $\overrightarrow{AD} = y\vec{b}$.

Имеем: $\vec{c} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, что и требовалось доказать.

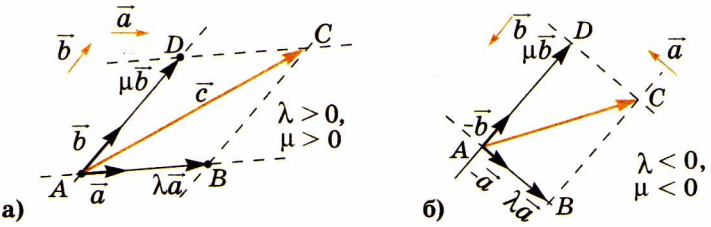


Рис. 4.11

Мы доказали, что существует искомая пара чисел x и y. Докажем (от противного) ее единственность.

Пусть существует другая пара чисел x_1 и y_1, такая, что $\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$. Тогда:

$$x\vec{a} + y\vec{b} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}, \quad (x - x_1)\vec{a} = (y_1 - y)\vec{b}.$$

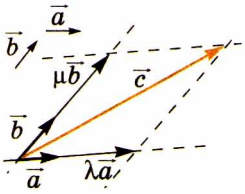
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны по условию, тогда последнее равенство возможно лишь, если векторы $(x - x_1)\vec{a}$ и $(y_1 - y)\vec{b}$ нулевые, т. е. при $x = x_1$, $y = y_1$, что противоречит предположению. Тогда пара чисел x и y - единственная.

$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$

4)

$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$,

где $\{x; y\}$ - единственная пара чисел



$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

Практическая работа 34

1. Начертите три неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. С помощью чертежных инструментов разложите вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Измерьте длины полученных векторов, определите соответствующие коэффициенты и запишите $\vec{c}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. Начертите два ненулевых вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$, которые лежат на двух взаимно перпендикулярных прямых. Начертите третий вектор $\vec{l}$. Разложите (построением) $\vec{l}$ по $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Определите соответствующие коэффициенты и запишите $\vec{l}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

3*. Постройте произвольный треугольник ABC и проведите его медиану AM. Разложите (построением) вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Запишите соответствующее выражение.



Для любознательных

Точки M_1 и M_2 - середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2})$.

§ 14. Координаты вектора

На каждой из координатных осей от точки O (начала координат) отложим единичный вектор (т. е. вектор, длина которого равна единице) так, чтобы эти векторы лежали на положительных полуосях. Пусть $\vec{e_x}$ - единичный вектор на оси абсцисс, а $\vec{e_2}$ - единичный вектор на оси ординат (рис. 4.12-а).

Векторы ё, и $\vec{e_2}$ называют ***координатными векторами,*** или ***ортами.***

Как мы уже знаем, любой вектор (на плоскости) можно разложить по двум неколлинеарным векторам. Причем коэффициенты этого разложения определяются однозначно (т. е. единственно возможным образом).

Координатные векторы неколлинеарны, тогда произвольный вектор $\vec{a}$ на координатной плоскости можно представить в виде

$$\vec{a} = a_1\ddot{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e_2}.$$

При этом коэффициенты a_x и a_2 определяются однозначно. Они называются ***координатами вектора в данной системе координат.***

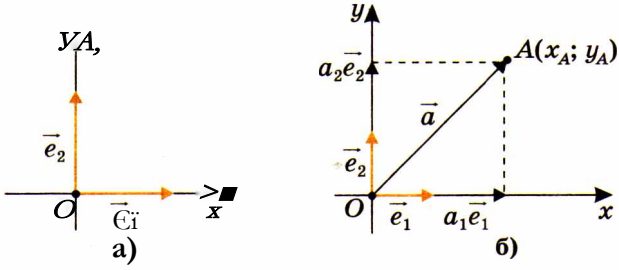


Рис. 4.12

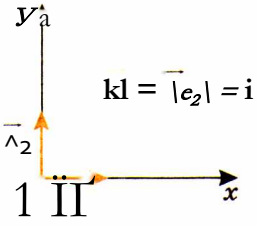
Если начало вектора $\vec{a}$ совмещается с началом координат (рис. 4.12-б), то координаты этого вектора а, и a_2 совпадают с координатами его конца.

В случае, если начало вектора $\vec{a}$ не совмещается с началом координат, перенесем оси координат параллельно самим себе и поместим начало координат в начало вектора - точку $P(x_p; y_p)$ (рис. 4.13-а).

Пусть в новой системе координат конец K вектора $\vec{a}$ имеет координаты $(a_x; a_2)$, т. е. числа a_x и a_2 - координаты вектора $\vec{a}$ в этой системе координат. Тогда в старой системе координат (после обратного параллельного переноса осей) получим:

$$x_к = a_1 + x_p,\ a_2 + y_p \text{ и } a_x = x_к - x_p,\ a_2 = y - y_p.$$

Замечание. Такой же результат можно получить, если осуществить параллельный перенос не осей координат, а самого вектора (рис. 4.13-б) и воспользоваться



$\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ - ***орты,*** или ***координатные векторы***

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ – однозначно

a_1 и a_2 – координаты вектора $\vec{a}$

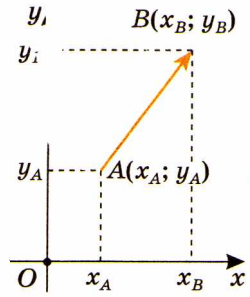
тем, что при параллельном переносе получаем вектор, равный данному.

Таким образом, ***если началом вектора $\vec{a}$ является точка $P(x_p; y_p)$, а концом - точка $K(x_к; y_к)$, то координатами вектора а будут числа:***

$$a_1 = x_K - x_P,\quad a_2 = y_K - y_P.$$

А записывают это так:

$\vec{a}(a_1; a_2)$, или $\overrightarrow{PK}(a_1; a_2)$, или $(a_x; a_2)$.



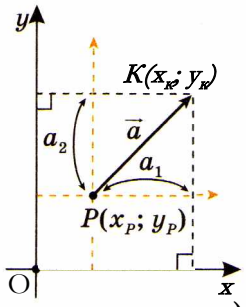
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A)$$

Для вектора $\vec{a}(a_x; a_2)$ из прямоугольного треугольника PDK (см. рис. 4.13-б) согласно теореме Пифагора получим значение модуля этого вектора:

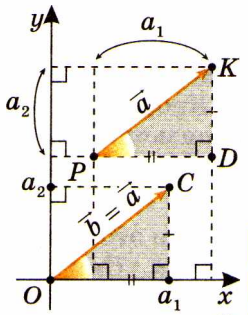
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Из сказанного выше следуют такие СВОЙСТВА ***векторов:***

1. **Равные векторы имеют равные координаты.**
2. **Если координаты двух векторов равны, то эти векторы равны.**
3. **Нулевые векторы имеют нулевые координаты.**
4. **Модуль вектора $\vec{a}(a_x; a_2)$ равен $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.**



а)



б)

Рис. 4.13

СВОЙСТВА векторов:

$\vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(b_1; b_2)$

$a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$

$\vec{0} = (0; 0)$

$|\vec{a}(a_1; a_2)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Точки А и B имеют координаты А(-1; 6) и В(5;-2). Найдите координаты и модуль вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение

Пусть $\overrightarrow{AB}(a_x; a_2)$.

1) $a_y = x_B - x_A = 5 - (-1) = 6$; $a_2 = y_B - y_A = -2 - 6 = -8$.

2) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$.

Ответ: $\overrightarrow{AB}(6; -8)$, $|\overrightarrow{AB}| = 10$.

Для любознательных

Опорная задача. Найдите координаты вектора с началом в точке 0(1; 2) и модулем 3.

Решение

Конец $K(x; y)$ искомого вектора лежит на окружности радиуса 3 с центром в точке 0(1; 2). Тогда координаты точки K удовлетворяют уравнению $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$. Отсюда $(y - 2)^2 = 3^2 - (x - 1)^2$ и $|y - 2| = \sqrt{9 - (x-1)^2}$. Т. е. $y - 2 = \pm\sqrt{9 - (x-1)^2}$ при условии, что $9 - (x - 1)^2 \geq 0$. Тогда:

$K(x; \pm\sqrt{9 - (x-1)^2})$ для всех $|x - 1| \leq 3$, т. е. для $x \in [-2; 4]$.

Пример 2. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если заданы координаты трех других его вершин: $A(2; -3)$, $B(5; -2)$, $C(1; 4)$.

Решение

Пусть точка D имеет координаты $D(x_D; y_D)$ (рис. 4.14).

1) $ABCD$ - параллелограмм, тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$:

$\overrightarrow{AB}\ (5 - 2; -2 - (-3)) = (3; 1)$;

$\overrightarrow{DC} = (1 - x_D; 4 - y_D)$.

3) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, тогда $1 - x_D = 3$; $4 - y_D = 1$.

Отсюда: $x_D = -2$ и $y_D = 3$.

Ответ: $D(-2; 3)$.

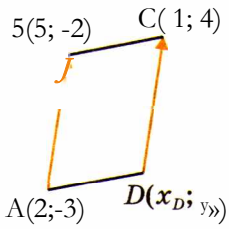
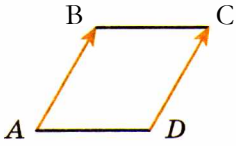


Рис. 4.14

$ABCD$ - параллелограмм



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$x_D = x_C - x_B + x_A$

$y_B = y_C - y_B + y_A$

Пример 3. Найдите координаты вершины Z) параллелограмма $ABCD$, если заданы координаты трех других его вершин: $A(x_A; y_A)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

Решение

Пусть точка D имеет координаты $D(x_0; y_D)$.

1) $ABCD$ - параллелограмм, тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2) Запишем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$:

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_A; y_2 - y_A)$ и $\overrightarrow{DC} = (x_3 - x_B; y_3 - y_D)$.

3) Из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ получаем:

$x_2 - x_A = x_3 - x_D$ и $y_2 - y_A = y_3 - y_D$.

Тогда $x_D = x_1 - x_2 + x_3$ и $y_D = y_1 - y_2 + y_3$.

Ответ: $(x_A - x_2 + x_3; y_A - y_2 + y_3)$.

Практическая работа 35

1. Начертите прямоугольную систему координат и координатные векторы (орты) $\vec{i}(1; 0)$ и $\vec{j}(0; 1)$.
2. Постройте векторы с началом в точке О, концы которых имеют координаты: (12; 5), (4; -3) и (-3; -4). Обозначьте эти векторы, запишите их координаты, разложите эти векторы по координатным векторам и найдите модули полученных векторов.
3. Постройте векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если A(0; 4), B(2; 4), C(-1; 6), D(1; 6). Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и их модули.
4. Постройте вектор $\overrightarrow{KT}$, если $K(-1; 4)$, T(2; 1). Разложите вектор $\overrightarrow{KT}$ по координатным векторам. Запишите координаты вектора $\overrightarrow{KT}$.

Задание 29

1°. Запишите через орты $\vec{i}(1; 0)$ и $\vec{j}(0; 1)$ векторы:

а) $5(3; 7)$; б) $b(4; -3)$; в) $c(-8; 5)$; г) $d(-3; 0)$.

2°. Разложите по координатным векторам $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_2$ векторы:

а) $a(2; 3)$; б) $B(2; -3)$; в) $c(-1; -4)$.

3°. Вектор $\vec{a}$ записали через орты $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_2$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если:

а) $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$; б) $\vec{a} = 7\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$; в) $\vec{a} = -4\vec{e}_x$; г) $\vec{a} = 0{,}5\vec{e}_2$.

4°. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его модуль, если:

а) A(3;5),B(1;2); **в)** A(-3; -5), B(-1; -2); д) A(-3;-5), B(1; 2).

б) A(-3; 5), B(-1; 2); г) A(3; 5), B(-1; -2);

5. Найдите координаты точки, которая является началом вектора $\overrightarrow{MN}$, если:

а) $\overrightarrow{MN}$(-1; 2) и iV(-3; -2); 6)MiV(l; **2) и N(2;** 0); віІІ(3; -4) и JV(-2; 0).

6. Найдите координаты конца вектора $\overrightarrow{FG}$, если:

а) $\overrightarrow{FG}$(2; -3) и F(4; 1); б) $\overrightarrow{FG}$**(1;** -2) и B(-3; 0); **u)FG(4;** 1) и B(-3; 0).

7. Заполните таблицу:

A	**(0; 0)**	(; -3)		*(a; Ь)*	(2; 4)
B	(2; 2)	(2;-7)	(3; **1)**		
$\overrightarrow{AB}$		(5;)	**(⁻⁸; ⁻⁰,⁵)**	*(c; d)*	**(0; 0)**

8°. Даны векторы: $\vec{a}$**(3;** -5), Ь($\vec{-3}$; -5), c(5; $\vec{-3}$), $\vec{d}$(3; 5), $\vec{f}$(5; $\vec{-3}$), #(-3; 3), $\vec{h}$(-5; -3).
Какие из этих векторов: **а)** равны; б) имеют равные модули?

9°. Среди данных векторов найдите единичные:

$$\vec{o}(0;-1),\ \vec{Ь}\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right),\ \vec{c}\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right),\ \vec{d}\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

10. Даны точки M(3; 5), ЛГ(10; 12), P(8; 4), $\vec{K}$(1; -3). Запишите все возможные векторы, которые имеют начало и конец в заданных точках. Есть ли среди образованных векторов: а) равные; б) равные по модулю?

11°. Даны точки M(7; -4), $\vec{N}$**(2;** 5), P(-1; 2). Найдите координаты точки $\vec{K}$, если $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PK}$.

12. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ - равны. Найдите: а) координаты точки $\vec{D}$, если A(-4; 2), B(-6; -1), $\vec{C}$(2; -3); б) координаты точки C, если A(2; -1), B(2; -3), $\vec{d}$(-2; 2).

13. $\vec{ABCD}$ - параллелограмм. Найдите координаты точки D, если A(-4; 3), B(5; 0), C(5; -3).

14. Модуль вектора Я(5; у) равен 6. Найдите г/.

15. Модуль вектора $\vec{r}$**(x,** -4) равен 8. Найдите $\vec{x}$.

16. Модуль вектора $\vec{p}$**(x; y)** равен 5. Известно, что $\vec{xuy}$- целые числа. Найдите их.

17. Даны координаты вершин треугольника A(6; -2), B(2; 3) и $\vec{C}$(-2; -3)-, $\vec{AM_1}$, $\vec{BM_2}$, $\vec{CM_3}$ - медианы треугольника. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{BM_2}$, $\overrightarrow{CM_3}$.

18. В треугольнике $\vec{ABC}$ известны координаты его вершин A(-1; 3), B(2; 8), C(7; -5), $\vec{AM}$ - медиана треугольника. Найдите модуль вектора $\vec{AM}$.

19*. Две вершины прямоугольника $\vec{ABCD}$ - точки A(-1; 6) и B(4; 6). Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ равен 13. Найдите координаты вершин C и B.



Для любознательных

Опорная задача. Докажите: если $\vec{M}$ – **центроид треугольника ABC, а** $\vec{X}$ **- произвольная точка его плоскости, то** $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$.

---

1) Пусть в $\vec{A}$ $\vec{ABC}$: $\vec{AK} = \vec{r_a}$. Тогда $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{-AM}$, $\overrightarrow{XK} - \overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XK} - \overrightarrow{XA})$,

$\vec{III} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$.

2) $\overrightarrow{ZM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$. **ч.** т. д.

§ 25о Действия над векторами, заданными своими координатами

Найдем координаты суммы и разности двух векторов, произведения вектора на число.

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Пусть дан вектор $\vec{a}(a_x; a_2)$. Т. е. $a = a\hat{}_x + a_2\ddot{e}_2$. Тогда:

$$X\vec{a} = Xia\hat{} + a_2\ddot{e}_2) = Xa_1\vec{e_1} + Xa_2\ddot{e}_2$$

Следовательно координаты вектора АЛ равны $(Aa_t; \overrightarrow{Xa_2})$.

Чтобы умножить вектор на число, надо умножить каждую его координату на это число.

$$X\vec{a} = \overrightarrow{(A.\hat{}; Xa_2)}.$$

На рисунке 4.15 показано произведение вектора а на числа ±2.

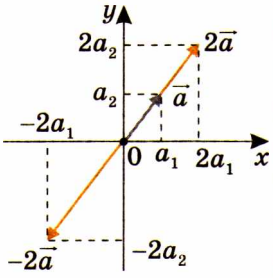


Рис. 4.15

Как известно (стр. 150), любой вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, можно представить как $b = X\vec{a}$ и наоборот: если $B = X\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и B - коллинеарны.

Замечание. Указанное число X может быть и положительным, и отрицательным, и нулем (т. к. нулевой вектор коллинеарен любому вектору).

Равенство $B = Xa$ означает, что $b_1 Xa_x$, $b_2 = Xa_2$.

Тогда, если а. $\hat{}_1$ 0 и а, / 0: $\frac{b_1}{a_1} = X = \frac{b_2}{a_2}$.

ВЫВОД:

- координаты двух коллинеарных векторов пропорциональны;
- если координаты двух векторов пропорциональны, то эти векторы коллинеарны.

СУММА ВЕКТОРОВ

Пусть даны векторы $\vec{a}(a_x; a_2)$ и $B(b_t; b_2)$, т. е.

$$\vec{a} = aA + a_2\ddot{e}_2 \text{ и } B = bA + b_2\vec{e_2}$$

а суммой этих векторов будет вектор $\vec{c}(cj5\ c_2) = c_1\vec{e}_2\ddot{e}_2$:

$$C\&I + c_2\ddot{e}_2 = a_x\ddot{e}_x + a_2\vec{e}_2 + b\vec{n} + b_2\ddot{e}_2 = (a_x + b_x)\ddot{e}_x + (a_2 + b_2)\ddot{e}_2$$

Поскольку такое разложение можно осуществить единственно возможным образом, то $c_x = a_l + b_1 w.\ c_2 = a_2 + b_2$.

Понятно, что для координат суммы нескольких векторов получим аналогичные выражения, в которых суммируются соответствующие координаты всех векторов-слагаемых.

Координаты вектора-суммы любого числа векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых векторов.

Що,; a_2) - =
= $(\overrightarrow{.a,; Xa_2})$

$\vec{a} \| \vec{b}$,
U ft
$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = X$
$\vec{b} = X\vec{a}$

$\overrightarrow{AK} = (-1)\cdot\overrightarrow{KA}$
X
противоположные
—a(a,; a_2) =
= $\overrightarrow{(—a_i» \sim a_1]}$

$\vec{a}$(a,;a_2) +
+ $\vec{b}(b_x, b_2)$ —
= $\overrightarrow{(a, + fe_1; a_2 + fe_2)}$

$\vec{a}(a_1; a_2)$ – $-\vec{b}(b_1; b_2) =$ $= \{a_1 - b_1; a_2 - b_2\}$

СВОЙСТВА действий над векторами:

$\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$;

$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Перед разложением вектора по двум другим векторам проверьте последние на пропорциональность соответствующих координат. ***Если их координаты пропорциональны - они коллинеарны и разложение невозможно.***

РАЗНОСТЬ ДВУХ ВЕКТОРОВ

Чтобы найти разность двух векторов $\vec{a}(a_x; a_2)$ и $\vec{b}(b_x; b_2)$, нужно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $(-\vec{b})$. Т. е.

$\vec{c}(c_1; c_2) = \vec{a}(a_x; a_2) - \vec{b}(b_x; b_2) = \vec{a}(a_x; a_2) + \vec{b}\{-b_x; -b_2\}$,

$c_1\vec{i} + c_2\vec{j} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + (-b_1\vec{i} - b_2\vec{j}) = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j}$.

Отсюда: $c_x = a_x - b_x$ и $c_2 = a_2 - b_2$.

Координаты вектора-разности двух заданных векторов равны разности соответствующих координат этих векторов.

Представление векторов через их координаты значительно упрощает действия над векторами, т. к. они сводятся к действиям над числами - их координатами.

Поэтому этот раздел называют ***векторной алгеброй.***

Из определений умножения вектора на число, суммы и разности векторов непосредственно вытекают такие СВОЙСТВА ***действий над векторами***:

1. $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$;
2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
5. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Разложите вектор $\vec{c}(-6; 0)$ по векторам $\vec{a}(1; 3)$ и $\vec{b}(2; 6)$.

Решение

Координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны $(1 : 2 = 3 : 6)$. Тогда векторы $\vec{a}$, и $\vec{b}$ коллинеарны $(\vec{a} = 0{,}5\vec{b})$, и выполнить разложение невозможно.

Ответ: задача не имеет решения.

Пример 2. Разложите вектор $\vec{c}(-6; 0)$ по векторам $\vec{a}(1; 3)$ и $\vec{b}(2; -6)$.



Для любознательных

Интересный пример применения векторного метода

На сторонах произвольного треугольника ABC извне построены параллелограммы: ABA_xB_y, BCC_xB_z, CAA_2C_2. Докажите, что из отрезков A_xA_2, B_1B_2, C_xC_2 можно сложить треугольник.

Доказательство

Рассмотрим многоугольник $A_1B_1A_2C_2C_xA_y$. Имеем:

$$\overrightarrow{A_xB_x} + \overrightarrow{B_xB_2} + \overrightarrow{B_2C_x} + \overrightarrow{C_xC_2} + \overrightarrow{C_2A_2} + \overrightarrow{A_2A_1} = 0.$$

Учтем, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_2C_x}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{C_2A_2}$ и $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = 0$. Тогда $\overrightarrow{B_xB_2} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{A_2A_1} = 0$. Т. е. из отрезков A_1A_2, B_xB_2, C_xC_2 можно сложить треугольник, если векторы $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$, $\overrightarrow{A_2A_1}$ неколлинеарны.

А могут ли векторы $\overrightarrow{B_xB_2}$, $\overrightarrow{C_xC_2}$, $\overrightarrow{A_2A_1}$ быть коллинеарными?

Решение

Координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{Ъ}$ не пропорциональны, т. е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{Ъ}$ не являются коллинеарными, поэтому можно выполнить разложение

$\vec{c} = \vec{Xa} + \vec{|xЬ} = (X; 3\text{^}) + (2ц; -6ц) = (Л + 2ц; 3\text{^}-бц).$

Имеем: $\vec{c}(-6; 0) = (А, + 2ц; ЗЯ-6ц)$. Отсюда:

$$\begin{cases} X + 2ц = — 6, \\ ЗА.-6ц = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} X + 2ц = -6, \\ [А,-2ц = 0, \end{cases} \quad \Gamma A. = -3, \quad (ц = -1{,}5.$$

Ответ: $\vec{c} = -3\vec{a} - 1{,}5\vec{Ъ}$.

Разложение вектора $\vec{c}$ (с,; c_2) по $\vec{a}$(a,; a_2) и $\vec{b}$(&,; b_2), **aft B:**

1) ***записать*** $\vec{Xa} = (\vec{Xa}\text{^}; \vec{Xa_2})$ и $\vec{XЪ} = (ц6,; ц\vec{Ь}_2)$;

2) ***записать*** $\vec{Xa} + \vec{XЪ} = \vec{=(/.a, + [ib,\hat{}; /,a_2 + (i6_2)}$;

3) ***записать*** $\vec{c} = \vec{Xa} + \vec{XЪ}$, из равенства координат $\begin{cases} Cj = Xa_1 + |ib_x \\ c_2 = Xa_2 + цЪ_2 \end{cases}$ ***найти*** Лиц.



Пример 3. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N лежат на сторонах AB и CD соответственно, $AM : MB - CN : ND = 2:1$. Выразите вектор $\vec{MN}$ через векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.

Решение

Обозначим векторы $\vec{AB} = \hat{\vec{a}}$ и $\vec{AD} = \hat{\vec{b}}$ (рис. 4.16).

1) $ABCD$ - параллелограмм, тогда $\vec{DC} = \vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{BC} = \vec{AD} = \vec{Ъ}$.

2) По правилу многоугольника i№V $= \vec{МБ} + \vec{БС} + \vec{CN}$.

3) МБ ТТ АВ и АМ : $MB = 2:1$, тогда $\vec{MB} = \frac{1}{3}\vec{a}$.

4) CiV TI ABнCN : $ND = 2:1$, тогда $\vec{CW} = \frac{2}{3}\vec{a}$.

5) $\vec{MiV} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$ — а.

Ответ: $\vec{MN} = \vec{AD} - \frac{1}{3}\vec{АБ}$.

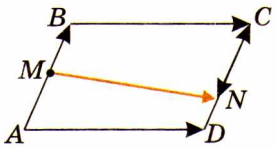


Рис. 4.16



Для любознательных

Теорема. **Три точки A, ВиС лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют числа k, пи $т$ такие, что $k + п + m = 0$(k*0, пф 0, $т \neq 0$), и для произвольной точки** О **плоскости выполняется соотношение** $к \cdot \vec{OA} + п \cdot \vec{OB} + т \cdot \vec{OC} = 0$.

Доказательство

Необходимость. A, B, C лежат на одной прямой, тогда $\vec{BC} = \vec{XBA}$. Отсюда: $\vec{БО} + \vec{ОС} = \vec{X(BO} + \vec{QA)}$ и $\vec{XQA} + \vec{(1 - X)OB} + (-1)\vec{OC} = 0$. Ч. т. д.

Достаточность. Пусть выполняется равенство $k \cdot \vec{OA} + п \cdot \vec{OB} + т \cdot \vec{OC} = 0$, где $k + п + т = 0$ ($k \neq 0$, $п$* 0, $т$ *0), т. е. $п + т = -к$.

Умножим векторное равенство на $\frac{1}{т}$ и прибавим к обеим его частям $\vec{BO}$:

$$\vec{т} + \vec{ж} = \sim\vec{А_Д} + \frac{k}{m}\vec{т} + \frac{п}{m}\vec{Ш}, 1\text{^} = \frac{k}{m}\vec{А_Д} + \frac{k}{m}\vec{т\text{^}_{ВД}} = \frac{k}{m}\vec{А_Д} - \frac{k}{m}\vec{вД} = \frac{k}{m}\vec{Ав}.$$

Тогда $\vec{BC}$ и $\vec{AB}$ коллинеарны, и точки А, B, C лежат на одной прямой. Ч. т. д.

Практическая работа 36

1. Начертите прямоугольную систему координат.
2. Отметьте точки A(-6; -2), B(3; 4), C(1; 1). Постройте векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Найдите координаты этих векторов.
3. Постройте вектор, который является суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Используя клеточки тетради, найдите его координаты.
4. Сравните полученные координаты с координатами векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Сделайте вывод.

Практическая работа 37

1. Начертите прямоугольную систему координат.
2. Отметьте точки A(2; 2), B(4; 7), C(9; 6). Постройте векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найдите координаты этих векторов.
3. Постройте вектор, равный разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Используя клеточки тетради, найдите его координаты.
4. Сравните полученные координаты с координатами векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Сделайте вывод.

Практическая работа 38

1. В прямоугольной системе координат постройте вектор $\overrightarrow{AB}$, если A(1; 1), B(3; 3).
2. Постройте вектор $3\overrightarrow{AB}$. Используя клеточки тетради, найдите его координаты.
3. Сравните полученные координаты с координатами вектора $\overrightarrow{AB}$. Сделайте вывод.

Задание 30

1°. Дан вектор 5(1; 5). Найдите координаты векторов: а) $\vec{2}a$; б) $\vec{3}a$; в) -$\vec{5}a$; г) -12$\vec{a}$.

2°. Даны векторы 5(2; -5) и B(-3; 4). Найдите векторы:
а) $2\vec{B}$; б) $-\vec{B}$; в) $4\vec{B}$; г) -4B; д) $\vec{a} + \vec{B}$; е) $\vec{a} - \vec{B}$; ж) $\vec{a} + 26$; з) $\vec{5} - 4\vec{b}$.

3°. Найдите координаты векторов $2\vec{a}$ и $\frac{1}{3}\vec{a}$, если:
а) 5(-7; 3); б) a(-3; 9); в) 5(0,5; -2); г) $a = \vec{e}_x - 3\vec{e}_y$; д) a = -6$\vec{e}_x$ + 21$\vec{e}_2$.

4°. Найдите сумму векторов:
а) 5(1; -2) и B(2; -3); б) 5(-3; 4) и B(2; -3); в) a(-5; 4) и b(2; -2).

5°. Найдите вектор $\vec{a} - \vec{b}$, если:
а) 5(1; 4), $\vec{b}$(-1; -3); б) 5(-3; 2), fe(2; -1); в) 5(5; 3), $\vec{b}$(-4; 4).

6. Найдите модули векторов $\vec{x} + \vec{y}$ и $\vec{x} - \vec{y}$, если:
а) *(4;-1), y(-5;8);
б) $\vec{x} = 3?! - 2\vec{e}_2$, $\vec{y} = -4ij + \vec{e}_2$;
в) x(3; 2), y(4;-2);
г) $\vec{x} = gj - 2\vec{e}_2$, $\vec{y} = \vec{e}$, - 3$\vec{e}_2$.

7. Даны векторы $\vec{a}$ = ^ - 6$\vec{e}_2$, $\vec{b}$ = 2$\vec{e}_t$ + 3$\vec{e}_2$. Найдите координаты и модуль вектора:
а) 25 + 3B; б) 5 - 3$\vec{b}$; в) 0,55 - B; г) 4$\vec{b}$ - 55.

8. Дан |X5| = 5. Найдите X, если:
а) 5(6;-8); б) 5(3;-4); в)5(-7;24); г) 5(5; 12).



Для любознательных

1. Векторы $\vec{a}$, $\vec{B}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ связаны соотношением 2a + $\vec{oB} + \vec{0} \cdot \vec{c} - 85 = 0$. Представьте каждый из векторов a, B, d в виде линейной комбинации других векторов. Правда ли, что вектор c нельзя представить в виде линейной комбинации других векторов? Почему?

2. Пусть $\vec{a}$ = 5$\vec{r}$ - 35, $\vec{B} = \vec{1}r$ - 45, где векторы $\vec{r}$ и $\vec{n}$ - неколлинеарны. Разложите векторы йийпо векторам $\vec{a}$ и $\vec{B}$.

9. Даны векторы $\vec{a}(3; -2)$, $\vec{b}(4; 2)$. Найдите координаты и модуль вектора:
а) $2\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - 3\vec{b}$; в) $5\vec{a} - \vec{b}$; г) $2\vec{b} + 5\vec{a}$.

10. Найдите вектор $4(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(0{,}5\vec{c} + 3\vec{d})$, если:
а) $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(-3; 4)$, $\vec{c}(0; -2)$, $\vec{d}(2; -2)$;
б) $\vec{a}(0; -3)$, $\vec{b}(2; -4)$, $\vec{c}(2; -2)$, $\vec{d}(1; -1)$.

11. Какие из векторов коллинеарны: $\vec{a}(8; 4)$, $\vec{b}(-1; -0{,}5)$, $\vec{c}(4; 4)$, $\vec{d}(0{,}5; 0{,}5)$, $\vec{x}(-2; 1)$, $\vec{f}(-1; -1)$?

12. Даны четыре точки: А(3; 0), Б(0; 1), С(2; 7) и $\vec{f}(5; 6)$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны.

13*. Найдите значение x, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, если:
а) $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(12; x)$; б) $\vec{a}(x; 2)$, $\vec{b}(3; 4)$; в) $\vec{a}(-3; 1)$, $\vec{b}(4; x)$.

14*. Найдите значение x, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если:
а) $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(12; x)$; б) $\vec{a}(x; -2)$, $\vec{b}(3; 4)$; в) $\vec{a}(3; 1)$, $\vec{b}(4; x)$.

15*. Дан вектор $\vec{a}(-5; 4)$. Найдите вектор $\vec{x}(x_0; y_0)$, который в 5 раз длиннее вектора $\vec{a}$ и направлен с ним: а) одинаково; б) противоположно.

16*. Модуль вектора $k\vec{x}$ равен 12. Найдите k, если: а) $\vec{x}(1; 3)$; б) $\vec{x}(-5; -1)$.

17*. Найдите единичный вектор, коллинеарный вектору $\vec{x}(6; -8)$ и одинаково с ним направленный.

18*. Найдите среди следующих утверждений правильные:
а) если $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$, то $\vec{b} = k\vec{a}$;
б) если $\vec{b} = k\vec{a}$, то $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$;
в) если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$ и $\vec{b} = k\vec{a}$;
г) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$, то $\vec{b} = k\vec{a}$.

19*. Разложите вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если:
а) $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(-1; 4)$, $\vec{c}(5; -6)$; б) $\vec{a}(-3; 5)$, $\vec{b}(0; 2)$, $\vec{c}(-1; -1)$.

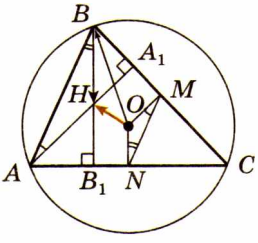


Для любознательных

Докажем, следуя Эйлеру, такую теорему.

Теорема Эйлера (формула Гамильтона). Если в произвольном треугольнике ABC обозначить через H его ортоцентр, а через O — центр окружности, описанной вокруг этого треугольника, то $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Доказательство



Проведем в треугольнике ABC высоты BB_1, AA_1 и перпендикуляры ON и OM к сторонам AC и BC.

1) Из треугольника BOH: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH}$.

2) O - центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, тогда ON и OM - срединные перпендикуляры к сторонам AC и BC, а MN - средняя линия.

3) $MN \parallel AB$ (как средняя линия), $ON \parallel$ БВ, (как перпендикуляры к АС), $OM \parallel$ AAj (как перпендикуляры к ВС). Тогда $\triangle ABB_1 \sim \triangle OMN$, $\angle BAA_1 = \angle OMN$, $\triangle ABH \sim \triangle MNO$ с $k = 2$ (т. к. $AB = 2MN$).

4) $\triangle ABH \sim \triangle MNO$, $k = 2$. Тогда $BH = 2ON$.

$BH \parallel ON$, $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{ON}$. Тогда $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{ON}$.

5) N - середина отрезка АС. Тогда (см. стр. 152):

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{ON}$, т.е. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Теорема доказана.

20**. Даны векторы a(3; -1), Ь(1; -2) и c(-1; 7). Разложите вектор p = $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

21. Даны точки A(1; 0), B(-2; -1), C(0; 3). Найдите точку $D(x; y)$, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны.

22*. Сумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равна нулю. Найдите координаты точки **D**, если A(-1; 2), B(2; -1), C(1; 3).

23*. Каким условиям должны удовлетворять векторы, чтобы выполнялось соотношение:

а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; б) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$; в) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

24**. **ABCD** - трапеция, у которой длина основы **AD** в 3 раза больше длины **BC**. Найдите координаты точки **D**, если A(-4; 6), Б(-2; -1), C(3; 3).

25**. Даны координаты вершин треугольника: A(7; 3), B(-5; -2), C(4; -1). Найдите: **а)** векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) единичные векторы, параллельные прямым **AB** и **AC** соответственно; в) вектор $\overrightarrow{AL}$, если отрезок **AL** является биссектрисой заданного треугольника.

26*. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось **Ox** равна 2, проекция вектора $\vec{b}$ на ось **Ox** равна -3, проекция вектора $\vec{c}$ на ось **Ox** равна 4. Найдите проекции на ось **Ox** векторов: **а)** $-3\vec{a}$; б) $8+\vec{c}$; в) $\vec{c}-\vec{a}$; г) $3\vec{a}-2\vec{b}$; д) $-\vec{a} + 2\vec{b}-2\vec{c}$.

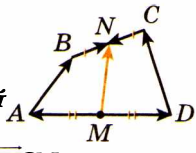
27**. Сторона квадрата **ABCD** равна 1. Точка **K** - середина **AD**, точка **E** - середина **AB**, **O** - точка пересечения диагоналей квадрата. Найдите проекцию на ось **AD** вектора: **а)** $\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{DB}$; г) $\overrightarrow{BK}$; д) $\overrightarrow{CE}$; **е)** $\overrightarrow{EK}$.



Для любознательных

Векторная формула средней линии четырехугольника

Докажем для произвольного четырехугольника **ABCD** (см. рис.), что $\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2} = \overrightarrow{MN}$, где **M** и **N** - середины сторон **AD** и **BC**. Эту формулу называют ***векторной формулой средней линии четырехугольника.***



Действительно: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$. Если сложить эти равенства почленно и учесть, что $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{CN}$, то получим искомое равенство.

Докажите самостоятельно несколько весьма полезных опорных задач.

1. Пусть дан треугольник ABC. Докажите для векторов $\vec{r} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}$ и $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}$ такие утверждения:

а) вектор $\vec{r} + \vec{h}$ направлен вдоль биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC;

б) вектор $\vec{r} - \vec{n}$ направлен вдоль биссектрисы внешнего угла при вершине **A** треугольника ABC.

2. Пусть M - центроид треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$.

3. Докажите, если $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$, то M - центроид треугольника **ABC**.

4. Пусть ABC и A^jCj - два треугольника на плоскости. Докажите, если $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BBj} + \overrightarrow{CCj} = 0$, то центроиды этих треугольников совпадают.

5. Пусть заданы точки **A, B, C** и **D**. Найдите такую точку M, чтобы $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CD}$.

6. В треугольнике ABC точка **O** - центр окружности, описанной вокруг этого треугольника, а **H** - ортоцентр. Докажите, что $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

§ 26. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ ***называется число*** $a_1b_1 + a_2b_2$. Скалярное произведение обозначают $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Найдем скалярное произведение двух равных векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2.$$

Скалярное произведение вектора самого на себя $\vec{a} \cdot \vec{a}$ обозначают $\vec{a}^2$ и называют его ***скалярным квадратом.*** Скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

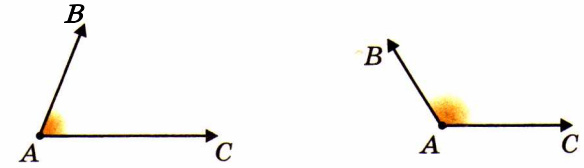
Из определения скалярного произведения двух векторов следуют такие его СВОЙСТВА:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
3. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Для дальнейшего нам надо уметь определять угол между двумя векторами.

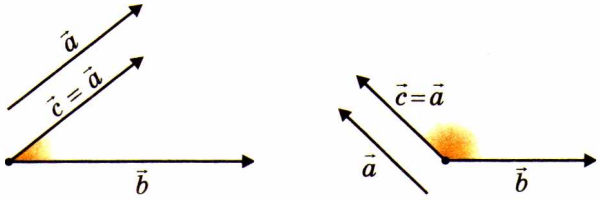
Углом между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называется угол BAC (рис. 4.17).

Углом между двумя векторами, которые не имеют общего начала, называется угол между равными им векторами, которые имеют общее начало (рис. 4.18).



а) б)

Рис. 4.17



а) **б)**

Рис. 4.18

Угол между двумя сонаправленными векторами считают равным нулю.

Замечание. Угол между двумя прямыми не может быть тупым. Угол между двумя векторами может быть тупым.

Докажем еще несколько свойств скалярного произведения векторов.

Скалярное произведение:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

Скалярный квадрат:

$\vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2$

Напомним.

$\stackrel{def}{=}$ - равенство по определению;

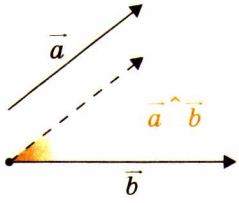
$\triangleq$ - «обозначили как».

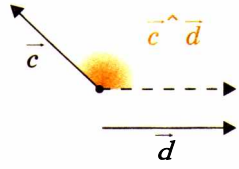
СВОЙСТВА $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$:

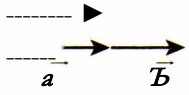
1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

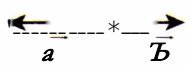
3) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.







$\vec{a} \hat{} \vec{b} = 0°$

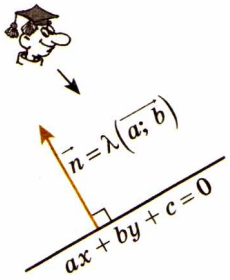


$\vec{a} \hat{} \vec{b} = 180°$

СВОЙСТВА a·b:

4) $\vec{a} \cdot \vec{b} =$
$= |a| \cdot |b| \cos(a * \vec{b})$

5) $\vec{a} \perp \vec{b}$
И и
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,
($\vec{a}$ ё 0, $\vec{b}$ щ 0).



Ш Теорема. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно произведению их модулей на косинус угла между ними.

Доказательство

Пусть даны векторы $a(a_x; a_2)$ и $\angle(\&; \vec{b}_2)$. Обозначим угол между ними как a. Надо доказать, что

$$a, \cdot \vec{b}_1 + a_2 \cdot \vec{b}_2 = |\vec{a}| \cdot |b| \cos a.$$

Рассмотрим скалярный квадрат вектора $\vec{a} + \vec{b}$ и учтем свойства скалярного произведения двух векторов, приведенные выше:

$$(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b},$$
$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\,\vec{b}.$$

Тогда скалярное произведение двух векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$ определяется только через длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$, т. е. оно не зависит от выбора системы координат.

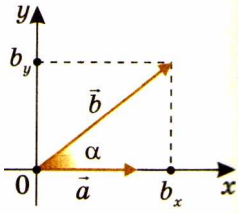


Рис. 4.19

Направим ось Ox так, как показано на рисунке 4.19, и запишем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$\vec{a}(|a|; 0)$, $b(|b|\cos a; |b|\sin a)$.

Тогда $a \cdot \vec{b} = |a| \cdot |\vec{b}| \cos a + 0 \cdot |\vec{b}| \sin a = |\vec{a}| \cdot |b| \cos a$.

Теорема доказана.

С Следствие 1. Если ненулевые векторы взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

С Следствие 2. Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы взаимно перпендикулярны.

Для любознательных

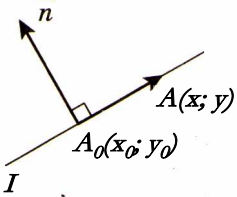
ВЕКТОР-НОРМАЛЬ К ПРЯМОЙ
(вектор, перпендикулярный к прямой)

Пусть есть прямая Z, уравнение которой имеет вид $ax + by + c = 0$. Обозначим на этой прямой точки $A_0(x_0; y_0)$ и $A(x; y)$. Для координат этих точек выполняются соотношения

$ax + by + c = 0$ и $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Отнимем от первого равенства второе:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.



Знаем, что $\overrightarrow{A_0A}$ $(x - x_0; y - y_0)$. Тогда последнее равенство является скалярным произведением двух перпендикулярных векторов - вектора $\overrightarrow{A_0A}$, который лежит на заданной прямой I, и вектора $(a; b)$. Вектор, коллинеарный вектору $(a; b)$, и есть искомым **вектором-нормалью к прямой** $ax + by + c = 0$:

$$\vec{n} = \lambda(a; b).$$

Замечание. Из последней теоремы следует, что:

1) для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $\vec{a} \cdot \vec{b} < |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$;
2) косинус угла $\vec{a}$ между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\cos a = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$;
3) косинус угла у между двумя прямыми, на которых лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равен $\cos\gamma = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ (т. к. угол между прямыми не превышает 90°).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Треугольник ABC задан координатами его вершин A(1; 3), $B(2; 4)$ и C(2; 3). Найдите градусную меру угла A этого треугольника.

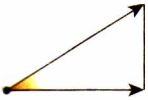


Рис. 4.20

Решение

1) Искомый $\angle A = \overrightarrow{AC} \hat{} \overrightarrow{AB}$ (рис. 4.20).

2) $\overrightarrow{AC} = (1; 0)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 1)$. Тогда

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \angle A = 45°.$$

Ответ: $\angle A = 45°$.



Пример 2. Найдите косинус угла между медианами равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенными к его катетам.

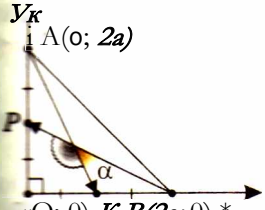


Рис. 4.21

Решение

Направим оси Ox и Oy вдоль катетов треугольника и обозначим длины его катетов через $2a$ (рис. 4.21). Тогда: A(0; $2a$), $B(2a; 0)$, C(0; 0).

1) Координаты середин катетов: $K(a; 0)$, $P(0; a)$.

2) $\overrightarrow{BP} = (-2a; a)$, $\overrightarrow{AK} = (a; 2a)$.

3) Искомый угол является углом между прямыми и не может быть тупым, его косинус - положительное число. Тогда:

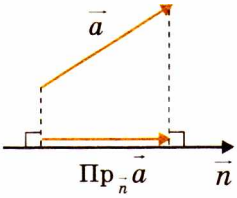
$$\cos\alpha = |\cos(\overrightarrow{BP} \hat{} \overrightarrow{AK})| = \frac{|\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AK}|}{|\overrightarrow{BP}| \cdot |\overrightarrow{AK}|} =$$

$$= \frac{|-2a \cdot a + a \cdot (-2a)|}{\sqrt{(2a)^2 + a^2} \cdot \sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}$$

Ответ: $\dfrac{4}{5}$.

Напомним:

проекция вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{n}$



$\text{Пр}_{\vec{n}}\vec{a} = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{n})$

Задание 31

1°. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{6}$, если:

а) $\vec{a}(3; -7)$, $\vec{6}(4; 3)$; г) $\vec{a} = 2\vec{e}_x - 3\vec{e}_2$, $B = -5\vec{e}_1 + 0{,}6\vec{e}_2$;

б) $\vec{a}(-3; -5)$, $6(\vec{-1}; 2)$; д) $\boldsymbol{a}$ = 4е, + $3e_2$, Б = -$\vec{e}$, + $\vec{0{,}5}\vec{e}_2$.

в) $\vec{a}(5; 3)$, $\vec{6}(-3; 1)$;

2. Найдите х, если:

а) $\vec{a} \cdot B = -13$, $\vec{a}(3; 2)$, $B(-5; x)$; в) $\vec{a} \cdot B = -4$, $a(x; -3)$, $\vec{6}(2; -2)$;

б) $\vec{a}\,B = -4$, $a(\vec{-3}; 2)$, $6(\vec{-1}; x)$; г) $a \cdot 6 = 4$, $\vec{a}(\vec{-2}; x)$, $\vec{6}(-2; x)$.

3. Даны векторы $a(8; -2)$ и $6(4; 3)$. Найдите вектор х, который удовлетворяет условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 8$ и $\vec{x} \cdot B = 0$.

4°. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и B, если:

а) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{б}| = 6$, угол между векторами $\vec{a}$ и B равен 45°;

б) $|\vec{o}| = 7$, $|\vec{Ь}| = 3$, угол между векторами $\vec{a}$ и B равен 120°;

в) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 12$, угол между векторами $\vec{a}$ и B равен 90°.

5°. Вычислите $(\vec{a} + B)\cdot\vec{c}$ и $\vec{a} \cdot \vec{c} + B\,\vec{c}$ и сравните полученные результаты, если:

а) $\vec{a}(2; 0)$, $\vec{Ь}(-1; 3)$, $c(4; 0)$; б) $a(2; \vec{1})$, $6(-3; \vec{2})$, $c(-1; -2)$.

6°. Вычислите $(A\vec{a}) \cdot B$ и $A.(\vec{a} \cdot \vec{6})$ и сравните полученные результаты, если:

а) $\vec{a}(2; 0)$, $\vec{Ь}(-1; 3)$, X = 2; б) $a(2; \vec{1})$, $6(-3; \vec{2})$, А. = -0,5.

7°. Вычислите $\vec{a} \cdot B$ и $\vec{Ь} \cdot \vec{a}$ и сравните полученные результаты, если:

а) $\vec{a}(2; 0)$, $\vec{\&}(-1; 3)$; б) $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{6}(-3; 2)$.

8°. Найдите $\vec{a} \cdot B$, если:

а) $|\vec{a}| = 2$, 161 = 3, cos ср = 0,4; д) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{б}| = 2$, cos ф = -0,5;

б) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{б}| = 5$, ф = 60°; е) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{б}| = 2$, ф = 120°;

в) $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{Ь}| = 5$, ф = 90°; ж) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{Ь}| = 4$, ф = 180°.

г) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\&}| = 5$, ф = 30°;

9. Найдите косинус угла между векторами:

а) $\vec{a}(3; 4)$ и $\vec{b}(-1; 5)$; б) $a(-3; 4)$ и $6(1; 5)$; в) $a(-3; -4)$ и $\vec{6}(-1; -5)$.



Для любознательных

Расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$

Будем обозначать такое расстояние, как $d((x_0; y_0); ax + by + c = 0)$.

Заданная прямая пересекает ось Ox в точке $C\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$. Искомое расстояние от точки $A(x_0; y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$ равно длине перпендикуляра АВ, опущенного из точки А на прямую. Из треугольника ABC:

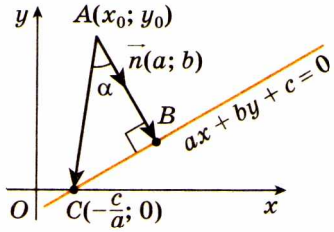
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|\cos\alpha$, где $\cos\alpha = \frac{(\vec{n}; \overrightarrow{AC})}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$, $\vec{n}(a; b)$, $\overrightarrow{AC}\left(-x_0 - \frac{c}{a}; -y_0\right)$

Т. е.

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \cdot \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}|} = \frac{|-ax_0 - c - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

итак, искомое расстояние

$$d((x_0; y_0); ax + by + c = 0) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + 6^2}}.$$



10. Точки A(3; 2), *B*(5; 1), C(1; -2) - вершины треугольника. Найдите внутренний угол при вершине A, косинус внешнего угла при вершине *B*.

11*. Не выполняя построения точек *A, B, C,* определите вид треугольника *ABC* (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный), если:
а) A(0; 3), *B*(2; 0), C(-2; -1); б)A(1; 1), B(-3; 1), C(1; 4); в)A(2; 4), B(3; 4), C(-4; 5); г)A(0; 3), B(2; 0), C(-2; 0).

12. Найдите угол между векторами а и Ь, если:

а) 5(0; 2), *b*(3; 1); в) 5(0; -2), -б; 1;

б) 5(1; 2), *Б(-4;* 2); г) 5(4; -4), fe(0; -1).

13. Докажите, что векторы 5 и *Б* перпендикулярны, если:
а) 5(0; 3), *Б(-2* \ 0); б) 5(-2; 3), Ь(-6;-4); в) *а(т; п), Ь(-п; т).*

14. При каком значении *х* векторы 5 и *b* будут перпендикулярными:
а) 5(3; д:) и *Б*(4; 5); б) 5(4; х) и &(-9; х)?

15. Векторы аиї образуют угол 30°, |5| = 4, \b\ = 7. Найдите скалярное произведение:
а) (25 - 3fe) (5 + *b);* б) (35 - *2Б)(а - 2Б);* в)(65 - 5t>)(65 + *ЪЬ).*

16*. Даны |5| = 2, |b| = 5, угол между векторами а и ft равен —. Найдите, при каком значении *k* векторы *p = ka + \1Ь и q = За - b* взаимно перпендикулярны.

17*. Найдите косинус угла между векторами 5 и (5 + *Б),* если |5| = 2, |Ь| = 3, а угол между векторами *а и b* равен 120°.

18*. Векторы *а и Б* образуют угол 60°. Найдите:
а)|а-b|; б)|За-Ь|; в) |25 + 3Ь|, если |5| = 2, |b| = 1.

19*. Угол между векторами 5 и *Ъ* равен 30°, |а| = л/3, |ft| = 1. Вычислите косинус угла между векторами 5 + *Б* и 5 - *b.*

20*. Векторы *а* и *b* образуют угол 120°, |5| = 3, |Б| = 5. Найдите \а - Б\.

21*. Найдите вектор *а,* коллинеарный вектору *b*(1; 2), если *а* ■ *Ъ* = 20.

22*. Какой угол образуют единичные векторы *а и б,* если известно, что векторы *с = а + 2Б* и *d* = 55 - *4Ъ* взаимно перпендикулярны?

23*. Векторы *а, b, с* образуют друг с другом углы по 120°. Разложите вектор 5 по векторам *b и с,* если |й| = 3, |Ь| = 2, |с| = 1.

24*. Найдите единичный вектор, который образует тупой угол с ортом *и* $\vec{e}_1$ перпендикулярен вектору 5(4;1).

25*. Дан вектор *Б*(3; 2). Найдите вектор с модулем 4, перпендикулярный *к b и* образующий тупой угол с осью *Оу.*

26. Докажите, что точки A(3; 0), B(0; 1), C(2; 7) и *D*(5; 6) - вершины прямоугольника *ABCD.*



Для любознательных

Воспользовавшись формулой расстояния от точки до прямой, решите такие задачи.

1. Запишите уравнение окружности с центром в точке (1; -2), которая касается прямой *y* = *2x* - 5.
2. Найдите наименьшую площадь треугольника, две вершины которого имеют координаты (0; 2) и (-3; 0), а третья лежит на прямой Здг - *2y* + 10 = 0.
3. Найдите наименьшую площадь треугольника, две вершины которого имеют координаты (-2; 0) и (0; -4), а третья лежит на параболе $y = x^2$.

27. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ - квадрат, если:
а) A(0; 0), 5(1; 1), C(0; 2), Д-1; 1); б)A(-3; -1), B(-2; 3), C(2; 2), 0(1; -2).

28. Даны вершины четырехугольника $ABCD$: A(1; -2), 5(1; 4), C(-4; 1) и £)(-5; -6). Докажите, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

29**. Треугольник задан координатами его вершин A(1; -2), 5(1; 4), C(-4; 1). Найдите вектор $\vec{BM}$, где точка M - основание высоты, проведенной из вершины B.

30**. Три силы ^(3; 4), $\vec{F_2}$(2; 3), $\vec{F_3}$(-3; 0) приложены к одной точке. Найдите работу, которую выполнила равнодействующая этих сил, если точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, переместилась из положения M^Ъ; 3) в положение M_2(4;-1).

31**. Даны векторы 5(-1; 1) и $\vec{Б}$(3; -5). Найдите проекцию вектора $2\vec{a}$ - $\vec{Ъ}$ на вектор $\vec{a} + \vec{Б}$.

32*. Вектор $\vec{a}$, модуль которого равен 6, направлен под углом a = 30° к оси Ox. Найдите проекции этого вектора на координатные оси.

33**. Даны три взаимно перпендикулярных вектора $\vec{a}$, $\vec{Б}$ и $\vec{c}$, модули которых равны 3, 6 и √11 соответственно. Найдите модуль вектора $\vec{a} + \vec{Б} + \vec{c}$.

34**. Вектор $\vec{a}$, модуль которого равен 3, образует угол а = 30° с прямой AB. Под каким углом р к AB надо расположить вектор $\vec{Ъ}$ с модулем л/з, чтобы вектор $\vec{a} + \vec{Б}$ был параллелен AB? Найдите модуль вектора $\vec{a}+\vec{Б}$.

35**. Докажите, если для сторон четырехугольника $ABCD$ выполняется соотношение $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$, то его диагонали взаимно перпендикулярны. Совет. Используйте *векторный метод*. Рассмотрите векторы, совпадающие со сторонами четырехугольника и его диагоналями, воспользуйтесь свойствами скалярного произведения векторов для скалярного квадрата вектора и признаком перпендикулярности векторов.



Для любознательных

1. Докажите утверждение (опорный факт): для того чтобы из трех данных отрезков АВ, BC и AC можно было построить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}=0$, где $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ — неколлинеарны.

2. Воспользовавшись опорным фактом (1), докажите, что: а) из медиан любого треугольника можно построить треугольник; б) можно построить треугольник из половин диагоналей произвольного четырехугольника и любой его средней линии (*средней линией четырехугольника* называют отрезок, соединяющий середины его противоположных сторон).

3. В треугольнике ABC. АА, - биссектриса, $AB = c$, $CA = Ъ$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и i $\overrightarrow{AB}$ + $\frac{1}{c}$ $\overrightarrow{Б}$ - $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны.

4. В плоскости прямоугольника $ABCD$ взяли точку X. Докажите, что

$$\overrightarrow{XA}\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB}\overrightarrow{XD}.$$

5. Какой вид имеет четырехугольник $ABCD$, если

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{5A}-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{C5}-\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA} = 0?$$

6. Докажите, что для произвольных четырех точек А, B, C и D выполняется равенство $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

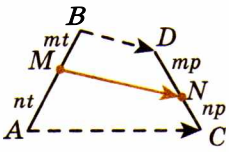
7. Даны векторы 5(1; 2) иБ(3; -1). При каком значении k вектор 5 + k ■ $Ъ$ будет наименьшей ^лины? Вычислите для этого значения k скалярное произведение & • (5 + k ■ &)$_A$

8. Векторы $\vec{a}, \vec{Б}, k \cdot \vec{a} + т \cdot \vec{Б}$ попарно перпендикулярны. Докажите, что хотя бы один из них равен нуль-вектору.

9. Какому условию должны удовлетворять векторы 5 и $\vec{Б}$, чтобы вектор $\vec{a} + \vec{Б}$ был перпендикулярен вектору 5 - Б?

§27. Векторный метод доказательства теорем и решения геометрических задач

Применим векторы к решению геометрических задач. Некоторые из таких задач мы уже рассматривали (стр. 167), а некоторые решали раньше другими методами.



$$\overrightarrow{MN} = \frac{m}{r+n}\overrightarrow{AC} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BD}$$

ПРИМЕРЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Теоремакосинусов. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

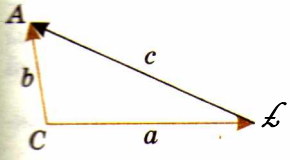


Рис. 4.22

Пусть в треугольнике ABC (рис. 4.22) $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Надо доказать, что

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Доказательство

Запишем векторное равенство

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}.$$

Из векторного квадрата этого соотношения

$$\overrightarrow{BA}^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$$

получаем:

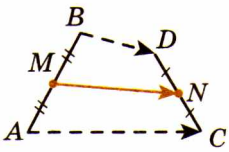
$$|BA|^2 = |CA|^2 + |CB|^2 - 2|CA| \cdot |CB| \cos C,$$

т. е. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Теорема доказана.

Замечание. Если угол C прямой, то $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$, тогда $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ и получим теорему Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$.





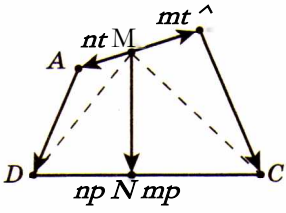
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$



Для любознательных

Опорная задача. **Если точки M и N принадлежат отрезкам AB и CD соответственно, $AM : MB = CN : ND = n : m$,** то

$$\overrightarrow{MN} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BD}.$$



Доказательство

1) $CN : ND = n : m \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \dfrac{n\overrightarrow{MD} + m\overrightarrow{MC}}{m+n}$;

2) $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$, тогда:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{m+n}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{m+n}(m\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB});$$

3) $AM : MB = n : m \Rightarrow m\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{MB}$ и $m\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} = 0$, и искомое равенство выполняется.

Суть метода векторов: геометрическое расположение точек, прямых, отрезков записать на языке векторных соотношений; и наоборот, векторным равенствам придать геометрическое звучание.

Теорема. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Пусть $ABCD$ - ромб (рис. 4.23). Надо доказать, что $AC \perp BD$.

Доказательство

Имеем: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Найдем скалярное произведение $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0,$$

т. к. стороны ромба равны.

Мы доказали, что $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$, тогда $AC \perp BD$.

Теорема доказана.

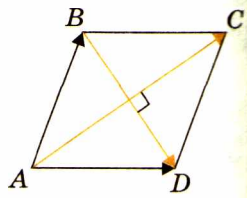
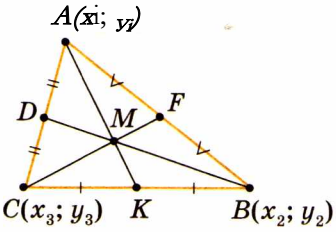
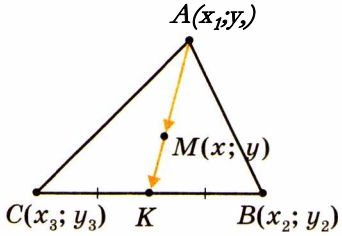


Рис. 4.23

Теорема. Если $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ - вершины треугольника ABC, то три медианы этого треугольника пересекаются в одной точке $M\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины (рис. 4.24-а).

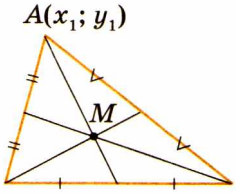


а)



б)

Рис. 4.24



$M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

Доказательство

Пусть точка K - середина стороны BC треугольника ABC (рис. 4.24-б) и точка $M(x; y)$ - такая точка медианы AK, что $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MK}$.

Векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MK}$ имеют координаты:

$$\overrightarrow{AM} = (x - x_1; y - y_1) \text{ и } \overrightarrow{MK} = \left(\frac{x_2 + x_3}{2} - x; \frac{y_2 + y_3}{2} - y\right).$$

Тогда из равенства $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MK}$ получаем:

$$x - x_1 = 2\left(\frac{x_2 + x_3}{2} - x\right) \text{ и } y - y_1 = 2\left(\frac{y_2 + y_3}{2} - y\right).$$

Отсюда:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ и } y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Повторяя те же соображения для медиан BD и CF треугольника ABC, получим, что точка с координатами

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

принадлежит всем медианам треугольника ABC и делит их в отношении 2:1, считая от вершины.
Теорема доказана.



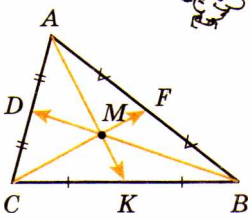
С Следствие. **Если AK, BD и CF — медианы треугольника ABC** (рис. на поле), **то выполняются равенства:**

(1) $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CF}=0$;

(2) $\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}=0$;

(3) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.





$\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CF}=0$

$\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}=0$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$

Прежде всего заметим, что

$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK},\ \overrightarrow{MD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{MF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CF};$$

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK},\ \overrightarrow{MB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}.$$

Поэтому для доказательства утверждений следствия достаточно доказать правильность утверждения (1).

Рассмотрим первую координату вектора $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CF}$. Она равна сумме соответствующих координат векторов $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CF}$, т. е. $\frac{x_2+x_3}{2}-x_1+\frac{x_1+x_3}{2}-x_2+\frac{x_1+x_2}{2}-x_3=0$.

Аналогично доказывается, что и вторая координата «того вектора равна нулю.

Вернемся к теореме о делении отрезка в заданном соотношении, которую мы рассматривали в § 1 (стр. 14).



Jn Теорема. Если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ - концы отрезка AB и точка $C(x; y)$ делит отрезок AB в соотношении $AC:CB=m:n$, то

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n};\ y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}.$$

Доказательство

Если $AC:CB=m:n$, то $|\overrightarrow{AC}|:|\overrightarrow{CB}|=m:n$ и $n\cdot\overrightarrow{AC}=m\cdot\overrightarrow{CB}$ (см. 4.25).

Особенность метода векторов не требует рассмотрения сложных геометрических конфигураций, а сводит геометрическую задачу к алгебраической, которую, обычно, легче решить, чем исходную геометрическую.



Для любознательных

1. В треугольнике ABC точки E, F и D - середины сторон AC, AB и BC соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=0$.
2. Используя векторную формулу средней линии четырехугольника (стр. 164), найдите длины отрезков, которые соединяют середины противоположных сторон четырехугольника, если заданы длины всех его сторон и градусные меры углов, под которыми пересекаются прямые, содержащие его противоположные стороны.

Векторы $n \blacksquare \overrightarrow{AC}$ и $m \blacksquare \overrightarrow{CB}$ имеют координаты

$n \blacksquare \overrightarrow{AC} = (n(x - x_1); n(y - y_1))$ и

$m \blacksquare \overrightarrow{CB} = (m(x_2 - x); m(y_2 - y))$.

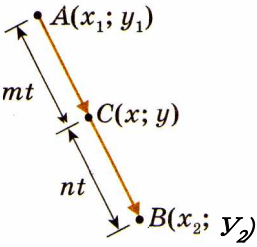


Рис. 4.25

Приравняв правые части этих соотношений, получим систему:

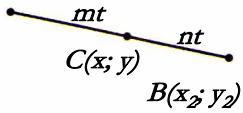
$$\begin{cases} n(x-x_1) = m(x_2-x), \\ n(y-y_1) = m(y_2-y), \end{cases}$$

решением которой относительно x и y будут искомые равенства.

Теорема доказана.



A(Xj; r/x)



$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$$



Следствие 1. Если точка C делит отрезок AB в отношении $m:n$, считая от точки A, то

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{m+n}(n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}).$$

Пусть векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют координаты $\overrightarrow{OA}(x_A; y_A)$ и $\overrightarrow{OB}(x_B; y_B)$.

Векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют общее начало - точку O (рис. 4.26). Параллельным переносом совместим точку O с началом координат. (Как известно, при параллельном переносе Q получаем вектор, равный данному.) Тогда: 0(0; 0), $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. По теореме, доказанной выше, получим

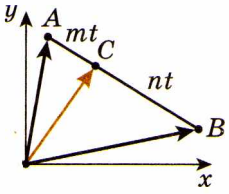


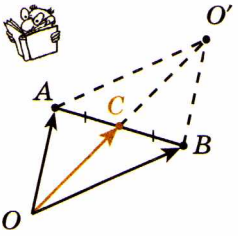
Рис. 4.26

$$\overrightarrow{OC} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m + n}$$

$$C\left(\frac{nx_A + mx_B}{m+n}; \frac{ny_A + my_B}{m+n}\right)$$

и $\overrightarrow{OC} = \left(\frac{nx_A + mx_B}{m+n}; \frac{ny_A + my_B}{m+n}\right) = \frac{1}{m+n}(n \cdot \overrightarrow{OA} + m \blacksquare \overrightarrow{OB})$.

Утверждение доказано.



$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

(*BOAO'* - параллелограмм)



Следствие 2. В случае, когда C — середина отрезка AB, т. е. $m = n = 1$,

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Замечание. Последнюю формулу также можно получить, продолжив медиану OC треугольника AOB (см. рис. на поле и стр. 152).



Для любознательных

Решите задачу векторным методом.

Даны длины двух сторон параллелограмма и одной из его диагоналей. Найдите одну из тригонометрических функций острого угла этого параллелограмма.

Теорема косинусов для четырехугольника. Квадрат стороны выпуклого четырехугольника равен сумме квадратов трех других его сторон без удвоенных произведений пар этих сторон на косинусы углов между ними.

Доказательство

Пусть $ABCD$ - выпуклый четырехугольник (рис. 4.27).

Тогда $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. Если умножить этот вектор сам на себя, получим:

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}|^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

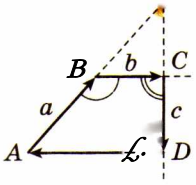
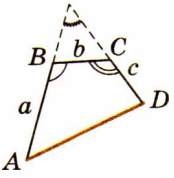


Рис. 4.27

Отсюда следует утверждение теоремы: $AD^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos(180° - \angle B) + 2bc\cos(180° - \angle C) + 2ac\cos(180° - \angle A) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos B - 2bc\cos C - 2ac\cos(a\sim c)$.

Теорема косинусов для четырехугольника



$AD^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos B - 2bc\cos C - 2ac\cos(a\sim c)$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Опорная задача.

В треугольнике ABC точка K делит сторону AB в отношении $AK : KB = 2 : 3$. В каком отношении отрезок CK делит медиану AD этого треугольника (рис. 4.28)?

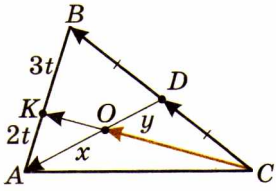


Рис. 4.28

Дано: $AK : KB = 2 : 3, BD = DC$.

Найти: $AO : OD$.

Решение

1) $\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{KB} = 2:3 \Rightarrow \overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}(3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB})$ (*см.* стр. 174).

2) $\overrightarrow{CO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CK} \Rightarrow \overrightarrow{CO} = x\overrightarrow{CK} = x(3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB})$.

3) $AO : OD = x:y \Rightarrow \overrightarrow{CO} = \frac{1}{x+y}(y\overrightarrow{CA} + x\overrightarrow{CD}) =$

$= \frac{1}{x+y}\left(y\overrightarrow{CA} + x\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)$.

4) $\frac{1}{x+y}\left[y\overrightarrow{CA} + x\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right] = \frac{1}{5}(3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x+y} = \frac{3}{5}, \\ \frac{x}{2(x+y)} = \frac{2}{5}. \end{cases}$

5) Разделим второе уравнение системы на первое: $\frac{x}{2y} = \frac{2}{3}$.

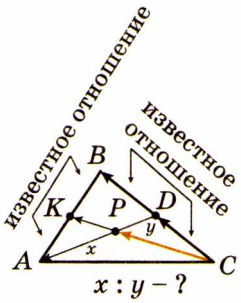
Чем занимаются математики, как не порядком и соотношением?

Аристотель

Отсюда: $x : y = 4 : 3$ и $AO : OD = 4:3$.

Ответ: 4 : 3, считая от вершины A.

Пример 2. Медианы, проведенные к сторонам AB и AC треугольника ABC, взаимно перпендикулярны. Докажите, что угол между этими сторонами меньше чем 45°.



Доказательство

1) Угол A треугольника ABC совпадает с углом между векторами AB и AC (рис. 4.29).

2) $\angle BKA > 90°$ как внешний угол треугольника MKC. Тогда в треугольнике ABK угол A — острый.

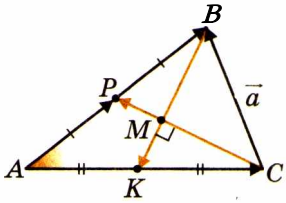


Рис. 4.29

3) Обозначим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$. Точки P и K делят отрезки AB и AC пополам. Поэтому (стр. 174):

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}), \quad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(-\vec{c} - \vec{a}).$$

4) Учитывая, что $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$, найдем скалярное произведение $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BK}$:

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(-2\vec{b} + \vec{c}) \cdot \frac{1}{2}(-2\vec{c} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(5\vec{b}\vec{c} - 2\vec{b}^2 - 2\vec{c}^2).$$

По условию $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{BK}$. Тогда $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BK} = 0$ и $5\vec{b}\vec{c} = 2\vec{b}^2 + 2\vec{c}^2$. Отсюда:

$$\cos A = \frac{2b^2 + c^2}{5bc} = \frac{2}{5}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geqslant \frac{4}{5},$$

так как среднее арифметическое двух положительных чисел не превышает их среднее геометрическое.

5) Имеем: $\cos A \geqslant \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда $\cos A > \cos 45°$. На промежутке от 0° до 90° большему углу соответствует меньшее значение косинуса, тогда $\angle A < 45°$. Ч. т. д.

Пример 3. Докажите, что сумма квадратов всех сторон четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей плюс квадрат удвоенного расстояния между серединами диагоналей.

Дано: $ABCD$, $BN = ND$, $AM = MC$ (рис. 4.30).

Доказать: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + (2MN)^2$.

1) записать $\overrightarrow{CK}$ через $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$;

2) $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{XCK}$;

3) записать $\overrightarrow{CP}$ через $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CA}$, а $\overrightarrow{CD}$ через $\overrightarrow{CB}$;

4) приравнять $\overrightarrow{CP}$ из п. 2 и п. 3.

Математика - жрица определенности и ясности.

И. Ф. Гербарт

Мое пристрастие к математическим наукам прежде всего объясняется моим отвращением к лицемерию.

Стендаль

Для любознательных

Решите задачу векторным методом.

В ромбе $ABCD$ диагонали $AC = 2a$ и $BD = 2b$ пересекаются в точке O. На диагоналях AC и BD отметили соответственно точки M и K так, что $OM = \frac{b^2}{2a}$ и $OK = \frac{b}{2}$. Найдите угол, который образуют при пересечении прямые CK и DM.

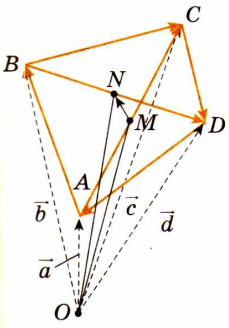


Рис. 4.30

Доказательство

Рассмотрим точку O вне четырехугольника $ABCD$.

Обозначим:

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$.

1) $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} - \vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{d} - \vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{a} - \vec{d} = \overrightarrow{DA}$;

2) $\vec{c} - \vec{a} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} - \vec{b} = \overrightarrow{BD}$;

3) точки M и N - середины диагоналей AC и BD, тогда

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d});$$

4) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$,

тогда $2\overrightarrow{MN} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{a} - \vec{c}$;

5) из (1), (2) и (4) следует, что надо доказать соотношение:

$|\vec{b} - \vec{a}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{d} - \vec{c}|^2 + |\vec{a} - \vec{d}|^2$

$= |\vec{c} - \vec{a}|^2 + |\vec{d} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{a} + \vec{d} - \vec{c}|^2$, т. е.

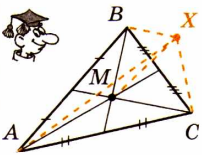
$|\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{d}|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2 + |\vec{d} - \vec{b}|^2 + 2(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{d} - \vec{c})$.

Если использовать то, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то легко убедиться в том, что последнее соотношение выполняется.

Больше всего математика полезна тем, что непосредственно способствует развитию четкости мышления и духа открытий.

И. Ф. Гербарт

Теорема Лейбница



$XA^2 + XB^2 + XC^2 = 3XM^2 + AM^2 + BM^2 + CM^2$

Пример 4. Теорема Лейбница. Квадраты расстояний от любой точки X плоскости треугольника ABC до вершин этого треугольника и его центроида M связаны соотношением:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = 3XM^2 + AM^2 + BM^2 + CM^2.$$

Доказательство

1) $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MC}$.

2) Возведем эти равенства в скалярный квадрат и сложим почленно:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = 3XM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{XM}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).$$

Учитывая, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (см. стр. 173), получаем искомое соотношение.

Замечание. Попробуйте (для сравнения) доказать эту теорему иным способом.

Задание 32

1. В окружности с центром O провели две перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. Выразите OM через $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$.

2. В треугольнике ABC: $ZA = 90°$, $AB = 6$, $AC = 8$, AM, BN - биссектрисы углов A и B. Найдите косинус угла между AM и BN.

3. $ABCD$ - прямоугольник, у которого $AB = CD = 2a$, $AD = BC = 5a$. Точка $K \in AD$, $AK = a$. Докажите, что $ZBKC = 90°$.

4. Медианы боковых сторон равнобедренного треугольника пересекаются под углом 60°. Найдите угол при вершине треугольника.

5. Даны параллелограмм $ABCD$ и точка M в его плоскости. Известно, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 0$. Докажите, что M - точка пересечения диагоналей параллелограмма.
6. В ромбе $ABCD$ длина стороны равна 6, а угол BAD равен 60°. На стороне BC отметили точку E так, что $EC = 2$. Найдите расстояние от точки E до центра симметрии ромба.
7. В треугольнике ABC дано: $AB = BC$; D - середина стороны AC; DK 1 BC; M - середина отрезка DK. Докажите, что ЛIC и BM взаимно перпендикулярны.
8. С помощью скалярного произведения векторов докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
9. Пусть H - ортоцентр треугольника ABC, O - центр описанной вокруг него окружности. Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
10. Пусть O - центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, а точка H такая, что выполняется равенство $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Докажите, что H - ортоцентр треугольника АВС.
11. В равносторонний треугольник вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин треугольника не зависит от выбора точки на окружности.
12. Вокруг равностороннего треугольника описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин треугольника не зависит от выбора точки на окружности.
13. В квадрат вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки на окружности.
14. Вокруг квадрата описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки на окружности.
15. В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD : CD =$ $= 1 : 2$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?
16. $ABCD$ - произвольный четырехугольник, KL и MN - отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, ф - угол между диагоналями. Докажите, что выполняется соотношение $(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + BC^2) = 2(KL^2 - MN^2) =$ $= 2AC\,BD \cos ф$.
17. Скорость течения реки $v_р$. Скорость пловца в стоящей воде - $v_п$. Пловец намеревается переплыть реку так, чтобы его меньше всего снесло течением. Как ему плыть?
18. $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ - правильный многоугольник. Точка M - точка вписанной в многоугольник окружности. Докажите, что $MA^2_1 + MA^2_2 + \ldots + MA^2_n$ не зависит от выбора точки на окружности.
19. $AJA.JA.J \ldots A_n$ - правильный многоугольник. Точка M - точка описанной вокруг многоугольника окружности. Докажите, что $MA^2_1 + MA^2_2 + \ldots + MA^2_n$ не зависит от выбора точки на окружности.
20. Докажите, что сумма квадратов всех сторон и всех диагоналей вписанного правильного д-угольника равна n^2R^2, где R - радиус окружности, описанной вокруг этого многоугольника.



Для любознательных

Решите задачу векторным методом.

В треугольнике АВС на сторонах АВ и BC отметили соответственно точки K и D так, что $AK : KB = 3 : 1$ и $BD : DC = 3 : 1$. Отрезки AD и CK пересекаются в точке O. Найдите отношение $KO : OC$ и $AO : OD$.

Задания для повторения главы IV

1°. Приведите примеры векторных и скалярных величин.

2*. Что математики называют вектором и чем их определение вектора отличается от понятия вектора в физике?

3. Какие векторы называют коллинеарными?

4°. Что такое модуль вектора?

5. Всегда ли истинно утверждение: «Если модули двух векторов равны, то эти векторы равны»? Приведите примеры.

6°. Чем отличаются противоположно направленные векторы? Приведите пример.

7°. Приведите пример: а) сонаправленных векторов; б) равных векторов.

8. Сформулируйте определение равенства векторов.

9*. Сформулируйте два определения равенства векторов. Являются ли они равносильными? Ответ обоснуйте.

10°. Приведите пример умножения одного и того же вектора на число: а) 2; б) -2. Будут ли равными модули этих векторов?

11°. Приведите примеры суммы двух коллинеарных: а) одинаково направленных векторов; б) противоположно направленных векторов.

12°. Приведите примеры разности двух коллинеарных: а) одинаково направленных векторов; б) противоположно направленных векторов.

13. Приведите примеры: а) суммы двух неколлинеарных векторов; б) разности двух неколлинеарных векторов.

14. Дан параллелограмм $KMHP$. Найдите: а) разность векторов $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{PH}$; б) сумму векторов $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{HP}$.

15. Дан четырехугольник $ABCD$. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

16. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{BK}$.

17. Дан параллелограмм $CMET$. Разложите вектор $\overrightarrow{CE}$ по векторам: а) $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CT}$; б) $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{TC}$; в) $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{CT}$.

18*. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Разложите по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ вектор: а) $\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{OC}$; в) $\overrightarrow{BD}$; г) $\overrightarrow{OB}$.

19. На рисунке 4.31 даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте вектор: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $\vec{a} + 0{,}5\vec{b}$; г) $\vec{b} - 0{,}5\vec{a}$; д) $0{,}5\vec{a} + 1/3\vec{b}$.

20*. На рисунке 4.32 даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите векторы: $\vec{c}$, $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$.

21°. Что можно сказать о координатах равных векторов?

22°. Запишите формулу для нахождения модуля вектора, если известны его координаты.

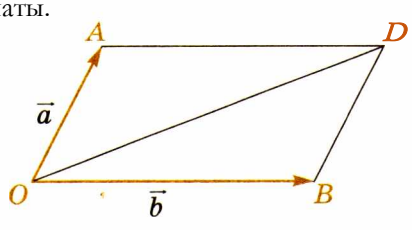


Рис. 4.31

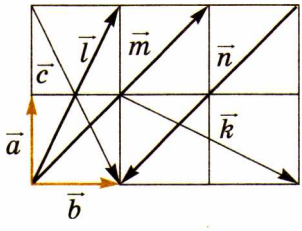


Рис. 4.32

23°. Как найти: а) произведение вектора на число, если известны его координаты; б) сумму, разность и скалярное произведение двух векторов, если известны их координаты?



Для любознательных

Решите задачу векторным методом.

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Докажите, что медианы AK и CM взаимно перпендикулярны.

24. Найдите координаты и модуль вектора $\overline{AB}$, запишите его через координатные векторы ё,, $ё_2$, если:
а) A(-7; 2), B(5; 7); в)A(0; 5), B(-3; 1);
б) A(4; 4), B(7;0); г)A(-2; 1), B(6; 3).

25. При каком значении я векторы $\vec{a}$ и $\vec{B}$ коллинеарны и как они при этом направлены, если: а) $\vec{a}$(n; 1) и $\vec{Б}$(3; 9); б) $\vec{a}$(п; 4) и $\vec{B}$(9; я)?

26. При каком значении (3 векторы $\vec{a}$(3; 4) и $\vec{Б}$(Р; -2):
а) коллинеарны; б) перпендикулярны; в) имеют одинаковые модули?

27*. Найдите значение x, при котором угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{Б}$ равен 60°, если 5(4; -3), $\vec{Б}$(1; x).

28*. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ - прямоугольник, если: а) A(1; 1), B(2; 3), C(0; 4), £>(-1; 2); б)A(-3; -1), B(-2; ~4), C(4; -2), 0(3; 1).

29. Найдите угол между векторами $\vec{a}$(1; -3) и $\vec{Б}$(2; 4).

30. Найдите косинус углаABC, если A(4; 2), B(3; -1), C(—1; 1).

31. Найдите косинусы углов треугольника с вершинами в точках:
а) A(1; 1),B(4; 1), C(4; 5); б) A(0;^), B(2;л/3), C $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

32. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{B}$ образуют угол 120°. Известно, что $|\vec{a}| = 4$ и $|\vec{B}| = 3$. Найдите:
а) $(\vec{a} + \vec{Б})^2$; б) $(3\vec{a} \mp 2\vec{£})(\vec{a} - \vec{B})$ в) $|4\vec{a}-3\vec{Б}|$.

33*. Докажите векторным методом, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

34**. Докажите векторным методом, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Готовимся к тематической аттестации № 6

Вариант I

1. Найдите координаты и модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, если A(0; 2), B(-1; 3).
2. Косинус угла, образованного векторами $\vec{a}$(x; 2) и $\vec{б}$(0; 1), равен 0,5. Найдите x.
3. Найдите координаты точки D, если A(-1;-1), B(4; 5), C(-2; 1)и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
4. Найдите $3\vec{a}$ - $2\vec{Б}$ и $\vec{a} + \vec{Б}$, если: а) $\vec{a}$(2; 4), $\vec{Б}$(6; 2); б) $\vec{a}$(-3; 1), $\vec{Б}$(3; -3).
5. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ - прямоугольник, если A(-5; -1), B(-3;-4),C(3;0), D(l; 3).

Вариант II

1. Найдите координаты и модуль вектора $\overrightarrow{CD}$, если C(-2; 0), D(l; 2).
2. Найдите косинус угла, образованного векторами $\vec{a}$(1; 2) и $\vec{Б}$(-1; 1).
3. Векторы $\vec{a}$(-3; 2) и $\vec{Б}$(6; x) коллинеарны. Найдите x.
4. Найдите $3\vec{a}$ - $2\vec{Б}$ и $\vec{a} + \vec{Б}$, если: а) $\vec{a}$(2; -3), B(4; 0); б) $\vec{a}$(4; 1), B(-2; 5).
5. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ - ромб, если A(3; 3), B(~2; 3), C(-5; -1), 0(0;-1).



Для любознательных

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая I пересекает прямые AB, AC и AD соответственно в точках B_1, C, и £>,. Докажите, если $\overrightarrow{AB_1} = f\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AX} = n\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC_1} = \tau\overrightarrow{AC}$, то $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{к} + \frac{1}{п}$.

2. Точка I - инцентр треугольника ABC, W_1, W_2, W_3 - точки пересечения продолжения его биссектрис с описанной вокруг этого треугольника окружностью (с центром в точке О). Докажите, что $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OW_1} + \overrightarrow{OW_2} + \overrightarrow{OW_3}$.



Глава V

ЭЛЕМЕНТЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

В этой главе вы познакомитесь со стереометрией - разделом геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве («стереос» в переводе с греческого - ***пространственный,*** а «метрио» - ***измеряю).*** Подробнее эту науку вы будете изучать в старших классах. Но уже сейчас вы узнаете о ее основах, о том, какими бывают многогранники и тела вращения, о некоторых их свойствах.

§ 28. Основы построения стереометрии

Предметом изучения стереометрии являются пространственные формы - ***трехмерные*** геометрические фигуры.

Как и планиметрия, стереометрия является математической наукой и изучает фигуры ***абстрактно,*** т. е. независимо от наполнения их конкретным смыслом. Но основа такого абстрагирования - реальный мир. Об этом свидетельствуют сами названия пространственных геометрических форм. Так, слово ***сфера*** происходит от греческого «мяч»; ***куб*** - от «игральная кость»; ***цилиндр*** - от «каток»; ***призма*** - от «распиленная»; ***конус*** - от «сосновая шишка», «кегля», «верхушка шлема»; ***пирамидой*** древние египтяне называли свои сооружения - гробницы фараонов.

Стереометрия, как и планиметрия, ***обобщает и абстрагирует практический опыт*** человека и на основе ***дедуктивного метода,*** т. е. цепочки логических переходов от условия к выводу, изучает свойства пространственных фигур.

Стереометрия изучает фигуры в пространстве абстрактно, на основе дедуктивного метода.

Логическая схема построения стереометрии такая же, как и планиметрии.

1. Принимаем основные понятия.
2. Принимаем аксиомы.
3. Другим геометрическим фигурам даем определения, опираясь на уже известные понятия.
4. Другие утверждения о свойствах геометрических фигур, кроме принятых аксиом, требуют доказательства.

Логическая схема построения стереометрии:
1) основные понятия;
2) аксиомы;
3) определения других геометрических фигур и доказательства других утверждений.

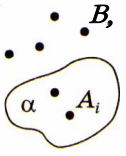
Основными фигурами в стереометрии, которые принимаются как понятие без определения, являются; точка, прямая, плоскость и пространство. Понятно, что на рисунках изображают только части плоскости и прямой. Плоскости обозначают греческими буквами: а, (3, 5, у, ф и др.

Аксиомы стереометрии, как и планиметрии, не являются свободным произведением математиков, а добыты человечеством в процессе многовекового опыта и отображают реальную действительность. Первая аксиома отражает то, что стереометрия основывается на планиметрии.

А—1. На плоскости выполняются все аксиомы и теоремы планиметрии.

Аксиома 1. В пространстве существуют плоскости. На каждой плоскости выполняются все аксиомы и теоремы планиметрии.

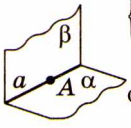
А-2.



Существуют;
$\{A\} \in a$
$\{B.\}\ I\ a$

Аксиома 2. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

А-3.



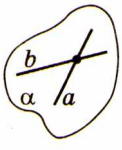
$\begin{cases} A \in \alpha \\ A \in \beta \end{cases}$
$\Downarrow$
$\alpha \cap \beta = a$
↑
прямая

Аксиома 3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются, и при этом по прямой.

Аксиома 4. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Все другие утверждения о свойствах пространственных фигур требуют доказательства. Рассмотрим пример доказательства теоремы в стереометрии.

А-4.



$a \cap b$
$\Downarrow$
$\{a; b\} \in \alpha$
↑
единственная

III Теорема. Через три точки, которые не лежат на одной прямой, можно провести плоскость.

Даны три точки А, ВиС(рис. 5.1). Докажем, что существует плоскость, в которой лежат эти точки.

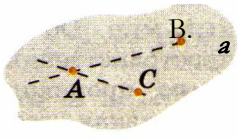


Рис. 5.1

Доказательство

1) Проведем прямые ***AB*** и ***AC.*** По условию точки А, В и С не лежат на одной прямой, тогда прямые ***AB*** и ***AC*** не совпадают.

2) По аксиоме через прямые АВ и АС можно провести плоскость.

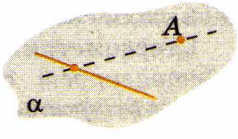


Рис. 5.2

Теорема доказана.

Напомним:
{ } - знак множества;
є - «принадлежит»;
Ч - «не принадлежит»;
П - «пересекает»;
=> — «тогда».

Аналогично доказывают такую теорему. **Через прямую и точку, не принадлежащую ей, можно провести плоскость** (рис. 5.2).

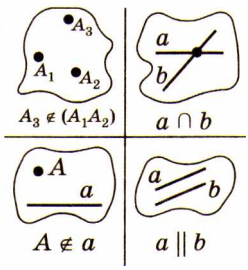
Плоскость можно провести (и к тому же только одну):

- через три точки, которые не лежат на одной прямой (теорема);
- через две пересекающиеся прямые (аксиома 4);
- через прямую и точку вне нее (теорема);
- через две параллельные прямые (из определения параллельных прямых).

Аналогично тому, как мы это делали в планиметрии, ***решение стереометрических задач осуществляют логическими шагами, опираясь на аксиомы и теоремы стереометрии и планиметрии, утверждения условия или факты, доказанные в процессе решения.***

Пример записи такого решения - доказательство теоремы, приведенное выше.

Плоскость можно провести, и к тому же только одну, через:



Практическая работа 39

1. На небольшом листе картона обозначьте две точки А и ***B.*** Проведите на картоне прямую АВ. В точках А и ***B*** вколите (вертикально) две иглы.
2. Попробуйте установить на столе полученную конструкцию так, чтобы она держалась только на иглах.
3. Вколите в картон еще одну иглу вне прямой ***AB.***
4. Выполните пункт 2. Что вы наблюдаете?
5. Переколите третью иглу так, чтобы она была на прямой ***AB.***
6. Выполните пункт 2. Сделайте вывод.

Задание 33

1°. Стол с четырьмя ножками, который стоит на ровном полу, иногда качается, а стол с тремя ножками всегда устойчив. Как объяснить этот факт?

2°. Какие из приведенных утверждений истинные: а) любые две точки пространства всегда лежат на одной прямой; б) любые три точки пространства всегда лежат на одной прямой; в) стороны прямого угла лежат в одной плоскости?

3. Почему в аксиоме 3 не сказано, что прямая, по которой пересекаются две плоскости, обязательно проходит через их общую точку?

4. Одинаковы ли по смыслу такие высказывания: «плоскости а и (3 пересекаются»; «плоскости аир имеют общую точку»?

5. Объясните, что означают такие высказывания: «можно провести плоскость»; «можно провести только одну плоскость».

6*.Какие из высказываний равносильны по смыслу: «существует точка»; «существует одна точка»; «существует не менее одной точки»; «существует не более одной точки»?

7. Сколько плоскостей можно провести через: а) данную точку пространства; б) две данные точки пространства; в) три данные точки пространства? Ответ обоснуйте.

8. В каком случае через прямую и точку можно провести более одной плоскости?

9. Три точки в пространстве расположены так, что через них провели 100 разных плоскостей. Что можно сказать об этих точках?

10. Почему дверь, которая крепится на двух петлях, надо фиксировать на замок?

11. Можно ли через две произвольные точки провести плоскость? Почему?

12*. Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, которая не лежит с ними в одной плоскости? Ответ обоснуйте.

§ 29о Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Перпендикуляр к плоскости

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

Две разные прямые на плоскости или пересекаются, или параллельны. В просторанстве возможны три случая взаимного расположения двух разных прямых.

1. ***Две прямые пересекаются*** - имеют одну общую точку (рис. 5.3).
2. ***Две прямые параллельны*** - не имеют общих точек и лежат в одной плоскости (рис. 5.4).
3. ***Две прямые*** не имеют общих точек, и через них нельзя провести плоскость (рис. 5.5). Их называют ***скрещивающимися*** и обозначают: ***а — Ъ.***

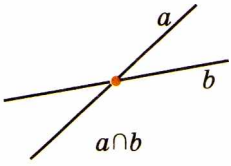


Рис. 5.3

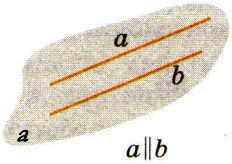


Рис. 5.4

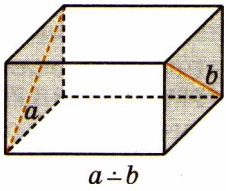
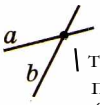


Рис. 5.5

Прямые ***а*** и ***Ъ:***

1) пересекаются



а (ЛЪ

точка пересечения (одна)

2)параллельны

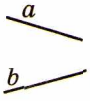


У ч ***а*** II ***Ъ***

[a ⫘ b

|{a; b} є a

3) скрещиваются



а ÷ Ъ

[а Я Ь

|{а; Ъ) ∉ а

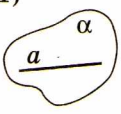
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

В пространстве возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости.

1. ***Прямая лежит в данной плоскости*** (рис. 5.6).
2. ***Прямая параллельна данной плоскости*** - прямая и плоскость не имеют общих точек (рис. 5.7).
3. ***Прямая пересекает плоскость*** - прямая и плоскость имеют одну общую точку (рис. 5.8).

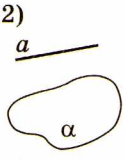
Прямая ***а*** и плоскость ***а:***

1)



а є а

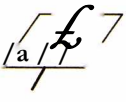
2)



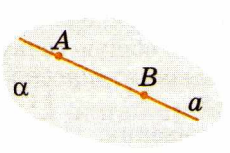
а || α

3)

а П а

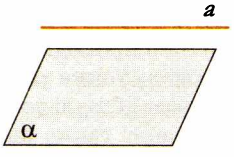


Напомним.
П - «пересекает»;
Я" - «не пересекает».



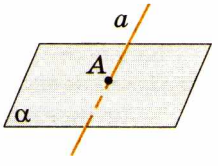
аеа

Рис. 5.6



а<∉ а айсс

Рис. 5.7



аЛа

Рис. 5.8

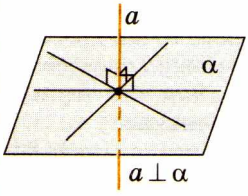


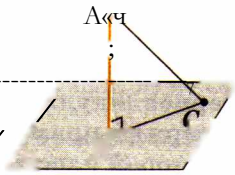
Рис. 5.9



Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой этой плоскости (рис. 5.9).

Перпендикуляром, проведенным из точки А на плоскость а (рис. 5.10), называется отрезок перпендику-

лярной к этой плоскости прямой ***АВ,*** где ***В*** - точка пересечения этой прямой с заданной плоскостью ,---------- ***(основание перпендикуляра).***



АВ1а

Отрезок, соединяющий точку ***А*** с / ***вГ*** / любой другой точкой ***С*** плоскости а ^' (кроме основания перпендикуляра В), называется ***наклонной,*** прове- Рис. 5.10 денной из данной точки ***А*** к плоскости ***а*** (рис. 5.10). При этом точка ***С*** называется ***основанием наклонной,*** а отрезок ***ВС - проекцией наклонной АС*** на плоскость а.

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки на данную плоскость (длина АВ).

Полезно еще знать признак перпендикулярности прямой и плоскости.

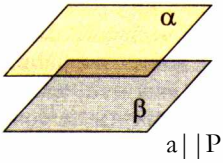
Признак. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Возможны два случая:

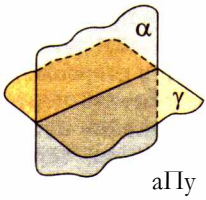
1. ***Плоскости параллельны*** - не имеют общих точек (рис. 5.11).
2. ***Плоскости пересекаются*** — по аксиоме они пересекаются по прямой (рис. 5.12).

Две плоскости называются перпендикулярными, если плоскость, перпендикулярная к линии пересечения данных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым (рис. 5.13).



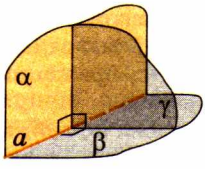
а| |Р

Рис. 5.11



аПу

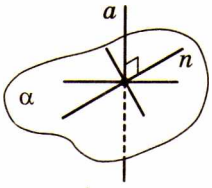
Рис. 5.12

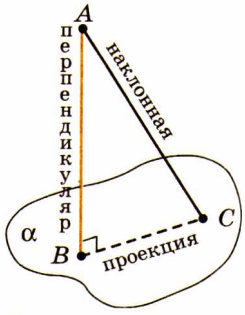


аїр

Рис. 5.13

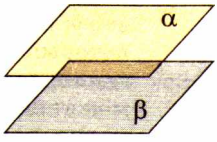
Определение ***а*** 1 а:
если ***а 1 п***
t
произвольная в а



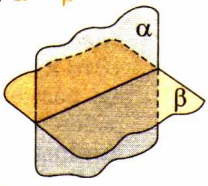


С – основание наклонной,
В - основание перпендикуляра,
АВ - расстояние от А до а

Плоскости аир:
1) а у р



2) α ∩ β



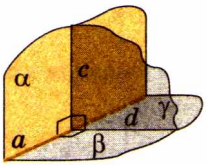


Для любознательных

1. Представим, что земной шар вдоль экватора плотно обвязали шнуром. Потом шнур удлинили на 1 м так, что он по всей своей длине равноудален от поверхности Земли. Может ли в образованное пространство под шнуром пролезть мышь?
2. А теперь, увеличив длину шнура, как и в предыдущей задаче, в каком-то месте экватора «оттянем» шнур на максимально возможное расстояние от поверхности Земли. Сможет ли теперь под шнуром пройти слон?

Замечание. Радиус земного шара приблизительно равен 6400 км.

Определение а _L (3:



если у *1 a* и *c Id* *(c = y* П а; *d = y* П Р)

Полезно знать еще и ***признак перпендикулярности двух плоскостей.***

Признак. Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную ко второй плоскости (рис. 5.14).

На рисунке прямая ***a*** принадлежит плоскости р и а 1 а. Тогда (3 _L а.

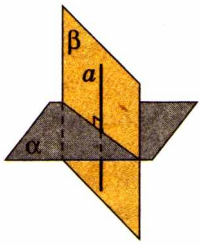


Рис. **5.14**

Практическая работа 40

1. Два угольника совместите по одному из их катетов так, чтобы сами угольники не совместились, и расположите конструкцию на листе бумаги (рис. **5.15).** Что можно сказать о прямой, которая содержит общую сторону этих угольников по отношению к листу бумаги?
2. Возьмите два листа картона и один угольник. Попробуйте с помощью угольника разместить один лист перпендикулярно ко второму. Удалось ли вам это сделать?
3. Возьмите два листа картона и два угольника. Попробуйте с помощью угольников разместить один лист перпендикулярно ко второму. Удалось ли вам это сделать? Как?
4. Укажите прямую, которая лежит в плоскости одного листа и перпендикулярна второму листу картона.
5. Сделайте вывод.

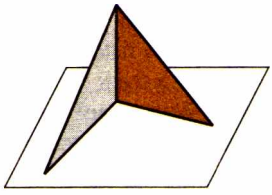


Рис. **5.15**



Для любознательных

ОБ ИЗОБРАЖЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Чертеж фигуры в планиметрии является или точной копией оригинала, или подобной ей фигурой. Совсем иначе изображают пространственные фигуры. К сожалению, не существует «пространственного» карандаша, который оставлял бы линии в пространстве. Нельзя на плоскость бумаги скопировать куб или фигуру, подобную ему, - плоское изображение не может быть точной копией пространственной фигуры. Возникает проблема: по каким правилам строить изображение пространственной фигуры, чтобы оно лучше всего воспроизводило оригинал?

Для построения изображений фигур в стереометрии используют ***метод параллельных проекций.*** Например, учитель чертит на доске и говорит: «Это куб». Но на доске не куб, а изображение куба. А где сам куб? Он как бы размещен где-то над головами учеников, через его вершины и точки ребер проходят параллельные между собой проектирующие прямые, которые при пересечении с плоскостью доски дают изображение куба.

В старших классах вы будете изучать ***параллельное проектирование,*** а сейчас мы лишь перечислим его ***свойства, по которым изображают пространственные фигуры.***

1. Изображение прямой — прямая или точка.

2. Параллельные прямые изображаются параллельными прямыми, или совпадающими прямыми, или точками (каждая — одной точкой).

3. Отношения, в котором точка делит отрезок в изображении и оригинале, равны. (Например, середина отрезка изображается серединой отрезка.)

Прямые, перпендикулярные заданной плоскости, стараются изображать вертикальными прямыми (см. рис. **5.14, 5.15).**

Задание 34

1°. Как надо понимать утверждение: «Прямые ***a*** и ***b*** не параллельны»?

2°. Что можно сказать о прямых ***a*** и ***b,*** если они: **а)** не скрещивающиеся; **б)** не пересекаются?

3°. Даны две прямые, но через них нельзя провести плоскость. Пересекаются ли эти прямые? Ответ обоснуйте.

4. Истинно ли утверждение: «Если прямые ***a*** и ***b*** лежат в разных плоскостях и не пересекаются, то они скрещивающиеся»?

5. Истинно ли утверждение: « Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и вторую»? Ответ проиллюстрируйте на модели.

6. Может ли прямая пересекать две стороны треугольника и не лежать в плоскости этого треугольника?

7*. Докажите: прямые (в пространстве) не могут пересекаться более чем в одной точке.

8. Сколько прямых, параллельных данной плоскости, можно провести через заданную точку вне этой плоскости? Ответ проиллюстрируйте на модели (из карандаша и листочков бумаги).

9. Может ли быть, что десять прямых плоскости а параллельны плоскости р, но плоскости а и р не параллельны? Ответ проиллюстрируйте на модели.

10*. Истинны ли в стереометрии такие утверждения: **а)** через точку, которая лежит на данной прямой, можно провести только одну прямую, перпендикулярную к заданной прямой; б) прямые, перпендикулярные к заданной прямой, параллельны между собой; **в)** если две пересекающиеся прямые не параллельны двум данным перпендикулярным прямым, то они не перпендикулярны между собой?

11°. Найдите среди окружающих предметов модели прямых и плоскостей, которые перпендикулярны между собой.

12. Чтобы разрез деревянного бруска был перпендикулярен этому бруску, через точку А его ребра проводят перпендикулярные к ребрам прямые АВ и АС (рис. 5.16). Потом брусок распиливают по этим прямым. Объясните эти действия.

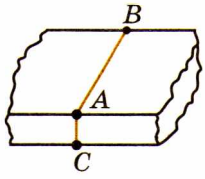


Рис. 5.16

13*. Докажите, что если прямая не лежит в плоскости, то она не может иметь с этой плоскостью двух или больше общих точек.

14*. На рисунке 5.17 точки А, В, ***C*** лежат в плоскости а, МА ***1*** а, ***MB = MC.*** Докажите, что АС = АВ.

15*. Существует ли прямая, состоящая из двух полупрямых, одна из которых лежит в плоскости а, а вторая - в плоскости р? Ответ проиллюстрируйте.

16*. Каждая из плоскостей аир проходит через точки А, ***B,*** и С. Можно ли сделать вывод, что а и р - одна и та же плоскость? Почему?

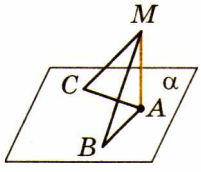


Рис. 5.17

17*. Истинно ли утверждение: «Две плоскости, параллельные одной и той же прямой, параллельны между собой»?

18. Может ли прямая пересекать одну из параллельных плоскостей, но не пересекать вторую плоскость? Ответ проиллюстрируйте моделью из двух листов бумаги и карандаша.

19°. Покажите в окружении два прямых угла с общей стороной, но которые не являются смежными углами.

20. Найдите в окружении: **а)** две параллельные плоскости; б) две перпендикулярные плоскости и покажите линию их сечения.

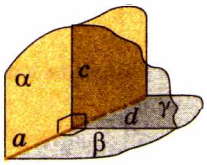
21. Правильным ли является утверждение: «Если плоскость перпендикулярна данной плоскости, то она перпендикулярна и любой прямой этой плоскости»? Ответ проиллюстрируйте моделью (из двух листов бумаги).

22. На двух перпендикулярных плоскостях выбрали по прямой. Могут ли эти прямые быть скрещивающимися? Ответ проиллюстрируйте примером из окружения.

23*. Как практически установить, перпендикулярны ли плоскости стены и пола?

24*. Используя признак перпендикулярности двух плоскостей, докажите, что плоскость дверцы шкафа перпендикулярна плоскости пола.

Определение а ± Р:



если у ***1 a*** и ***c 1 d*** (***c*** = у П а; ***d*** = у П Р)

Полезно знать еще и ***признак перпендикулярности двух плоскостей.***

Признак. Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них содержит прямую, перпендикулярную ко второй плоскости (рис. 5.14).

На рисунке прямая ***а*** принадлежит плоскости р и а і а . Тогда (З Х а.

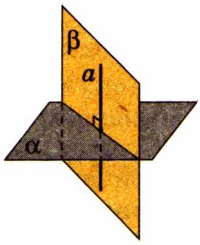


Рис. 5.14

Практическая работа 40

1. Два угольника совместите по одному из их катетов так, чтобы сами угольники не совместились, и расположите конструкцию на листе бумаги (рис. **5.15).** Что можно сказать о прямой, которая содержит общую сторону этих угольников по отношению к листу бумаги?
2. Возьмите два листа картона и один угольник. Попробуйте с помощью угольника разместить один лист перпендикулярно ко второму. Удалось ли вам это сделать?
3. Возьмите два листа картона и два угольника. Попробуйте с помощью угольников разместить один лист перпендикулярно ко второму. Удалось ли вам это сделать? Как?
4. Укажите прямую, которая лежит в плоскости одного листа и перпендикулярна второму листу картона.
5. Сделайте вывод.

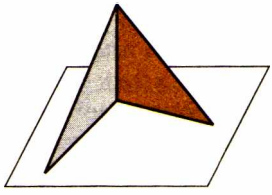


Рис. 5.15



Для любознательных

ОБ ИЗОБРАЖЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Чертеж фигуры в планиметрии является или точной копией оригинала, или подобной ей фигурой. Совсем иначе изображают пространственные фигуры. К сожалению, не существует «пространственного» карандаша, который оставлял бы линии в пространстве. Нельзя на плоскость бумаги скопировать куб или фигуру, подобную ему, - плоское изображение не может быть точной копией пространственной фигуры. Возникает проблема: по каким правилам строить изображение пространственной фигуры, чтобы оно лучше всего воспроизводило оригинал?

Для построения изображений фигур в стереометрии используют ***метод параллельных проекций.*** Например, учитель чертит на доске и говорит: «Это куб». Но на доске не куб, а изображение куба. А где сам куб? Он как бы размещен где-то над головами учеников, через его вершины и точки ребер проходят параллельные между собой проектирующие прямые, которые при пересечении с плоскостью доски дают изображение куба.

В старших классах вы будете изучать ***параллельное проектирование***, а сейчас мы лишь перечислим его ***свойства, по которым изображают пространственные фигуры.***

1. Изображение прямой - прямая или точка.

2. Параллельные прямые изображаются параллельными прямыми, или совпадающими прямыми, или точками (каждая — одной точкой).

3. Отношения, в котором точка делит отрезок в изображении и оригинале, равны. (Например, середина отрезка изображается серединой отрезка.)

Прямые, перпендикулярные заданной плоскости, стараются изображать вертикальными прямыми (см. рис. **5.14, 5.15).**

Задание 34

1°. Как надо понимать утверждение: «Прямые а и & не параллельны»?

2°. Что можно сказать о прямых ***а*** и ***Ь,*** если они: **а)** не скрещивающиеся; б) не пересекаются?

3°. Даны две прямые, но через них нельзя провести плоскость. Пересекаются ли эти прямые? Ответ обоснуйте.

4. Истинно ли утверждение: «Если прямые ***аиЬ*** лежат в разных плоскостях и не пересекаются, то они скрещивающиеся»?

5. Истинно ли утверждение: « Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и вторую»? Ответ проиллюстрируйте на модели.

6. Может ли прямая пересекать две стороны треугольника и не лежать в плоскости этого треугольника?

7*. Докажите: прямые (в пространстве) не могут пересекаться более чем в одной точке.

8. Сколько прямых, параллельных данной плоскости, можно провести через заданную точку вне этой плоскости? Ответ проиллюстрируйте на модели (из карандаша и листочков бумаги).

9. Может ли быть, что десять прямых плоскости ***а*** параллельны плоскости р, но плоскости а и р не параллельны? Ответ проиллюстрируйте на модели.

10*. Истинны ли в стереометрии такие утверждения: **а)** через точку, которая лежит на данной прямой, можно провести только одну прямую, перпендикулярную к заданной прямой; б) прямые, перпендикулярные к заданной прямой, параллельны между собой; **в)** если две пересекающиеся прямые не параллельны двум данным перпендикулярным прямым, то они не перпендикулярны между собой?

11°. Найдите среди окружающих предметов модели прямых и плоскостей, которые перпендикулярны между собой.

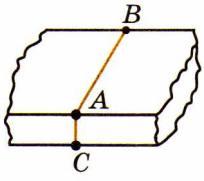


Рис. 5.16

12. Чтобы разрез деревянного бруска был перпендикулярен этому бруску, через точку А его ребра проводят перпендикулярные к ребрам прямые АВ и ***АС*** (рис. 5.16). Потом брусок распиливают по этим прямым. Объясните эти действия.

13*. Докажите, что если прямая не лежит в плоскости, то она не может иметь с этой плоскостью двух или больше общих точек.

14*. На рисунке 5.17 точки А, В, ***С*** лежат в плоскости а, МА J_ а, ***МВ = МС.*** Докажите, что ***АС =АВ.***

15*. Существует ли прямая, состоящая из двух полупрямых, одна из которых лежит в плоскости а, а вторая - в плоскости р? Ответ проиллюстрируйте.

16*. Каждая из плоскостей аир проходит через точки А, ***В,*** и ***С.*** Можно ли сделать вывод, что а и р - одна и та же плоскость? Почему?

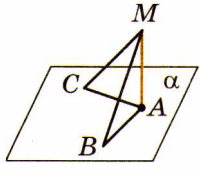


Рис 5.17

17*. Истинно ли утверждение: «Две плоскости, параллельные одной и той же прямой, параллельны между собой»?

18. Может ли прямая пересекать одну из параллельных плоскостей, но не пересекать вторую плоскость? Ответ проиллюстрируйте моделью из двух листов бумаги и карандаша.

19°. Покажите в окружении два прямых угла с общей стороной, но которые не являются смежными углами.

20. Найдите в окружении: **а)** две параллельные плоскости; б) две перпендикулярные плоскости и покажите линию их сечения.

21. Правильным ли является утверждение: «Если плоскость перпендикулярна данной плоскости, то она перпендикулярна и любой прямой этой плоскости»? Ответ проиллюстрируйте моделью (из двух листов бумаги).

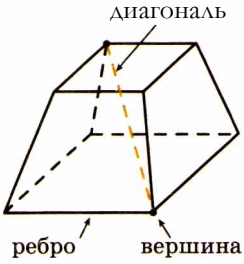
22. На двух перпендикулярных плоскостях выбрали по прямой. Могут ли эти прямые быть скрещивающимися? Ответ проиллюстрируйте примером из окружения.

23*. Как практически установить, перпендикулярны ли плоскости стены и пола?

24*. Используя признак перпендикулярности двух плоскостей, докажите, что плоскость дверцы шкафа перпендикулярна плоскости пола.

§ 30 Многогранники. Правильные многогранники

Еще в 5-6-х классах вы изучали куб, прямоугольный параллелепипед, пирамиду. Все эти фигуры - многогранники. В окружающем мире можно увидеть немало ***многогранников.*** Такую геометрическую фигуру можно определить как внутреннюю часть пространства, которая ограничена многоугольниками - ***гранями*** многогранника. Стороны каждой грани - ***ребра многогранника,*** а вершины - ***вершины многогранника.***



Диагоналями многогранника называются отрезки, которые соединяют вершины многогранника и не принадлежат его граням. Указанные элементы многогранника представлены на рисунке 5.18.

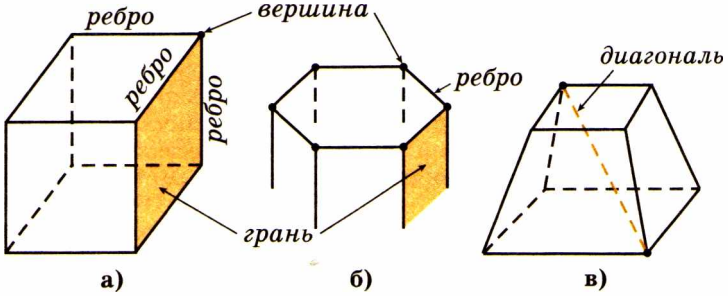


Рис. 5.18

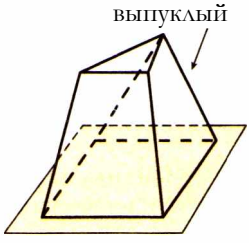
Поверхность многогранника состоит из плоских многоугольников - его граней.

Плоские углы многогранника - углы многоугольников-граней.

Угол, образованный двумя ребрами одной грани многогранника, называется его ***плоским углом.*** **Плоские углы многогранника — это внутренние углы многоугольников его граней.**

Поверхность многогранника состоит из плоских многоугольников. Понятно, что **площадью поверхности любого многогранника будет сумма площадей всех его граней.**

Многогранники бывают выпуклыми (рис. 5.19) и невыпуклыми (рис. 5.20). ***Выпуклым*** называется многогранник, который полностью лежит по одну сторону от плоскости любой из его граней (рис. 5.19).



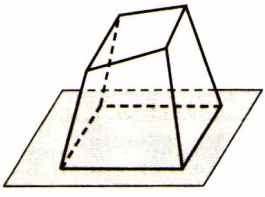


Рис. 5.19

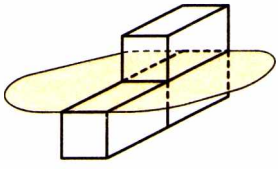


Рис. 5.20

Говорят, что ***выпуклый многогранник правильный, если все его грани - равные между собой правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одинаковое число ребер.***

Существует лишь пять правильных многогранников: четырехгранник, шестигранник (куб), восьмигранник, двенадцатигранник и двадцатигранник.

Правильный четырехгранник (рис. 5.21) ограничивают четыре правильные треугольника. Его еще называют ***правильным тетраэдром.*** Он имеет 4 вершины и 6 ребер. На рисунке 5.22 изображен правильный тетраэдр, развернутый в плоскость одной из своих граней. Такое изображение многогранника называют его ***разверткой.***

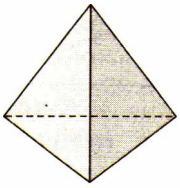


Рис. 5.21

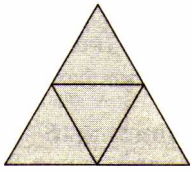


Рис. 5.22

Правильный шестигранник (***гексаэдр***) имеет 6 граней-квадратов, 8 вершин и 12 ребер (рис. 5.23). Его еще называют ***кубом.*** На рисунке 5.24 - развертка куба.

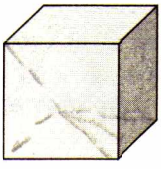


Рис. 5.23

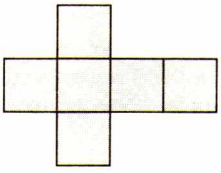


Рис. 5.24



Поверхность правильного восьмигранника (или ***октаэдра),*** как и правильного тетраэдра, образуют правильные треугольники, но в отличие от последнего у восьмигранника их не четыре, а восемь (рис. 5.25). Он имеет 6 вершин и 12 ребер. Его развертка изображена на рисунке 5.26.

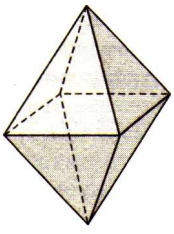


Рис. 5.25

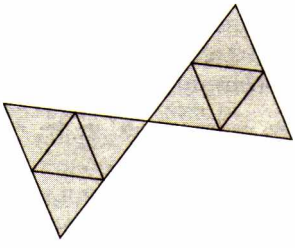


Рис. 5.26

ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОГРАННИК

- всегда выпуклый;
- все грани равные правильные многоугольники;
- в каждой вершине сходится одинаковое число ребер;
- существует пять видов.

ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

грани - правильные треугольники:

- граней - 4;
- вершин - 4;
- ребер - 6;
- в каждой вершине сходится ребер - 3.

КУБ

грани - квадраты:

- граней - 6;
- вершин - 8;
- ребер - 12;
- в каждой вершине сходится ребер - 3.



Для любознательных

Греческое слово «кибос» буквально означает «игральный кубик», а тело одинаковой с ним формы было названо ***кубом.*** Этот термин встречается у Евклида.

Правильный двенадцатигранник (или ***додекаэдр)*** имеет 12 граней (рис. 5.27). Каждая из них представляет собой правильный пятиугольник. У додекаэдра 20 вершин и 30 ребер. На рисунке 5.28 изображена его развертка.

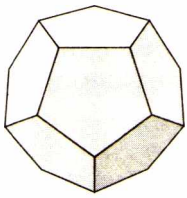


Рис. 5.27

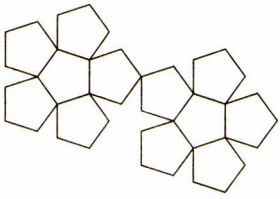


Рис. 5.28

Правильный двадцатигранник (или ***икосаэдр)*** ограничивают 20 равносторонних треугольников, которые сходятся в 12 вершинах (рис. 5.29). Он имеет 30 ребер. Его развертка изображена на рисунке 5.30.



Рис. 5.29

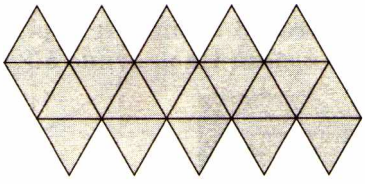


Рис. 5.30

Интересно, что вершины каждого из пяти видов правильных многогранников, в том числе и икосаэдра, лежат на поверхности шара.

Двенадцать вершин икосаэдра - это максимальное число точек, которые можно нанести на поверхность шара так, чтобы расстояния между любыми двумя соседними точками были одинаковыми.

Это свойство икосаэдра использовала одна из американских фирм для изготовления баскетбольных мячей. На поверхности сферической камеры-основания определяют 12 точек, равномерно распределенных по каркасу (вершины икосаэдра). Машина наматывает

ОКТАЭДР

грани - правильные треугольники:

- граней - 8;
- вершин - 6;
- ребер - 12;
- в каждой вершине сходится ребер — 4

ДОДЕКАЭДР

грани - правильные пятиугольники:

- граней - 12;
- вершин - 20;
- ребер - 30;
- в каждой вершине сходится ребер - 3.

ИКОСАЭДР

грани - правильные треугольники:

- граней - 20;
- вершин - 12;
- ребер - 30;
- в каждой вершине сходится ребер - 5.

Для любознательных,

Издавна известны пять правильных многогранников (так называемых Платоновых тел): тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Тетраэдр в переводе с греческого означает четырехугольник («тетра» - ***четыре,*** «эдра» - ***сторона, грань).***

Гексаэдр означает шестигранник и происходит от греческого «гекса» - ***шесть.***

Название ***октаэдр*** происходит от греческого «окто» - ***восемь.***

Додекаэдр означает двенадцатигранник (от греческого «додэка» - ***двенадцать).***

Название ***икосаэдра*** происходит от греческого «эйкоси» - ***двадцать.***

нейлоновые нити по кругам, которые содержат каждую пару указанных точек.

Площадь поверхности правильного многогранника (площадь его развертки) равна площади правильного многоугольника его грани, взятой столько раз, сколько граней имеет соответствующий правильный многогранник.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА



Издавна известны пять правильных многогранников. Число вершин, ребер и граней для этих многогранников приведено в таблице:

Название многогранника	Число вершин	Число ребер	Число граней
Тетраэдр	4	6	4
Куб	8	12	6
Октаэдр	6	12	8
Додекаэдр	20	30	12
Икосаэдр	12	30	20

Рассматривая эту таблицу, легко увидеть, что для каждого из этих многогранников **сумма числа вершин** В и **числа граней Г на 2 больше числа его ребер Р:**

В + Г - Р = 2.

Для любого правильного многогранника выполняется ***теорема Эйлера:*** число его граней плюс число его вершин равно числу его ребер плюс два:

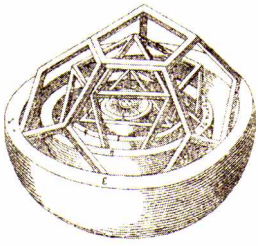
В + Г = Р + 2.



Для любознательных

В древние времена геометрическим фигурам, особенно правильным, придавали таинственное философское значение. Так, согласно Платону, все в природе создано взаимодействием огня, воздуха, воды и земли, а основные простейшие элементы этих стихий имеют соответственно формы: тетраэдра, октаэдра, икосаэдра и куба. Что касается додекаэдра, то Платон считал, что именно такую форму имеет Вселенная - Божественный эфир.

В XVI в. знаменитый немецкий астроном ***Иоганн Кеплер*** (1571-1630) предлагал модель построения Вселенной, которая состояла из правильных многогранников и вписанных в них сфер, - так называемый «кубок Кеплера» (см. рис.).



Согласно Кеплеру, внешняя большая сфера соответствует орбите наиболее удаленной из известных к тому времени планет - Сатурна. Если в эту сферу вписать куб, а в куб снова сферу - то это будет сфера орбиты Юпитера. В сферу Юпитера Кеплер вписывает правильный тетраэдр, а вписанная в него сфера соответствует орбите Марса. В сферу Марса вписывается додекаэдр и снова сфера - сфера орбиты Земли. Дальше вписывается икосаэдр и сфера Венеры, а после того - октаэдр и сфера орбиты Меркурия.

Позднее именно Кеплер открыл, что траектории движения планет вокруг Солнца - не круги, а эллипсы, и «кубок Кеплера», а вместе с ним и правильные многогранники потеряли ореол таинственности.

Это соотношение выполняется не только для правильных многогранников, а и для других многогранников, например призм, пирамид и т. д.

Эйлер первый заметил и доказал это замечательное свойство многогранников. Поэтому его называют ***теоремой Эйлера для многогранников.***

Практическая работа 41

1. Склейте модели выпуклого и невыпуклого многогранников.
2. Посчитайте число: вершин, ребер, плоских углов ваших многогранников.
3. Сравните число ребер и число плоских углов. Сделайте вывод.

4*. Сравните число ребер с суммой числа вершин и числа граней. Сделайте вывод.

Задание 35

1°. Найдите вокруг вас примеры объектов, которые имеют форму многогранников. Укажите число их граней, ребер, вершин.

2*. К а к о й правильный многогранник имеет:
а) 8 вершин; **е)** 12 ребер;
б) 8 граней; **ж)** 12 граней;
в) 20 вершин; з) 30 ребер;
г) 20 граней; **и)** 6 ребер;
д) 12 вершин; **й)** наибольшее число ребер?

3. Приведите примеры (из окружения) выпуклых и невыпуклых многогранников.

4*. Многогранник имеет 12 ребер. Сколько он имеет плоских углов?

5*. На рисунке 5.31 изображены развертки многогранников. Определите, сколько в них вершин, ребер, граней.

6*. Какое наименьшее число ребер может сходиться в одной вершине многогранника?

7*. Какое наименьшее число ребер может иметь многогранник?

8. Определите для куба число: **а)** его диагоналей; б) диагоналей его граней; **в)** плоских углов.

9*. Какое наименьшее число плоских углов может иметь многогранник?

10**. Нарисуйте многогранник, у которого: **а)** 6 вершин и 5 граней; б) число вершин равно числу граней.

XI**. Нарисуйте многогранник, у которого все грани - квадраты, но он не является кубом.

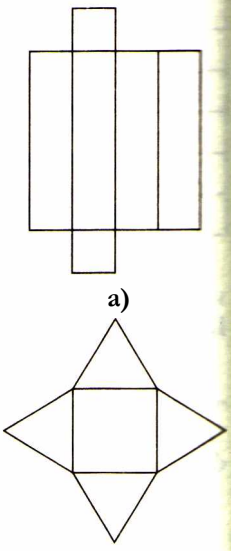


Рис. 5.31

12. Диагональ грани куба равна 4 см. Найдите полную поверхность куба.

13*. Длина ребра одного куба втрое больше длины ребра второго куба. Во сколько раз площадь полной поверхности первого куба больше площади полной поверхности второго куба?

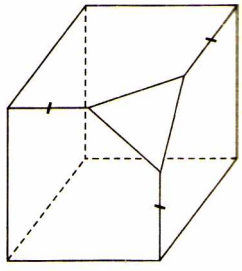
14*. Диагональ куба равна 9 см. Найдите ребро этого куба.

15*. Как определить площадь полной поверхности куба, зная длину его диагонали?

16*. Два одинаковых правильных тетраэдра склеили по одной из граней. Будет ли образованная фигура правильным многогранником? Почему?

17**. Плоскость, которая проходит через середины трех ребер куба, отсекает от него часть так, как показано на рисунке 5.32. Сделайте от руки эскиз развертки образованной фигуры.

18*. Площадь поверхности правильного додекаэдра равна 180 см^2. Найдите площадь одной грани.


Рис. 5.32

§ 31. Призмы. Объем пространственной фигуры

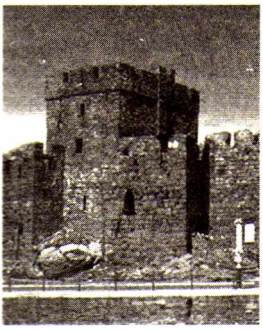


Рис 5 33

Среди многогранников выделяют два вида: ***призмы*** и ***пирамиды.***

Замки средневековой Европы имеют форму ***призмы*** (рис. 5.33) - их ***боковые грани являются параллелограммами.***

Призма имеет две грани - ***основания,*** которые могут быть любыми многоугольниками, но равными между собой и расположены ***в параллельных плоскостях*** (рис. 5.34).

Диагональю призмы называется отрезок, который соединяет две вершины призмы, не принадлежащие одной грани.

В зависимости от того, какой многоугольник лежит в основании, призма может быть:

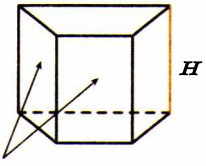
- треугольная (рис. 5.35);
- четырехугольная (рис. 5.36);
- пятиугольная (рис. 5.34) и т. д.

ПРИЗМА

высота - расстояние между основаниями



ПРЯМАЯ ПРИЗМА



V ***n-угольной призмой называется многогранник, две грани которого (основания) равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а все остальные грани (боковые) - параллелограммы.***

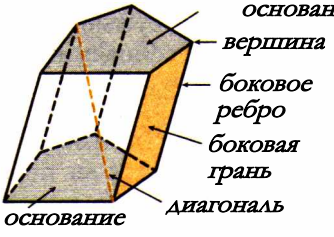


Рис. 5.34

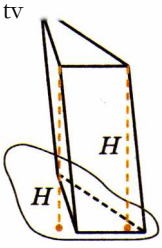


Рис. 5.35

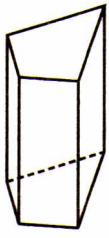
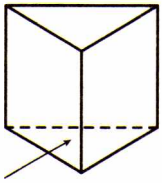


Рис. 5.36

ПРАВИЛЬНАЯ ПРИЗМА

прямая призма



основания - правильные многоугольники

Высотой призмы называется расстояние между ее основаниями, перпендикуляр из любой точки одного основания на плоскость другого ее основания ***(H*** на рис. 5.35).

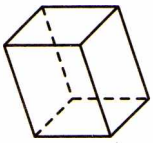
Призма называется ***прямой,*** если все ее боковые грани — прямоугольники. Боковые ребра такой призмы Нер-s' пендикулярны плоскостям ее оснований (рис. 5.36).

Высота прямой призмы равна длине ее бокового ребра.

Прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник, называется ***правильной.***

Параллелепипед - это призма, шесть граней которой параллелограммы. Его противоположные грани - параллельны, поэтому любую пару из них можно рассматривать как основания.

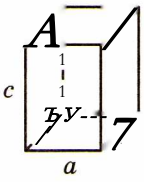
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД
призма



все грани - параллелограммы

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД
призма

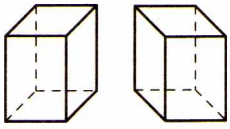
все грани - прямоугольники



a, Ь, с - измерения

ОБЪЕМ

1) F > 0;



$F_1 = F$

2) $F_1 = F_2$

И

3) $F = F_1 + ... + F_n$

U

$V = V_1 + ... + V_n$;

4) куб

1ед.
1ед.
1ед.

V = 1 ед.^{3}

Прямоугольный параллелепипед - это параллелепипед, образованный из шести прямоугольников (рис. 5.37).

Если одну из граней прямоугольного параллелепипеда принять за основание, то противоположная ей грань также будет основанием, а все остальные грани — боковыми гранями. Длина ребра боковой грани, которая не принадлежит основаниям, является ***высотой*** прямоугольного параллелепипеда - она перпендикулярна плоскости основания.

Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, которые выходят из общей вершины, называют его ***измерениями.***



Рис. 5.37

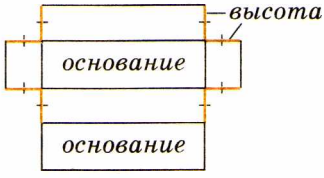


Рис. 5.38

Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда S равна сумме площадей шести прямоугольников (рис. 5.38). ***Площадь боковой поверхности*** $S_б$ будет суммой площадей четырех прямоугольников боковых граней. Она равна произведению периметра основания на высоту:

$$S_б = PH = 2(a + Ь)H,$$

где a и b - длины сторон основания.

Площадь полной поверхности равна сумме площади боковой поверхности и площадей обоих оснований:

$$S = S_б + 2S_о = 2(a + Ь)H + 2aЬ.$$

Аналогичными рассуждениями нетрудно доказать, что формулы

$$S_б = PH, S = S_б + 2S_о$$

можно применять для вычисления площади поверхности любой прямой призмы.

Подобно тому, как мы вводили понятие площади для ограниченной со всех сторон плоской фигуры, в стереометрии вводится понятие объема для пространственной фигуры.

Объем - это число, которое ставится в соответствие ограниченной со всех сторон пространственной фигуре и которое имеет следующие свойства:

1) ***объем фигуры является числом неотрицательным;***

2) ***объемы равных фигур равны;***

3) ***если фигура разделена на части, которые не перекрываются, то объем фигуры равен сумме объемов этих частей;***

4) ***за единицу объема принимают объем куба со стороной, равной единице длины.***

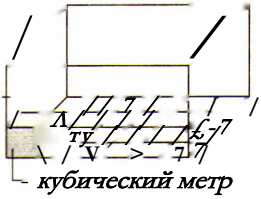


Рис. 5.39

Например, объем куба со стороной 1 м равен одному кубическому метру (1 м^3); объем куба со стороной 1 фут равен 1 фут^3.

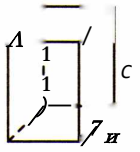
Пусть длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны 6 м, 4 м и 3 м (рис. 5.39). На основании этого параллелепипеда можно разместить 24 кубика с длиной стороны 1 м. Объем этого ряда кубиков составляет 24 м^3. Поскольку внутри данной фигуры вмещается три ряда по 24 кубика в каждом, то ее объем равен $24 \cdot 3 = 72$ (м^3).

То есть объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту:

$$V = S_{осн} \cdot H.$$

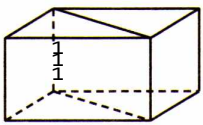
Можно доказать, что объем любого прямоугольного параллелепипеда вычисляется по приведенной выше формуле (аналогично тому, как мы доказывали формулу для вычисления площади прямоугольника в 8-м классе). Строгое доказательство этого факта вы будете изучать в старших классах.

Прямоугольный параллелепипед



$V = a \cdot b \cdot c$

Если a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда, то его объем равен $V = a \cdot b \cdot c$.



Прямая призма

$V = S_{осн} \cdot H$

площадь основания

Рис. 5.40

Если провести плоскость через параллельные диагонали оснований прямоугольного параллелепипеда (рис. 5.40), то получим две равные треугольные прямые призмы, в основаниях которых лежат прямоугольные треугольники. Понятно, что объем каждой из этих прямых призм равен половине объема исходного параллелепипеда, т. е. равен произведению площади треугольника основания на высоту призмы.

Любую прямую призму можно разделить на прямые призмы, основания которых - прямоугольные треугольники. Высоты образованных призм будут равны (рис. 5.41).

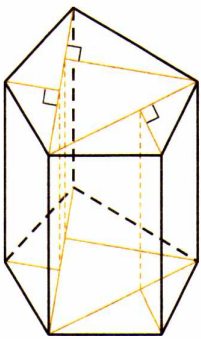
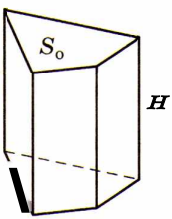


Рис. 5.41



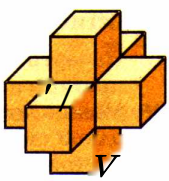


Для любознательных

Если на гранях куба достроить кубы, получим так называемый «гиперкуб».

Именно такую фигуру использовал *Сальвадор Дали* в картине «Гала перед распятием на гиперкубе».

Является ли гиперкуб правильным многогранником?

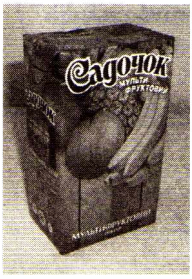


Объем прямой призмы будет равен сумме объемов таких треугольных призм, отсюда:

$$V = S_{\text{осн}} H,$$

где $S_{\text{осн}}$ и H - площадь основания и высота прямой призмы.

Приведем примеры применения полученных в этом параграфе формул.



Пример 1. Ребра упаковки сока «Садочок» равны 6 см, 9 см и 20 см. Найдите общую площадь материала, использованного для ее изготовления. Какой объем такой упаковки?

Решение

1) Периметр основания равен 6·2 + 9·2 = 30 (см), а высота равна 20 см. Тогда площадь боковой поверхности $S_б = 30 \cdot 20 = 600$ (см^2).

Площадь основания равна $6 \cdot 9 = 54$ (см^2). Тогда площадь полной поверхности упаковки $S = 54 \cdot 2 + 600 = 708$ (см^2).

2) Площадь основания равна 54 (см^2), а высота - 20 см. Тогда объем $V = 54 \cdot 20 = 1080$ (см^3), т. е. не намного больше чем 1 л.

Ответ: 600 см^2 и 1080 см^3.

Пример 2. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, площади трех граней которого равны: 42 см^2, 56 см^2, 48 см^2.

Решение

1) В прямоугольном параллелепипеде противоположные грани - равные прямоугольники. Т. е. заданы площади трех граней, которые имеют общую вершину (рис. 5.42). Обозначим измерения данного параллелепипеда как x, y, z.

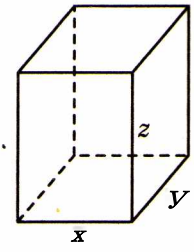


Рис. 5.42

Искомый объем равен $V = xyz$.

2) По условию:

$$\begin{cases} xy = 42 = 6 \cdot 7, \\ yz = 56 = 7 \cdot 8, \\ xz = 48 = 6 \cdot 8. \end{cases}$$

Отсюда: $(xy) \cdot (yz) \cdot (xz) = x^2y^2z^2 = 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2$ и $V = xyz = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$ (см^3).

Ответ: 336 см^3.

Измеряй все, что поддается измерению, и сделай измеряемым все, что не поддается измерению.

Галилео Галилей

Практическая работа 42

1. Начертите развертку прямого параллелепипеда и сделайте из нее модель прямого параллелепипеда.

2*. Можно ли изготовить такую модель параллелепипеда, чтобы, рассматривая ее с одной стороны, можно было утверждать, что этот параллелепипед прямой, а с другой, что он наклонный?

Задание 36

1°. Назовите любые предметы, которые имеют форму параллелепипеда.

2°. Ученик считает, что термины «правильная четырехугольная призма» и «прямоугольный параллелепипед» означают одну и ту же фигуру. Прав ли он?

3°. Можно ли считать правильным определение: «Кубом называется правильная четырехугольная призма, у которой высота равна стороне основания»?

4. Могут ли все грани призмы быть треугольниками? А трапециями?

5. Существует ли призма, у которой нет ни одной диагонали?

6*. Призма имеет 18 граней. Какой многоугольник лежит в ее основании?

7. Какие утверждения о призме надо сформулировать, чтобы они были условием того, что она правильная?

8. Что можно сказать о призме, все боковые грани которой квадраты?

9. Истинно ли утверждение: «В каждой призме число ребер всегда кратно 3»?

10*. Можно ли утверждать, что в прямой призме боковое ребро перпендикулярно каждой из диагоналей основания? Ответ обоснуйте.

11**. Может ли параллелограмм быть разверткой боковой поверхности наклонной призмы?

12. Какие дополнительные признаки отличают: а) правильную призму от прямой; б) куб от прямоугольного параллелепипеда?

13*. Суммы площадей противоположных боковых граней прямой четырехугольной призмы равны между собой. Какое свойство должен иметь многоугольник основания?

14°. Найдите площадь поверхности прямой четырехугольной призмы, боковое ребро которой равно 5 см, а стороны основания - 2 см, 3 см, 2,5 см, 4,5 см.

15. Найдите площадь поверхности и объем прямой призмы, высота которой 10 см, а основание - ромб со стороной 5 см и острым углом 30°.

16°. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 10 дм, а высота - 8 дм. Найдите площадь поверхности призмы и ее объем.

17. Можно ли из прямоугольного листа картона размером 52 x 22 см изготовить правильную четырехугольную призму высотой 20 см и со стороной основания 10 см?

18*. Могут ли два неравных прямых параллелепипеда с равными высотами иметь равные боковые поверхности?

19. Найдите объем прямой треугольной призмы, у которой все ребра равны 2 м.

20*. Все боковые грани правильной шестиугольной призмы - квадраты со стороной 10 дм. Найдите объем этой призмы.

21. Определите приблизительно объем вашей классной комнаты.

22*. Найдите площадь поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда, площади трех граней которого равны 10 дм^2, 6 дм^2 и 15 дм^2.

23*. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.43), у которой $BB_1 = 5$ см, $AB_1 = 4$ см. Найдите длину ребра основания призмы и ее объем.

24. Мерой для выдачи зерна со склада на корм скоту служат два прямоугольных ящика с равными основаниями. Один ящик вмещает 50 кг зерна. Сколько зерна вмещает второй ящик, если его высота в 1,5 раза больше высоты первого?

25*. В квартире две комнаты. Кубатура одной комнаты равна 120 м^3. Найдите кубатуру второй комнаты, если она в 1,5 раза шире и в 3 раза короче первой.

26**. В правильной шестиугольной призме боковые грани - равные прямоугольники. Сформулируйте обратное утверждение и докажите его ошибочность.

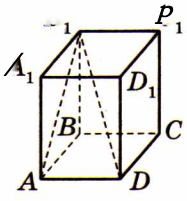


Рис. 5.43



Для любознательных

Первое условие, которого надо придерживаться в математике, - это быть точным, второе - быть ясным и, насколько возможно, простым.

Л. Карно

^ 32« Пирамиды

| Всем известны знаменитые египетские пирамиды. I На рисунке 5.44 вы видите пирамиды в Гизе (Египет).

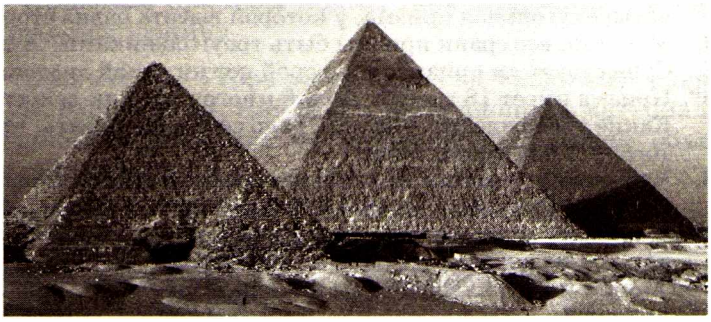
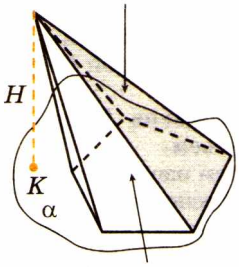


Рис. 5.44

ПИРАМИДА

боковые грани - g треугольники



основание

S - вершина

SK = *H* - высота

*SK*l a

Боковую поверхность пирамиды образуют треугольники - ***боковые грани,*** которые сходятся в одной точке - ***вершине*** и имеют по одной общей стороне с некоторым многоугольником, который называется ***основанием*** (рис. 5.45).

Высота пирамиды - это расстояние от ее вершины до ее основания (перпендикуляр, опущенный из вершины на основание),

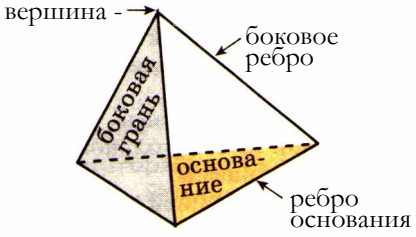


Рис. 5.45

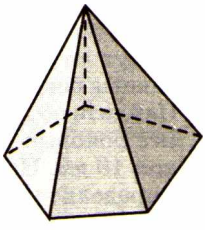


Рис. 5.46

В зависимости от того, какой многоугольник лежит в основании, пирамида может быть:

- треугольная (тетраэдр) (рис. 5.45);
- четырехугольная (см. рис. 5.47-а);
- пятиугольная (рис. 5.46) и т. д.

В основании - *n* -угольник

'i'

пирамида n-уголъная

W ЩР ***n-угольной пирамидой называется пирамида, в основании которой лежит n-угольник.***

Пирамида называется ***правильной,*** если:

1) основанием ее является правильный многоугольник;

2) основание перпендикуляра, проведенного из вершины пирамиды к ее основанию, совпадает с центром многоугольника основания.

Все боковые ребра правильной пирамиды равны, все боковые грани - равные равнобедренные треугольники.

Высоту боковой грани, которая проведена к ребру основания в правильной пирамиде, называют ***апофемой*** (рис. 5.47-а).



Рис. 5.47

На рисунке 5.47 изображена правильная четырехугольная пирамида и ее развертка.

Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее боковых граней.

Чтобы найти площадь поверхности пирамиды, надо к площади ее боковой поверхности прибавить площадь основания:

$$S = S_б + S_о$$

Для правильной n-угольной пирамиды площадь одной боковой грани равна полупроизведению длины ребра a ее основания на апофему h_a. Площадь боковой поверхности будет в n раз больше, т. е. равна произведению полупериметра основания на апофему:

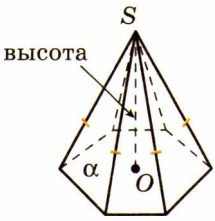
$$S_б = P h_a$$

Объем пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} SH.$$

Доказывать эту формулу вы будете в старших классах, но уже сейчас можно убедиться в ее правильности экспериментальным путем. Например, если склеить из картона прямую призму и пирамиду с одинаковыми основаниями и высотами, наполнить их песком (манной крупой), то выяснится, что песка для наполнения призмы нужно втрое больше, чем для пирамиды.

ПИРАМИДА ПРАВИЛЬНАЯ



основание - правильный многоугольник,
O - его центр,

SO ⊥ (основание),
$SO = H$,
боковые ребра - равны,
боковые грани - равны.

Площадь боковой поверхности:

$$S_б = P h_a$$

h_a - апофема,
P - полупериметр основания.

Пирамида:

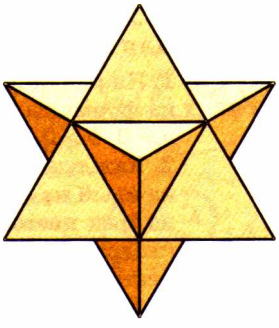
$$S = S_б + S_о$$

$S_о$ - площадь основания.

$$V = \frac{1}{3} S H$$

Для любознательных

1. Четырехгранники еще называют тетраэдрами, (с греческого «тетра» означает «четыре», а «эдра» - « грань »). Четырехгранник можно составить только из треугольников. (Почему?) Поэтому треугольные пирамиды называют тетраэдрами.
2. Фигура, изображенная на рисунке, является сплетением двух правильных тетраэдров, открыл ее ***Леонардо да Винчи.*** Позднее, через 100 лет, ее «переоткрыл» Кеплер и дал ей название, которое в переводе означает «восьмиугольная звезда».



Практическая работа 43

1. По соответствующим разверткам склейте из картона прямую призму и пирамиду с одинаковыми основаниями и высотами.
2. С помощью манной крупы или песка сравните объемы этих фигур.
3. Сделайте вывод.

Задание 37

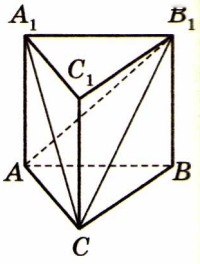


Рис. 5.48

1°. Какая пирамида называется правильной?
2°. Сколько боковых граней в правильной треугольной пирамиде? А в четырехугольной?
3. На рисунке 5.48 найдите три треугольные пирамиды.
4. Почему правильную четырехугольную пирамиду нельзя назвать правильным многогранником?
5. Можно ли склеить такой многогранник, который, если его поставить на одну грань, был бы призмой, а на другую - пирамидой?
6*. Определите без рисунка: а) сколько вершин, ребер и граней имеет n-угольная пирамида; б) сколько всего плоских углов имеет n-угольная пирамида?
7*. Будет ли правильной пирамида, если ее боковые грани: а) равные треугольники; б) равные равнобедренные треугольники?
8*. Докажите, что число ребер пирамиды - всегда число четное.
9*. Найдите сумму всех плоских углов n-угольной пирамиды.
10*. Существует ли пирамида, которая имеет: а) 18 плоских углов; б) 20 плоских углов?
11°. В треугольной пирамиде длина каждого из ребер равна a. Найдите полную поверхность пирамиды.
12. В основании правильной пирамиды лежит шестиугольник со стороной 2 дм. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если ее апофема равна 1 дм.
13. В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна стороне основания и составляет 10 см. Найдите площадь поверхности пирамиды.
14. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды вдвое меньше ее бокового ребра и равна 2 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
15. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, боковые грани которой правильные треугольники, а апофема равна $\sqrt{3}$ дм.
16. Вычислите объем правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна 3 см, а высота - 8 см.
17*. Как изменится объем правильной четырехугольной пирамиды, если сторону ее основания увеличить в 3 раза, а высоту уменьшить в 2 раза?
18*. Вычислите объем правильной четырехугольной пирамиды, изображенной на рисунке 5.49.

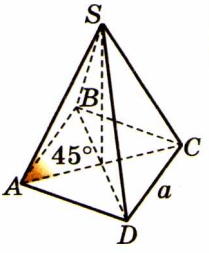


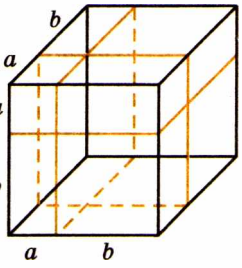
Рис. 5.49



Для любознательных

1. На рисунке представлена геометрическая трактовка формулы $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ для случая $a > 0$, $b > 0$. Поясните ее.

2. Каждую грань куба разделили на четыре квадрата, каждый из образованных квадратов покрасили в один из трех цветов: синий, желтый и красный так, чтобы квадраты, которые имеют общую сторону, были разных цветов. Докажите, что при таком условии всегда будет 8 синих, 8 желтых и 8 красных квадратов.



<П> ST)

§ О О о Тела вращения

Телами вращения называются пространственные фигуры, которые образуются вращением плоской фигуры вокруг некоторой оси.

Среди них выделяют: ***шар, конус, цилиндр.***

Можно привести много примеров тел вращения: теннисный мяч имеет форму шара, близка к этой форме и наша Земля; в ветряной мельнице можно увидеть цилиндр и конус (рис. 5.50) и т. д.

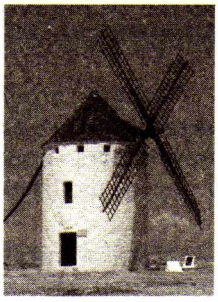


Рис. 5.50

ЦИЛИНДР

Когда прямоугольник вращается вокруг прямой, которой принадлежит одна из его сторон, - образуется ***прямой круговой цилиндр*** (рис. 5.51). В дальнейшем, говоря о цилиндре, будем иметь в виду именно прямой круговой цилиндр.

Прямая, вокруг которой вращается прямоугольник, называется ***осью цилиндра***; параллельная ей противоположная сторона прямоугольника - ***образующей;*** круги, описанные двумя другими сторонами прямоугольника, - ***основаниями*** цилиндра.

Высота цилиндра Н - это расстояние между его основаниями (перпендикуляр, опущенный из любой точки одного основания на второе). Она равна образующей этого цилиндра.

На рисунке 5.52 представлена развертка цилиндра. Прямоугольник - развертка боковой поверхности, два круга - основания цилиндра.

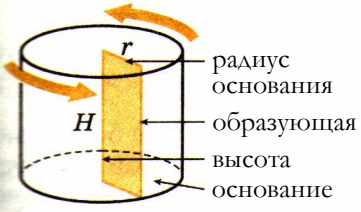


Рис. 5.51

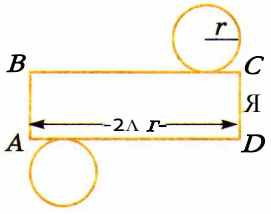
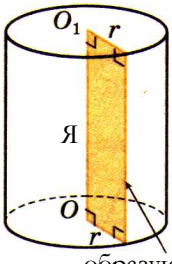


Рис. 5.52

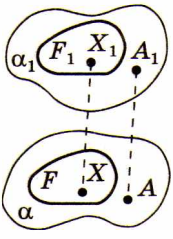
ЦИЛИНДР
прямой круговой



(OOj) - ось вращения, ось цилиндра;
} [OOJ = Я - высота;
r - радиус основания.

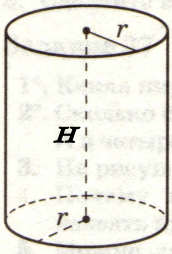


Для любознательных



Слово ***цилиндр*** происходит от греческого «килиндрос», что означает «вал», «каток». В школьном курсе геометрии изучают только ***прямой круговой цилиндр,*** определение которого мы рассмотрели. В общем ***цилиндр*** в геометрии определяют так. Если в некоторой плоскости ***а*** задать фигуру ***F,*** а из некоторой точки ***А*** плоскости а провести отрезок AA_V который не принадлежит плоскости а, и из каждой точки ***X*** фигуры ***F*** провести отрезки XX_v равные и параллельные AA_1 (см. рис.), - получим пространственную фигуру, которая называется ***цилиндром.*** (XX_1 - образующие, ***&F*** и F_1 - его основания.)

ЦИЛИНДР

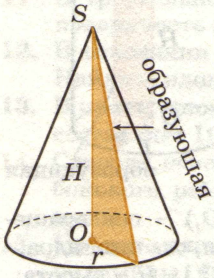


$S_б = 2\pi rH$

$S = 2\pi rH + 2\pi r^2$

$V = \pi r^2 H$

КОНУС
прямой круговой



(SO) - ось конуса, ось вращения;
[*SO]- *H* - высота;
r - радиус основания.

Напомним:
(SO) - прямая ***SO;***
[SO] - отрезок ***SO.***

Площадь **боковой** поверхности цилиндра равна площади прямоугольника ***ABCD,*** одна сторона которого ***AB*** равна высоте цилиндра ***H,*** а вторая ***AD*** - длине окружности его основания $2\pi r$(см. рис. 5.52), т. е.

$$S_б = 2\pi rH.$$

Чтобы получить **площадь полной поверхности цилиндра,** надо к площади боковой поверхности прибавить площади оснований - двух одинаковых кругов, радиусы которых равны r:

$$S = 2\pi rH + 2\pi r^2.$$

Если в цилиндр вписать правильную я-угольную призму и вообразить, что ***n*** стремится к бесконечности, то объем цилиндра будет равен объему такой призмы.

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$$V = \pi r^2 H.$$

КОНУС

Прямой круговой конус образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 5.53). Катет, вокруг которого вращается треугольник, называется ***высотой конуса***; второй катет описывает круг, который называют ***основанием конуса***; гипотенуза треугольника описывает боковую поверхность конуса и называется ***образующей конуса***.



Рис. 5.53

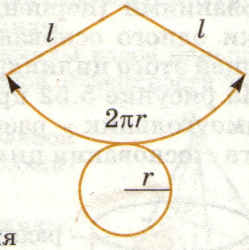


Рис. 5.54

Развертка конуса изображена на рисунке 5.54. Боковая поверхность разворачивается в сектор радиуса, равного образующей конуса Z, и длиной дуги, равной длине окружности основания ($2\pi r$).

Площадь этого сектора S_1 является частью площади круга S_0 радиуса *I* (их отношение $\frac{S_1}{S_0} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$). Тогда

Для любознательных

Этот футбольный мяч состоит из правильных пятиугольников и шестиугольников. Многогранник, состоящий из разных видов правильных многоугольников, в каждой из вершин которого сходится одинаковое число ребер, называют ***полуправильным.*** Архимед в III в. до н. э. открыл и описал тринадцать видов полуправильных многогранников.



$$s_1 = \pi r^2 \wedge \frac{2\pi rl}{2} = \pi rl.$$

Чтобы найти площадь полной поверхности конуса S, к площади боковой поверхности $S_б$ S_1 надо прибавить площадь круга-основания:

$$S = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r).$$

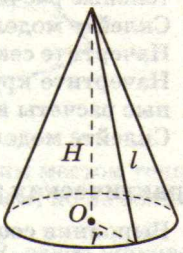
Итак, площадь боковой поверхности и площадь полной поверхности конуса, радиус основания которого r и образующая l, равны соответственно:

$$S_б = \pi rl \text{ и } S = \pi r(l + r).$$

Если в конус вписать правильную n-угольную пирамиду и вообразить, что n стремится к бесконечности, то объем конуса будет равен объему такой пирамиды. Объем конуса равен трети произведения площади основания конуса на его высоту:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H.$$

КОНУС



$S_б = \pi rl$

$S = \pi r (l + r)$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$

ШАР

Шар - это фигура вращения, которая образуется при вращении круга вокруг его диаметра (рис. 5.55). Поверхность шара называют *сферой.* Диаметр круга будет *диаметром шара,* радиус круга *-радиусом шара,* а центр круга - *центром шара.*

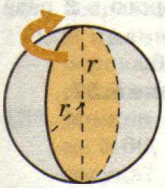


Рис. 5.55

Шар нельзя представить в виде развертки на плоскости, поэтому вывести формулу для площади его поверхности тяжело. Математики доказали, что площадь поверхности шара, т. е. площадь сферы, в 4 раза больше площади круга, вращением которого ее получим:

$$S = 4\pi r^2.$$

Строгое доказательство показывает, что объем шара, радиус которого равен r, в 4 раза больше объема конуса, радиус основания и высота которого равны r:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

ШАР

t

вращением круга вокруг диаметра

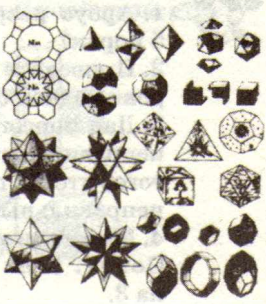
$S_б = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$



Для любознательных

Кеплер считал, что каждой планете соответствует правильный многогранник, в который вписана сфера орбит планеты (стр. 191). Правильных многогранников существует только 5 - они уже были использованы им как модели Вселенной. Поэтому Кеплер, в поиске других планет, искал и другие гармонические «правильные» формы. Он продлевал ребра и грани правильных многогранников и получал невыпуклые, так называемые «звездные» многогранники.



Попробуйте следом за Кеплером и французским математиком Луи Пуансоном (1777-1859) поискать такие фигуры.

Практическая работа 44

1. Начертите прямоугольник - развертку боковой поверхности цилиндра.
2. Начертите круг, который будет основанием этого цилиндра. Какие предварительные расчеты надо сделать для этого?
3. Склейте модель цилиндра из полученной развертки.
4. Начертите сектор круга - развертку боковой поверхности конуса.
5. Начертите круг, который будет основанием этого конуса. Какие предварительные расчеты надо сделать для этого?
6. Склейте модель конуса из полученной развертки.

Практическая работа 45

Выполнив соответствующие измерения, вычислите объем (в кубических сантиметрах): а) хоккейной шайбы; б) кастрюли цилиндрической формы.

Задание 38

1°. Прямоугольный лист бумаги размером $a*b$ можно свернуть двумя способами так, что образуется боковая поверхность цилиндра. Определите радиус основания каждого из цилиндров.

2. Вращая прямоугольник $ABCD$ со сторонами AB = 2 см и CD = 4 см сначала вокруг стороны AB, а потом вокруг стороны CD, получили два цилиндра. В каком случае площадь боковой поверхности больше?

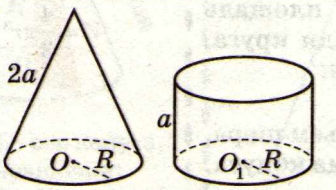
3. Радиус цилиндра увеличили в 2 раза, а его высоту уменьшили в 2 раза. Изменилась ли площадь боковой поверхности? Почему?

4. Один цилиндр в 3 раза шире второго, но в 3 раза его короче. Равны ли их объемы?

5. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет уровень жидкости, если ее перелить в сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого?

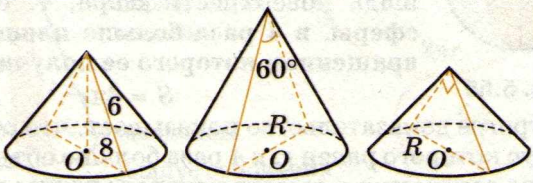
6. Сравните боковые поверхности тел, изображенных на рисунке 5.56.

7*. Вычислите боковую поверхность конусов, изображенных на рисунке 5.57.



а) б)

Рис. 5.56



а) б) в)

Рис. 5.57



Для любознательных

1. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Может ли при этом остаться 5 корок?

2. Приведите пример линии, которая: а) ни с одной плоскостью не имеет ровно одной общей точки; б) не принадлежит ни одной плоскости.

3. Дан многогранник. С одной стороны - это правильная призма, с другой - неправильный многогранник. Какие свойства многогранника следуют из того, что он правильная призма? Какие свойства следуют из того, что это неправильный многогранник?

4. Может ли многогранник иметь p ребер, где p - простое число, большее 11? Совет. Если у многогранника «срезать угол», то число ребер увеличится на 3.

8*. Найдите объемы конусов, изображенных на рисунке 5.58.

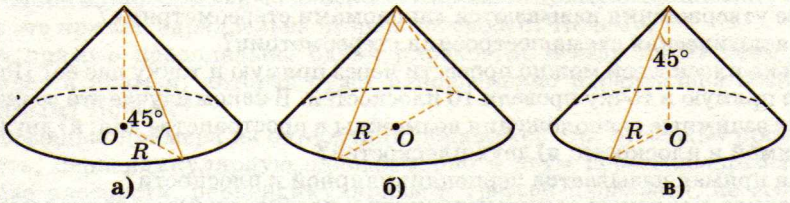


Рис. 5.58

9*. Что представляет собой тело, которое является геометрическим местом точек, удаленных от данной точки O на расстояние не меньше чем 3 см, но не больше чем 7 см?

10. Верно ли, что сумма площадей двух сфер, радиусы которых R, равна площади сферы, радиус которой $2R$?

11. Вычислите площадь поверхности полушария, радиус которого равен R.

12. Краски хватает, чтобы покрасить поверхность шара радиуса R. На сколько шаров, радиусы которых $\frac{R}{10}$, хватит этой краски, если толщина слоя краски в обоих случаях одинакова?

13*. Существует ли такой шар, объем и площадь поверхности которого выражаются одним и тем же числом?

14*. Что вы выбрали бы: съесть арбуз, радиус которого равен 10 см, втроем, или съесть арбуз, радиус которого 20 см, ввосьмером?

15. Есть свинцовые шарики одинакового размера. Надо переплавить их в шар, радиус которого в 5 раз больше. Сколько маленьких шариков для этого нужно?

16. Выразите радиус шара через его объем.

17*. В цилиндр вписан шар, радиус которого R, так, что он касается оснований и боковой поверхности цилиндра (рис. 5.59). Найдите отношение объемов этих тел.

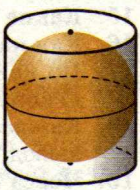


Рис. 5.59

18*. Можно ли в цилиндрический сосуд, изображенный на рисунке 5.60, поместить шар, объем которого в 2 раза меньше объема сосуда?

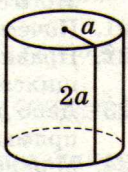


Рис. 5.60

19**. Три равных конуса лежат на плоскости, и каждые два из них имеют общую образующую единичной длины. Можно ли в образовавшееся между ними углубление поместить такой же конус?

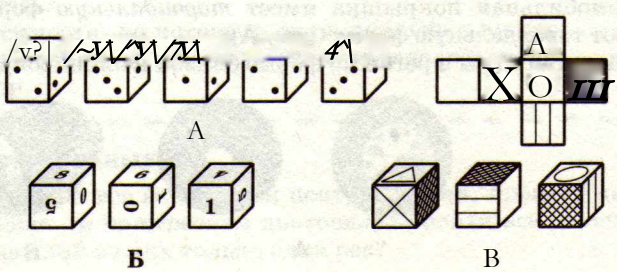


Для любознательных

1. Какие из кубиков на рисунке А отличаются от первого только расположением в пространстве?

2. На гранях куба написаны цифры 0, 1,4, 5, 6, 8. Определите, какие цифры написаны на противоположных гранях куба по изображению его в трех положениях на рисунке Б.

3. Есть ли на рисунке В куб, который изготовлен по заданной развертке?



Задания для повторения главы V

1. Какие утверждения называются «аксиомами стереометрии»?
2. Какая логическая схема построения стереометрии?
3. Сколько плоскостей можно провести через прямую и точку вне ее? Почему?
4. Через прямую и точку провели 10 плоскостей. В каком случае это возможно?
5. Какие взаимные расположения возможны в пространстве для: а) двух прямых; б) прямой и плоскости; **в)** двух плоскостей?
6. Какая прямая называется перпендикулярной к плоскости?
7. Объясните, что такое: а) перпендикуляр к плоскости; б) наклонная к плоскости; в) проекция наклонной на плоскость; г) расстояние от точки до плоскости.
8. Какой признак перпендикулярности прямой и плоскости?
9. Какая фигура называется: а) многогранником; б) правильным многогранником?
10. Объясните на примере смысл понятий: а) грани многогранника; б) ребра многогранника; в) вершины многогранника; г) диагонали многогранника; д) площадь поверхности многогранника.
11. Объясните, чем отличаются выпуклые многогранники от невыпуклых.
12. Объясните, что такое: а) призма; б) параллелепипед; в) прямая призма; г) правильная призма; д) прямоугольный параллелепипед.
13. Объясните, что такое: а) пирамида; б) правильная пирамида; в) апофема правильной пирамиды.
14. Какой отрезок называется высотой: а) призмы; б) пирамиды?
15. Какие тела называются телами вращения и почему?
16. Как найти площадь поверхности: а) цилиндра; б) конуса; в) шара?
17. По какой формуле вычисляют объем: а) призмы; б) пирамиды; **в)** цилиндра; г) конуса; д) шара?
18. Каждая из плоскостей аир проходит черегз точки ***A, B и C.*** Можно ли сделать вывод, что а и р - одна и та же плоскость? Ответ обоснуйте.
19. Через три точки провели 15 плоскостей. Что это означает?
20. Задано три точки, через которые можно провести плоскость, но не одну. Что из этого следует?
21. Почему запертые двери нельзя отворить, а незапертые отворяются легко?
22. Правильно ли, что геометрическим местом точек, общим для двух пересекающихся плоскостей, является прямая? Почему?

23*. Дано две прямые, но через них нельзя провести плоскость. Докажите, что эти прямые не пересекаются.

24. Можно ли утверждать, что прямые скрещиваются, если они не пересекаются? Почему?
25. Надо ли доказывать, что через две параллельные прямые можно провести плоскость? Почему?

26°. Найдите вокруг вас такие три прямые: а) две пересекающиеся прямые, а третья - скрещивающаяся с каждой из них; б) две прямые скрещивающиеся, а третья пересекает каждую из них; **в)** две прямые параллельны, а третья скрещивающаяся с каждой из них.



Для любознательных

Автомобильная покрышка имеет ***тороидальную*** форму. Пончики также имеют тороидальную форму (рис. А).

Мяч для игры в регби по форме близок к эллипсоиду (см. рис. Б).



А Б

27**. Сформулируйте какой-то признак того, что две прямые пересекаются.

28*. На одной из параллельных плоскостей провели прямую. Можно ли утверждать, что эта прямая параллельна второй плоскости? Почему?

29*. Две прямые параллельны одной плоскости. Всегда ли на этой плоскости найдется прямая, которая будет одновременно параллельна обеим данным прямым? Почему?

30*. С помощью примера из окружения докажите, что: а) можно провести плоскость, перпендикулярную одновременно к двум пересекающимся прямым;
б) две плоскости, перпендикулярные к третьей плоскости, не всегда параллельны друг другу.

31*. Правильным ли является утверждение: «Если прямая не параллельна плоскости, то на этой плоскости нет ни одной прямой, параллельной заданной прямой»? Почему?

32*. Докажите от противного: если четыре точки не принадлежат одной плоскости, то никакие три из них не лежат на одной прямой.

33. Что представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от одной точки пространства?

34. Изобразите правильный тетраэдр, его высоту и апофему.

35. Ребро одного куба в 2 раза меньше ребра второго. Сравните их: а) площади поверхностей; б) объемы; в) диагонали; г) диагонали боковых граней.

36. Диагональ куба равна 8 см. Найдите его: а) ребро; б) площадь поверхности; в)объем.

37*. Многогранник имеет 9 ребер. Сколько он имеет плоских углов?

38. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду, ее высоту и апофему.

39. Вычислите площадь боковой поверхности правильного тетраэдра, ребро которого равно $\sqrt{3}a$ см.

40*. Чтобы доказать, что призма правильная, надо рассмотреть два пункта, а чтобы доказать, что она неправильная, - один. О каких пунктах идет речь?

41*. Существует ли призма, которая имеет 16 ребер? Почему?

42*. У призмы всего 8 граней. Найдите сумму внутренних углов многоугольника основания.

43**. Можно ли разрезать треугольную призму на две части так, чтобы каждая из частей была пирамидой?

44*. Изобразите многогранник, у которого все грани - треугольники, но который не является треугольной пирамидой.

45. Сравните термины: «правильная треугольная пирамида» и «правильный тетраэдр». Можно ли утверждать, что они означают одну и ту же фигуру?

46*. Правильно ли проведено рассуждение: «Поскольку все боковые грани данной призмы - квадраты, то эта призма - правильная»? Почему?

47*. В прямоугольном параллелепипеде, изображенном на рисунке 5.61, найдите длину отрезка BD_1.

48**. В основании пирамиды лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 3 см. Основание высоты пирамиды совпадает с вершиной прямого угла этого треугольника и равно 6 см. Найдите площадь поверхности и объем пирамиды.

49**. Найдите зависимости, по которым, зная, сколько в призме или пирамиде вершин и граней, можно определить количество их ребер.

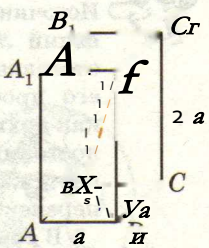


Рис. 5.61



Для любознательных

На кубе отметили все вершины и центры граней, провели диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них только один раз?

50**. Докажите от противного: «Если в параллелепипеде с ребрами a, b, c и диагональю d выполняется $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, то этот параллелепипед не прямоугольный».

51*. На рисунке 5.62 изображено тело, которое составляет четвертую часть цилиндра, радиус которого равен R, а высота - H. Найдите полную поверхность тела и его объем.

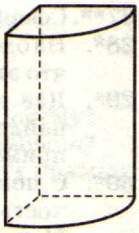


Рис. 5.62

52*. Запишите формулы для вычисления объема и площади поверхности цилиндра. Существует ли такой цилиндр, у которого площадь боковой поверхности содержит столько же квадратных единиц, сколько в его объеме кубических единиц?

53. Цилиндр и конус имеют равные основания, а высота конуса в 2 раза больше высоты цилиндра. Сравните: а) площади их боковых поверхностей; б) их объемы.

54. На рисунке 5.63 треугольник ABC - правильный, сторона его равна a. Вычислите объем конуса.

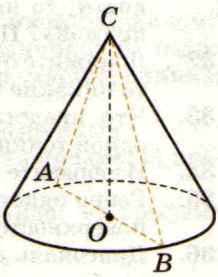


Рис. 5.63

55*. Конус, высота которого равна H, отлит из свинца. Его надо переплавить в цилиндр такого же радиуса. Какой будет высота цилиндра?

56*. На рисунке 5.64 в куб вписан конус. Найдите отношение объемов конуса и куба.

57*. Объем шара уменьшился в 27 раз. Как изменилась площадь его поверхности?

58*. Материал для окраски детского мячика стоит 50 коп. Сколько надо заплатить за материал для окраски мяча, объем которого в 8 раз больше?

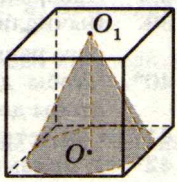


Рис. 5.64

59*. На базаре продают арбузы маленькие и большие, диаметры которых в 2 раза больше маленьких. Стоимость маленьких арбузов - 2 грн., а больших - 6 грн. Что выгоднее купить: один большой или три маленьких арбуза?

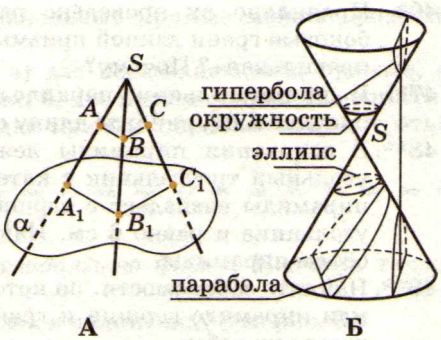
60*. Площадь круга равна S. Вращением этого круга вокруг его диаметра получили шар. Найдите площадь поверхности шара.

61*. Свинцовый шар переплавили в шарики, радиус которых в 10 раз меньше исходного шара. Сколько таких шариков получилось?



Для любознательных

Источником геометрических исследований *Жерара Дезарга* (1591-1662), отставного военного инженера, была его профессиональная деятельность как архитектора и инженера. Дезаргу постоянно приходилось иметь дело с чертежами, которые выполнялись в перспективе.



В основе перспективы лежит центральное проектирование, когда заданы фиксированная точка S (центр проекции) и фиксированная плоскость a (плоскость проекции). Через произвольную точку A пространства проводят прямую SA (проектирующая прямая), она пересекает плоскость a в точке Ар которая называется *проекцией точки A* (см. рис. А).

Одной из наиболее оригинальных идей Дезарга было предложение рассматривать так называемые конические сечения как центральные проекции окружности (см. рис. Б).



Глава VI
ЛЮБОПЫТНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Предлагаемые в этой главе математические миниатюры - рассказы о том, как геометрия помогает алгебре и наоборот; о свойствах золотого сечения; о гармонических четверках точек; об элементах проективной геометрии и что можно сделать с помощью линейки и неподвижной окружности; о построениях Штейнера и других чудесах инверсии и т. д.

Цель этого раздела - заинтересовать вас древней, вечно прекрасной наукой - геометрией, полной разгаданных и неразгаданных тайн, удивительных открытий.

Приложение 1

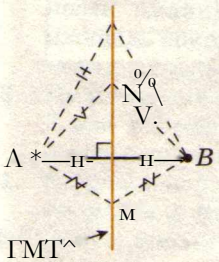
Об открытии Декарта и поиске геометрического места точек плоскости



Как вам уже известно, Декарт создал аналитическую геометрию - заставил алгебру работать на геометрию, да и не только на нее, а и на физику, химию, биологию, географию, кибернетику и т. д. Теперь тяжело даже вообразить какую-то область знаний, где бы не применялась в той или иной форме аналитическая геометрия. Координаты каждой точки карты штурмана - некоторая функция географических координат (широты и долготы:) соответствующей точки земной поверхности. График температуры больного, кардиограмма и другие исследования состояния здоровья человека на медицинском оборудовании связаны с аналитической геометрией и т. д. С помощью кибернетики машина работает на человека, обрабатывая представленную ей информацию по формальным законам.

Творец аналитической геометрии по праву может быть назван прародителем математической кибернетики. В случаях, которые мы рассмотрим, роль математической машины выполняет алгебра.

Приведем несколько примеров, как открытие Декарта помогает в задачах на определение геометрического места точек плоскости.



ГМТ^ равноудаленных от *Aw. B.*

Пример 1. Что представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от двух заданных точек?

На этот вопрос нетрудно ответить и не зная аналитической геометрии, тем не менее метод, с помощью которого мы решим эту задачу (а именно - ***метод координат),*** полезен и в тех случаях, когда решить задачу без аналитической геометрии будет тяжело.

Пользуясь методом аналитической геометрии, размышляем так: пусть $M_x(x_x; y_x)$ и $M_2(x_2; y_2)$ - две данные точки, $M(x; y)$ - произвольная точка искомого геометрического места точек. Тогда $|M_XM| = |M_2M|$:

$$yjix\text{-}xrf + iy\text{-}yj^2 = y](x\text{-}x_2)^2 + (y\text{-}y_2)^2.$$

Возведем в квадрат обе части равенства и упростим их:

$$2(x_2 - x_x)x + 2(y_2 - y_x)y + x^2_1 + y^2_1 - x^2_2 - y^2_2 = 0.$$

Если обозначить

$$-\frac{X_2 - X_1}{y_2 - y_x} = k \quad \text{и} \quad \frac{x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_x^2}{2(x_2 - x_1)} = b,$$

то полученное уравнение приобретает вид $y = kx + b$.

Очевидно, что k и b - постоянные, независящие от x и y, т. е. искомое геометрическое место точек - прямая.

Первое открытие всегда такое – существуют вещи, которые есть смысл открывать.

Д. Томсон

ГМТ точек *M:*

$\frac{|AM|}{|BM|} = X * 1$ -

окружность Аполлония

Любая окружность является окружностью Аполлония.

Пример 2. Что представляет собой геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух заданных точек является величиной постоянной?

Придерживаясь общей схемы, размышляем так: пусть заданы точки A (x_1; y_x) и $B(x_2; y_2)$, а $M(x; y)$ - произвольная точка искомого геометрического места точек. Тогда

$$\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{\sqrt{(x-x_x)^2 + (y-y_x)^2}}{\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}} = X$$

где X - значение этого отношения. Возведем обе части равенства в квадрат и выполним элементарные преобразования:

$$(1 - X^2)(x^2 + y^2) - 2(x_x - X^2x_2)x -$$
$$-2(y_x - X^2y_2)y + x^2 + y^2 - X^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (*)$$

Следует различать два случая:

1.X- 1. Полученное уравнение превращается в уравнение прямой - серединного перпендикуляра к отрезку *AB:*

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_x - y_2)y - (x_x^2 + y_2^2) + (x_2^2 + y_2^2) = 0.$$

2. X *ф* 1. В этом случае, если разделить уравнение (*) на 1 - X^2 и обозначить постоянные, независящие от x и y, через a, $Ъ$ и c, а именно

$$\frac{x_1 - X^2 x_2}{1 - X^2} = a, \quad \frac{y_1 - \lambda^2 y_2}{1 - x^2} = b \quad \frac{x_1 + yi - ь\,|xi + yi)}{} = c,$$

получим уравнение $x^2 + y^2 - 2ax - 2Ъy + c = 0$.

Обозначив $a^2 + Ъ^2 - c = r^2$, приходим к уравнению окружности

$$(x - a)^2 + (y - Ъ)^2 = r^2.$$

Итак, искомым геометрическим местом точек является окружность.

Приведенное выше определение окружности получило название *окружности Аполлония Пергского.*

Очевидно, что **любая окружность является окружностью Аполлония.**

Пример 3. *Уравнение эллипса. Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов эллипса) является величиной постоянной.* Эту величину обозначают как *2a.* Расстояние между фокусами обозначают как *2c.*

Возьмем за ось абсцисс прямую, проходящую через фокусы, а за начало координат - середину отрезка между фокусами (рис. 6.1). Тогда фокусы будут иметь координаты $F^{\wedge}(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$. Если $M(x;\ y)$ - произвольная точка эллипса, то из определения эллипса

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a, \text{ или } \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

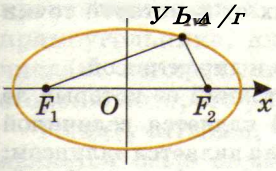
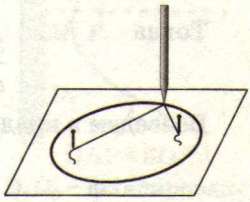


Рис. 6.1

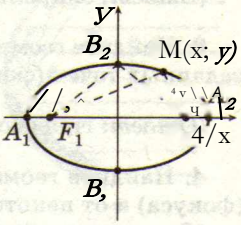
Введем обозначение $a^2 - c^2 = Ъ^2$. Выполнив несложные преобразования, последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{Ъ^2} = 1.$$



ЭЛЛИПС

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$|FjM| + |FjM| = 2a$$

$F^{\wedge}, F_2$ ~ фокусы;
$A_v\ A_2,\ B_v\ B_2$ - вершины.

Пример 4. Что представляет собой **траектория точки отрезка постоянной длины, концы которого перемещаются вдоль двух взаимно перпендикулярных прямых?**

Возьмем эти взаимно перпендикулярные прямые за оси координат. Обозначим через AB - отрезок, который движется в определенном направлении, и M(x; *y*) - точку искомого геометрического места точек. Проведем из точки *M* прямые, параллельные координатным осям (рис. 6.2).



Для любознательных

Если бы мне пришлось снова начать свое обучение, то я, по совету Платона, взялся бы сначала за математику - науку, которая требует точности и принимает за правильное только то, что вытекает как следствие из доказанного.

Галилео Галилей

Очевидно, что $NM = x$ и $LM = y$.

Пусть $BM = a$, $MA = b$, $ZBMN = ZMAL = a$. Заметим, что при заданном движении отрезка AB значения a и b не изменяются.

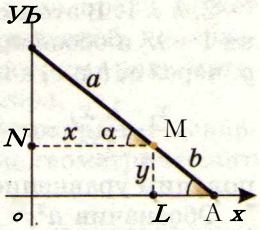


Рис. 6.2

Из рисунка видно, что

$$x = a\cos a \text{ и } y = b\sin a.$$

Тогда

$$\frac{x}{a} = \cos a \text{ и } \frac{y}{b} = \sin a.$$

Возведем в квадрат левые и правые части последних равенств и сложим их:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Мы получили уравнение эллипса. Итак, ***искомая траектория - эллипс.***

Решите самостоятельно методом координат такие задачи.

1. Найдите геометрическое место точек M, для которых $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$, где ABC - прямоугольный треугольник с прямым углом C.

(***Ответ:*** прямая, которая проходит через середину гипотенузы.)

2. Вдоль радиуса патефонной пластинки, которая равномерно вращается, равномерно и прямолинейно (относительно пластинки) ползет муха. Найдите траекторию движения мухи.

(***Ответ:*** спираль Архимеда $\rho = a\varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} = \frac{y}{x}$.)

3. Найдите геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) является величиной постоянной.

(***Ответ:*** гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$)

4. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки (фокуса) и от некоторой прямой (директрисы).

(***Ответ:*** парабола $y^2 = 2px$, p - расстояние между фокусом и директрисой.)

5. Найдите геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до данной точки (фокуса) и до данной прямой (директрисы) является величиной постоянной. Покажите: а) если отношение меньше 1, то кривая является эллипсом; б) если отношение больше 1, - гиперболой; в) если отношение равно 1, - параболой. (Совет. Воспользуйтесь формулами параллельного переноса.)

6. Точки пересечения с осью абсцисс эллипса, гиперболы и параболы, если брать уравнения кривых в том виде, как они у нас записаны, - вершины этих кривых.

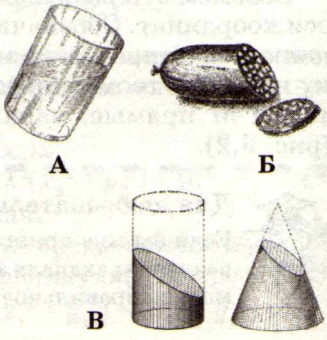


Для любознательных

Форму эллипса мы часто встречаем в жизни.

Если, например, наклонить стакан с водой, то форма поверхности воды будет эллипсом (рис. А). Если от куска колбасы цилиндрической формы отрезать ломтики, ставя нож наискосок, то они будут иметь форму эллипса (рис. Б).

Если прямой цилиндр или конус разрезать так, чтобы не зацепить основание, то в разрезе будем иметь эллипс (рис. В).



Вершина параболы совпадает с началом координат. Докажите, что если перенести в начало координат левую вершину эллипса и правую вершину гиперболы, то уравнения кривых будут иметь вид:

Для эллипса	Для гиперболы	Для параболы
$y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2$	$y^2 = 2px + \frac{b^2}{a^2}x^2$	$y^2 = 2px$

(В случае эллипса и гиперболы введено обозначение $p = \frac{b^2}{a}$.)

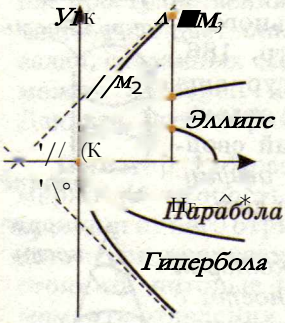
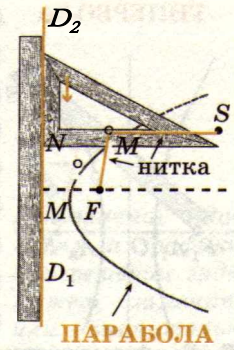


Рис. 6.3

Выписанные в последней задаче уравнения являются уравнениями кривых, относительно вершины (рис. 6.3). Такие уравнения были известны еще Аполлонию Пергскому (262-190 гг. до н. э.) - младшему из трех выдающихся геометров Древней Греции (Евклид, Архимед, Аполлоний). Он известен в первую очередь своими трактатами о конических сечениях (эллипс, гипербола, парабола), содержащих весьма полный свод знаний об этих кривых.

Но, разумеется, никакой символики в те времена не было, свойства кривых, которые мы записали с помощью уравнений, Аполлоний формулировал неуклюжим языком «геометрической алгебры». Например, произведение двух чисел греки называли площадью прямоугольника, длины сторон которого равны этим числам, квадрат числа - площадью квадрата, длина стороны которого равна числу, и т. д.

Тогда (учитывая, что ось абсцисс для всех трех кривых является осью симметрии, или просто осью) языком геометрической алгебры записанные выше уравнения читались бы приблизительно так: «Эллипс является геометрическим местом точек, для которых площадь квадрата, построенного на отрезке, опущенном из начала координат на ось под прямым углом, меньше площади прямоугольника, одной стороной которого является отрезок постоянной длины $2p$, а второй - отрезок от вершины до основания указанного перпендикуляра».



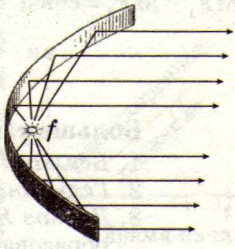
D_1,-D_2 - фиксированная прямая

F - фиксированная точка (фокус)

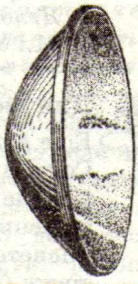
NS - длина нитки

$FM = NM$

$FM + MS = NM + MS = \text{const}$



Параболическое зеркало

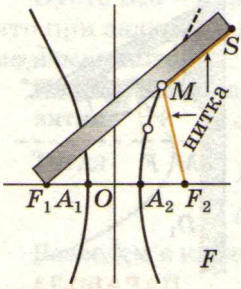


Для любознательных

Интересно, что, как бы мы не поворачивали дуло пушки (в одной вертикальной плоскости), всегда при фиксированной скорости вылета снаряда зону, куда снаряд долететь не может, ограничивает парабола (см. рис.).



ГИПЕРБОЛА



F_1, F_2 ~ фиксированные точки (***фокусы***)
F_2S - длина нитки

$MF_1 - MF_2 =$
$= (MF_1 + MS) -$
$- (MF_2 + MS) =$
$= F_1S - (MF_2 + MS)$

$\backslash$?
const

$MF_1 - MF_2 = \text{const}$

Если в приведенном выше сравнении площади квадрата и прямоугольника заменить слово «меньше» на слово «больше», получим описание гиперболы, а если на слово «равно», - параболы.

Кстати, названия «эллипс», «гипербола», «парабола» дал именно Аполлоний. В переводе с греческого они приблизительно означают: «эллипс» — ***нехватка***; «гипербола» - ***излишек***; «парабола» - ***равенство.***

В заключение заметим, что в результате параллельного и центрального проектирования окружности всегда получается эллипс (см. рис. 6.4). Вы уже знакомились со свойствами параллельного и центрального проектирования (стр. 186, 208). Такое преобразование фигур еще называют ***аффинным.*** Существует отдельный раздел геометрии, изучающий свойства аффинных преобразований - ***аффинная геометрия.*** Эллипсу можно дать и такое определение.

Эллипсом называется кривая, которая может быть получена из окружности с помощью аффинного преобразования, или кривая, которая аффинным преобразованием может быть преобразована в окружность.



Рис. 6.4

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. ***Берман Г. Н.*** Циклоида. - Г.: Наука, 1980.
2. ***Гельфанд*** и др. Метод координат. - Г.: Наука, 1966.
3. ***Дубнов Я. С.*** Введение в аналитическую геометрию: Пособие для самообразования. - Г.: Физматгиз, 1959.
4. ***Маркушевич А. И.*** Замечательные кривые. - Г.: Наука, 1978.
5. ***Никулин А. В., Кукуш А. Г., Татаренко Ю. С.*** Геометрия на плоскости: Планиметрия. - Минск: ООО «Попурри», 1996.
6. ***Шарыгин И. Ф.*** Геометрия 7-9 кл. - М.: Дрофа, 2001.
7. ***Яглом И. М., Ашкинузе В. Г.*** Идеи аффинной и проективной геометрии. - М.: Учпедгиз, 1962.



Для любознательных

Еще ***Иоганн Кеплер*** (1571-1630) выяснил, что планеты вращаются вокруг Солнца не по окружностям, как думали раньше, а по эллипсам, причем Солнце находится в фокусе каждого эллипса (см. рис.). Один раз, на протяжении одного оборота вокруг Солнца, планета бывает в вершине эллипса A_1, точке ближайшей к Солнцу, - это так называемый ***перигелий;*** один раз - в вершине A_2, точке наиболее отдаленной от Солнца, - в ***афелии.***



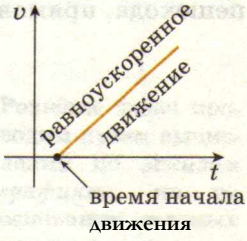
Летом Земля находится в афелии, а зимой - в перигелии (в зависимости от положения оси вращения Земли). Эллипс, по которому движется Земля, немного «сплюснут» - похож на окружность.

Еще раз об открытии Декарта, благодаря которому геометрия может помогать алгебре

Задачи на составление уравнений, или текстовые алгебраические задачи, с одной стороны, представляют собой традиционный раздел элементарной математики, а с другой - их условия являются непосредственным формулированием жизненных задач. Поэтому не удивительно, что геометрия, которая изучает свойства окружающих нас пространственных форм, их взаимное расположение, часто упрощает поиск решения таких задач, особенно задач, связанных с движением тел. И снова посредником между алгеброй и геометрией выступает открытие Декарта. Рассмотрим несколько примеров.

Применение диаграмм и графиков при решении задач может заменить или значительно облегчить расчеты.





Пример 1. Поезд движется прямолинейно и равномерно со скоростью v_0 км/ч. В некоторый момент времени от него отрывается последний вагон и начинает двигаться равнозамедленно. Найдите отношение расстояний, которые пройдут поезд и вагон за время от момента отделения вагона до полной его остановки.

Решение

По оси абсцисс будем откладывать время, которое прошло с момента отделения вагона, а по оси ординат - скорости поезда и вагона (рис. 6.5).

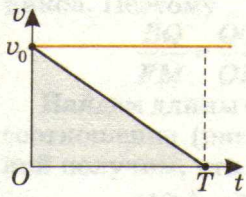


Рис. 6.5

Путь, который прошел поезд за время T (от момента отделения вагона до его остановки), равен площади прямоугольника со сторонами T и o_0.

Путь, который прошел вагон за время T, равен половине площади этого прямоугольника.

Ответ: 2.

Пример 2. Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов ***А к В.*** Когда они встретились, выяснилось, что первый прошел на 30 км больше, чем второй, и что через 4 дня он будет в пункте ***В.*** Второй прибудет в пунктА через 9 дней после встречи. Найдите расстояние между пунктами ***Ап В.***

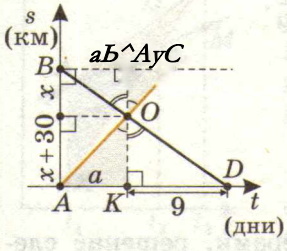


Рис. 6.6

Решение

По оси абсцисс будем откладывать время, которое прошло с начала путешествия туристов, а по оси ординат — их расстояния от пункта A (рис. 6.6). Тогда прямая AC будет графиком движенияпервоготуриста,прямая BD - графиком движения второго, а точка O - моментом их встречи.

Важная особенность ***геометрической интерпретации алгебраической задачи*** в ее наглядности: видны связи между величинами, которые входят в условие задачи. Это дает возможность расширить задачу - поставить и решить более общие вопросы, глубже заглянуть в суть проблемы.

Обозначим путь, который прошел второй турист до встречи, через x, а соответствующее время - как a. Имеем: $OL = x$, $OK = x + 30$, $AK = a$, $LC = 4$, $KD = 9$.

Прямоугольные треугольники AOK и COL - подобны ($\angle AOK = \angle COL$ как вертикальные); треугольники DOK и BOL - подобны ($\angle DOK = \angle BOL$ как вертикальные). Тогда

$$\frac{LC}{AK} = \frac{OL}{OK} = \frac{BL}{KD}, \quad \frac{4}{a} = \frac{x}{x+30} = \frac{a}{9}.$$

Отсюда: $a = 6$, $x = 60$.

Ответ: 60 км.

Пример 3. Из пунктов А и B навстречу друг другу идут два пешехода. Первый вышел из пункта A на 6 ч позже, чем второй из пункта B. Когда пешеходы встретились, выяснилось, что первый прошел на 12 км меньше, чем второй. После встречи первый пришел в пункт B через 8 ч, а второй в пунктА - через 9 ч. Найдите скорости пешеходов.

Решение

По оси абсцисс будем откладывать время, которое прошло с момента выхода второго пешехода из пункта Б, а по оси ординат - расстояние туристов от пункта А (рис. 6.7). Точка M на оси абсцисс соответствует моменту времени начала движения первого пешехода, а точка O - моменту встречи пешеходов; прямая MC будет графиком движения первого пешехода, прямая BD - графиком движения второго.

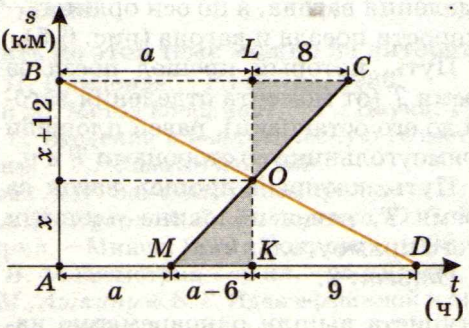


Рис. 6.7

Путь, который прошел первый турист до встречи, обозначим через x, а время, которое затратил второй турист на путь до встречи, - через a.

Из подобия треугольников OLC и OKM, OLB и OKD:

$$\frac{LC}{MK} = \frac{OL}{OK} = \frac{BL}{KD}, \quad \frac{8}{a-6} = \frac{x+12}{x} = \frac{a}{9}.$$

Отсюда, учитывая, что $a > 0$, получаем: $a = 12$, $x = 36$.

Искомые скорости равны:

$$v_1 = \frac{x}{a-6} = 6, \quad v_2 = \frac{x+12}{a} = 4.$$

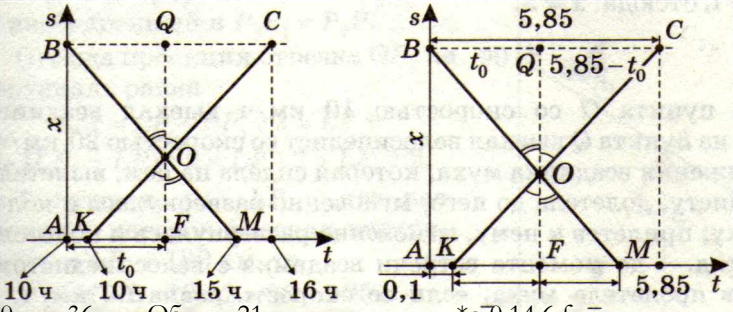
Ответ: 6 км/ч и 4 км/ч.

Теперь, после знакомства с предыдущими примерами, решение следующих задач на движение не вызовет у вас затруднений.

Пример 4. Два приятеля вышли на прогулку: первый из села *A* в 10 ч 36 мин, а второй из села *B* в 10 ч 30 мин. В котором часу они встретились, если первый пришел в село *B* в 16 ч 21 мин, а второй в село *A* в 15 ч 06 мин?

Решение

Будем откладывать по оси ординат расстояние от села A, а по оси абсцисс - время, начиная с 10 ч 30 мин (рис. 6.8-а). Обозначим как t_0 - время, затраченное вторым приятелем на путь до встречи.



а) б)

Рис. 6.8

Как и раньше, имеем две пары подобных треугольников. Поэтому

$$\frac{BQ}{OF}=\frac{QO}{KF}=\frac{QC}{FM},\qquad BQ\cdot KF = QC\cdot FM.$$

Найдем длины отрезков, которые входят в последнее соотношение (рис. 6.8-б). После несложных вычислений получим, что $t_0 = 2{,}6$ ч, а время встречи приятелей:

$$(10{,}5 + 2{,}6)\text{ ч} = 13{,}01\text{ ч} = 13\text{ ч }6\text{ мин}.$$

Ответ: в 13 ч 6 мин.

Пример 5. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по прямолинейному шоссе в одном направлении с постоянными скоростями. В момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист отставал от них на 6 км. Когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист опережал мотоциклиста, когда тот догнал пешехода?

KC — мотоциклист
AC — велосипедист
AM — пешеход

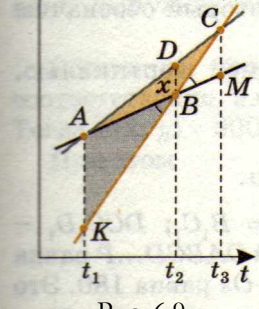
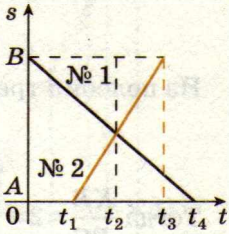


Рис. 6.9

Решение

Построим графики движения путешественников (рис. 6.9). В момент времени t_1 — велосипедист догнал пешехода, в момент t_2 -

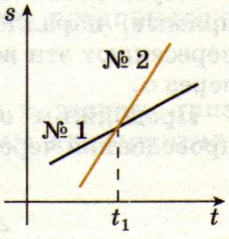
Равномерное движение навстречу



$t = 0$ - время начала движения № 1;
t_1 - время начала движения № 2;
t_2 - время встречи;
t_3 - № 2 закончил движение *A B*;
t_4 - № 1 закончил движение *B —> A*.

Решение задач проводим путем вычислений по *эскизам графиков,* но на основании *точных геометрических соотношений.*

Равномерное движение в одном направлении



t_1 - время, когда № 2 догнал № 1

мотоциклист догнал пешехода, а в момент t_3 - мотоциклист догнал велосипедиста. Тогда на рисунке 6.9: AK = 6 км, CM = 3 км, $DB = x$ - искомое расстояние.

Из подобия треугольников ABK и MBC получаем:

$$\frac{KB}{BC} = \frac{AK}{CM} = \frac{6}{3} = 2.$$

Из подобия треугольников AKC и DBC получаем:

$$\frac{KB + BC}{BC} = \frac{AK}{DB} \text{ и } \frac{KB}{BC} = \frac{6}{x}, \quad \frac{KB}{BC} = \frac{6}{x} = 1.$$

Тогда $\frac{KB}{BC} = \frac{6}{x} = 2 = 1$, отсюда: $x = 2$.

Ответ: 2 км.

Пример 6. Из пункта О со скоростью 10 км/ч выехал всадник. Одновременно с ним из пункта Q выехал велосипедист со скоростью 20 км/ч. В момент начала движения всадника муха, которая сидела на нем, вылетела навстречу велосипедисту, долетела до него, мгновенно развернулась и полетела назад к всаднику; прилетев к нему, мгновенно развернулась и полетела к велосипедисту и т. д. - до момента встречи всадника с велосипедистом. Сколько километров пролетела муха, если ее скорость равна 60 км/ч, а расстояние между пунктами O и Q составляет 90 км? Сколько километров пролетит муха в направлении от O к Q и сколько в обратном направлении?

Решение

На первый вопрос задачи найти ответ легко, если определить время движения мухи - время от начала движения до момента встречи всадника и велосипедиста:

$$t = \frac{90}{10 + 20} = 3(\text{ч}); \quad s_м = 60 \cdot 3 = 180 \text{ (км)}.$$

Найти ответ на второй вопрос поможет графическое изображение движения всадника, велосипедиста и мухи (рис. 6.10). Точка P - точка встречи всадника и велосипедиста.

Движение мухи изображено цветной ломаной: отрезок OA - движение мухи от всадника до велосипедиста, отрезок AB - возвращение мухи к всаднику и т. д. Сумма вертикальных проекций этой ломаной равна общему пути, который пролетела муха.

Через точки $A, B, C,$ ..., сооответствующие поворотам мухи, проведем прямые, параллельные оси ординат. Отрезки OA и AB, AB и BC, ... пересекают эти вертикали под одним и тем же углом, который обозначим через a.

Продолжим отрезок OA до пересечения с последней вертикалью, проведенной через точку P. Имеем:

$$AA_0 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1 \| \ldots,$$

$$\angle OAA_0 = \angle AgAB = \angle ABB_X = \angle B_XBC = \ldots = a.$$

Тогда $AB = AB_V$ CBB_1C_1 - параллелограмм и $BC = Bfi^{\wedge}$, DCC_1D_1 - равнобокая трапеция и $CD = C^{\wedge}$; ... . Т. е. длина ломаной $OABCD...P$ равна длине отрезка OP_v Длина проекции этого отрезка на ось Os равна 180. Это и есть расстояние, которое пролетела муха.

Если продолжить отрезки ***CD, EK,*** ... до пересечения с прямой ***OA,*** то получим: ***O A + BC + DE +*** ... ... = ***OP$_2$*** (т. к. все эти отрезки параллельны ***OA).*** Проекция этого отрезка на вертикаль равна сумме расстояний, которые муха пролетела в направлении от О.

Учтем, что ***BA*** j| ***DC,,*** ¿ || ... || ***PP$_2$*** и ZC$_2$CC$_1$ = а. ***ZP$_2$PP$_1$*** = а = ***a =*** = ZP$_2$PjP, треугольник ***PP$_2$P$_1$*** – равнобедренный и ***P$_2$P$_1$ - P$_1$P.***

Отсюда проекция отрезка ***OP$_2$*** на вертикаль равна

LM = LP + PP$_1$: 2 = ***LP*** +

+ (***LP$_1$ - LP***): 2 = ***LP***: 2 + ***LP$_1$***: 2.

Учитывая, что ***LP*** - это расстояние, которое проехал всадник за 3 ч, а ***LP$_1$*** = 180 км, то

LM = 3 - 1 0 : 2 + 90 = 105.

Тогда расстояние, которое пролетела муха в направлении от О к ***Q,*** равно разности 180 - 105 = 75 км.

Ответ: 75 км - в направлении от ***O*** к ***Q*** и 105 км - в направлении от Q к О.

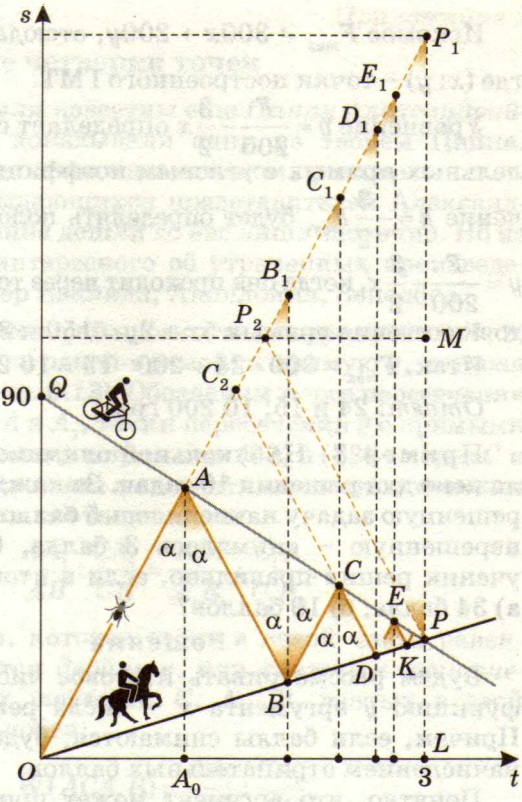


Рис. 6.10

Особенно целесообразно опираться на геометрическую интерпретацию, когда равномерно движутся несколько объектов, когда участники движения изменяют направление своего движения на противоположное, происходит несколько встреч (им отвечают точки пересечения графиков движения).

Пример 7. Предприятие выпускает изделия двух типов. Обработка каждого изделия первого типа длится 5 ч в цехе А и 3 ч в цехе ***B.*** Обработка каждого изделия второго типа длится 2 ч в цехе А и 4 ч в цехе ***B.*** Цех А может работать не более 150 ч в месяц, а цех ***B*** - не более 132 ч в месяц. От каждого изделия первого и второго типов предприятие получает прибыль в 300 грн. и 200 грн. соответственно. Определите, сколько изделий каждого типа нужно изготовлять ежемесячно, чтобы обеспечить предприятию наибольшую прибыль. Найдите эту прибыль.

Решение

Обозначим через ***x*** и ***y*** количество изделий первого и второго типа соответственно, изготовляемых за месяц, а через ***F*** - прибыль предприятия. Тогда ***F(x; y)*** = 3OOx + 200***y.***

При этом

$$\begin{cases} 5x + 2y < 150 \\ 3x + 4y < 132 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 75 - 2{,}5x \\ y < 33 - 0{,}75x \\ x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Построим соответствующее ГМТ на координатной плоскости (рис. 6.11).

Искомое $F_{max} > 300x + 200y$, отсюда $y < \frac{F_{max}}{200} - \frac{3}{2}x$, где (лг; y) - точки построенного ГМТ.

Уравнение $y = \frac{F}{200} - \frac{3}{2}x$ определяет систему параллельных прямых с угловым коэффициентом k. Значение $k = -\frac{3}{2}$ F_{max} будет определять положение прямой $y = \frac{F}{200} - \frac{3}{2}x$, когда она проходит через точку 0(24; 15) - точку сечения прямых $3x + 2y - 150$ и Зд: $+ 4y = 132$.

Итак, $F_{max} = 300 \cdot 24 + 200 \cdot 15 = 10\,200$.

Ответ: 24 и 15; 10 200 грн.

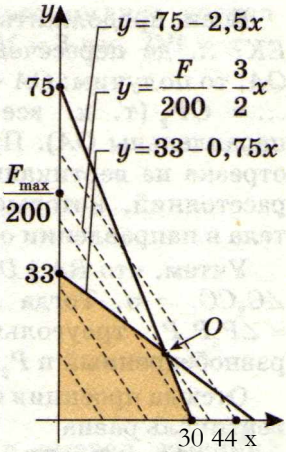


Рис. 6.11

Пример 8. На школьной олимпиаде было предложено для решения 10 задач. За каждую правильно решенную задачу начислялось 5 баллов, а за каждую нерешенную - снималось 3 балла. Сколько задач ученик решил правильно, если в итоге он получил:
а) 34 балла; б) 10 баллов?

Решение

Будем рассматривать итоговое число баллов как функцию y аргумента x - числа решенных задач. Причем, если баллы снимаются, будем считать это начислением отрицательных баллов.

Понятно, что аргумент может приобретать лишь целые значения от 0 до 10 - всего 11 значений. Тогда и функция y тоже может иметь лишь 11 целых значений. Т. е. графиком данной функции будет не линия, а одиннадцать отдельных точек.

Если задача зачтена, число баллов увеличивается на 8 (не снято 3 балла и прибавили 5 баллов). Понятно, что равным разностям между значениями аргумента отвечают равные разности между соответствующими значениями функции. А это является признаком линейной зависимости.

Построим соответствующую прямую по двум точкам:

- за решение всех 10 задач начисляется 5 • 10 = = 50 баллов - отмечаем точку А(10; 50);
- тот, кто не решил ни одной задачи, получает (-3)·10 = -30 баллов - получаем точку Б(0; -30).

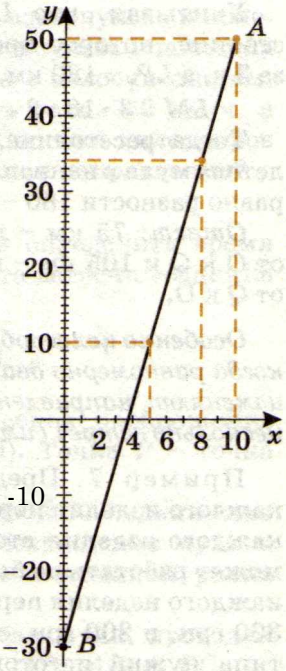


Рис. 6.12

Тепер надо провести прямую AB (рис. 6.12) и обозначить на ней точки для значения аргумента от 0 до 10. Соответствующие значения функции дают искомый ответ.

Ответ: а) 8 задач; б) 5 задач.

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. *Лурье Б. И., Александров Б. И.* Задачи на составление уравнений. - М.: Наука, 1990.
2. *Островский А. И., Кордемский Б. А.* Геометрия помогает арифметике. — М.: АО «Столетие», 1994.

Гармонические четверки точек

Гармонические четверки точек были известны еще ***Паппу Александрийскому.*** В «Геометрии-8» мы уже доказывали одну из теорем Паппа. Продолжим знакомство с этим знаменитым математиком прошлого.

Папп был одним из последних выдающихся представителей Александрийской школы геометров. Труды Паппа дошли до нас лишь частично. Но из сохраненного можно узнать много интересного об утраченных произведениях его предшественников, например Евклида, Аполлония, Зенодора.

Рассмотрим следом за Паппом в некоторой плоскости четыре точки 0,1,2, 3 (никакие три из которых не лежат на одной прямой) и прямую ***g,*** которая не содержит ни одной из этих точек (рис. 6.13). Обозначим точки пересечения прямой ***g*** с прямыми (01) и (23) через .А и A_v точки пересечения ***g*** с прямыми (02) и (31) как ***B*** и B_v точки пересечения ***g*** с прямыми (03) и (12) - через ***C*** и C_v При этом, как доказал Папп, расстояния между этими шестью точками прямой связаны соотношением:

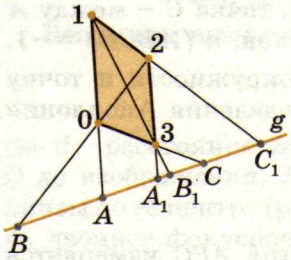


Рис. 6.13

$$\frac{AA_j}{AB'}\cdot\frac{CA_1}{CB} \sim \frac{AA}{A_jB_j'}\cdot\frac{C_jA}{C_1B_1}$$

Выражение, которое стоит в левой части равенства, называется ***двойным,*** или ***сложным, отношением четырех точек A, C, A_v B,*** взятых в этой последовательности:

$$W(ACA_1B)=\frac{AA_1}{AB}:\frac{CA_1}{CB}.$$

При этом считается, если изменяется направление отрезка на прямой, то знак длины этого отрезка изменяется на противоположный. Т. е. АА, = -$А_X$А.

Приведенное выше равенство Паппа означает совпадение двойных отношений

$$W(ACA_XB) = W(A_YCA_ZB).$$

Из всех четверок точек прямой ***гармоническая четверка*** характеризуется тем, что для нее двойное отношение

$$W(ABCD)=\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}$$

всегда равно или -1, или 2, или $\frac{1}{2}$.

О гармонических четверках точек можно было бы рассказать удивительные вещи. Мы ограничимся рассмотрением лишь некоторых фактов.

ОКРУЖНОСТЬ АПОЛЛОНИЯ И КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Напомним (см. Приложение 1), что, ***согласно Аполлонию, окружность - геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек является величиной постоянной*** (X).

Любая окружность является окружностью Аполлония. Решение задачи Аполлония о построении окружности содержалось в его труде «О касаниях» , который был утерян. Со временем эта задача исследовалась многими

учеными. К ней обращались такие выдающиеся математики, как Л. Эйлер и И. Ламберт.

Пусть A и B - заданные определением окружности, по Аполлонию, точки, а С и Д - точки пересечения прямой AB с этой окружностью (рис. 6.14-а). Поскольку для окружности выполняются равенства

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{BD} = \text{А, И} \quad \frac{AC}{CB} = \frac{\text{АР}}{\text{во'}}, \text{ ТО}$$

Тогда, учитывая, что $BD = -PB$, получим:

$$W(ABCD) = \frac{AC}{AP}:\frac{BC}{BP}\cdot\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{PB} = -1,$$

а это означает, что четверка точек A, B, C, D - гармоническая. Сформулируем вывод.

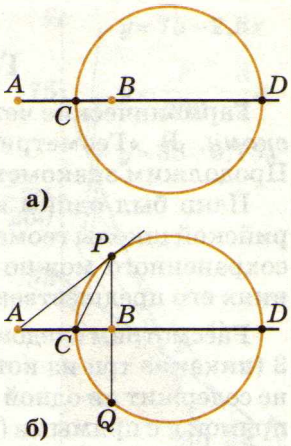


Рис 6.14.

Если окружность Аполлония задана относительно точек А и В, и прямая AB пересекает эту окружность в точках C и D (при этом: точка A — вне окружности, точка C — между A и B), то четверка точек A, B, C, D является гармонической, $W(ABCD) = -1$.

Проведем теперь из точки A касательную AP к окружности и точку касания P соединим с точкой В (рис. 6.14-б). Из определения Аполлония следует, что

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{CB},$$

а это означает, что PC - биссектриса угла APB. Угол APC измеряется половиной дуги CP, как угол между касательной и хордой, проведенной в точку касания, а угол CPB - половиной дуги CQ. Тогда дуги CP и CQ равны и прямая PB (как содержащая диаметр) перпендикулярна AB. Сформулируем вывод.

Если окружность Аполлония задана относительно точек A, B (A - вне окружности) и из точки A проведена касательная AP к этой окружности, то прямые PB и AB пересекаются под прямым углом.

БИССЕКТРИСЫ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Пусть AOB - произвольный треугольник (рис. 6.15), OC - биссектриса его угла, OD - биссектриса его внешнего угла. По свойству биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AO}{BO} \text{ и } \frac{AP}{BP} = \frac{AO}{BO'}$$

Отсюда:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AP}{BD'}$$

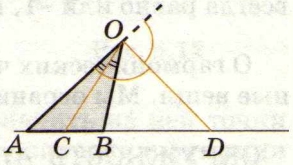


Рис. 6.15



Для любознательных

То, что знаешь в детстве, - знаешь на всю жизнь, но и чего не знаешь в детстве - не знаешь на всю жизнь.

М. И. Цветаева

Используя равенство $BD = -DB$, получаем:

$$Ш ABCD) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} : \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1.$$

Имеем, что $W(ABCD) = -1$, т. е. A, B, C, D - гармоническая четверка точек. Следовательно, точки С и !) будут точками окружности Аполлония, определенной относительно точек А и Б. Как известно, биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны, тогда отрезок CD - диаметр этой окружности. Сформулируем вывод.

1. Если в треугольнике ABO проведены биссектрисы OC и OD его внутреннего и внешнего углов при вершине O соответственно, то четверка точек A, B, C, D является гармонической, $W(ABCD) = — 1$.

2. Отрезок, соединяющий основания биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника при общей его вершине, является диаметром окружности Аполлония, определенной относительно двух других его вершин.

ФОРМУЛА ТОНКОЙ СОБИРАЮЩЕЙ ЛИНЗЫ

Вспомним известную в физике формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где d - расстояние от центра линзы О до предмета, f - расстояние от точки O до изображения, F - фокусное расстояние, т. е. расстояние от фокуса линзы до ее центра (рис. 6.16). Пусть K - точка, удаленная от центра линзы на двойное фокусное расстояние. Перепишем представленную выше формулу в виде $Ff + Fd = fd$, умножим последнее равенство на 2 и сгруппируем так: $2Ff - fd = -2Fd + fd$.

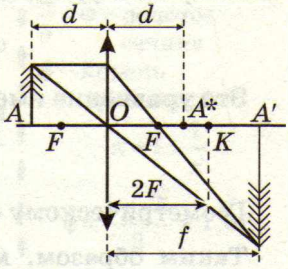


Рис. 6.16

Отсюда получим:

$$\frac{f}{2F - f} : \frac{d}{2F - d} = -1.$$

Замечаем, что

$$\frac{OA'}{A'K} : \frac{OA^*}{A^*K} = -1,$$

где А*- точка, симметричная точке А относительно центра O.

Т. е. четверка точек O, K, A', A^* является гармонической.

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика. - М.: Просвещение, 1967.
2. Математична хрестоматія / За ред. М. І. Кованцова. - К.: Рад. шк., 1970.



Для любознательных

Математика не только подготовит ученика к изучению естественных наук, научит его мыслить правильно и последовательно; она еще, кроме того, воспитает из него бесстрашного работника, для которого работа и скука станут несовместимыми понятиями.

Д. И. Писарев

Снова о золотом сечении

Принцип золотого сечения использовался и используется в архитектуре, живописи, графике и т. д., выполняется он и в природе, - например, пропорции фигуры человека подчинены этому принципу. Все это вы уже знаете с 7-го класса. Но теперь, когда в вашем распоряжении более широкий математический инструментарий, предлагаем вернуться к рассмотрению золотого сечения.

Напомним, что золотое сечение — это такое деление целого на две неравные части, при котором целое относится к большей части так, как большая часть к меньшей.

Попробуем найти значение такого отношения.

Пусть имеем произвольный отрезок *AB* и точку С на нем (рис. 6.17). Если точка *C* делит этот отрезок в соответствии с принципом золотого сечения, то выполняется соотношение:

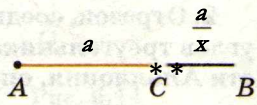


Рис. 6.17

$$AB : AC = AC : CB.$$

При таком размещении точки *C* на отрезке *AB* говорят, что точка С делит отрезок *AB* в *крайнем и среднем отношении.*

Обозначим искомое отношение через *x*, а длину *AC* - через *a*. Тогда

$$\frac{AB}{AC} = \frac{a}{CB} = x \text{ и } CB = \frac{a}{x},\ AB = ax = a + \frac{a}{x}.$$

Получили уравнение относительно *x*:

$$x = 1 + \frac{1}{x},\ x^2 - x - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Геометрическому смыслу соответствует только положительный корень.

Таким образом, мы доказали утверждение: точка заданного отрезка делит его по принципу золотого сечения (в крайнем и среднем отношении) тогда и только тогда, когда отношение большей его части к меньшей равно

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Именно это число называют *золотым сечением* и обозначают буквой ф. **Это число иррациональное и приближенно равно** ф **« 1,61803398.**

Буква ф, которой обозначают золотое сечение, - первая буква имени древнегреческого скульптора Фидия (430 г. до н. э.), который в своих скульптурах часто применял золотое сечение.

Напомним, что *прямоугольник называют золотым, если отношение длин его сторон равно числу* ф - *золотому сечению.* Докажем уже известное



Для любознательных

Искренний геометр наделен воображением и ощущением формы, красоты геометрического факта. Этим он подобен скульптору.

А. Д. Александров

вам имперически (т. е. сугубо практически) свойство золотого прямоугольника.

(77) Теорема. Если от золотого прямоугольника отрезать квадрат, то прямоугольник, который остался, также будет золотым.

Доказательство

Пусть *ABCD* - золотой прямоугольник, *ABEF* - квадрат (рис. 6.18). Обозначим сторону квадрата как *a*. Тогда

$$AB = BE = a,\ BC = \text{фа},\ EC = \text{ера} - a = a(\text{ф} - 1).$$

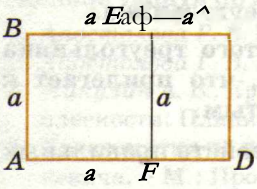


Рис. 6.18

Найдем отношение сторон прямоугольника *ECDF*:

$$\frac{EF}{EC} = \frac{a}{a(\text{ф}-1)} = \frac{1}{\text{ф}-1}.$$

Вспомним, что ф является корнем уравнения $x = 1 + \frac{1}{x}$, поэтому

$$\text{ф} = 1 + \frac{1}{\text{ф}} \text{ и } \frac{EF}{EC} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\text{ф}} - 1} = \text{ф}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим еще одно интересное свойство золотого сечения.

Ш Теорема. Отношение радиуса окружности *R* к стороне a_{10} правильного десятиугольника, вписанного в эту окружность, — золотое сечение.

Доказательство

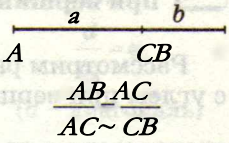
Сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса *R*, равна $a_{10} = 2R \sin 18°$ (стр. 88), тогда

$$\frac{R}{a_{10}} = \frac{1}{2\sin 18°} = \frac{1}{2\sin\frac{S-i}{4}} = \frac{1}{\text{Тб}-i} = \frac{1}{\text{Тб}+i} = \frac{1}{\text{ф}-1} = \text{ф}.$$

Теорема доказана.

Равнобедренный треугольник называют золотым, если отношение боковой стороны к основанию этого треугольника равно золотому сечению.

Когда в 8-м классе мы выводили формулу для значения синуса 18°, то рассматривали равнобедренный треугольник с углом 36° при вершине. Именно такие треугольники образовываются, если соединить все вершины правильного десятиугольника с его центром. Эти треугольники - золотые.



$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

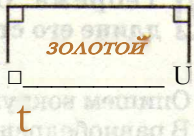
золотое сечение

или

С делит *AB* в крайнем и среднем отношении

тогда и только тогда, когда:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \text{Тб}}{2}$$



$\frac{a}{b} = \text{ф}$ - золотое сечние

ф - корень уравнения

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\text{ф} = \frac{1 + \text{Тб}}{2} \approx 1{,}62$$

Если от золотого прямоугольника отрезать квадрат, останется золотой прямоугольник.

Для правильного 10-угольника:

$$\frac{a_{10}}{R} = \text{ф}$$

Теорема. Равнобедренный треугольник с углом 36° при вершине является золотым.

Доказательство

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$ с углом при вершине 36° (рис. 6.19), боковую сторону этого треугольника примем за 1. Тогда его основание $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и отношение боковой стороны к основанию равно: $\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \varphi$.

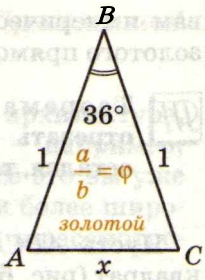


Рис. 6.19

Теорема доказана.

Докажите самостоятельно такое свойство золотого треугольника.

Теорема. Биссектриса угла при основании золотого треугольника делит его на два треугольника, из которых тот, что прилегает к основанию заданного треугольника, является золотым.

Золотые треугольники появляются и при изучении свойств правильных пятиугольников.

Теорема. Отношение длины диагонали правильного пятиугольника к длине его стороны равно золотому сечению.

Доказательство

Опишем вокруг правильного пятиугольника $ABCDE$ окружность (рис. 6.20). В равнобедренном треугольнике ACE угол при вершине С равен половине меры дуги AE (как вписанный, опирающийся на эту дугу). Тогда

$$\angle ACE = \frac{1}{2}\left(\frac{360°}{5}\right) = 36°.$$

Т. е. треугольник ACE — золотой и $\frac{AC}{AE} = \varphi$.

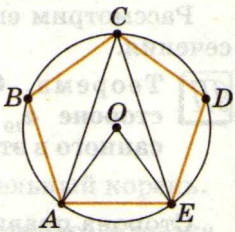


Рис. 6.20

Теорема доказана.

Докажите самостоятельно еще и такие свойства правильного пятиугольника.

Теорема. Если $ABCDE$ — правильный пятиугольник, а F и G - точки пересечения его диагонали AC соответственно с диагоналями BE и BD, то точка F делит каждый из отрезков CA и AG в крайнем и среднем отношении (рис. 6.21).

Совет. Проведите прямую OD, которая является осью симметрии данного пятиугольника и проходит через точку F.

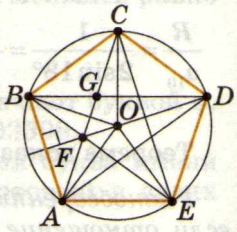


Рис. 6.21

Замечание. Ломаная, которую образовывают диагонали правильного пятиугольника, имеет форму звезды (рис. 6.21). Согласно последней теореме эту звезду отличает такое замечательное свойство: произвольный ее отрезок находится в отношении ф золотого сечения к наименьшему соседнему отрезку.

Например, для пятиугольника, изображенного на рисунке 6.22, выполняется:

$$\frac{AF}{FG} = \frac{AG}{GC} = \frac{CF}{AF} = \varphi.$$

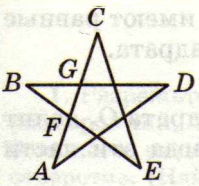


Рис. 6 22

Т. е. мы доказали соотношение, которое нас поражало в 7-м классе и благодаря которому звезде, или пентаграмме, встарину приписывали таинственный философский смысл, а в Древней Греции пентаграмма стала символом школы знаменитого ученого Пифагора.

Постройте самостоятельно (с помощью только циркуля и линейки) символ школы Пифагора - пятиконечную звезду.

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. ***Апостолова Г. В.*** Геометрія-7. - К.: Генеза, 2004.
2. ***Апостолова Г. В.*** Геометрия-8. - К.: Генеза, 2008.
3. ***Никулин А. В., КукушА. Г., Татаренко Ю. С.*** Геометрия на плоскости: Планиметрия. - Минск: ООО «Попурри», 1996.
4. Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкевича. - М.: Просвещение, 1976-1977.

Приложение 5

Геометрические преобразования приходят на помощь

В учебнике для 7-го класса приложения 9 и 10 были посвящены симметрии относительно прямой и ее использованию для решения задач. Теперь мы могли бы назвать их «использованием преобразования симметрии относительно прямой».

Рассмотрим примеры, когда и другие геометрические преобразования помогают решать задачи.

Пример 1. В треугольнике ***ABC*** проведены медианы ***AK*** и ***CE, /BAK = ZBCE*** = 30° (рис. 6.23). Докажите, что треугольник ***ABC*** - правильный.

Доказательство

1) ***/BAK = /BCE,*** тогда через точки ***C, A, E, K*** можно провести окружность y_x с центром O_x и радиуса ***R.***

2) ***/KO$_x$E = 2/EAK*** = 60°, тогда Д***O$_x$EK*** - правильный.

3) Точки А и ***B*** симметричны относительно точки ***E,*** тогда через точки ***B*** и ***E*** проходит окружность y_2, симметричная y_x относительно точки ***E,*** и 0,$\mathcal{L}$ = ***E0$_2$ = R.***

4) Аналогично через точки ***K a B*** проходит окружность y_3, симметричная y_x относительно точки ***K,*** и ***O$_x$K = K0$_3$ = R.***

5) AOjOgOg - правильный, ***B*** - общая точка окружностей y_2 и y_3.

Q

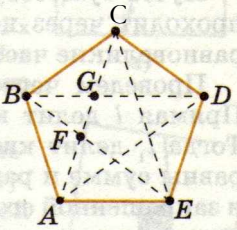
Ш

: Кроме того, ***AKEB*** - правильный (ZOj = 60°, ***0$_x$0$_2$ = 0$_x$0$_3$*** = 2***R).*** Тогда ***EB = R = KB, /EBK =*** 60°. Отсюда: ***AABC*** — правильный ***(/B =*** 60°, Рис. 6.23 ***AE = EB = R = BK = KC).*** Ч. т. д. |

Для правильного 5-угольника:

$$\frac{d}{«5} = Ф$$

(***d*** - диагональ)



AC AF AG
AE ~ FG ~ GC ~^

Искусство решать геометрические задачи чем-то напоминает трюки иллюзионистов.

И. Д. Новиков

Пример 2. Прямая делит квадрат на две части, которые имеют равные площади. Докажите, что эта прямая проходит через центр квадрата.

Доказательство

Произвольная прямая, которая проходит через центр квадрата O, делит его на две части, симметричные относительно точки O. Тогда эти части имеют равные площади.

Пусть существует некоторая прямая l_1, которая не проходит через центр квадрата, но делит его на две равновеликие части.

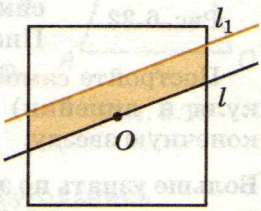


Рис. 6.24

Проведем через точку O прямую $l \parallel l_1$ (рис. 6.24).

Прямая l делит квадрат на две равновеликие части. Тогда l_1 делит квадрат на фигуры, площади которых равны сумме и разности площадей половины квадрата и закрашенной его части соответственно. Т. е. площади этих фигур не равны, что противоречит допущенному.

Утверждение доказано.

Пример 3. Две прямые l и τ делят квадрат на четыре равновеликие фигуры. Докажите, что эти прямые проходят через центр квадрата перпендикулярно друг другу.

Доказательство

По предыдущей задаче обе прямые l и τ проходят через центр квадрата.

Пусть эти прямые не перпендикулярны друг другу. Проведем через точку O прямую $\pi \perp l$ (рис. 6.25). Т. к. прямые π и l совпадают при повороте на 90° относительно точки O, то они делят квадрат на четыре равные фигуры (докажите это самостоятельно). Тогда прямая τ будет делить фигуру, площадь которой равна половине площади квадрата, на две части. Площади этих частей равны сумме и разности четверти площади квадрата и закрашенной части. (На рисунке S_1 - одна из таких частей.) Наше предположение ошибочно и $\tau \pm l$.

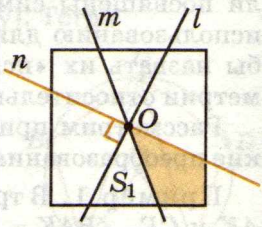


Рис. 6.25

Утверждение доказано.

Пример 4. Две прямые l и τ делят квадрат на четыре равновеликие фигуры. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата - вершины другого квадрата.

Доказательство

Из предыдущей задачи имеем, что заданные прямые проходят через центр квадрата O перпендикулярно друг другу. Пусть они пересекают стороны заданного квадрата $HEFG$ в точках A, B, C и D, как показано на рисунке 6.26. Докажем, что $ABCD$ - квадрат.

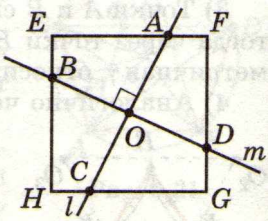


Рис. 6.26

Рассмотрим поворот квадрата вокруг точки O на 90° против часовой стрелки. Сторона EF перейдет в HE, а прямая l - в прямую τ, перпендикулярную к ней. Т. е. точка A переходит в B поворотом относительно O, тогда $OA = OB$. Аналогично: $OA = OB = OC = OD$. Тогда $ABCD$ - параллелограмм, диагонали которого равны и взаимно перпендикулярны, т. е. это квадрат.

Утверждение доказано.

Задания для самостоятельного разрезания

(задачи Мартина Гарднера)

1. Разрежьте квадрат на четыре части одинаковых форм и размеров так, чтобы из них можно было сложить новый квадрат большего размера, всередине которого было бы квадратное отверстие. (Найти решение этой задачи помогут рассмотренные нами примеры 2-4 и рисунок 6.27.)

2. Можно ли разрезать квадрат на две части, чтобы из них можно было снова сложить иной квадрат? Сколько способов разрезания вы можете предложить? (Разрез не обязательно осуществлять вдоль прямой линии.)

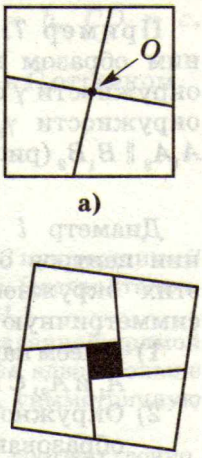


Рис. 6.27

Пример 5. Докажите, что в произвольном треугольнике высота не превышает среднее геометрическое полупериметра треугольника и разности его длины с длиной стороны, к которой проведена эта высота.

Доказательство

Пусть имеем треугольник ABC. Обозначим его стороны как a, $Ъ$ и c (соответственно обозначению вершин), а высоту к стороне a как h_a.

Надо доказать, что $h_a < \sqrt{p(p-a)}$, где p - полупериметр треугольника $АБС$.

Через вершину A проведем прямую $I \parallel BC$ и преобразованием симметрии треугольника ABC относительно I получим треугольник AB_1C_1 (рис. 6.28).

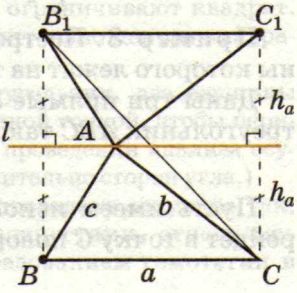


Рис. 6.28

1) По свойству преобразования симметрии и из неравенства для сторон треугольника AB_XC следует:

$$AB + AC = AB_1 + AC > CB_1 = \text{^CBЧBB*}.$$

2) Учитывая, что $BB_1 = CC_X = 2h_a$, получим:

$$c+b > \sqrt{a^2 + (2h_a)^2},$$ т. е.

$$(c + Ь)^2 - a^2 > 4h_a^2 \text{ и } h_a < \frac{1}{4}(c + Ъ + o)(c + Ъ - a)(p-a),$$

где p - полупериметр треугольника. Ч. т. д.

Пример 6. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD этой окружности проходит через точку M под углом 45° к AB. Докажите, что значение $CM^2 + DM^2$ не зависит от положения точки M на диаметре АВ.

Доказательство

Пусть точки C_x и D_1 - симметричны точкам C и D относительно диаметра AB (рис. 6.29).

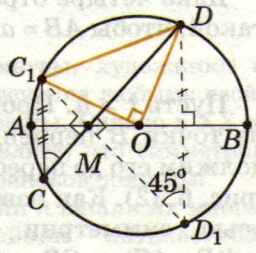


Рис. 6.29

1) По условию $\angle DMB = 45°$. Тогда $\angle DMD_t = 2 \cdot 45° =$ $= 90°$. Аналогично $\angle CMC_j = 90°$, и точки C_v M, D_1 лежат на одной прямой, причем $CD \perp C_1D_V$

2) Треугольник CMC_j - прямоугольный и равнобедренный. Тогда $\angle CjCM = 45°$, $CM = MC_V$

3) $CM^2 + DM^2 = C_xM^2 + DM^2 = C_XD^2$.

4) Вписанный $\angle C_XCD = 45°$, тогда $\angle C_XOD = 90°$ и $C_1D^2 = C_10^2 + 0D^2 = 2R^2$.

Т. е. $CM^2 + DM^2 = 2R^2$ и не зависит от расположения точки M на диаметре AB. Ч. т. д.

Пример 7. Равные окружности y_1 и y_2 касаются окружности y внутренним образом в точках A_1 и A_2 соответственно. Произвольную точку C окружности y соединили с точками A_1 и A_2. Отрезки CA_1 и CA_2 пересекают окружности y_1 и y_2 в точках B_1 и B_2 соответственно. Докажите, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ (рис. 6.30).

Доказательство

Диаметр l окружности y, перпендикулярен линии центров окружностей y_1 и y_2, - ось симметрии этих окружностей (рис. 6.30). Построим точку C_1, симметричную C относительно l.

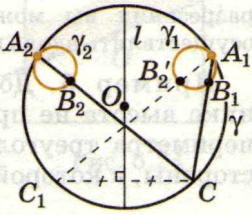


Рис. 6.30

1) Имеем пары точек, симметричных относительно l: A_1 и A_2, C и C_1, B_1 и B_2'. Тогда $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel CC_1$.
2) Окружность y_1 переходит в окружность y_2 преобразованием гомотетии относительно точки A_1. Причем $B_1 \to C$, а $B_2' \to C_1$, т. е. $B_1B_2' \parallel CC_1$.
3) $B_2'B_2 \parallel l$, $l \parallel CC_1$, и $B_2'B_1 \parallel CC_1$, тогда точки B_2, B_2' и B_1 принадлежат одной прямой и $B_1B_2 \parallel A_1A_2$. Ч. т. д.

Пример 8. Постройте правильный треугольник, вершины которого лежат на трех заданных параллельных прямых.

Даны три прямые $a \parallel b \parallel c$. Надо построить правильный треугольник ABC так, чтобы $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ (рис. 6.31).

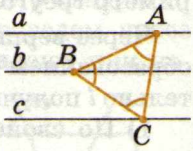


Рис. 6.31

Анализ

Пусть имеем искомый треугольник. Тогда точка B перейдет в точку C поворотом относительно точки A на 60°.

План построения

1) Обозначим на прямой a произвольным образом точку A.
2) Для прямой b строим поворотом относительно точки A на 60° образ b_1.
3) Точку пересечения прямых b_1 и c обозначаем как C и делаем засечку с центром в точке A радиусом, равным AC, до пересечения с прямой b. Получим точку B.

Треугольник ABC - искомый.

Доказательство проведите самостоятельно.

Пример 9. Постройте четырехугольник $ABCD$, у которого диагональ AC являлась бы биссектрисой внутреннего угла, если задано все его стороны.

Дано четыре отрезка: a, b, c, t. Надо построить четырехугольник $ABCD$ такой, чтобы $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = t$, $AC = l_A$ (рис. 6.32).

Анализ

Пусть $t > a$. Проведем в четырехугольнике $ABCD$ из точки B перпендикуляр к диагонали AC и продолжим его до пересечения со стороной AD в точке B_1 (рис. 6.32). Как известно, биссектриса угла является осью симметрии этого угла. Тогда: $d(B;AC) = d(B_1;AC)$ и $CB = CB_1$, $AB = AB_1$; $B_1D = AD - AB_1 = AD - AB = t - a$; AB_1CD - базовый.

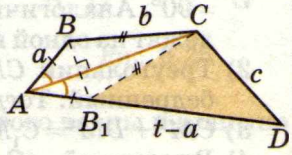


Рис. 6.32

План построения

1) Строим отрезок $t - a$.
2) Строим треугольник CDB_1 по трем сторонам ($B_1C = b$, $CD = c$, $B_1D = t - a$).
3) Продолжим отрезок B_1C на $B_1A = a$ и соединим точки A и C отрезком.
4) Строим точку B, симметричную B_1 относительно AC.
Четырехугольник $ABCD$ - искомый.

Доказательство проведите самостоятельно.

Задачи для самостоятельного решения

1. Точка M лежит на биссектрисе внешнего угла треугольника ABC при вершине C (M не совпадает с C). Докажите, что $MA + MB > CA + CB$. (Совет. Постройте точки Bj и A_1 симметричные точкам A и B относительно прямой CM.)
2. Даны прямая и точки A, B по одну сторону от нее. Найдите на заданной прямой такую точку X, чтобы угол, образованный с ней лучом XB, был вдвое меньше угла, образованного лучом XA. (Совет. Постройте точку B_1 симметричную точке B относительно заданной прямой.)
3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отметили точки M и K соответственно. Причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$. (Совет. Воспользуйтесь преобразованием поворот на 90° относительно точки А.)
4. В параллелограмм вписан квадрат. Докажите, что перпендикуляры, проведенные из вершин параллелограмма к сторонам квадрата, ограничивают квадрат. (Совет. Воспользуйтесь преобразованием поворот относительно центра квадрата на 90°.)
5. Даны острый угол и точка внутри него. Постройте треугольник, две вершины которого лежат на сторонах угла, а третья совпадает с заданой точкой, чтобы периметр этого треугольника был наименьшим. (Совет. При проведении анализа осуществите преобразование симметрии заданной точки относительно сторон угла.)
6. Через точку пересечения двух заданных окружностей проведите секущую так, чтобы длины хорд, отсекаемые на этой секущей окружностями, относились как: а) 2 : 1; б) $т : п$. (Совет. Воспользуйтесь преобразованием гомотетии и примером 2 на стр. 127.)
7. Постройте равносторонний треугольник, вершины которого лежат на трех заданных концентрических окружностях. (Совет. Поможет пример 8 на стр. 230.)

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. *Апостолова Г. В.* Геометрія-7. - К.: Генеза, 2004.
2. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. - М.: Наука, 1991. - Ч. 1.
3. *Полонский В. Б., Рабинович Э. М., Якир М. С.* Учимся решать задачи по геометрии. - К.: Магистр-S, 1996.
4. *Бурда М. І.* Розв'язування задач на побудову. - К.: Рад. шк., 1986.



Для любознательных

Симметрией с древних времен интересовались геометры, художники и архитекторы: геометры, потому что они вообще интересуются любыми свойствами форм, а художники и архитекторы - ради красоты. Однако в XX в. симметрией заинтересовались и физики - они догадались, что симметрия многих предметов вокруг нас обусловлена симметрией законов природы!

Тогда физики начали искать новые виды симметрии и нашли их много. Например, у каждой элементарной частицы есть двойник - античастица. Известные слова Галилея о том, что природа говорит с нами языком математики, подтвердились снова.

Элементы проективной геометрии, или что можно сделать с помощью линейки и неподвижной окружности

...Знание законов перспективы является вместе с тем и знанием проективной геометрии, по крайней мере ее элементарных понятий. Может, именно поэтому прекрасными полотнами мастеров эпохи Возрождения мы восторгаемся до сих пор.

М. И. Кованцов

Вспомните, как вы увеличивали рисунок. Аналогично можно выполнить и уменьшение рисунка.

А если оригинал слишком большой или трехмерный? В таких случаях существует довольно простой способ копирования. Возьмите прозрачную пластину и, смотря сквозь нее на предмет, обведите линии оригинала (рис. 6.33).

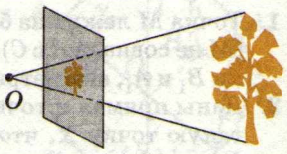


Рис. 6.33

Геометрически получается, что каждая точка предмета изображается точкой пересечения плоскости картины с лучом зрения, который идет от вашего глаза к изображаемой точке. Такое копирование называется ***центральным проектированием.*** Ваш глаз является ***центром проекции,*** рисунок - ***проекцией,*** а пластинка, на которую вы проектируете, - ***плоскостью проекции.***

На рисунке 6.34 изображено проектирование квадрата и круга, чертежи которых сделаны в плоскости a, на другую плоскость a'. Рисунок, который образуется на a', похож на оригинал, но есть и отличия. Прямая линия изображается прямой линией, точка - точкой, круг (окружность) превращается в овал (эллипс), длины отрезков изменяются. Таким образом, одни свойства фигуры сохраняются, а другие нет.

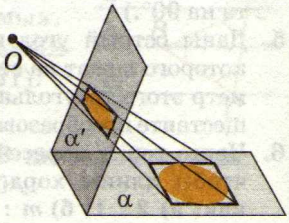


Рис. 6.34

Проектируя, мы не воспроизводим оригинал, а преобразовываем его.

Свойства, которые устанавливаются измерением, называют ***метрическими***, свойства, которые не изменяются при проектировании, называют ***проективными.*** Вот ими и занимается ***проективная геометрия.***

Перечислим простейшие ***свойства центрального проектирования*** фигур (рис. 6.35):

- точка преобразуется в точку;
- прямая преобразуется в прямую;
- точка, которая принадлежит некоторому отрезку, преобразуется в точку, которая лежит на изображении этого отрезка.

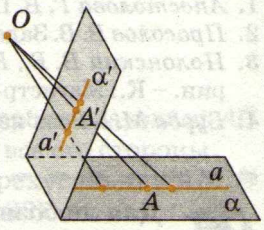


Рис. 6.35



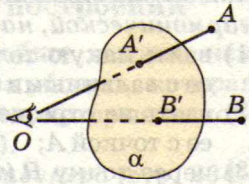
Для любознательных

Метод центральных проекций дает наглядное изображение, потому что такое построение образа воспроизводится процессом зрения. Глазу все равно - рассматривать оригинал или его центральную проекцию на плоскость. (Однако в сказанном мы кое-что упростили: оригинал человек рассматривает двумя глазами.)

Кстати, при проектировании параллельные прямые могут превращаться в непараллельные (рис. 6.36 и 6.37). Попробуйте самостоятельно найти ответ, почему на рисунке 6.34 параллельные прямые проектируются в параллельные прямые, а на рисунках 6.36 и 6.37 параллельные прямые превращаются в непараллельные.



Рис. 6.36



A, B- оригиналы
A', B' - проекции
A, B на a
a - плоскость проекции
O - центр проекции

Мы начали рассмотрение проективной геометрии с проектирования одной плоскости на другую. Дальше мы будем «работать» в плоскости, т. е. рассматривать центральное проектирование одного прямолинейного ряда точек (совокупности точек, которые лежат на одной прямой) на второй ряд. Понятно, что при таких условиях и оригинал, и центр проекции, и изображение лежат в одной плоскости (рис. на поле).

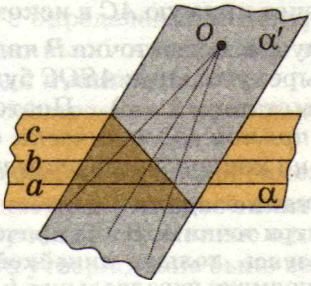


Рис. 6.37

Свойства центрального проектирования:
- точка —> точку;
- прямая —» прямую;
- *A* с [a] -» *A'*с [a'].

Такое проектирование имеет важное свойство. Если из какого-то центра спроектировать один прямолинейный ряд на второй, то сложные отношения любой четверки точек не изменяются.

Тогда ***гармонические четверки точек*** (стр. 221) ***всегда проектируются в гармонические четверки.***

Проектирование гармонической четверки точек имеет еще одно интересное и полезное свойство. Пусть на прямой имеем гармоническую четверку точек ***M, R, N, Q*** (рис. 6.38). Если из точки ***P*** спроектировать эту четверку на прямую ***AQ,*** то получим также гармоническую четверку точек ***A, B, L, Q.*** Если продолжить отрезки ***RB*** и ***AR*** до пересечения с прямыми ***PA*** и ***PB*** в точках ***F*** и ***E*** соответственно, то точка пересечения диагоналей четырехугольника ***AFEB*** совпадет с точкой ***R.***

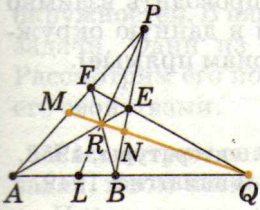
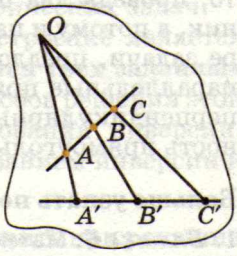


Рис. 6.38

Попробуйте доказать это самостоятельно.



Центральное проектирование в плоскости


Для любознательных

Впервые правильным изображением перспективы серьезно заинтересовались художники эпохи Возрождения, особенно ***Альбрехт Дюрер*** (1471-1528) и ***Леонардо да Винчи*** (1452-1519). Потом к решению этой задачи приступили математики и создали красивую науку - ***проективную геометрию.*** Ее основы были заложены ***Жераром Дезаргом*** (1593-1661) и ***Блезом Паскалем*** (1623-1662).

Итак, если на прямой заданы какие-то три точки *A, B и C,* то *для того, чтобы построить точку D так, чтобы четверка точек A, B, C, D была гармонической, надо* (рис. 6.39):

1) **взять какую-то точку *P* вне данной прямой и соединить ее с заданными точками A, B и C;**
2) **взять на отрезке *PC* произвольную точку *Q* и соединить ее с точкой A;**
3) **через точку *R* (точка пересечения *PB* с *AQ*) и точку C провести прямую до пересечения с *AP* в точке *S;***
4) **прямая *SQ* пересечет прямую AC в искомой точке *D.***

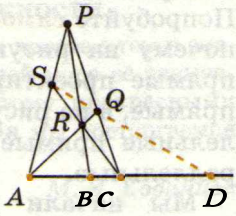


Рис. 6.39

Замечание. В случае, когда точка B является серединой отрезка AC, четырехугольник *ASQC* будет трапецией (докажите это самостоятельно). Поэтому говорят, что *бесконечно отдаленная точка прямой гармонически делит середину любого отрезка прямой относительно концов этого отрезка и наоборот.*

А теперь решите такие задачи самостоятельно.

1. На прямой ***l*** заданы три точки Л, В и С, причем известно, что точка ***B*** - середина отрезка ***AC.*** Пользуясь только линейкой, проведите через точку ***S,*** не принадлежащую ***l,*** прямую, параллельную ***l.***
2. Даны две параллельные прямые ***l, r*** и на одной из них отрезок ***AC.*** Пользуясь только линейкой, разделите этот отрезок пополам.
3. На плоскости даны параллелограмм, точка и прямая, не проходящая через эту точку. Пользуясь только линейкой, проведите через заданную точку прямую, параллельную данной прямой.
4. На плоскости дан параллелограмм и некоторый отрезок. Пользуясь только линейкой, разделите этот отрезок пополам.

Швейцарский математик *Якоб Штейнер* доказал следующее. Если на плоскости дана окружность, причем указан ее центр, то все построения, которые выполняются с помощью циркуля и линейки, можно выполнить с помощью одной линейки.



Рис. 6.40

В самом деле, если задана окружность с центром *O* (рис. 6.40), то, проведя два произвольных диаметра, получим прямоугольник, а потому и параллелограмм. Тогда, если уметь решать четыре задачи, предложенные выше, то можно с помощью линейки: проводить параллельные прямые; делить пополам любые отрезки; проводить взаимно перпендикулярные прямые (надо построить вписанный в данную окружность прямоугольник и провести параллельные его сторонам прямые).

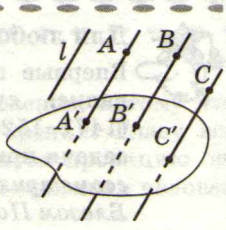
Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. ***Бляшке Б.*** Математическое просвещение. - М.: Изд-во техн. литературы, 1958.
2. ***Вольберг О. А.*** Основные идеи проективной геометрии. - М.: Физматгиз, 1949.
3. ***Игнациус Г. И.*** Проективная геометрия. - М.: Знание, 1966.
4. ***Кованцов М. І.*** Геометричні перетворення. — К.: Вища шк., 1972.
5. Математична хрестоматія: Геометрія. - К.: Рад. шк., 1970.



Для любознательных

Художники пользуются только методом центральных проекций. Однако существует еще и ***метод параллельных проекций.*** Он отличается от метода центральных проекций только тем, что проектирующие прямые не проходят через фиксированную точку, а параллельны фиксированному направлению (см. рис.).



Инверсия в дивертисменте* геометрических построений

Геометрические построения можно выполнять, вообще говоря, чем угодно и как угодно. В математике существует отдельная область, которая называется ***геометрографией*** (геометрические построения, которые выполняются с помощью заранее определенных инструментов).

Мы уже говорили о так называемых ***построениях Штейнера*** (стр. 234). Эти построения выполняются с помощью только линейки при условии, что на плоскости дана окружность с определенным центром. В этом случае с помощью только линейки можно выполнить любые построения, которые выполняются с помощью циркуля и линейки.

Рассмотрим другой пример: ***построения с помощью циркуля - построения Мора-Маскерони.***

Следует заметить, что любую задачу на построение, которая решается с помощью циркуля и линейки, можно решить с помощью одного только циркуля. Заметим, что при построении с помощью одного циркуля определяют только концы отрезков. Это утверждение было впервые опубликовано в книге датского математика ***Георга Мора*** «Датский Евклид» (1672), а потом в работе итальянского инженера ***Георга Лоренцо Маскерони*** «Геометрия циркуля» (1797). Для доказательства теоремы Мора-Маскерони достаточно убедиться, что с помощью одного только циркуля можно определить точку пересечения двух прямых (каждая из которых задана двумя точками); точку пересечения заданных прямой и окружности. С этой целью воспользуемся преобразованием ***инверсии.***

Все геометрические преобразования школьного курса планиметрии переводили прямые в прямые, а окружность в окружность. ***Инверсия - это преобразование*** другого типа, ***которое может сохранять класс прямых и окружностей, а может перевести прямую в окружность, а окружность в прямую.*** На этом и других замечательных свойствах инверсии основывается ее впечатляющая эффективность при решении геометрических задач.

Одной из интереснейших задач на геометрическое построение является задача Аполлония: постройте окружность, которая касается трех заданных окружностей. В наше время существует много разных способов решения этой задачи. Один из них - решение с помощью преобразования инверсии. Рассмотрим его после того, как ознакомимся с преобразованием инверсии и его свойствами.

Рассмотрим вначале две теоремы, которые полезно помнить при решении задач, в том числе и на построение.

Пусть имеем окружность у с центром О и точку ***A,*** расположенную на расстоянии ***d*** от точки ***O*** (рис. 6.41).
Радиус окружности равен г.

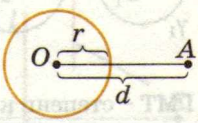


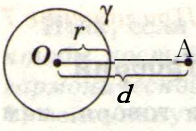
Рис. 6.41

Величина ст = $d^2 - r^2$ ***называется степенью точки A относительно окружности у.***

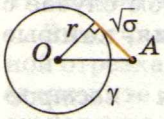
Возможны такие ***случаи расположения точки и окружности.***

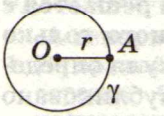
1. Точка ***A*** лежит вне окружности (рис. 6.42). Тогда ***a*** > 0 и равняется квадрату касательной, проведенной из точки А к данной окружности.

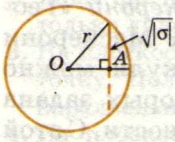
* Дивертисмент - концертная программа в эстрадных театрах.

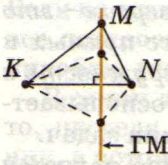


$a = d^2 - r^2$ *степень точки А относительно окружности* у.

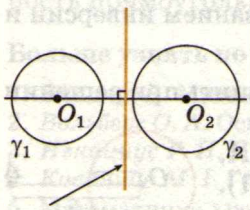








$KM^2 - MN^2 = \text{const}$



ГМТ - степени которых относительно y_t и y_2 равны.

2. Точка *А* лежит на окружности, тогда $d = r$, $o = 0$.

3. Точка *А* лежит внутри окружности (рис. 6.43). Тогда $a < 0$ и $|ст|$ равняется квадрату половины хорды, которая проведена через точку А перпендикулярно к ОА.

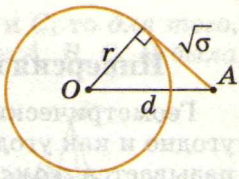
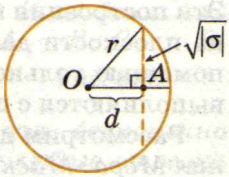


Рис. 6.42



6.43

Рис.

Ш Теорема 1. Геометрическое место точек, разность квадратов расстояний от которых до двух заданных точек *А и В* является величиной постоянной, — прямая, перпендикулярная к *АВ.*

Доказать эту теорему нетрудно, если воспользоваться формулой Архимеда («Геометрия-8», стр. 217), или методом координат, или с помощью теоремы Пифагора (стр. 129). Предлагаем это сделать самостоятельно.

Ш Теорема 2. Геометрическое место точек, степени которых относительно двух данных неконцентрических окружностей равны между собой, — прямая, перпендикулярная к линии центров этих окружностей.

Пусть r_1 и r_2 - радиусы даных окружностей, d_1 и d_2 ~ расстояния от точек, которые принадлежат искомому ГМТ, до центров этих окружностей. По условию $d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$ или $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = \text{const}$.

Тогда по теореме 1 утверждение теоремы 2 выполняется.

Рассмотренное геометрическое место точек называется *радикальной осью двух данных окружностей.*

Возвратимся теперь к рассмотрению *инверсии.* Пусть дана окружность **у** радиуса г с центром в точке *О.*

Инверсией относительно окружности у называется преобразование, которое переводит произвольную точку АшО в точку А, расположенную на луче ОА на расстоянии* $OA^* = \frac{r^2}{OA}$ *от центра окружности* (рис. 6.44).

Инверсию относительно такой окружности еще называют *инверсией с центром О (степень инверсии r^2),* а окружность **у** - *окружностью инверсии.*

Возможны три случая размещения точки и окружности (рис. 6.44).

Докажем такие свойства преобразования инверсии.

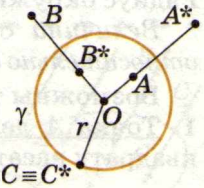


Рис. 6.44

СВОЙСТВА ИНВЕРСИИ

1. Образом точки, принадлежащей окружности инверсии, является сама эта точка.
2. Образом прямой, проходящей через центр инверсии, является сама эта прямая.
3. Образом прямой ***l,*** не проходящей через центр инверсии О, будет окружность, которая проходит через точку ***O*** с центром в образе точки, симметричной точке О относительно ***l.***
4. Окружность с центром С, проходящая через центр инверсии О, переходит в прямую, перпендикулярную к ОС.
5. Окружность, которая не проходит через центр инверсии О, переходит в окружность, не проходящую через точку О.
6. При инверсии касание окружностей и прямых сохраняется, если их точка касания не совпадает с центром инверсии. В последнем случае образами будет пара параллельных прямых.

Свойство 1. Докажите самостоятельно.

Свойство 2. Доказательство

Пусть ***l*** - заданная прямая, ***O*** - центр инверсии и ***O ∈ l,*** ***A***- произвольная точка данной прямой ***l.*** Тогда ***l = (OA).*** По определению инверсии точка А* лежит на прямой ***OA,*** т. е. на ***l.*** Утверждение 2 доказано.

Свойство 3. Доказательство

Пусть ***l*** - заданная прямая, О - центр инверсии и ***O ∉ l.*** Проведем ***O A ⊥ l.*** Образ А* принадлежит прямой ***OA*** (рис. 6.45).

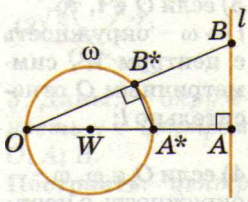


Рис. 6.45

1) Докажем, что для произвольной точки ***B ∈ l*** образ ***B**** лежит на окружности со, диаметр которой равен ***OA*.***

По определению инверсии ***OB ■ OB* = r² - OA ■ OA**** и ***OB*:OA* = OA:OB.*** Точка пересечения луча ***OB*** с окружностью со удовлетворяет этому условию, т. к.

AOAB ~ AOB*A* как прямоугольные треугольники с общим углом О. ***OB* =*** $\frac{r^2}{OB}$ – фиксированное число, и на луче ***OB*** существует только одна точка ***B*,*** которая удовлетворяет этому условию.

2) Докажем, что центр ***W*** окружности со является образом точки, симметричной точке О относительно ***l.***

Точка ***K,*** симметричная точке ***O*** относительно ***l,*** лежит на прямой ***OA*** и удалена от нее на расстояние ***AK = OA*** (рис. 6.46). Тогда точка ***K**** как образ точки ***K*** по свойству 2 тоже лежит на прямой ***OA***

и ***OK* =*** $\frac{r^2}{OK} = \frac{OA^* OA}{2\ OA}$ = OA*:2, т. е. ***K* = W.***

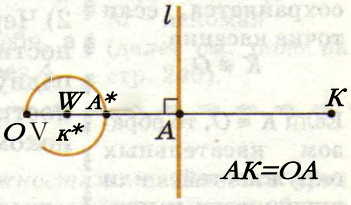


Рис. 6.46

Утверждение 3 доказано.

Свойство 4. Свойство 4 является следствием свойства 3. Докажите его самостоятельно. (Совет. Воспользуйтесь свойством 1.)

Свойство 5. Докажите самостоятельно. (Совет. Воспользуйтесь методом от противного.)

Инверсия относительно окружности у:

$A \to A^*$

$OA^* = \frac{r^2}{OA}$

$(A^* O)$

СВОЙСТВА ИНВЕРСИИ:

1) если А є у, то А -> А* = А;

2) если O є π, то π —» п* = π;

3) если Очі, то / —► со — окружность с центром W, симметричным О относительно l;

4) если О є со, со - окружность с центром C, то со -> $\pi \pm OC$;

5) если О ё со, со - окружность, то со —> со* - окружность и $O\ i$ со*;

6) касание окружностей и прямых сохраняется, если точка касания $K^* O$.

Если $K = O$, то образом касательных окружностей, или окружности и прямой, будут параллельные прямые.

Свойство 6. Доказательство

1) Если точка касания не совпадает с центром инверсии, то после инверсии окружность и прямая, как и раньше, будут иметь одну общую точку - касание сохраняется.

2) Если две окружности с центрами в точках А и B касаются друг друга в центре инверсии О, то после инверсии, согласно свойству 4, получим их образы - две прямые, перпендикулярные к линии центров AB (т. к. О є AB). Имеем две параллельные прямые.

3) Если прямая I касается окружности в точке O с центром А, то после инверсии прямая I переходит сама в себя, а окружность - в прямую, перпендикулярную к OA. Опять имеем две параллельные прямые.

Утверждение б доказано.

Вернемся к теореме Мора-Маскерони. Ее доказательство проведем в виде решения задач. Напомним, что при решении *можно пользоваться только циркулем.*

Задача 1. Даны три точки A, B, C. Постройте точку C_1, симметричную точке С относительно прямой AB.

План построения

Проводим две дуги радиусами AC и BC с центрами в точках А и Б соответственно (рис. 6.47). Их пересечение определяет искомую точку C_1.

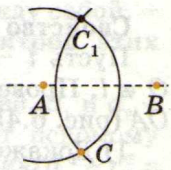


Рис. 6.47

Доказательство

Прямая AB - линия центров двух окружностей, пересекающихся в точках С и C_1. Тогда точки С и Cj симметричны относительно AB. Ч. т.д.

Задача 2. Даны окружность у, ее центр O и произвольная точка A. Постройте точку А*, в которую переходит точка A при инверсии относительно окружности у.

План построения

1) Через О проводим окружность со с центром в А. со П у = $\{B; C\}$ (рис. 6.48).

2) Через O проводим две окружности 5j и 6_2 с центрами В и С, радиусом, равным радиусу окружности у. 6, П 6_2 = $\{O; M\}$. М-искомая.

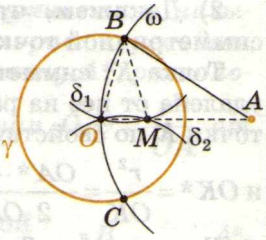


Рис. 6.48

Доказательство

Равнобедренные ΔOBM и $AOBA$ подобны (угол O — общий): $\frac{OB}{OM} = \frac{OA}{OB}$, $OA \cdot OM = OB^2 = r^2$ и $M = A^*$.

Ч. т. д.

Задача 3. Даны окружность y, ее центр O и произвольные точки ***A*** и ***B***. Постройте центр окружности, в которую переходит прямая ***AB*** при инверсии относительно y.

План построения

1) ***C,*** симметричная ***O*** относительно (AB) (задача 1).
2) ***M,*** в которую переходит ***C*** при инверсии относительно y (задача 2). Точка ***M*** - искомая.

Докажите самостоятельно. (Совет. Воспользуйтесь п. 2 доказательства свойства 3.)

Задача 4. Даны три точки ***A, B и C.*** Найдите центр окружности, проходящей через эти точки.

План построения

1) Произвольная окружность y с центром A.
2) Точки ***M*** и ***N,*** в которые переходят точки B и C инверсией относительно построенной окружности (задача 2).
3) Центр окружности, в которую переходит (***MN***) при инверсии относительно y (задача 3), - искомая точка.

Докажите самостоятельно. (Совет. Докажите, что окружность, которая проходит через A, Б и C, перейдет при инверсии относительно y в прямую ***MN.)***

Задача 5. Найдите точку пересечения данной окружности y с данной прямой ***MN.***

План построения

1) Находим центр y (задача 4). Обозначим его как A.
2) Находим центр ***O*** окружности, в которую переходит (***MN***) при инверсии относительно y (задача 4).
3) Проводим окружность со с центром ***O,*** проходящую через точку A (т. е. окружность, в которую при инверсии переходит прямая ***MN).*** со П y = ***{P;*** Q} - искомые.

Докажите самостоятельно. (Совет. Обратите внимание на комментарий к п. 3 построения.)

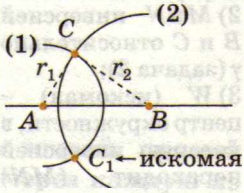
Задача 6. Даны четыре точки ***A, B, C*** и ***D.*** Найдите точку пересечения прямых ***AB*** и ***CD.***

План построения

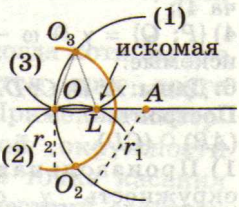
1) Произвольная окружность y с центром A.
2) При инверсии относительно y (AB) перейдет в себя, а ***(CD)*** - в некоторую окружность co, проходящую через A.

ПОСТРОЕНИЕ
Мора—Маскерони

1. Даны: A; ***B; C.***
Построить: C,, ***симметричную C относительно*** (AB).



2. Даны: ***окружность*** y ***с центром O; A.***
Построить: ***A″ инверсией A относительно окружности*** y.



3. Даны: ***окружность*** y ***с центром O; A; B.***
Построить: ***центр W окружности*** co, ***в которую переходит (AB) инверсией относительно окружности*** y.
1) ***C*** - симметричная ***O*** относительно (AB);
2) ***M,*** в которую переходит C инверсией относительно окружности y;
M - искомая
(далее см. поле на t стр. 240).



Для любознательных

Углом между двумя пересекающимися окружностями называется угол между касательными к этим окружностям, проведенными через общую точку окружностей. Аналогично определяется угол между прямой и окружностью. Докажите такое свойство инверсии. **При инверсии сохраняются углы: между прямыми; между прямой и окружностью; между окружностями.**

4. Даны: ***A; B; C.***
Построить: ***центр окружности, проходящей через A, B, C.***
1) Произвольная окружность y с центром ***A;***
2) ***MVLN***-инверсией ***B и C*** относительно ***y*** (задача 2);
3)***W*** (искомая) - центр окружности, в которую инверсией переходит (***MN***) относительно ***y.***
5. Даны: y; ***M; N.***
Построить:
y ∧ ***(MN).***
1)A- центр y (зад. 4);
2) ω - инверсией ***MN*** относительно y;
3) O - центр ω (задача 4);
4) {P; Q} = y ∧ ω - искомые.
6. Даны: ***A; B; C; D.***
Построить:
(AB) ∧ (CD).
1) Произвольная окружность y с центром ***A;***
2) ω - инверсией ***CD*** относительно y;
3) ***W*** - центр ω (задача 3);
4) {A; ***P)*** = ω ∧ (AB);
5) искомая ***Q*** - инверсией ***P*** относительно ***y.***

3) Найдем центр окружности ω (задача 3).
4) ω ∧ (AB) = {A; *P}* (задача 5).
5) *Q*, в которую переходит *P* при инверсии относительно y, - искомая точка пересечения прямых AB и *CD*.

Докажите самостоятельно. **(Совет. Обратите внимание на пункт 2 построения).**

Очевидно, что *из решения задач 5 и 6 (с помощью циркуля) и следует теорема Мора-Маскерони.*

Знания об инверсии могут пригодиться и при решении задач на традиционное построение (с использованием циркуля и линейки). Например, теперь мы можем легко решить *задачи Аполлония Пергского.*

Задача 7. Постройте окружность, которая проходит через две заданные точки A и B и касается данной окружности y.

Анализ

При инверсии с центром A искомая окружность перейдет в прямую, проходящую через B*, касательную к *y*.*

План построения

1) Инверсия с центром A относительно произвольной окружности.
2) Касательную *l* к окружности y* через B*.
3) Инверсией *I* перейдет в искомую окружность.

Доказательство и исследование выполните самостоятельно. **Приводим результат исследования, к которому вы должны прийти:**

1) если A и B принадлежат y, или лежат внутри y, или одна из точек содержится внутри y, - задача решения не имеет;

2) если y принадлежит только одна из заданных точек, - имеем одно решение;

3) если обе точки лежат вне y, - имеем два решения.



Для любознательных

Примените инверсию

1. В сегмент вписывают пары окружностей, касающиеся друг друга. Найдите множество точек их касания.
2. Докажите, что инверсия с центром в вершине ***A*** равнобедренного треугольника ABC (AB = ***BC)*** и степенью AB^2 переводит основание ***BC*** треугольника в дугу ***BC*** окружности, описанной вокруг этого треугольника.
3. Найдите множество точек касания пар окружностей, которые касаются сторон заданного угла в данных точках ***A и B.***
4. Никакие три из четырех точек ***A, B, C, D*** не лежат на одной прямой. Докажите, что угол между окружностями (см. стр. 239), описанными вокруг треугольников ABC и ***ABD,*** равен углу между окружностями, описанными вокруг треугольников ***ACD*** и ***BCD.***
5. В сегмент вписывают произвольные пары окружностей, которые пересекаются. Через точки пересечения каждой пары окружностей проводят прямую. Докажите, что все полученные прямые проходят через одну точку.

Предлагаем для самостоятельной, решения *другие две задачи Аполлония.*

Постройте окружность, которая:

1) проходит через заданную точку и касается двух заданных окружностей;

2) касается двух заданных окружностей и заданной прямой.

Теперь вернемся к задаче Аполлония (стр. 235). Аполоний сформулировал ее так.

ЗАДАЧА АПОЛЛОНИЯ ПЕРГСКОГО
(ок. 262-190 гг. до н. э.)

Даны три фигуры, каждая из которых может быть точкой, прямой или окружностью. Постройте окружность, проходящую через каждую из данных точек и касающуюся каждой данной прямой или окружности.

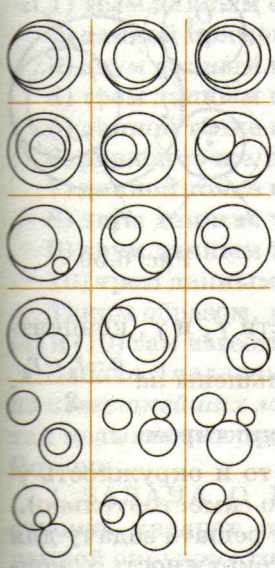


Рис. 6.49

Случаев расположения трех окружностей на плоскости может быть много, на рисунке 6.49 далеко не все из них, - например, не рассмотрен случай пересечения окружностей. Неужели для решения задачи Аполлония нужно рассматривать каждый из таких случаев отдельно? Совсем не обязательно, если знать инверсию!

Рассмотрим сначала все случаи, когда хотя бы две из заданных окружностей касаются друг друга (неважно, внешне или внутренне). Применим инверсию относительно вспомогательной окружности произвольного радиуса с центром в точке касания заданных окружностей. Тогда по шестому свойству инверсии касательные окружности перейдут в параллельные прямые, а третья из заданных окружностей - в окружность или прямую. Рассматриваемые задачи Аполлония свелись к задаче: *построить окружность, касательную к двум заданным параллельным прямым и окружности (прямой).* Ее легко решить с помощью циркуля и линейки. Сделайте это самостоятельно.

Замечание. С помощью циркуля и линейки можно легко построить окружность или прямую, в которую превращается окружность (прямая) при инверсии относительно какой-то заданной окружности. Для этого надо на окружности (прямой), являющейся прообразом, взять три точки, построить соответствующие им точки-образы (см. задачу 2 на стр. 238), а после этого через полученные три точки провести окружность (прямую).



Для любознательных

Выполните построение, используя только циркуль. (Отрезок считается построенным, если построены его концы.)

1. Постройте отрезок вдвое длиннее данного.
2. Постройте отрезок в n раз длиннее данного.
3. Постройте середину отрезка с заданными концами.
4. Постройте окружность: **а)** которая проходит через три заданные точки;
б) в которую переходит данная прямая AB при инверсии относительно заданной окружности с заданным центром O.

Таким образом, ПЛАН ПОСТРОЕНИЯ *окружности в задаче Аполлония для случая двух заданных касательных окружностей будет таким.*

1) *Строим параллельные прямые и окружность (или прямую), в которые преобразуются заданные окружности инверсией относительно произвольной вспомогательной окружности с центром в точке касания;*
2) *строим окружности (решений может быть несколько), касательные к полученным прямым и окружности (или прямой);*
3) *на трех заданных окружностях отмечаем точки, которые переходят в полученные точки касания;*
4) *для каждой из этих троек восстанавливаем искомые окружности.*

Случай касания двух окружностей рассмотрен. Во всех остальных случаях задача или не имеет решения, или сводится к вышерассмотренной.

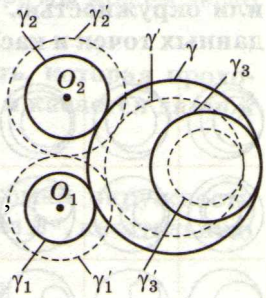


Рис. 6.50

Проиллюстрируем последнее на примере трех окружностей, которые не имеют общих точек. Пусть это окружности ур y_2, y_3 (рис. 6.50), и надо построить окружность у, касательную к окружностям y_x и y_2 внешним, а к окружности y_3 - внутренним образом.

Рассмотрим окружности $y\backslash$ и y'_2, концентрические с окружностями Yj и y_2, радиусы которых увеличены на $\frac{a - r_1 - r_2}{2}$ (где $a = 0j0_2$ - расстояние между центрами O_1 и 0_2 окружностей Yj и y_2). Рассмотрим также окружности y'_3 и y', концентрические с окружностями Yj и y, радиусы которых уменьшены на $\frac{a-к-r_2}{2}$.

На рисунке 6.50 окружности $y\backslash$, y'_2, y'_3, y' изображены пунктиром.

Если окружность у касается окружностей y_1, y_2, y_3, то и окружность y' касается окружностей $y\backslash$, y_2, y'_3 и наоборот (докажите это самостоятельно).

Окружности y\ и y'_2 касаются друг друга. Мы умеем решать задачу для этого случая - получим окружность y'. Искомой будет окружность у, концентрическая с построенной у, которая имеет радиус на $\frac{a \sim r \backslash - r_1 я}{2}$ больше радиуса окружности y'.

В случае, если окружности y_t и y_2 пересекаются, их радиусы надо уменьшить.

Если при соответствующем уменьшении радиус окружности равен нулю - получим точку (говорят: окружность вырождается в точку). *«Касание окружности и точки» будем понимать как «окружность проходит через точку».*



Для любознательных

Как поймать льва в пустыне?

Вспомним замечательное свойство инверсии: если на плоскости взять окружность и выполнить инверсию относительно этой окружности, то все, что содержалось внутри окружности, окажется вне ее, а все, что было вне ее, попадет внутрь этой окружности. В таком случае достаточно взять клетку круглой формы и посадить туда охотника; выполнить инверсию, и охотник окажется вне клетки, а все, что было вне ее, в том числе и лев, - в клетке!

Если соответствующий радиус будет иметь отри- I Использование ин-
цательное значение, - строим окружность, радиус | версии дает воз-
которой равен модулю полученного числа, причем ^ можность решить
изменяется вид касания окружностей (внешний на обобщенную задачу
внутренний или наоборот). с Аполлония *0 трех*

Если присоединить к множеству окружностей еще и I *за анных ОК руж* -
точки - окружности нулевого радиуса, и *прямые* - » *которых касаются* НОС ТПЯХ, овє из
окружности бесконечно большого радиуса, то можно | *друг друга* (*внут-*
обобщить задачу Аполлония, которую мы решили, на *ренним или внеш-*
прямые и точки. *ним образом*).

Задачу Аполлония можно сформулировать так.
Надо построить окружность или прямую, касательную к:
1) трем данным окружностям;
2) **данной прямой и двум данным окружностям;** | окружностей зада-
3) двум данным прямым и данной окружности; ча Аполлония или
4) трем данным прямым;
5) данной точке и двум данным прямым;
6) данной точке, данной прямой и данной окружности;
7) данной точке и двум данным прямым;
8) двум данным точкам и данной окружности;
9) двум данным точкам и данной прямой;
10) трем данным точкам.

I Во всех иных случаях расположения трех заданных окружностей задача Аполлония или не имеет решения, или сводится к вышеуказанной | задаче.

Если «касание окружности и тонки» понимать как *«окружность проходит через точку», а прямую рассматривать как окружность бесконечно большого радиуса,* то решение задачи Аполлония о трех заданных окружностях может быть сведено к решению задачи о прямых и точках.

Таким образом, мы решили 10 разных задач (из них (4) и (10) вам известны со школьного курса математики).

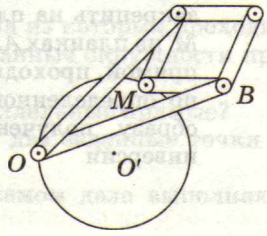
Задача Аполлония, которую мы рассмотрели, - ***одна из известнейших задач древности.*** А слышали ли вы о так называемых **трех знаменитых задачах древности?** Вот они.

1. ЗАДАЧА О КВАДРАТУРЕ КРУГА. Надо построить квадрат, площадь которого равна площади данной окружности.

2. ЗАДАЧА ОБ УДВОЕНИИ КУБА (иначе - ***делийская задача).*** Надо построить ребро куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба.

Для любознательных

Описанный выше способ построения окружностей с помощью циркуля и линейки, в которые переходят при инверсии заданные окружности, достаточно громоздкий. А если надо построить образ более сложной фигуры, чем прямая или окружность? Для этого люди создали приборы - их называют ***инверсорами.*** На рисунке изображен ***инверсор Поселье,*** который состоит из шести шарнирно закрепленных планок, причем: $OA = OB$, $AM = AM' = BM = BM'$. Этот инверсор работает так: точка O фиксируется; если точка M описывает определенную линию, то точка M' - описывает линию, полученную из первой инверсией с центром в точке O и коэффициентом инверсии $AO^2 - AM^2$. Попробуйте сделать такой инверсор (это совсем несложно) и выполнить с его помощью соответствующие построения.



3. ЗАДАЧА О ТРИСЕКЦИИ УГЛА. Надо данный произвольный угол, разделить на три равных части.

Эти три задачи легко решаются, и решения их давно известны. Но надо решить эти задачи, не используя никаких других инструментов, кроме циркуля и линейки (без метрических пометок). Здесь и начинаются трудности. Оказывается, что сделать это невозможно.

Задаче О КВАДРАТУРЕ КРУГА уже 4 тысячи лет. До греков ее старались решить мудрецы Вавилона и Египта, а позже - китайцы и индийцы, но напрасно. Окончательный «удар» по всем иллюзиям решения задачи о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки был нанесен во второй половине XIX в. Немецкий математик *Ф. Линдеман* в 1882 г. *доказал, что задача о квадратуре круга неразрешима с помощью циркуля и линейки.* Этот исторический факт является следствием доказанного Линдеманом утверждения, что число л является иррациональным.

Действительно, задача построения квадрата, равновеликого кругу радиуса *R*, сводится к построению отрезка $x = R\sqrt{\pi}$, т. е. произведения данного отрезка *R* на отрезок $\sqrt{\pi}$. (Это построение надо сделать с помощью циркуля и линейки, т. е. путем построения конечного числа кругов и прямых.)

В теории геометрических построений установлено, что с помощью циркуля и линейки можно построить отрезок, отличающийся от заданного умножением на действительное число лишь в том случае, если это число рациональное (т. е. его можно представить как отношение двух целых чисел).

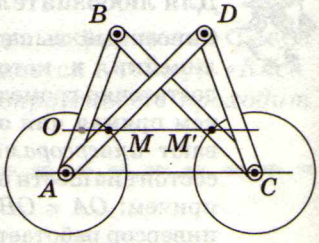
Поскольку Ф. Линдеман первым доказал, что я - число иррациональное, его называют «победителем числа я», а иногда «победителем в решении задачи о квадратуре круга».

Происхождение второй задачи ОБ УДВОЕНИИ КУБА связано с естественным стремлением древних ученых обобщить задачу удвоения квадрата, т. е. построения квадрата, площадь которого вдвое превышает площадь заданного квадрата.

Древние греки сравнительно легко решали задачу об удвоении квадрата. Для этого надо было уметь строить с помощью циркуля и линейки отрезок $\sqrt{2}$. Решение же задачи об удвоении куба сводилось к геометрическому



Для любознательных



Более простой чем инверсор Поселье - ***инверсор Гарта*** (см. рис.). Он состоит лишь из четырех шарнирно соединенных планок, причем ***AB = CD, BC = AD.*** Фигура, которую образуют эти планки, называется ***антипараллелограммом.*** Если некоторую точку ***O*** отрезка ***AB*** закрепить на плоскости и отметить точки M и ***M'*** на планках ***AD*** и ***BC,*** которые лежат на общей прямой, проходящей через точку ***O*** параллельно ***AC,*** то движению точки ***M*** по определенной фигуре будет отвечать движение точки ***M'*** по фигуре-образу, полученному инверсией с центром в точке ***O*** и коэффициентом инверсии

$$\frac{AO \cdot}{AB^2 K^{\frac{b}{2}\circ}(AD^2-DC^2).} >$$

построению отрезка $\sqrt[3]{л/2}$. Но на протяжении многих столетий все ПОПЫТКИ **построить отрезок $\sqrt[3]{2}$ с помощью циркуля и линейки не приводили к успеху. И только в первой половине XIX в. было доказано, что такое построение осуществить невозможно, а значит невозможно решить и задачу об удвоении куба. Неопровержимое доказательство этого нашел французский математик *П. Вантцель* в 1837 г.**

Третья задача - О ТРИСЕКЦИИ УГЛА, т. е. о делении произвольного угла на три равные части возникла вследствие потребностей архитектуры и строительства. Пользуясь циркулем и линейкой, древние греки умели делить произвольный угол пополам, а прямой угол - на три равные части. Однако выполнить трисекцию произвольного угла не удавалось.

***Р. Декарт* первым высказал предположение, что трисекцию произвольного угла невозможно выполнить с помощью циркуля и линейки. Строгое доказательство неразрешимости этой задачи сделал П. Вантцель в 1837 г.**

Таким образом, сегодня мы знаем о *невозможности решения трех знаменитых задач древности.*

Однако кое-кто до сих пор продолжает поиски такого решения. (В этом есть и положительный момент - возможность «параллельного» открытия чего-то важного и интересного.)

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. Энциклопедия элементарной математики. - М.: Физмат - гиз, 1963. — Т. 4.
2. ***Конфорович А. Г.*** Визначні математичні задачі. - К.: Рад. шк., 1981.
3. ***КостовскийА. Н.*** Геометрические построения одним циркулем. - М.: Наука, 1989.
4. ***Прасолов В. В.*** Задачи по планиметрии. - М.: Наука, 1991. -Ч. 2.
5. ***Савин А. В.*** Математические миниатюры. - М.: Дет. лит., 1991.
6. ***Тесленко І. Ф.*** Метод інверсії та його застосування. - К.: Рад. шк., 1958.
7. ***Чистяков В. Д.*** Три знаменитые задачи древности. - М.: Учпедгиз, 1963.

ТРИ ЗНАМЕНИТЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДРЕВНОСТИ

1. ***Задача о квадратуре круга.***
2. ***Задача об удвоении куба(делийская задача).***
3. ***Задача о трисекции угла.***

Немецкий математик Ф. Линдеман в 1882 г. доказал:
1)я - число иррациональное;
2)задача о квадратуре круга неразрешима с помощью циркуля и линейки.

Отрезок $x = R$ ч/л построить невозможно, т. к. 71 - число иррациональное.

Французский математик П. Вантцель в 1837 г. доказал, что задачи об удвоении куба и о трисекции угла неразрешимы с помощью циркуля и линейки.



Для любознательных

1. Через две точки провели три окружности, каждая из которых проходит через эти две точки. В какую фигуру перейдут заданные окружности при инверсии с центром в одной из этих точек?
2. В какую фигуру при инверсии перейдут три параллельные прямые?
3. Постройте окружность, которая проходит через две заданные точки и касается заданной прямой.
4. Докажите, что инверсоры Поселье и Гарта в самом деле выполняют преобразование инверсии.

Индукция в геометрии

...Понимание и умение правильно применять принцип математической индукции - это весомый критерий зрелости математика.

А. Н. Колмогоров

Издавна известно, что *задать числовую последовательность можно рекурентним способом, когда каждый следующий член последовательности определяется через предыдущий с помощью определенной формулы.* В частности, этим способом пользовался еще Архимед при приближении к площади круга площадей вписанных многоугольников. Такие формулы называют*рекурентными* (от латинского *recurro* - «бегу назад»).

Например, последовательность нечетных чисел 1, 3, 5, ... можно задать рекурентной формулой:

$$a_{n+1} = a_n + 2, \text{ при } a_1 = 1.$$

Действительно, второй член последовательности $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$, третий $a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$ и т. д.

Аналогично можно задать последовательность четных чисел, арифметическую и геометрическую прогрессии и т. д.

В XVII в. возникла идея применить аналогичный принцип для доказательства математических утверждений, которые подобно бесконечным последовательностям имеют бесконечное количество отдельных утверждений: $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Рассуждаем так.

Пусть мы умеем доказывать, что:

(Б) первое утверждение есть правильным;

(П) из правильности любого из утверждений ряда $\{T_k\}$ следует правильность следующего утверждения T_{k+1}.

Тогда мы доказали все утверждения ряда 7\, T_2, T_3, ..., т. к. получили цепь теорем:

$$T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \wedge T \wedge \ldots \to T_k \wedge T_{k+1} \to \ldots$$

Мы описали схему *метода математической индукции* (ММИ). Теорему (Б) называют *базой индукции*, а теорему (П) - *индукционным переходом.* Благодаря индукционному переходу мы получили «волну» доказательств от первого, правильного утверждения, ко второму и т. д.

Понятно, что методом математической индукции можно доказывать только утверждения, которые содержат натуральный параметр *n*.

Схема метода математической индукции **(ММИ):**

1. **База индукции (Б).**
   Доказываем правильность первого утверждения (при $n = 1$).
2. **Индукционный переход (П).**
   Доказываем, что из правильности утверждения при $n = k$ следует правильность утверждения при $n = k + 1$.

Рассмотрим несколько примеров доказательства утверждений ММИ.

Пример 1. Докажите, что квадрат 2" x 2" без одной клеточки можно разрезать на «уголки» из трех клеточек.

Решение

В утверждении, которое надо доказать, есть натуральная переменная ***n***. Имеем:

T_1~ утверждение о квадрате 2x2;
T_2 - утверждение о квадрате 4x4;
T_3 - утверждение о квадрате 8x8;
... ...
T_{10} - утверждение о квадрате 2^{10}x 2^{10}.
... ...

1) Утверждение ***T***j очевидно выполняется, так как после вырезания (произвольно) одной клеточки остается именно искомый «уголок» (рис. 6.51).

2) Попробуем доказать утверждение T_2. Квадрат 4x4 можно разделить на четыре квадрата размером 2x2. Для квадрата, содержащего вырезанную клеточку, условие выполняется (утверждение ***TJ.*** Если вырезать «уголок» так, чтобы его точка ***O*** совпадала с центром квадрата (рис. 6.52, 6.53), то получим три «уголка».

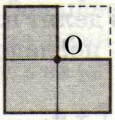


Рис. 6.51

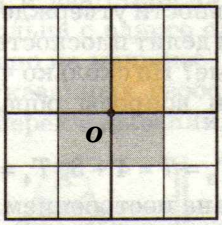


Рис. 6.52

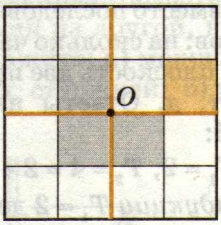


Рис. 6.53

3) Теперь предположим истинность утверждения $T_к$ и докажем шаг индукции $T_к$ -» $T_{к+}$ j, т. е. что из утверждения: квадрат 2*x2'1 без одной клеточки можно разрезать на «уголки», следует справедливость утверждения: квадрат $2^{k+1}x2^{k+1}$ без одной клеточки можно разрезать на «уголки».

Доказательство

Разделим квадрат размером $2^{k+1}x2^{k+1}$ на четыре квадрата 2^hx2^k.

В одном из них отсутствующая клеточка. Его, согласно допущению, можно поделить на «уголки».

В трех других заберем по одной клеточке так, чтобы из этих клеточек образовался «уголок», точка ***O*** которого совпадает с центром данного квадрата $2^{k+1}x2^{k+1}$ (аналогично тому, как это мы сделали при доказательстве T_2). После этого воспользуемся утверждением $T_к$.

Утверждение $T_{к+1}$ доказано.

Мы доказали T_1 - базу индукции и $T_к$ -» $T_{к+1}$ - индукционный переход. Тогда выполняется любое утверждение T_n и задача решена.



Для любознательных

Возможно, первый, кто высказал и воплотил идею математической индукции, был французский ученый Блез Паскаль.

Позднее эту идею начали называть принципом (то есть правилом, законом) математической индукции (от латинского ***inductio*** - «наведение»).

В 1838 г. в Британской энциклопедии за подписью известного шотландского математика, первого президента Лондонского математического общества ***Августа де Моргана*** (1806-1871) была опубликована статья под названием «Математическая индукция».

Пример 2. Докажите, что для каждого натурального ***n> 4*** существует выпуклый гс-угольник, который имеет только 3 острых угла.

Решение

1) ***База индукции*** - справедливость утверждения при ***n*** = 4 доказываем прямым построением (рис. 6.54).

2) Индукционный переход доказываем «отрезанием» одного из тупых углов - число сторон увеличивается на одну, а число острых углов сохранится.

3) Тогда для произвольного ***n*** > 4 существует выпуклый я-угольник, который имеет ровно 3 острых угла.

Что и требовалось доказать.

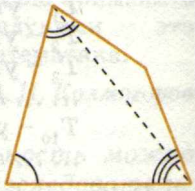


Рис. 6.54

Пример 3. На сколько частей ***n*** прямых делят плоскость, если среди них нет параллельных и никакие три из них не пересекаются в одной точке?

Решение

Воспользуемся ММИ.

1) Теперь вместо последовательности утверждений имеем последовательность вопросов: на сколько частей делит плоскость одна прямая? На сколько частей делят плоскость две прямые? На сколько частей делят плоскость три прямые? и т. д. Ответы на эти вопросы образуют последовательность утверждений:

$$T_г = 2,\ T_г = 4 = 2 + 2,\ T_3 = 7 = 4 + 3,\ \Gamma_4 = 11 = 7 + 4, \ldots .$$

2) ***База индукции $T_1 = 2$*** доказана построением.

3) Для того чтобы доказать индукционный переход, надо записать T_n через ***n.*** Используя найденные значения $T_v\ T_2,\ T_3,\ T_A$, заметим, что

$$T_{n\,п} = T_n\ і + Д\text{-}1$$

Замечание. Мы угадали зависимость, но **угадать — еще не означает доказать.**

Индукционный переход. Пусть правильным является утверждение $T_к$ = $= T_{к1} + к.$ Докажем, что тогда $T_{к+1} = T_k + (k + 1)$.

Доказательство

Прямая пересекает ***k*** прямых в ***k*** точках, т. е. делит ***к*** + 1 старые части плоскости на две части. Тогда $T_{к+1} = T_к + (k + 1)$ и индукционный переход доказан.

Ответ: ***n*** прямых, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке, делят плоскость на $T_n = 2 + 3 + 4 + \ldots + n$ частей.

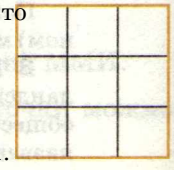


Для любознательных



1. Лист бумаги можно разрезать на 4 или на 6 частей. Докажите, что по этому правилу его можно разрезать на произвольное число частей, начиная с 9.

Совет. Если мы делим лист на 4 или 6 частей, то частей становится больше на 3 или на 5. Докажите индукционный переход: если можно разделить лист на ***k, k*** + 1, ***k*** + 2 частей, то можно это сделать и для ***k + 3, k + 4, k + 5*** частей.



2. Докажите, что квадрат можно разделить на ***n*** квадратов (для произвольного ***n),*** начиная с 6.

Совет. Учтите, что квадрат можно разделить как на 4, так и на 9 квадратов (см. рис.), и обратите внимание на задачу № 1.

Пример 4. Плоскость разделена на части несколькими прямыми. Докажите, что эти части плоскости можно покрасить в два цвета так, что произвольные две смежные (по стороне) части будут разного цвета.

Доказательство

1) Для того чтобы воспользоваться методом математической индукции, переформулируем условие задачи: «На плоскости проведено ***n*** прямых ...».

2) Теперь можно рассмотреть ***базу индукции*** - случай, когда ***n*** -−1. Очевидно, что соответствующее окрашивание можно осуществить.

3) ***Индукционный переход.*** Предположим, что для ***k*** прямых плоскость можно раскрасить так, что две произвольные смежные части имеют разные цвета. Проводим ***k*** + 1 прямую и перекрашиваем в противоположный цвет все области с одной стороны от нее. Имеем искомое окрашивание.

Тогда ***утверждение задачи является правильным для произвольного числа прямых.***

Пример 5. (Игра «Ханойская башня»). Пусть у нас есть детская пирамидка с ***n*** кольцами и два стержня одинаковой высоты (рис. 6.55). Можно перекладывать кольца с одного стержня на другой, но нельзя при этом класть большее кольцо на меньшее. Докажите: **а)** можно переложить все кольца на один из указанных свободных стержней; б) это, т. е. (а), можно сделать за (2" - 1) перекладываний.

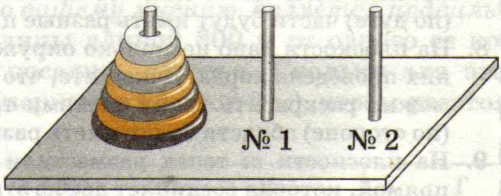


Рис. 6.55

Доказательство

1) ***База индукции.*** Верхнее кольцо кладем на один из стержней (№ 1), а второе - на другой (№ 2). Потом меньшее кольцо снимаем со стержня № 1 и кладем на стержень № 2. Получаем: меньшее кольцо находится сверху большего, а общее число перекладываний для ***n - 2*** составляет $3 = 2^2 - 1$.

2) ***Индукционный переход.*** Пусть имеем ***k*** колец на одном из стержней, и сделано это за (2* - 1) шагов. Надо доказать: а) можно ***k*** + 1 кольцо переложить на один стержень и б) сделать при этом $2^м$ - 1 перекладываний. Докажем это.

2-1) За $(2^s - 1)$ шагов переложим все кольца, кроме последнего ***(k*** + 1)-го, на один стержень. 2-2) Последнее (ft + 1)-е кольцо переложим на свободный стержень. 2-3) Потом за 2* - 1 шагов переложим все другие кольца на него (это можно сделать по допущенному). Имеем общее количество шагов

$$(2^* - 1) + 1 + (2^* - 1) = 2 \cdot 2^* - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Индукционный переход доказан.

Тогда: а) ***можно перенести все n колец на один из указанных свободных стержней согласно условию задачи***; б) ***это можно сделать за $(2^n - 1)$ перекладываний.***

Геометрия как бы символизирует все, что связано с практикой, а поэзия - все, что связано с мечтой. Но в царстве воображения они родственны и должны идти в паре, как драгоценное наследие каждого молодого человека.

Флоренс Милнер

Задания для самостоятельного решения

1. На сколько треугольников можно разделить n-угольник (не обязательно выпуклый) его диагоналями, которые не пересекаются?
2. Определите число диагоналей, которые не пересекаются и делят /г-угольник на треугольники.
3. На сколько частей выпуклый ге-угольник делится всеми его диагоналями, если любые три из них не пересекаются в одной точке?
4. Докажите, что правильный треугольник можно разделить на n правильных треугольников, начиная с четырех. (Совет. См. рис. 6.56.)

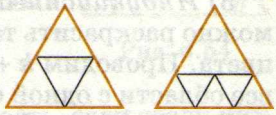


Рис. 6.56

5. Укажите все значения n, для которых квадрат нельзя разрезать на n меньших квадратов.
6. Даны n произвольных квадратов. Докажите, что их можно разрезать на части так, что из полученных частей можно сложить новый квадрат.
7. Плоскость разделена на части несколькими окружностями. Докажите, что эти части плоскости можно раскрасить в два цвета так, что произвольные две смежные (по дуге) части будут иметь разные цвета.
8. На плоскости дано несколько окружностей. В каждой из них проведена хорда. Докажите, что полученную «карту» можно раскрасить тремя цветами так, что две смежные (по стороне) области будут иметь разные цвета.
9. На плоскости m точек разместили так, что на каждой прямой, которая соединяет две из этих точек, содержится хотя бы еще одна из них. Докажите, что все эти m точек лежат на одной прямой.

Больше узнать по этой теме можно из литературы:

1. ***Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.*** Ленинградские математические кружки. - Киров: «АСК», 1994.
2. ***СпивакА. В.*** Математический кружок. - М.: Посев, 2003.
3. ***Тадеев В. О.*** Неформальна математика. 6-9 класи. - Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2003.
4. ***Шустеф Ф. М.*** Сборник олимпиадных задач по математике. - Минск: Вышэйш. шк., 1977.

Тот, кто не знает математики, не способен к познанию никакой другой науки, даже не может постичь своего невежества, а потому и не ищет лекарства от него.

Роджер Бекон

Здоровья вам и удачи, дорогие друзья!

ПРОВЕРЬ СЕБЯ
ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

Недостаточно иметь хороший ум,
главное - правильно его использовать.

Рене Декарт

Предлагаемые задачи в тестовой форме дадут вам возможность быстро получить информацию о том, действительно ли вы усвоили программу по геометрии для общеобразовательных учебных заведений по определенной теме, и подготовиться к итоговой аттестации и даже независимому внешнему оцениванию (по темам планиметрии).

Замечание. Предлагаемые задачи по сложности ориентированы на средний и повышенный уровень требований (вторая часть внешнего оценивания и выпускного оценивания за курс школы II ступени). Звездочкой обозначены задачи более сложные или такие, которые требуют знания фактов, соответствующих программе классов с углубленным изучением математики. Проверить правильность выполнения задач вам помогут ответы, приведенные в разделе «Ответы и советы».

В заданиях 1-39 надо из предлагаемых вариантов ответов выбрать ОДИН, который, по вашему мнению, является правильным.

1. Вдоль прямой улицы длиной 800 м от одного ее конца до другого (по прямой) нужно посадить деревья. Сколько для этого надо выкопать квадратных ям (периметр каждой 2 м), чтобы расстояние между деревьями было 5 м?

А	Б	В	Г	Д
160	158	200	Другой ответ	159

2. В каком отношении нужно разделить отрезок на две части, чтобы середина меньшей из них делила заданный отрезок в отношении 1:3?

А	Б	В	Г	Д
1: 3	1 : 2	1:4	2 : 1	2 : 3

3. Треть угла а равна пятой части угла, смежного с а. Какой угол больше: а или смежный с ним?

А	Б	В	Г	Д
а	Эти углы равны	Сравнить невозможно	Смежный с α	Другой ответ

4. Угол между биссектрисой одного из смежных углов и их общей стороной равен трети угла между биссектрисами этих смежных углов. Найдите данные смежные углы.

А	Б	В	Г	Д
60°и 120°	90° и 90°	40° и 120°	30° и 150°	Другой ответ

5. После построения биссектрис заданных смежных углов получили три прямых угла. Какими были данные смежные углы?

А	Б	В	Г	Д
45°и 135°	60° и 120°	30° и 90°	90° и 90°	Другой ответ

6. Стороны двух углов взаимно перпендикулярны. Равны ли данные углы?

А	Б	В	Г	Д
Да, всегда	Нет	Не всегда	Сравнить невозможно	Другой ответ

7. Укажите количество правильных утверждений.

1) Нельзя построить вертикальный угол для угла, большего чем развернутый.
2) Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.
3) Для углов, образованных при пересечении двух прямых, сумма двух смежных углов может быть равна сумме двух вертикальных углов.
4) Градусные меры двух смежных углов могут быть численно представлены четными числами.
5) Градусные меры двух смежных углов могут быть численно представлены только нечетными числами.

А	Б	В	Г	Д
Одно	Три	Два	Четыре	Другой ответ

8*. Укажите количество правильных утверждений.

1) Если серединные перпендикуляры ко всем сторонам треугольника проходят через вершины этого треугольника, то такой треугольник равносторонний.
2) В любом треугольнике сумма длин трех его высот больше периметра этого треугольника.
3) В произвольном неравнобедренном треугольнике основание биссектрисы треугольника расположено между основаниями медианы и высоты, проведенными из той же вершины.
4) Если стороны двух углов взаимно перпендикулярны, то такие углы равны.
5) Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

А	Б	В	Г	Д
Одно	Два	Три	Четыре	Пять

9. Один из углов треугольника равен 48°. Найдите острый угол, образованный биссектрисами двух других углов этого треугольника.

А	Б	В	Г	Д
114°	96°	74°	66°	Другой ответ

10*. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника образует с его боковой стороной угол, равный углу при основании. Найдите углы треугольника.

А	Б	В	Г	Д
36°, 72°, 72°	**30°, 30°, 120°**	Другой ответ	**42°, 42°, 96°**	Определить невозможно

11*. Биссектрисы двух внутренних углов остроугольного треугольника пересекают стороны этого треугольника под углами 63° и 81°. Найдите углы треугольника.

А	Б	В	Г	Д
36°, **54°**, 90°	**72°**, **36°**, **72°**	60°, **72°, 48°**	30°, 66°, 84°	Другой ответ

12*. Треугольник ***ABC*** - прямоугольный, ***BP*** и ***CE*** - биссектрисы его острых углов, отрезки ***PK*** и ***EM*** - перпендикулярны ***BC.*** Найдите угол ***K AM.***

А	Б	В	Г	Д
90°	**60°**	Другой ответ	**135°**	**45°**

13. Стороны ***AB*** и A_1B_1 треугольников ***ABC*** и $A_1B_1C_1$ принадлежат одной прямой, а вершины ***C и*** C_1 лежат на прямой, которая параллельна первой. Найдите отношение площадей треугольников ***ABC*** и $A_tB_tC_,$ если $AB : A_1B_1 = 2.$

А	Б	В	Г	Д
1/2	**4**	**2**	**1/4**	Другой ответ

14. Точка ***M*** делит сторону ***BC*** параллелограмма ***ABCD*** в отношении 2 : 3, считая от вершины ***B.*** Найдите отношение площади треугольника ***ABM*** к площади четырехугольника ***AMCD.***

А	Б	В	Г	Д
4	**4 : 9**	**1 :4**	**2:3**	Другой ответ

15. Укажите количество правильных утверждений.
    1) Существует треугольник с отношением сторон 2:3:6.
    2) Существует треугольник с отношением углов 150 : 120 : 35.
    3) Длины боковых сторон равнобедренного треугольника могут быть равными по 10 м, а основание - 20,01 м.
    4) Длина одного отрезка на 1 см больше длины второго и на 4 см больше длины третьего. Из этих отрезков можно сложить треугольник, периметр которого равен 10 см.
    5) Существует вписанный четырехугольник с отношением мер углов (взятых последовательно) 1 : 2 : 4 : 3.
    6) Существует описанный четырехугольник с отношением длин сторон (взятых последовательно) 1: 6 : 4 : 3.

А	Б	В	Г	Д
Одно	Три	Ни одного	Четыре	Другой ответ

16. По рисунку Т-1 найдите градусную меру угла ***DBA C*** (точка ***O*** - центр окружности).

А	Б	В	Г	Д
90°	**87°**	**46°**	**67°**	Другой ответ

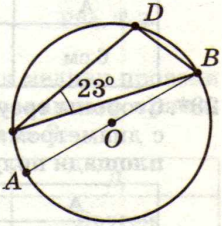


Рис. Т-1

17. Один из углов треугольника равен 55°. Стороны треугольника, образующие этот угол, видны из центра окружности, описанной вокруг этого треугольника, под углами, меры которых относятся как 2 : 3. Найдите эти углы.

А	Б	В	г	Д
100° и **150°**	**50°** и **75°**	Определить невозможно	**80°** и **30°**	Другой ответ

18*. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 20°. На одной из его боковых сторон как на диаметре построена окружность. Найдите градусные меры дуг, которые отсекаются на этой окружности другими сторонами треугольника.

А	Б	В	Г	Д
40°, 60°, 80°	40°, 40°, 100°	20°, 20°, 120°	Другой ответ	20°, 20°, 140°

19*. Из одной точки к окружности провели две касательные. Определите угол между этими касательными, если мера одной из дуг, ограниченной точками касания, равна 120° 36'.

А	Б	В	Г	Д
60° 18'	59° 24'	239° 24'	60° 36'	Другой ответ

20*. На рисунке Т-2 изображены две окружности (с центрами О и Oj). Найдите градусную меру дуги ***CNK,*** если ***кJBMD*** = 130°, а ***AB*** и ***AD*** - касательные к меньшей окружности.

А	Б	В	Г	Д
Определить невозможно	260°	100°	50°	Другой ответ

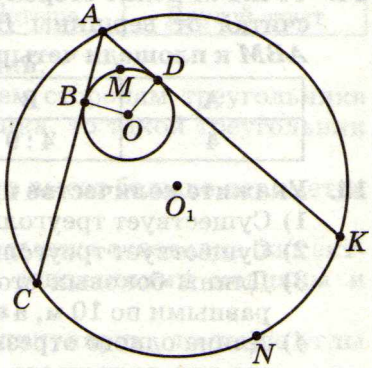


Рис. Т-2

21. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 16 м. Найдите расстояние между ортоцентром (точкой пересечения высот) и центром окружности, описанной вокруг треугольника.

А	Б	В	Г	Д
16 м	4 м	Другой ответ	8 м	2 м

22*. Длины сторон треугольника 13 см, 14 см и 15 см. Найдите радиус окружности с центром на средней по длине стороне треугольника, которая касается двух других его сторон.

А	Б	В	г	Д
6 см	5\^2 см	Определить невозможно	7 см	3 см

23*. Стороны треугольника относятся как 2 : 3 : 4. В него вписан полукруг с диаметром, принадлежащим большей стороне. Найдите отношение площади полукруга к площади треугольника.

А	Б	В	Г	Д
Злл/Ї5:50	з73тт:л/5	3 : 5	Другой ответ	Wl5:12

24. В равнобокой трапеции средняя линия равна 5 см, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

А	Б	В	Г	Д
125 см^2	25 см^2	$\frac{1}{2}$ ·25 см^2	50 см^2	Другой ответ

25. В равнобокую трапецию вписана окружность. Сравните отношения длины этой окружности к периметру трапеции и площади круга, ограниченного данной окружностью, к площади трапеции.

А	Б	В	Г	Д
1: 2	2: 1	1 : 4	1: 1	Другой ответ

26. Найдите углы двух подобных треугольников, если каждая сторона одного из них на 5 см больше соответствующей стороны другого.

А	Б	В	Г	Д
Другой ответ	60°, 30°, 90°	36°, 72°, 72°	45°, 45°, 90°	60°, 60°, 60°

27. В треугольнике через середину одной из сторон провели прямые, параллельные двум другим сторонам треугольника. Найдите сумму площадей двух образовавшихся треугольников, если площадь заданного треугольника равна 24 см^2.

А	Б	В	Г	Д
6 см^2	12 см^2	18 см^2	20 см^2	Другой ответ

28*. В прямоугольном треугольнике длины катетов равны 6 см и 8 см. Через точку пересечения его биссектрис провели прямые, параллельные катетам. Найдите отношение площади образованного прямоугольника к площади заданного треугольника.

А	Б	В	Г	Д
Другой ответ	6:1	1:6	1:4	1 : 12

29*. В треугольнике *ABC* через точку пересечения его медиан *M* провели отрезок *MP*, параллельный стороне *AC* (рис. Т-3). Найдите площадь треугольника *CPM*, если площадь треугольника ABC равна S.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{9}S$	$\frac{2}{3}S$	$\frac{2}{9}S$	Другой ответ	$\frac{1}{6}S$

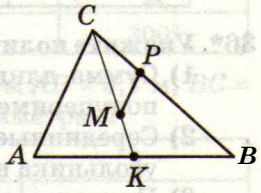


Рис. Т-3

30*. В прямоугольном треугольнике из точки пересечения медиан провели перпендикуляры к катетам. Найдите площадь образованного прямоугольника, если площадь заданного треугольника равна *S*.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}S$	$\frac{2}{3}S$	$\frac{4}{9}S$	$\frac{2}{9}S$	Другой ответ

31. Углы трапеции относятся как 3 : 4 : 5 : 6. Какой угол образуют продолжения боковых сторон этой трапеции?

А	Б	В	Г	д
Заданная трапеция не существует	90°	40°	60°	Другой ответ

32. Одна из диагоналей ромба равна 4 м, а вторая образует со стороной ромба угол 30°. Найдите площадь ромба.

А	Б	в	Г	Д
32 м^2	ібТз м^2	16 м^2	8х/3 м^2	Другой ответ

33. Найдите на оси абсцисс точку, равноудаленную от точек *А* (4; 1) и Б (1; 4).

А	Б	в	Г	Д
(1; 0)	(0; 0)	(0; 1)	(i; 1)	Другой ответ

34. Найдите расстояние между точкой *А(2;* -1) и центром окружности, заданной уравнением $x^2 - 2x + y^2 + 2y = -1$.

А	Б	в	г	Д
Окружность не существует	*Я*	i	7	Другой ответ

35. Укажите количество правильных утверждений.

1) **Центр круга - центр его симметрии.**
2) **Прямоугольник имеет один центр симметрии - точку пересечения диагоналей.**
3) **Параллелограмм не имеет центра симметрии.**
4) **Середина отрезка - его центр симметрии.**
5) **Луч имеет множество центров симметрии.**

А	Б	В	Г	Д
Четыре	Одно	Два	Три	Другой ответ

36*. Укажите количество правильных утверждений.

1) **Сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника больше его полупериметра.**
2) **Серединные перпендикуляры к двум сторонам правильного многоугольника не могут быть параллельными.**
3) **Прямые, содержащие биссектрисы двух углов правильного многоугольника, могут быть параллельными.**
4) **Градусная мера внешнего угла правильного n-угольника равна 360° : *n*.**
5) **Сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника больше его периметра.**

А	Б	В	Г	д
Одно	Два	Три	Четыре	Пять

37. Стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника равны. Найдите отношение площадей этих фигур.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}$	2:3:6	Другой ответ	1:4:6	$\frac{\sqrt{3}}{4}$: 1:6

38. Найдите длину окружности, вписанной в ромб, длины диагоналей которого 6 см и 8 см.

А	Б	В	Г	Д
9,6 см	$9,6\pi$ см	$(2,4\pi)^2$ см	Другой ответ	$4,8\pi$ см

39. Найдите сумму тангенсов острых углов прямоугольного треугольника, если отношение площади этого треугольника к площади квадрата, построенного на его гипотенузе, равно *k*.

А	Б	В	Г	Д
$4k$	$\frac{1}{k}$	k	$\frac{1}{4k}$	Другой ответ

В заданиях 40-52 выберите правильный, по вашему мнению, ответ. ИХ МОЖЕТ БЫТЬ НЕСКОЛЬКО.

40. Точка *O* - начало трех лучей: *OA, OB, OC*. Известно, что *ZAOB* = 35°, *Z.BOC* = 50°. Какой может быть градусная мера угла *AOCЧ*

А	Б	В	Г	Д
85°	325°	15°	275°	345°

41. Лучи *аиЪ* образуют угол 120°, а прямые а и с пересекаются под углом 30°. Какой может быть градусная мера угла, стороны которого принадлежат прямым *b и c*, если все три прямые *a, Ъ, c* пересекаются в одной точке?

А	Б	в	Г	Д
150°	90°	270°	210°	300°

42. Точки *A, B, C* расположены на одной прямой. Причем *AB* - 5,7 м, *BC* = = 730 см. Какой может быть длина отрезка *AC* в дециметрах?

А	Б	В	Г	Д
16 дм	18 дм	130 дм	148 дм	Другой ответ

43. На прямой расположены точки *A, B* и C. Причем *AC* > *AB* и *CB* = *2AB*. От точки *C* отложили отрезок *CM* так, что *CM* = *MB*. Сравните отрезки *MC* и *AB*.

А	Б	В	Г	Д
MC =*AB*	*MC* < *AB*	*MC* < *AB*	Сравнить невозможно	*MC* > *AB*

44*. На прямой расположены точки *A, B* и *C*. Причем *AB* < *AC* < 1,89AB. Сравните отрезки *BC* и *AB*.

А	Б	В	Г	Д
AB*> *BC	***AB* < *BC***	***BC*** <0,89 ***AB***	***BC*** <2,89 ***AB***	Сравнить невозможно

45. Две стороны прямоугольного треугольника равны 3 см и 6 см. Найдите третью сторону треугольника.

А	Б	В	Г	Д
3\I5 м	л/з см	ЗУЗ см	Другой ответ	Зл/б см

46. Сумма квадратов медиан прямоугольного треугольника равна 150 см². Найдите наибольшую из сторон этого треугольника.

А	Б	В	Г	Д
Другой ответ	15л/І0 см	10 дм	10 см	$\frac{л/І0}{10}$ дм

47. Из точки *M* провели секущую и касательную к окружности. Точку касания обозначили как *D*. Секущая пересекает окружность по диаметру *AB*. Найдите градусную меру дуги *BD*, если *ZADM* = 24°.

А	Б	В	Г	Д
24°	132°	156°	48°	228°

48. Найдите сумму двух углов, один из которых угол параллелограмма, а второй - угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины первого угла.

А	Б	В	Г	Д
90° или 270°	135°	180°	В общем случае определить невозможно	Другой ответ

49. Запишите уравнение прямой, которая касается окружности $x^2 + y^2 = 9$ в точке пересечения этой окружности с осью абсцисс.

А	Б	В	Г	Д
***y* = 3**	***x* = 3**	***y* = *x***	* = -3	$y = 0$

50*. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку М(1; 2) и касается окружности $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

А	Б	В	Г	Д
2x* + *y[Ъy - 2 - ***2y[ъ*** = 0	***y* = *yI2x* + 3**	***y* = -\I2*x* + 3**	***2x*** - \[Ъy - 2 + 2л/б = 0	Другой ответ

51*. В плоскости прямоугольника *ABCD* отметили точку *M*. Найдите скалярное произведение $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MC}$, если $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 3$.

А	Б	В	Г	Д
-3	3	Определить невозможно	Другой ответ	0

52*. Дан параллелограмм ***ABCD.*** Прямая ***I*** пересекает прямые АВ, ***AC*** и ***AD*** в точках B_1, C_1 и D_1 соответственно. При этом $\overrightarrow{AD_1} = a\overrightarrow{AD}$, АД = (ЗАВ, $\overrightarrow{AC_1} = y\overrightarrow{AC}$. Найдите значение y, если a = 2, a (3 = 3.

А	Б	В	Г	Д
Определить невозможно	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{6}$

В заданиях 53-60 подберите из правого столбца продолжения к выражениям левого так, чтобы (вместе с выделенными цветом словосочетаниями) образовались правильные утверждения. ВНИМАНИЕ:

• одному выражению левого столбца могут соответствовать несколько выражений правого;

• некоторые утверждения правого столбца могут быть использованы, несколько раз, а некоторые остаться незадействованными.

53. Сформируйте правильные утверждения.

Если последовательно соединить	А) концы двух диаметров окружности, Б) концы двух неравных отрезков, которые пересекаются под прямым углом и делятся точкой пересечения пополам, В) концы двух равных отрезков, которые делятся точкой их сечения пополам, Г)через одну середины сторон правильного восьмиугольника, Д) середины сторон равнобокой трапеции, диагонали которой пересекаются под прямым углом,	то образуется	1)трапеция. 2) прямоугольник. 3) параллелограмм. 4) квадрат. 5) ромб. 6) вписанный четырехугольник. 7) точка.

54*. Сформируйте правильные утверждения.

При пересечении биссектрис углов	А) параллелограмма Б) ромба В)трапеции Г) прямоугольника Д) вписанного четырехугольника Е) равнобокой трапеции	образуется	1)трапеция. 2) прямоугольник. 3)параллелограмм. 4) квадрат. 5) ромб. 6) вписанный четырехугольник. 7)точка.

55. Сформируйте правильные утверждения.

Если трапеция	А)вписанная, Б)описанная, В)равнобокая, Г) S качестве биссектрис углов при одном основании - диагонали, Д) имеет диагонали, перпендикулярные боковым сторонам,	то она	1) прямоугольная. 2)равнобокая. 3) имеет равные суммы длин оснований и длин боковых сторон. 4) вписанная.

56*. Сформируйте правильные утверждения.

Если последовательно соединить середины сторон	А) выпуклого четырехугольника, Б) ромба, В) трапеции, Г) прямоугольника, Д) равнобокой трапеции, Е) параллелограмма, Ж) вписанного четырехугольника,	то образуется	1)трапеция. 2) прямоугольник. 3)параллелограмм. 4)квадрат. 5) ромб. 6) вписанный четырехугольник. 7) прямоугольная трапеция. 8) равнобокая трапеция.

57. Сформируйте правильные утверждения.

Если	А) прямая параллельна оси абсцисс, Б) прямая параллельна оси ординат, В) прямая образует угол a с положительным направлением оси абсцисс, Г) прямая образует угол a с положительным направлением оси ординат, Д) прямая образует угол a с отрицательным направлением оси ординат.	то	1) ее угловой коэффициент не имеет смысла. 2) ее угловой коэффициент равен (-ctga). 3) ее угловой коэффициент равен нулю. 4) ее угловой коэффициент равен tga. 5) ее угловой коэффициент равен (-tga). 6) ее угловой коэффициент равен ctga.

58*. Сформируйте правильные утверждения.

Если	А) прямые пересекаются, Б) прямые параллельны, В) прямые совпадают, Г) прямые перпендикулярны, Д) прямые параллельны биссектрисе III координатной четверти, Е) прямые перпендикулярны к биссектрисе I координатной четверти,	то	1) их угловые коэффициенты равны — 1. 2) их угловые коэффициенты по модулю равны. 3) в уравнениях прямых свободные члены равны. 4) их угловые коэффициенты равны. 5) их угловые коэффициенты равны 1. 6) прямые имеют вид x = const., 7) угловой коэффициент одной прямой равен обратному значению углового коэффициента другой прямой, взятого с противоположным знаком. 8) их угловые коэффициенты не могут быть равными.

59*. Укажите, воспользовавшись утверждениями правого столбца, как связаны градусные меры углов a и p, если выполняется утверждение левого столбца (сумма a + p не превышает 180°).

Если	А) $\sin a = \sin p$, Б) $\cos a = \cos p$, В) $\sin a = \cos p$, Г) $\sin p = \cos a$, Д) $\sin^2 a + \cos^2 p = 1$,	то	1)a + p = 45°. 2) a + p = 90°. 3) a + p = 180°. 4) a + P = 60°. 5) a = p. 6) a + p = 30°.

60. Сформируйте правильные утверждения.

Если	А) $\vec{a}$ || $\vec{Ъ}$, Б) $\vec{a} = \vec{XЪ}$, В) $\vec{a}$ tt $\vec{Ъ}$ $w\vec{a}^2 = \vec{b}^2$, Г) $\vec{a} \cdot \vec{6} = 0$, Д) $\vec{a} + 2\vec{Ъ} = 0$, Е) $\vec{a}$ || $\vec{B}$, $\vec{a}$ || $\vec{c}$, $\vec{b}$ Ц $\vec{c}$,	то	1) векторы $\vec{a}$ и $\vec{Ъ}$ не всегда равны, но имеют равные модули. 2) векторы $\vec{a}$ и $\vec{Ъ}$ равны. 3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{Ъ}$ перпендикулярны. 4) векторы $\vec{a}$ и $\vec{Ъ}$ коллинеарны. 5) вектор $\vec{a}$ является нуль-вектором. 6) векторы $\vec{a}$ и $\vec{\&}$ противоположно направлены^ 7) векторы $\vec{a}$ и $\vec{Ь}$ сонаправлены. 8) $\vec{a}$-$\vec{XЪ}$.

В заданиях 61-64 нужно заполнить пустые клеточки таблицы так, чтобы по горизонталям получить правильные утверждения.

61. Заполните таблицу, чтобы образовались правильные утверждения.

1) ГМТ	середин равных хорд данной окружности -	это	
2) ГМТ	вершин прямоугольных треугольников с общей гипотенузой -	это	
3) ГМТ	центров окружностей, проходящих через заданные две точки, -	это	
4) ГМТ	центров равных окружностей, проходящих через заданную точку, -	это	
5) ГМТ	центров окружностей, касающихся двух данных параллельных прямых, -	это	
6) ГМТ	центров окружностей, касающихся двух данных пересекающихся прямых, -	это	

62*. Заполните таблицу, чтобы образовались правильные утверждения.

1) Середины сторон четырехугольника последовательно соединили - получили прямоугольник.	Тогда заданный четырехугольник отличается тем, что	
2) Середины сторон четырехугольника последовательно соединили - получили ромб.		
3) В четырехугольник можно вписать окружность, а две смежные его стороны равны между собой.		
4) Середины сторон четырехугольника последовательно соединили - получили квадрат.		
5) Вокруг четырехугольника можно описать окружность, а один из его углов - прямой.		

63*. Заполните пустые клеточки таблицы.

Фигура	Оси симметрии (указать количество и перечислить)
1) Равносторонний треугольник	
2) Окружность	
3) Две пересекающиеся прямые	
4) Квадрат	
5) Правильный шестиугольник	

64. Заполните пустые клеточки таблицы.

Мера внешнего угла правильного многоугольника	18°	40°	72°	60°
Количество сторон правильного многоугольника				

В заданиях 65-85 допишите условие так, чтобы задача была корректно сформулирована и имела решение или чтобы образованное утверждение было истинным.

65. Докажите, что точка пересечения двух перпендикуляров, проведенных к сторонам угла в точках, равноудаленных от его вершины, принадлежит его.....

66. Докажите, что биссектрисы двух равных углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей,.....

67. Докажите, что биссектрисы двух неравных углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей,.....

68. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ высоты CK и CK_1 равны. Докажите, что эти треугольники равны, если.....

69*. Если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна его стороне, то такой треугольник.....

70. Если сумма двух углов треугольника больше его третьего угла, то такой треугольник.....

71*. Два треугольника равны по двум сторонам и углу не между ними, если заданный угол.....

72*. В равнобокой трапеции высота равна средней линии. Докажите, что ее диагонали .....

73*. Докажите, если в треугольнике разность двух углов равна 90°, длины биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине третьего угла .....

74*. Две окружности касаются друг друга в точке ***K***. Через точку ***K*** провели прямую, которая пересекает эти окружности в точках A и B. Тогда диаметры окружностей AM и ***BP*** в случае: а) внешнего касания..... .....; б) внутреннего касания.....

75. Продолжение высоты ***BK*** треугольника ***ABC*** пересекает окружность, описанную вокруг этого треугольника, в точке ***P***; ***BM*** - диаметр этой окружности. Докажите, что ***PM*** и ***AC***.....

76*. Две окружности пересекаются в точках A и B, ***AK*** и ***AM*** - диаметры этих окружностей. Тогда отрезки ***KB*** и ***BM***.....

77*. Радиусы круга АО и ***OB*** взаимно перпендикулярны и ограничивают его четверть. На отрезках ***AO*** и ***OB*** как на диаметрах построены две окружности. Точку их пересечения, расположенную в заданной четверти круга, обозначили как С. Докажите, что точки А, ***C и B***.....

78. Высота трапеции, проведенная из вершины меньшего основания, делит большее основание на отрезки, которые равны полусумме и полуразности оснований этой трапеции. Тогда данная трапеция.....

79*. Два треугольника подобны. Каждая из сторон одного из них отличается от соответствующей стороны другого на одно и то же число. Докажите, что эти треугольники.....

80. Уравнение $x^2 + y^2 + ax + by = c$ будет уравнением окружности (ненулевого радиуса) при условии.....

81*. Уравнение $ax^2 + by^2 + mx + ny - c$ будет уравнением окружности (ненулевого радиуса) при условии.....

82. Из одной вершины выпуклого 16-угольника можно провести не более чем..... диагоналей.

83*. Выпуклый n-угольник имеет..... диагоналей.

84*. Прямая $ax + by + c = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = R^2$ тогда и только тогда, когда выполняется соотношение.....

85. Если вектор коллинеарен произвольному вектору плоскости, то.....

В заданиях 86-132 запишите только ответ.

86. Две биссектрисы треугольника образуют с его сторонами углы 99° и 117°. Найдите углы треугольника.

87. На стороне ***AC*** треугольника ***ABC*** обозначена точка ***M*** так, что площадь треугольника ***ABM*** в 2 раза больше площади треугольника ***BCM.*** Сравните длины отрезков ***AM*** и ***MC.***

88. Площадь треугольника ***ABD*** на рисунке Т-4 больше площади треугольника ***ACD.*** Сравните площади треугольников ***ABO*** и ***CDO.***

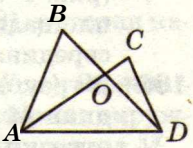


Рис. Т-4

89*. Высота и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, делят его угол на три равные части. Найдите углы треугольника.

90. В равнобедренном треугольнике: боковая сторона больше высоты, проведенной к основанию, на 4 см; расстояние от точки пересечения медиан до основания - 2 см. Вычислите площадь треугольника.

91. В равнобедренном треугольнике периметр равен 120 мм, а одна из его сторон - 28 мм. Какой длины могут быть две другие стороны этого треугольника?

92. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а разность гипотенузы и меньшего из катетов - 4 см. Найдите эти стороны треугольника.

93*. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу этого треугольника на отрезки длиной 3 см и 2 см. Найдите площадь заданного треугольника.

94*. Найдите углы равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 8 см, а середина основания удалена от боковой стороны на 2 см.

95. В равнобедренном треугольнике ***ABC (AB = AC)*** серединный перпендикуляр к стороне АС пересекает сторону ***BC*** в точке ***M.*** Найдите ***/.BAM,*** если ***/ABC*** = 43°.

96*. В равнобедренном треугольнике ***ABC:*** основание АС = 1 м, ZA = 15°. Найдите ограничения на длину стороны АВ.

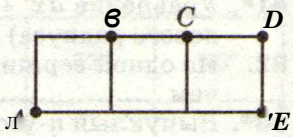
97*. В равнобедренном треугольнике один из углов 120°, а основание - 10 см. Найдите высоту, проведенную к боковой стороне.

98*. В равнобедренном треугольнике один из внешних углов 60°, а высота, проведенная к боковой стороне, - 17 см. Найдите основание треугольника.

99*. В равнобедренном треугольнике ***ABC (AB = BC)*** угол при основании равен 75°, ***AM*** - биссектриса, ***BM*** = 10 см. Найдите расстояние от точки ***M*** до основания треугольника.

100*. К окружности, описанной вокруг треугольника ***ABC,*** провели через ее точки ***C и B*** соответственно касательную и секущую, которые пересекаются в точке ***B.*** Найдите ***ZCDB,*** если ***ZCAD*** = 36°, ***ZCBD*** = 24°.

101*. Точки A, ***B, C, D, E*** - вершины трех равных квадратов (рис. Т-5). Найдите ***ZBAE + ZCAE + ZDAE.***



р$_{ис}$. т-5

102*. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен a, а радиус вписанной в него окружности - ***r.*** Найдите радиус окружности, описанной вокруг этого треугольника.

103. Даны прямая ***a*** и отрезок ***BC*** (рис. Т-6). Найдите на прямой ***a*** такую точку A, чтобы треугольник ***ABC*** был равнобедренным (с основанием ***BC). B***

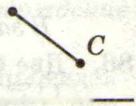


Рис. Т-6

104. Сравните площади квадратов, построенных на катете равнобедренного прямоугольного треугольника и на высоте этого треугольника, проведенной к гипотенузе.

105*. В треугольнике ***ABC*** через точку пересечения медиан ***M*** провели отрезок ***MP,*** параллельный стороне ***AB*** (рис. Т-7). Найдите площадь трапеции ***APMK,*** если площадь треугольника ***ABC*** равна ***S,*** а точка ***K*** - середина ***AB.***

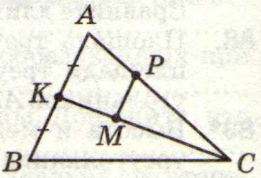


Рис. Т-7

106*. В треугольнике ***ABC*** через точку пересечения медиан ***M*** параллельно сторонам ***AB*** и ***CB*** провели отрезки ***MP и MK*** (рис. Т-8). Найдите площадь трапеции ***APMK,*** если площадь треугольника АБС равна ***S.***

107. Диагонали трапеции с основаниями 12 см и 20 см делят ее среднюю линию на три части. Найдите длины этих частей.

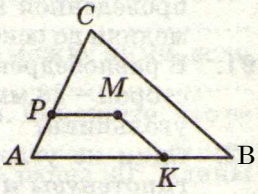


Рис. Т-8

108*. Угол между высотами параллелограмма, проведенными из одной вершины, равен 30°. Найдите площадь параллелограмма, если длины указанных высот 4 см и 10 см.

109*. Сумма длин диагоналей ромба равна 14 см, а длина стороны - 5 см. Найдите площадь ромба.

110. Высота, проведенная из тупого угла равнобокой трапеции, делит ее основание на отрезки 4 см и 8 см. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 2 см. Найдите углы и меньшее основание трапеции.

111*. Высота, проведенная из вершины A вписанной трапеции ***ABCD,*** делит ее основание на отрезки 4 см и 9 см, диагональ AC перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции.

112. Высота, проведенная из тупого угла вписанной трапеции, делит ее основание на отрезки 4 см и 8 см. Найдите длины всех сторон трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

113. Площадь равнобокой трапеции 117 см², длина меньшего основания - 4 см, мера острого угла - 45°. Найдите длину боковой стороны трапеции.

114*. Точки ***E h F, G h H, K u L,*** ***N*** *и* ***M*** делят соответственно каждую из сторон ***AB, BC, CD, DA*** квадрата ***ABCD*** на три равные части. Отрезки ***EH*** и ***MK*** пересекают отрезок ***GL*** в точках ***Q*** и ***R*** соответственно. Вычислите площадь пятиугольника ***AEQRM,*** если ***AB = 2^I7*** см.

115*. Средняя линия трапеции с основаниями ***a*** и ***Ъ (a < Ъ)*** делит ее на две трапеции. Найдите отношение площадей этих трапеций.

116. Окружность, вписанная в равнобокую трапецию, делит точкой касания боковую сторону этой трапеции на отрезки 2 см и 18 см. Найдите высоту трапеции.

117. Точка пересечения диагоналей ромба удалена от одной из его сторон на >/з см. Найдите диагонали ромба, если сторона ромба равна 4 м.

118. Определите, лежат ли точки А(4; -1), 5(-8; -1) и С(5; 1) на одной прямой.

119*. Определите, лежат ли точки А(4; -1), В(-8; 8) и С(-4; 5) на одной прямой.

120. Запишите уравнение окружности, которая касается осей координат и расположена в IV координатной четверти, радиус которой равен 5.

121. Запишите уравнение касательной к окружности (* -1)² + ***(y*** + 2)² = 1, которая проходит через точку (1; -1).

122. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку М(-11; 5) параллельно прямой ***x*** - 3.

123. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку М(-1; 2) параллельно прямой ***2x + y*** = 1.

124*. Запишите уравнение прямой, которая проходит через точку М(-1; 2) перпендикулярно к прямой ***2x + y*** = 1.

125*. Найдите уравнение окружности с центром в точке (-1; 3), которая касается прямой ***y - 2x*** -1.

126*. Вершины треугольника имеют координаты: (0; 0), (а; 0), (Ь; ***c).*** Запишите координаты: а) центра О описанной вокруг этого треугольника окружности; б) ортоцентра треугольника ***H;*** в) центроида треугольника ***M.***

127. Где расположен центр окружности, описанной вокруг треугольника АВС (относительно ДАВС), если: а) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} < 0$; б) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} > 0$?

128*. В равнобедренном треугольнике ***ABC*** угол ***B*** прямой, ***AC = 2-J2,*** $\overrightarrow{BD}$ - медиана. Вычислите скалярные произведения векторов: а) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BD}\,\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD}$.

129*. В треугольник АВС вписана окружность с центром О, которая касается сторон треугольника в точках ***P, T*** и ***E.*** Найдите модуль вектора $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OE}$, если АВ = 5, ***BC*** = 12, ***CA*** = 13.

130*. Определите тип геометрического преобразования, при котором точка ***A(x; y)*** переходит в точку АДл^; г/ₓ), если x_2 = 0,2(2 -I- Зле + 4***y),*** y_1 = 0,2(-4 - ***4x*** + ***Зу).***

131*. Диагонали трапеции пересекаются в точке ***O, S*** - точка пересечения продолжений ее боковых сторон, ***M*** и ***N*** - середины оснований. Найдите отношение меньшего основания трапеции к большему, если $\overrightarrow{50S} = \overrightarrow{12MN}$.

132*. Точка ***A(x; y)*** при параллельном переносе на вектор ***q(a; b***) и гомотетии относительно точки ***O(x₀; y₀)*** с коэффициентом ***k*** переходит в точку АДХр i/j). Найдите формулы взаимосвязи между координатами точек А и A_x.

Повторение курса планиметрии советуем начать с вопросов для повторения теоретического материала, которые приводятся в конце каждой главы. Напомним, что вопросы обязательного (минимального) уровня знаний отмечены цветной полосой. Потом хорошо бы поработать с заданиями в тестовой форме (стр. 251), а уже после этого приступить к решению предлагаемых ниже задач.

Данная подборка заданий рассчитана на средний и повышенный уровень требований к знаниям учащихся ООИИ, содержит задания на применение знаний, полученных в предыдущие годы обучения, поможет подготовиться к дальнейшим аттестациям и экзаменам.

Заметим, что для решения заданий на повторение курса планиметрии обязательного (минимального) уровня знаний можно обратиться к заданиям с нуликами возле номера, которые приводятся после каждого параграфа и в конце каждой главы.

Средний уровень сложности

Треугольники

Ч. В треугольниках ***ABC*** и $A_1B_1C_1$: ***AA*** = ZA, = 45°, ***AC*** = ZC, = 105°, A_XC_X = 6 см, ***AC*** = 12 см, ***MN*** - средняя линия треугольника ***ABC*** (M ***eAB, N*** є ***BC).*** По этим данным: а) докажите, что ***AABC*** " ДА^С^; б) докажите, что $AA_1B_1C_i$ = ***AMBN;*** в) сравните ***BN*** и ***A^B^,*** г) найдите ***BC;*** д) вычислите площадь треугольника ***ABC.***

2. Два отрезка АВ и ***CD*** одинаковой длины пересекаются в точке О так, что прямые ***AD*** и ***BC*** параллельны, ***OD*** = ***a, OC*** = ***Ь.*** По этим данным: **а)** докажите, что ***OA*** = ***a, OB*** = ***b***; б) найдите отношение периметров треугольников ***OAC*** и ***ODB;*** **в)** найдите длины отрезков ***CB*** и AD; г) найдите площадь треугольника ***ACD***; д) найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ***AOD***; е) найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ***BOC,*** если ***ZADO*** = ***a.***
3. Основание равнобедренного треугольника равно ***Ь,*** угол при основании - а. Найдите: **а)** периметр треугольника; **б)** площадь треугольника; **в)** радиус описанной вокруг него окружности; г) радиус вписанной в него окружности; д) медиану и высоту, проведенные к боковой стороне; е*) расстояние между инцентром и центром описанной окружности.
4. Две стороны треугольника равны 4 см и 6 см, угол между ними - 60°. Найдите: а) площадь треугольника; б) периметр треугольника; **в)** высоту, проведенную к третьей стороне; г) радиус описанной окружности; д) радиус вписанной окружности.

Четырехугольники

5. Через середину диагонали ***BD*** параллелограмма ***ABCD*** перпендикулярно к ней проведена прямая, пересекающая стороны ***BC*** и AD в точках МиГ соответственно. По этим данным: **а)** докажите, что ***BMDT*** - ромб; **б)** найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник ***BMDT,*** если ***BD*** = 8 см, ***TM*** = 6 см.
6. Боковую сторону трапеции разделили на ***n*** равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные основаниям трапеции. Найдите длину отрезков этих прямых, которые лежат между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции равны 23 см и 15 см и: а) ***n = 2;*** б) ***n*** = 4.
7. Диагональ прямоугольника равна 40 см. Перпендикуляр, проведенный из вершины прямого угла прямоугольника к его диагонали, делит ее в отношении 2 : 3. Определите: а) длины сторон прямоугольника; б) тангенс угла, образованного стороной и диагональю; **в)** длину проведенного перпендикуляра.
8. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 м и 4 м. Через середину его гипотенузы провели прямые, параллельные катетам. Определите вид образованного четырехугольника и найдите его диагонали.

Окружность. Многоугольники

9. Треугольник с углами 30°, 60°, 90° описан вокруг окружности. Найдите градусные меры дуг, на которые окружность делится точками касания.
10. В угол ABC вписана окружность. Точки касания делят окружность на две части, которые относятся как 5:4. Определите меру угла ABC.
11. Через концы хорды, которая делит окружность в отношении 2 : 7, проведены две касательные. Определите углы образованного треугольника.
12. Круг вписан в треугольник. Радиусы, проведенные в точки касания, разделили круг на части, площади которых относятся как 13 : 12 : 11. Найдите углы треугольника.
13. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6 см, основание - 4 см. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
14. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
15. Боковая сторона равнобокой трапеции равна 5 см, а основания - 4 см и 10 см. Найдите радиус окружности, описанной вокруг трапеции.
16. Диаметр ведущего колеса электровоза равен 2 м. Определите скорость электровоза, если ведущее колесо делает за 1 мин 100 оборотов.
17. Найдите диаметр круга, площадь которого равна: а) разности площадей двух кругов, радиусы которых равны 10 см и 8 см; б) сумме площадей двух кругов, радиусы которых равны 3 см и 4 см.
18. Вокруг правильного и-угольника со стороной 6 см описана окружность. Кроме того, в этот n-угольник вписана окружность. Найдите площадь кольца, образованного двумя окружностями, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; **в)** $n = 6$.
19. Сторона правильного л-угольника равна ***а.*** От его вершин отрезали круговые секторы (центры секторов совпадают с вершинами, радиусы секторов равны ***Ъ).*** Найдите площади образованных фигур, если: а) $n = 3$ (рис. П. 1-а); б) $n = 4$ (рис. П. 1-6); **в)** $n = 6$.

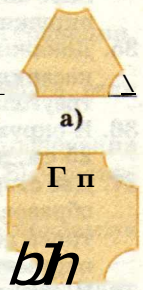


Рис. П.1

Метод координат. Векторы

20. Вершины треугольника расположены в точках: A(-5; 5), B(8; 8), C(5; -5); ***BD***-биссектриса его внутреннего угла. По этим данным: а) докажите, что треугольник ***ABC*** равнобедренный; б) выразите вектор ***BD*** через ***BA*** и ***BC;*** **в)** напишите уравнение окружности, диаметром которой является сторона ***AC;*** г) составьте уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника; д) вычислите длину медианы, проведенной к стороне ***BC;*** е) найдите косинусы углов треугольника ABC; ж) вычислите площадь треугольника ABC.
21. Треугольник ABC задан координатами своих вершинA(0; 12), B(9; 0), C(0; -12); ***К*** - центр вписанной в треугольник окружности, ***М*** - середина стороны AB. По этим данным: а) найдите длину медианы ***CM;*** б) запишите уравнение вписанной в треугольник окружности; **в)** запишите уравнение описанной вокруг треугольника окружности; г) выразите вектор $\overrightarrow{KB}$ через $\overrightarrow{KA}$ и $\overrightarrow{KC}$; д) найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{KA}$ и $\overrightarrow{KC}$; е) найдите площадь треугольника ***AKC;*** ж) найдите координаты центроида и ортоцентра треугольника.

Построения

22. Постройте прямоугольный треугольник по катету и биссектрисе прямого угла.
23. Постройте прямоугольник по его стороне и диагонали.
24. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов, которое равно 2:3.
25. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними.
26. Постройте ромб, диагонали которого относятся как 3 : 5.
27. Постройте трапецию по основаниям и двум углам.

28. Найдите площадь прямоугольного треугольника, один катет которого - 13 см, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.
29. В прямоугольном треугольнике основание высоты, опущенной на гипотенузу, удалено от боковых сторон на 3 см и 4 см. Найдите гипотенузу.
30. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет в отношении 5 : 4. Найдите гипотенузу, если периметр треугольника равен 72 см.
31. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены высота длиной 48 см и медиана - 50 см. Найдите периметр треугольника.
32. Периметр прямоугольного треугольника равен 120 мм, а высота, проведенная к гипотенузе, - 24 см. Найдите площадь треугольника.
33. На катете ***BC*** прямоугольного треугольника ***ABC*** как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу ***AB*** в точке ***P.*** Найдите площадь треугольника ***BCP,*** если ***BC = a, AC = Ъ.***
34. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника относятся как 5 : 13. Вычислите площадь этого треугольника, если сумма радиусов вписанной и описанной окружностей равна 17 см.
35. Докажите, что вписанная в прямоугольный треугольник окружность точкой касания делит гипотенузу на отрезки, произведение которых равно площади треугольника.
36. К окружности радиуса 7 см из точки, удаленной от центра этой окружности на 25 см, проведены касательные. Найдите расстояние между точками касания.
37. Две стороны треугольника равны 27 см и 18 см. Из вершины угла, который они образовали, проведена биссектриса. Один из отрезков, на которые эта биссектриса делит третью сторону треугольника, равен его боковой стороне. Найдите периметр треугольника.
38. В треугольнике ***ABC*** проведена биссектриса ***BP.*** Найдите ее длину, если ***AB*** =10 см, ***BC*** = 15 см и ***AC*** = 20 см.
39. В треугольнике две стороны равны 13 см и 15 см, а высота, проведенная к третьей стороне, - 12 см. Найдите диаметр вписанной окружности.
40. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см, а основание - 12 см. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.
41. В угол 2а вписана окружность радиуса ***R.*** К окружности проведена касательная, перпендикулярная к биссектрисе угла (проходит между вершиной угла и окружностью). Определите периметр треугольника, который отсекает касательная от заданного угла.
42. В равнобедренный треугольник ***ABC*** с углом а при основании вписана окружность. Периметр треугольника, который образовался после соединения точек касания, равен ***P.*** Определите периметр исходного треугольника.
43. Две стороны треугольника равны ***a*** и ***Ь,*** угол между ними - ***a.*** Найдите радиус окружности, проведенной через инцентр данного треугольника и концы третьей стороны.
44. В треугольнике ***ABC*** угол ***B*** равен 140°, сторона ***AC*** равна 1, а площадь треугольника - 0,7. Радиус круга с центром в точке ***B*** равен ***y/2.*** Найдите площадь общей части треугольника ***ABC*** и круга.



Для любознательных

Если записать площадь сегмента через радианную меру его дуги а, то получим выражение $S = 0{,}5B^2(a - \sin a)$.

Отсюда следует, что при всех а имеет место неравенство $\sin a < a$.

1. Докажите, что при всех $0 < a < \frac{K}{2}$ выполняется неравенство $a < \operatorname{tg} a$.

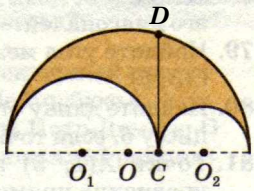
2. Возможно ли, чтобы сумма радиусов нескольких кругов была большей 100, а сумма их площадей - меньше 0,01?

45. Найдите площадь общей части двух кругов, радиусы которых равны 1 и $\sqrt{3}$, а расстояние между их центрами - 2.
46. Вершины правильного шестиугольника, сторона которого равна 2, являются центрами кругов с радиусами, равными $\sqrt{2}$. Найдите площадь части шестиугольника, расположенной вне этих кругов.
47. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, делит его на части, площади которых относятся как 2:1, считая от вершины. В каком отношении делит эта прямая две другие стороны треугольника?
48. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см, проведена касательная, параллельная его основанию. Вычислите длину отрезка касательной, ограниченного сторонами треугольника, если длина высоты, проведенной к основанию, 8 см.
49. Сумма острых углов трапеции составляет 90°, высота трапеции равна 2 см, основания - 12 см и 16 см. Найдите боковые стороны трапеции.
50. Большее основание трапеции является диаметром описанной вокруг нее окружности радиуса R. Острый угол трапеции - a. Определите площадь трапеции.
51. Равнобокая трапеция описана вокруг окружности. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 8 см и 18 см.
52. Прямоугольная трапеция описана вокруг круга. Найдите площадь круга, если основания трапеции равны 2 см и 6 см.
53. Центр вписанной в трапецию окружности удален от концов меньшего основания на 156 см и 100 см, а от концов боковой стороны - на 156 см и 65 см. Вычислите площадь трапеции.
54. Диагональ трапеции, вписанной в окружность радиуса R, образует с боковыми сторонами углы а и 2а. Определите площадь трапеции.
55. В прямоугольной трапеции боковые стороны равны 24 см и 25 см, а бóльшая диагональ является биссектрисой острого угла. Вычислите площадь трапеции.
56. Определите острый угол ромба, если его площадь равна 8 см^2, а площадь вписанного в него круга - тг см^2.
57. Высота ромба равна 6 см, одна из диагоналей - 10 см. Найдите площадь ромба.
58. В параллелограмме биссектриса острого угла, равного 30°, делит противоположную сторону на отрезки 6 см и 4 см, начиная от вершины тупого угла. Вычислите площадь параллелограмма.
59. В окружность вписан квадрат, а в квадрат - окружность. Площадь кольца, ограниченного окружностями, равна 9л см^2. Найдите сторону квадрата.
60. Круг и квадрат имеют одинаковые площади. В круг вписали квадрат, а в квадрат - круг. Что больше: площадь квадрата, вписанного в круг, или площадь круга, вписанного в квадрат?
61. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки правильного шестиугольника до прямых, содержащих его стороны, - величина постоянная для данного шестиугольника и не зависит от выбора точки на шестиугольнике. Найдите это расстояние, если сторона шестиугольника равна $4\sqrt{3}$.



Для любознательных

Докажите, что площадь арбелоса Архимеда (внутренняя часть плоскости, ограниченная тремя полуокружностями, центры которых лежат на одной прямой, а диаметр большей полуокружности равен сумме диаметров меньших полуокружностей - см. рис.) можно вычислить по формуле



$$\frac{1}{4} \quad nCD^2-$$

62. Шестиугольник вписан в окружность. Три его стороны, взятые через одну, равны 5 см каждая, а остальные стороны по 3 см. Найдите длину окружности.
63. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 10 см и 12 см. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон этого четырехугольника, равны. Найдите площадь четырехугольника.
64. Диагонали выпуклого четырехугольника равны. Отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, равны 6 см и 8 см. Найдите площадь четырехугольника.
65. Из точки вне окружности к ней провели секущую и касательную. Сумма их длин равна 30 см, а внутренний отрезок секущей на 2 см меньше касательной. Вычислите длины секущей и касательной.
66. Касательная и секущая, проведенные к окружности из одной точки, равны 20 см и 40 см соответственно. Секущая удалена от центра окружности на 8 см. Найдите радиус окружности.
67. Докажите, что для вписанного четырехугольника произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.
68. Внутри окружности радиуса 13 см задана точка ***M,*** удаленная от центра окружности на 5 см. Через точку ***M*** проведена хорда АВ = 25 см. Найдите длину большего из отрезков, на которые хорда АВ делится точкой ***M.***
69. В угол вписана окружность с центром ***O.*** Она касается сторон угла в точках ***A*** и В. Найдите радиус окружности, если точка О удалена от вершины угла на расстояние ***b*** и ***AB = a.***
70. В угол 60° вписаны две окружности, которые касаются друг друга и сторон угла. Найдите отношение радиусов этих окружностей.
71. Найдите внутренние углы четырехугольника, если его внешние углы относятся как 8 : 2 : 5 : 3.
72. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках пересечения биссектрис углов параллелограмма, если стороны этого параллелограмма равны 3 м и 1 м, а один из его углов равен 150°.
73. В круге радиуса 1 см проведена хорда длиной 1 см. Найдите площади частей круга, на которые он разделен данной хордой.
74. В круговой сектор с центральным углом а вписана окружность. Найдите радиус окружности, если радиус сектора равен ***R.***
75. К окружности радиуса ***R*** проведены касательные, угол между которыми равен <р. Найдите площадь фигуры, которую образуют отрезки касательных и меньшая дуга окружности, ограниченная точками касания.
76. Расстояние между центрами двух касающихся внутренним образом окружностей равно ***d.*** Касательная, проведенная к меньшей окружности из центра большей, образует с линией центров этих окружностей угол а. Найдите радиус большей окружности.
77. Две окружности с радиусами йиг(Д>г) касаются друг друга внешним образом в точке ***A.*** К ним проведена общая внешняя касательная - точки касания с окружностями В и С. Найдите: а) длину отрезка ***BC;*** б) длину отрезка общей внутренней касательной данных окружностей, ограниченного ***BC*** и точкой ***A;*** в) радиус окружности, касающейся обеих заданных окружностей и ВС; г) расстояние от точки ***A*** до прямой ВС; д) меру угла ***BAC.***
78. Найдите острый угол ромба, сторона которого равна среднему геометрическому его диагоналей.
79. Найдите угол между диагоналями параллелограмма ***ABCD,*** еслиА(5; 1), В(1; 2), С(3; 5).
80. Найдите длину отрезка, один из концов которого имеет ординату 8, а второй - абсциссу 6, если точка М(-1; 4) принадлежит отрезку и делит его в отношении 1 : 5.
81. Точки А(1; 5) и В(3; 1) симметричны относительно прямой ***n.*** Найдите уравнение прямой ***n.***
82. Найдите расстояние между прямыми ***5x - 6y*** + 11 = 0 и ***5x - 6y*** - 1 = 0.

83. Найдите уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки (0; 5) и прямой $x = -1{,}5$.
84. Запишите уравнение касательных, проведенных к окружности $x^2 + (y + 1)^2 = 6$ и , проходящих через точку: а) A(0; 10); б) B(5; 6).
85. Составьте уравнение: а) прямой, симметричной прямой $2x - 3y = 4$ относительно точки M(3; -6); б) прямой, полученной поворотом прямой $2x - 3y = 4$ вокруг точки (2; 1) на угол 90°; в) окружности, симметричной окружности $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 7$ относительно точки M(3; -6).
86. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ высоты пересекаются в точке H. Разложите вектор $\overrightarrow{AH}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $\angle ZBAC = a$.
87. $ABCDE$ - правильний пятиугольник. Разложите вектор $\overrightarrow{AC}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AE}$.
88. Запишите уравнение прямой, полученной поворотом прямой $2x - 3y + 5 = 0$ на 45° против часовой стрелки вокруг начала координат.
89. Составьте уравнение окружности, в которую преобразуется окружность $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 6$ при повороте вокруг начала координат на 45°.
90. Параллельный перенос переводит кривую $x^2 + y^2 = 2(2 + 2y - x)$ в кривую $x^2 + y^2 = 2(2 + 2x + y)$. Запишите уравнение образа прямой $4x - 5y + 1 = 0$, полученной в результате такого преобразования.
91. В треугольнике ABC: $AB = BC = 6$, $AC = 4$. Найдите $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.
92. При гомотетии с коэффициентом $k < 0$ и центром P окружность $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$ отображается в окружность $x^2 + y^2 + 10x + 24 = 0$. Найдите координаты точки P.
93. Постройте параллелограмм по стороне, высоте и диагонали.
94. Постройте треугольник по высоте, отношению отрезков, на которые эта высота делит сторону треугольника, и углу при вершине, из которой высота проведена.
95. Постройте треугольник по стороне, сумме двух других сторон и высоте, опущенной на одну из этих двух сторон.
96. Постройте отрезок заданной длины, параллельный данной прямой с концами на двух данных окружностях.
97. Постройте квадрат с центром в данной точке, чтобы середины двух его соседних сторон принадлежали данной прямой, а двух других - данной окружности.
98. Постройте треугольник по двум заданным сторонам и разности противолежащих углов.
99. Постройте ромб с центром симметрии в данной точке и вершинами на трех данных прямых.
100. Постройте прямоугольник по данному отношению сторон, если задано по одной точке на каждой его стороне.



Для любознательных

В человеческом обществе, где геометрия занимает исключительное положение, как это наблюдается сегодня, искусство и мысль не могут быть отделены от этого геометрического и математического феномена.

Я думаю, что никогда до сих пор мы не жили в такой геометрический период... Все вокруг - геометрия. Никогда мы не видели настолько ясно таких форм, как круг, прямоугольник, угол, цилиндр, шар, воплощенных так выразительно, заботливо и уверенно. Модернизм тем особенно ценен, что показал мир в совершенно новом виде - другие века не могли так «украшаться».

Ле Корбюзье



Архитектурный проект Ле Корбюзье. Капелла Нотр-Дам-дю-0 в г. Роншане (Франция)

Аксиомы стереометрии - утверждения стереометрии, которые принимаются без доказательства (стр. 182).

Аналитическая геометрия - раздел геометрии, который изучает свойства геометрических фигур с помощью системы координат (стр. 9).

Аполлония Пергского окружность - геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек является величиной постоянной (любая окружность является окружностью Аполлония) (стр. 78, **211, 221).**

Вектор - направленный отрезок (стр. 146);

- ***вектор-нормаль к прямой*** - вектор, перпендикулярный к прямой (стр. 166);
- ***коллинеарные*** - векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых; делятся на противоположно направленные и сонаправленные(стр. 147);
- ***модуль вектора AB*** - длина отрезка ***AB*** (стр. 147, 156);
- ***нулевой вектор*** - вектор, начало и конец которого совпадают, его длина и координаты равны нулю (стр. 147);
- ***произведение вектора на число*** (стр. 150, 159);
- ***противоположные векторы*** - векторы, длины которых равны, а направления противоположны (стр. 147);
- ***равные векторы*** - сонаправленные, равные по модулю векторы (стр. 148, 156), координаты их равны;
- ***разложить вектор по двум неколлинеарным векторам*** - представление векторов в виде суммы двух векторов (стр. 154);
- ***разность двух векторов*** - сумма первого вектора и вектора, противоположного второму (стр. 152, 160);
- ***сумма двух векторов*** - вектор, образованный из этих векторов по правилу треугольника или параллелограмма (стр. 151, 152).

Вневписанная окружность - окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжения двух других его сторон (стр. 62, 63, 279, 281).

Гамильтона формула (теорема Эйлера) - выражение $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, где ***O H*** - центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ***ABC*** (стр. **163).**

Гармоническая четверка точек - четыре точки прямой A, ***B, C, D,*** для которых отношение $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$ равно 2 или $\frac{1}{2}$ или **-1** (стр. **221, 233).**

Гексаэдр - шестигранник (стр. **190);**

- ***правильный гексаэдр*** - куб (стр. **189)**

Геометрическое место точек - совокупность (множество) всех точек, которые удовлетворяют определенному условию (форзац, стр. **129, 210).**

Геометрическое преобразование - взаимно однозначное соответствие, которое устанавливается между двумя фигурами как совокупностями точек (стр. **111);**

- ***обратное данному*** - геометрическое преобразование, при котором прообраз и образ меняются местами (стр. 111).

Герона формула - формула для вычисления площади треугольника через длины трех его сторон (стр. **60, 63).**

Гипербола — геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) является величиной постоянной (стр. **213).**

Гомотетия с центром в точке ***O*** и коэффициентом ***k*** - геометрическое преобразование, которое переводит произвольную точку ***A*** фигуры-прообраза в точку A, фигуры-образа так, что точки A и Aj лежат на одной прямой, причем$A_10 = |^|A0$(стр. **113).**

Группа симметрии фигуры - множество геометрических преобразований, которые переводят данную фигуру саму в себя (стр. **124).**

Движение - геометрическое преобразование, которое сохраняет расстояния между парами точек фигуры (сохраняет форму и размеры фигуры) (стр. 111).

Декартова прямоугольная система координат - 1) оси координат, которые пересекаются под прямым углом

в начале отсчета и на которых заданы единичные отрезки; 2) взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами чисел - ее координатами (стр. 9, 10).

Деление отрезка в крайнем и среднем отношении - деление отрезка по принципу золотого сечения (стр. 92, 224).

Додекаэдр - двенадцатигранник (стр. 190).

Достаточное условие - признак определенного множества фигур (7 кл.).

Жергона теорема - теорема о пересечении трех чевиан треугольника в одной точке (стр. 70).

Задача Аполлония - задача о построении окружности, касательной к трем данным элементам из множества: «окружности, прямые, точки» (касание окружности и точки означает, что окружность проходит через эту точку) (стр. 235, 240, 241, 243).

Золотое сечение - деление целого на две неравные части, при котором целое относится к большей части так, как большая часть - к меньшей (стр. 224).

Икосаэдр - двадцатигранник (стр. **190).**

Инверсия - преобразование относительно ***окружности инверсии*** с центром О ***(центр инверсии)*** и радиусом ***г (г² - степень инверсии)*** (стр. 236).

Инцентр треугольника - точка пересечения его биссектрис (стр. 279).

Конус прямой круговой - пространственная фигура, образованная вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов ***(оси конуса)*** (стр. 202).

Координатная плоскость (декартова плоскость, плоскость i, или *(xOy))* - плоскость, на которой задана декартова система координат (стр. 10).

Координаты вектора - коэффициенты разложения вектора по координатным векторам (стр. 155).

Координатные векторы (орты) в декартовой системе координат - векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ - единичные векторы, принадлежащие координатным осям и сонаправленные с ними (стр. 155).

Косинусов теорема - теорема, которая доказывает формулу для квадрата длины одной стороны треугольника через длины двух других его сторон и косинус угла между ними (стр. 51).

Косинусов теорема для четырехугольника - теорема, которая доказывает формулу для вычисления квадрата стороны четырехугольника через квадраты длин его других сторон и косинусы его углов (стр. 175).

Круг - внутренняя часть плоскости, ограниченная окружностью (стр. 103).

Куб - правильный шестигранник (стр. 189).

Лейбница теорема - теорема о сумме квадратов расстояний от произвольной точки плоскости треугольника до вершин этого треугольника и его центроида (стр. 177).

Метод векторный - метод решения задач с помощью введения векторов (стр. 160, 170, 171).

Метод геометрических преобразований - метод решения задач с помощью геометрических преобразований (стр. 127, 227).

Метод инверсии - метод решения задач с помощью преобразования инверсии (стр. 237, 240).

Метод координат - метод решения геометрических задач введением системы координат (стр. 75, 210, 215).

Метод математической индукции — метод доказательства правильности бесконечной последовательности утверждений (стр. 246).

Метод площадей - использование понятия площади как вспомогательного элемента для доказательства теорем и решения задач (стр. 67).

Метод прокола - метод представления вектора $\overrightarrow{AB}$ с помощью произвольной точки ***X:*** $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB}$ или $\vec{Xв} - \overrightarrow{XA}$ (стр. 153).

Метрические свойства - свойства, которые устанавливаются измерением (стр. 232).

Многогранник - внутренняя часть пространства, ограниченная многоугольниками ***(гранями)*** (стр. 188).

Многоугольник - внутренняя часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной, которая не пересекает сама себя (8 кл.);

- ***одноименные многоугольники*** — многоугольники с одинаковым числом вершин (стр. 85, 88);
- ***подобные многоугольники*** — многоугольники, которые переходят друг в друга преобразованием подобия (стр. 121);
- ***правильный*** - многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны (стр. 85).

Мора—Маскерони построение - геометрическое построение, которое выполняется только циркулем (стр. 235, 238).

Наклонная к плоскости - отрезок, который соединяет определенную точку пространства (не лежащую в заданной плоскости) с точкой плоскости и который не является перпендикуляром к этой плоскости (стр. 185).

Необходимое условие - свойство определенного множества фигур (7 кл.).

Окружность - ГМТ плоскости, равноудаленных от одной ее точки (***центра окружности)*** (7 кл.);
- ***уравнение окружности*** - уравнение, которому удовлетворяют координаты всех точек заданной окружности и не удовлетворяют координаты всех точек, которые не принадлежат ей (стр. 12).

Октаэдр - восьмигранник (стр. **190).**

Ортоцентр треугольника - точка пересечения его высот (стр. 64, 129, 163, 164, 279).

Ортоцентрический треугольник - треугольник с вершинами в основаниях высот данного треугольника (стр. 117).

Осевая симметрия - см. преобразование симметрии относительно прямой.

Основные фигуры стереометрии - фигуры, понятия которых принимаются без определения (стр. 182).

Основные элементы треугольника — множество его сторон и внутренних углов (стр. 55).

Ось абсцисс - ось ***Ox*** в декартовой системе координат (стр. 10).

Ось ординат - ось ***Oy*** в декартовой системе координат (стр. 10).

Ось симметрии фигуры - см. преобразование симметрии относительно прямой.

Парабола - геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки (***фокуса***) и от некоторой прямой ***(директрисы)*** (стр. 213).

Параллелепипед - призма, образованная шестью параллелограммами, которые попарно равны и параллельны (стр. 193);
- ***прямоугольный*** - параллелепипед, образованный шестью прямоугольниками (стр. 194).

Параллельный перенос - преобразование, при котором две произвольные точки А и В фигуры-прообраза переходят в точки Aj и B_x фигуры-образа так, что четырехугольник $ABB^{\wedge}A_X$ является параллелограммом или отрезком (стр. 111, 132).

Паскаля теорема - теорема о точках пересечения прямых, которые содержат три хорды окружности (стр. 50, 53).

Перпендикуляр к плоскости, проведенный из данной точки - отрезок перпендикулярной к этой плоскости прямой, ограниченный заданными точкой и плоскостью (стр. 184).

Пика формула - формула для вычисления площади многоугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки (стр. 90).

Пирамида - пространственная фигура, образованная треугольниками ***(боковыми гранями),*** которые сходятся в определенной точке ***(вершине)*** и имеют по одной общей стороне с плоским многоугольником ***(основанием)*** (стр. 198).

Плоскости параллельные - плоскости, которые не имеют общих точек (стр. 185).

Плоскости перпендикулярные - называются плоскости, если плоскость, перпендикулярная к линии пересечения данных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым (стр. 185).

Подобные треугольники - треугольники, углы которых равны, а против равных углов лежат пропорциональные стороны (стр. 114).

Подобные фигуры - фигуры, которые переводятся друг в друга преобразованием подобия (стр. 114).

Полярная система координат - система координат на плоскости, заданная ***полюсом*** (точкой), ***полярной осью*** (полуприямой) и ***полярным углом*** (углом между полярной осью и ***полярным радиусом,*** который откладывается против часовой стрелки) (стр. 140).

Полярные координаты точки - полярный радиус и полярный угол точки в полярной системе координат (стр. 140).

Преобразование поворот с центром в точке ***О*** на угол а - геометрическое преобразование, которое переводит произвольную точку ***А*** фигуры-прообраза в точку А, фигуры-образа так, что А и А, расположены на одном расстоянии от точки О и $\angle AOA_x = a$ (стр. 112, 141).

Преобразование подобия - преобразование одной фигуры в другую, при котором отношение расстояния между двумя произвольными точками одной фигуры к расстоянию между двумя соответствующими точками второй фигуры - постоянно; это число называют ***коэффициентом подобия*** (стр. 114).

Преобразование симметрии относительно прямой (*оси симметрии)* - переводит произвольную точку ***А*** фигуры-прообраза в точку A_1 фигуры-образа так, что точки AuA_1 лежат на одной прямой, перпендикулярной к оси симметрии, и на одинаковом расстоянии от нее (стр. 112, 135).

Преобразование симметрии относительно точки *О (центра симметрии)* - геометрическое преобразование, которое переводит произвольную точку ***А*** фигуры-прообраза в точку A_1 фигуры-образа так, что точки А, $0,A_1$ лежат на одной прямой и $A_xO = AO$ (стр. 112, 136).

Призма - многогранник, две грани которого (***основания***) равные и параллельные плоские многоугольники, а другие грани (***боковые***) - параллелограммы (стр. 193).

Пространственные формы - трехмерные геометрические фигуры (стр. 181).

Прямая, перпендикулярная к плоскости - прямая, перпендикулярная к любой прямой этой плоскости (стр. 184).

Птолемея неравенство - неравенство для сторон и диагоналей выпуклого четырехугольника (стр. 89).

Птолемея теорема - равенство произведения диагоналей вписанного четырехугольника сумме произведений его противолежащих сторон (форзац, стр. 54).

Равновеликие фигуры - фигуры, которые имеют равные площади (8 кл.).

Равносоставленные фигуры - фигуры, которые можно поделить на одно и то же число попарно равных фигур (8 кл.).

Равные фигуры - фигуры, которые можно совместить наложением (7, 8кл.); фигуры, которые преобразуются друг в друга движением (стр. 115).

Радиан - единица измерения угла, ***к*** радиан равно 180° (стр. 99).

Радианная мера угла - измерение центрального угла окружности через отношение длины дуги, на которую опирается этот угол, к его диаметру; единица измерения - ***радиан*** (стр. 99).

Расстояние от точки до плоскости - длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к заданной плоскости (стр. 185).

Расстояние от точки до прямой на координатной плоскости - формула для вычисления длины соответствующего отрезка через координаты заданной точки и коэффициенты прямой, уравнение которой записано в общей форме (стр. 168, 169).

Решение треугольника - вычисление сторон и углов треугольника по трем его основным элементам (если треугольник определен) (стр. 55).

Сегмент - внутренняя часть плоскости, ограниченная окружностью и ее секущей (стр. 104).

Сектор - часть центрального угла окружности, которую ограничивает соответствующая ему дуга (стр. 103).

Синусов теорема - теорема об отношении длины стороны треугольника к синусу противоположного этой стороне угла (стр. 46, 52).

Скалярное произведение двух векторов - сумма произведений соответ-

ствующих координат этих векторов (стр. 165).

Скалярный квадрат - скалярное произведение вектора самого на себя (стр. 165).

Скрещивающиеся прямые - прямые, которые не имеют общих точек и через которые нельзя провести плоскость (стр. 184).

Софизм - специально сформулированное ошибочное умозаключение (стр. 30, 55, 56).

Спираль Архимеда - линия, заданная уравнением $\rho = a\varphi$ в полярной системе координат (стр. 140).

Стереометрия - раздел геометрии, который изучает фигуры в пространстве (стр. 181).

Сфера - поверхность шара (стр. 203).

Тело вращения - пространственная фигура, образованная вращением плоской фигуры вокруг определенной оси (стр. 201).

Тетраэдр - четырехгранник (стр. 189, 199).

Треугольник определен - если по данным элементам можно построить конкретный треугольник (стр. 55).

Три знаменитые геометрические задачи древности - ***квадратура круга, удвоение куба, трисекция угла*** (стр. 243).

Угол между двумя векторами - ***с общим началом*** — угол между полупрямыми, на которых лежат данные векторы (стр. 165);
- ***не имеющими общего начала,*** - угол между равными им векторами, которые имеют общее начало (стр. 165).

Угол между двумя окружностями (которые пересекаются) - угол между касательными к этим окружностям, проведенными через общую точку окружностей (стр. 239).

Условие принадлежности трех точек одной прямой (необходимое и достаточное) — свойство и признак соответствующего ГМТ (стр. 26, 28, 161).

Фигура-образ - совокупность точек, которая отвечает фигуре-прообразу при геометрическом преобразовании (стр. 111).

Фигура-прообраз - исходная совокупность точек при геометрическом преобразовании (стр. 111).

Центр правильного многоугольника - точка, совпадающая с центром вписанной и описанной окружностей этого многоугольника (стр. 87).

Центроид треугольника (центр тяжести треугольника) - точка пересечения его медиан (стр. 279).

Цилиндр прямой круговой - тело вращения, образованное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (***оси цилиндра)*** (стр. 201).

Чевиана - отрезок, который соединяет вершину треугольника с точкой на противоположной стороне этого треугольника (стр. 68).

Чевы теорема - теорема о пересечении трех чевиан треугольника в одной точке (стр. 69);
- ***тригонометрическая форма теоремы Чевы*** - запись утверждения теоремы через тригонометрические функции углов между чевианами и сторонами треугольника (стр. 69).

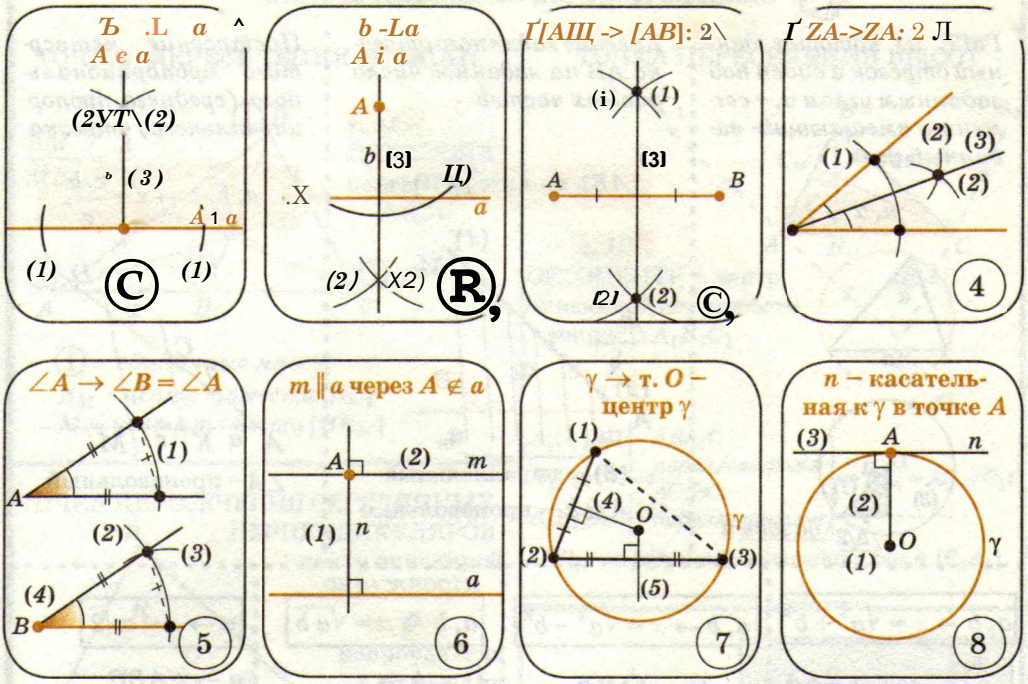
Число ***л*** - отношение длины окружности к ее диаметру - численно равно длине единичной полуокружности (стр. 98).

Шар - тело вращения, которое образуется вращением круга вокруг его диаметра (стр. 203).

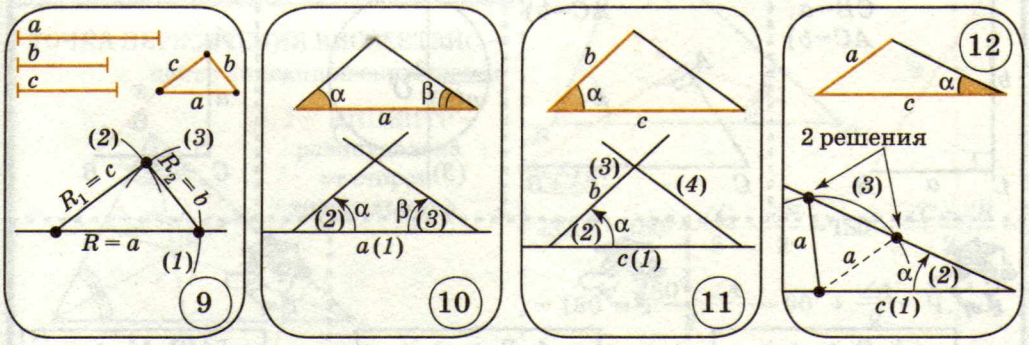
Эллипс — геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) является величиной постоянной (стр. 211).

Якоба Штейнера построение - геометрическое построение, которое выполняется только линейкой, при условии, что на плоскости задана окружность с определенным центром (стр. 147, 234).

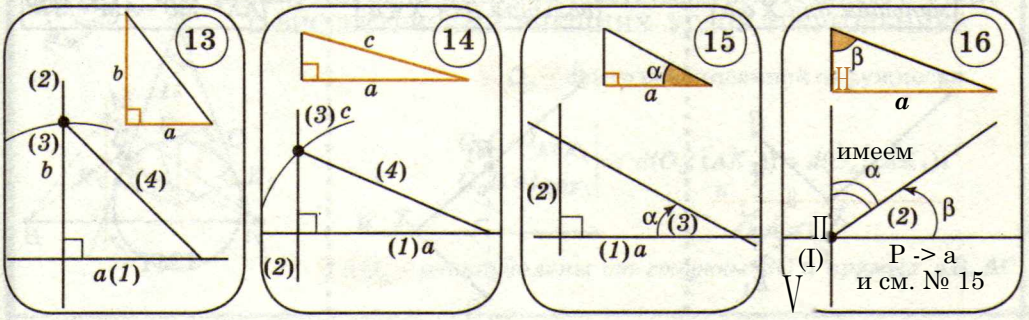
Опорные задачи на построение (7 класс)



Базовые треугольники



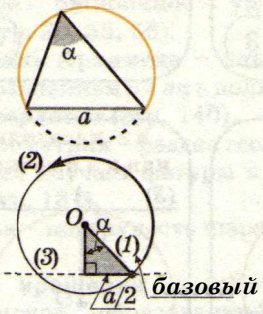
Базовые прямоугольные треугольники



Опорные задачи на построение (8—9 классы)

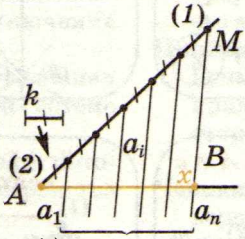
ГМТ, из которых данный отрезок а виден под заданным углом а, ***- сегмент, вмещающий заданный угол***

а, а —» у



Деление заданного отрезка АВ на заданное число равных частей

[АВ], n → x = [АВ] : n

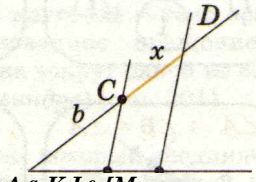


(3)— параллельные

ZA И k - произвольные

Построение четвертого пропорционального (среднего пропорционального) отрезка

а, ȯ, с —»x = $\frac{cb}{a}$

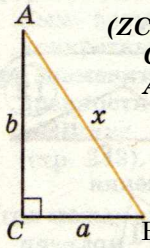


ZA— произвольный

а, Ь-> =$\sqrt{1a^2 + Ь^2}$

а, b Д***ABC***

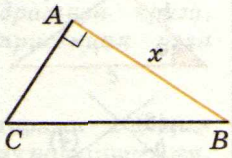
(ZC= 90°, ***CB=a, AC=Ь)***



а, ***Ъ -> = ^$ia^2 - Ъ^2$***

а, Ъ ->ZABC

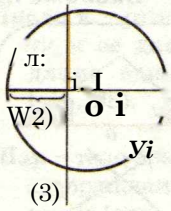
(ZA=90°, CB=a, AC=Ь)



а, b =>Va Ъ

1) а, Ь -> у

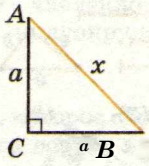
(Л=^)



а -» ***x*** = $a\sqrt{2}$

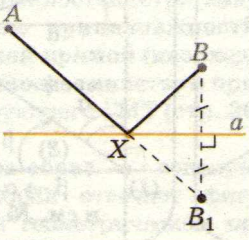
а -> ***AABC***

(ZC=90\ AC=CB=a)



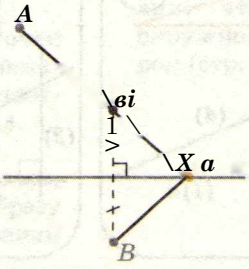
А, В, а —^ X

АХ' + ХВ — ***каименьшая для Хе а***



А, В, а -» X

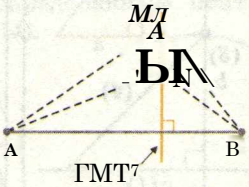
\АХ - хв\ — наибольшая для Хе а



[АВ], М -> ,X

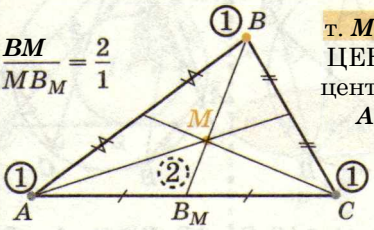
для которых

АХ'-ХВ²=АМ²-МВ²



Замечательные точки треугольника

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МЕДИАН



$\frac{BM}{MB_M} = \frac{2}{1}$

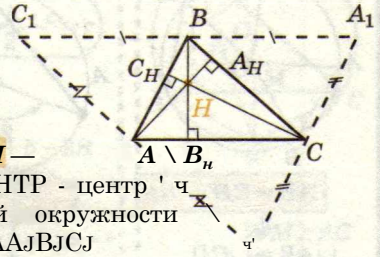
т. ***M*** - ЦЕНТРОИД- центр тяжести ***A ABC***

© - ***единичные массы***

$B_м$ - ***центр тяжести [AC]***

M - ***центр тяжести [BB_M***

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ВЫСОТ



т. ***H*** — ОРТОЦЕНТР - центр ' ч описанной окружности вокруг AAJBJCJ

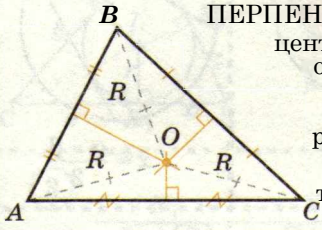
AjCj I AC ***ABA_XC-***

BAI ***BC параллелограмм*** =>BAi=AC= C_1B

AjBj |]AB ***параллелограмм***

BB_H-серединный, перпендикуляр к [CjAj]

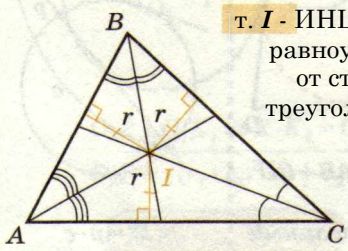
ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СЕРЕДИННЫХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРОВ-



центр описанной окружности

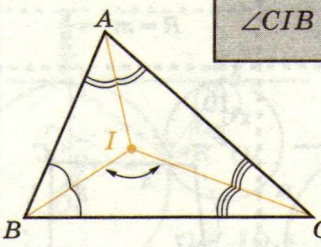
т. O - равноудалена от вершин треугольника

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИССЕКТРИС - центр вписанной окружности



т. ***I*** - ИНЦЕНТР - равноудалена от сторон треугольника

$$\angle CIB = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$



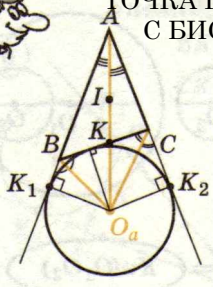
△***CIB***:

ZCIB = 180° - $\frac{\angle C}{2}$ — $\frac{\angle B}{2}$ =180°- $\frac{\angle C+\angle B}{2}$ =

= 180° $\frac{180^\circ - \angle A}{2}$ =90° + ZA. Ч.т. д.



ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИССЕКТРИСЫ ВНУТРЕННЕГО УГЛА С БИССЕКТРИСАМИ ВНЕШНИХ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА



т. O_a - центр вневписанной окружности

O_aC^1кск$_г$ | => $d(O_a; (AK_2)) = d(O_a;$ (АК^))

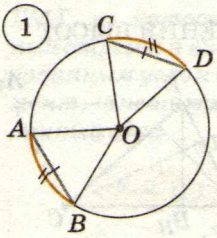
O_aB = Iквк, | Л

$OoA = 1_A$

I иO_a- равноудалены от стороны BC и прямых AB, AC

Опорные факты про окружности

1

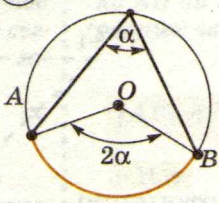


$AB = CD$

$\Updownarrow$

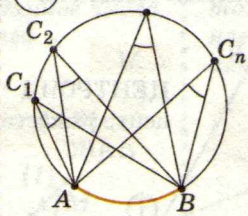
$\cup AB = \cup CD$

2



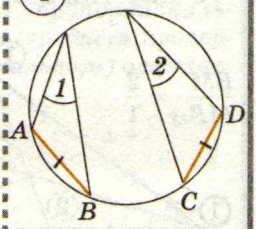
$\alpha = \frac{1}{2} \cup AB$

3



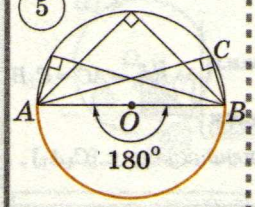
$\angle AC_1B = \ldots = \angle AC_nB$

4



$AB = CD \Leftrightarrow \angle 1 = \angle 2$

5

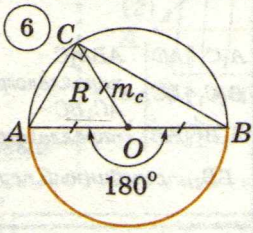


$AB \equiv 2R$

$\Updownarrow$

$\angle ACB = 90^\circ$

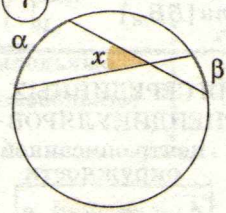
6



$\angle C = 90^\circ$

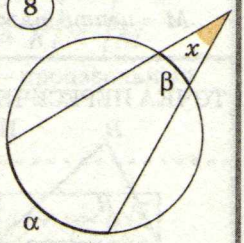
$R = m_c = \frac{c}{2}$

7



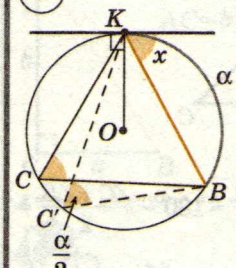
$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$

8



$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$

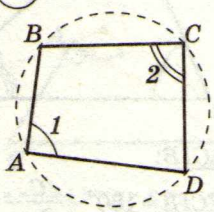
9



$\frac{\alpha}{2}$

$x = \frac{\alpha}{2} = \angle KCB$

10

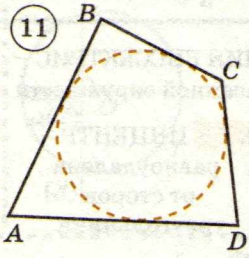


$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

$\Updownarrow$

$ABCD$ – вписанный

11

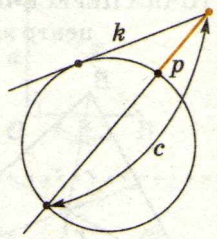


$AD + BC = AB + CD$

$\Updownarrow$

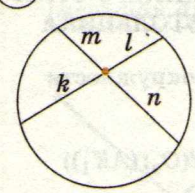
$ABCD$ – описанный

12



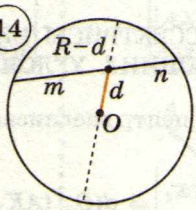
$k^2 = p \cdot c$

13



$m \cdot n = k \cdot l$

14

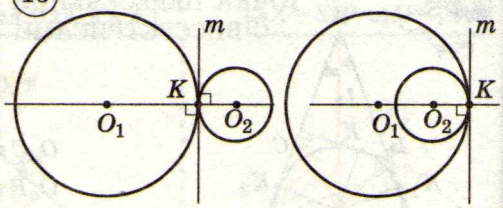


$m \cdot n = (R + d)(R - d)$

$m \cdot n = R^2 - d^2$

$\boxed{d^2 = R^2 - m \cdot n}$

15



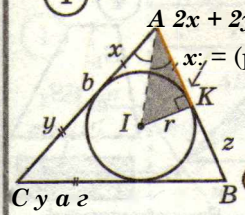
$O_1K \perp m$

$O_2K \perp m$

$\Rightarrow$ $K \in (O_1O_2)$

Опорные задачи окружности

1



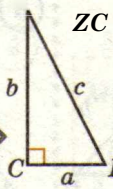
$A\ 2x + 2y + 2z = 2p$

$x; = (p - a)$

$x = p-(y+z)$

$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$

$p \triangleq \frac{P}{2}$

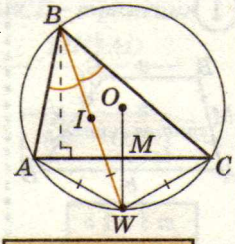


$ZC = 90° —» \operatorname{tg} \wedge = 1$

$\frac{a + b - c}{2} = r$

$2r = a + b - c = a + b - 2R$

$r + R = \frac{a+b}{2}$



$AW = WI = WC$

$WML\ AC$

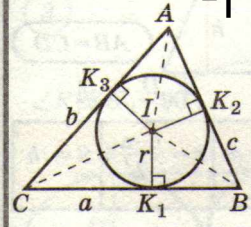
li

$OeWM$

2

$S = S_1 + S_2 + S_3 =$

$-|гв+|г\&+|ге$



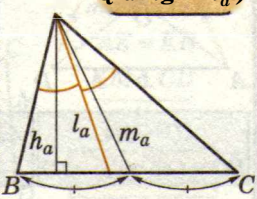
$r = \frac{S}{p}$

$p \triangleq \frac{P}{2}$

$r = \frac{S}{p} \quad \frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2S} =$

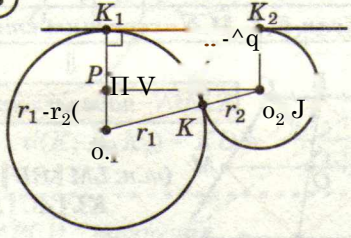
$= \frac{a}{ah_a} \wedge \frac{b}{bh_b} \wedge \frac{c}{ch_c}$

$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{l_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$



$Q^{l}a < lg < rn_a')$

3

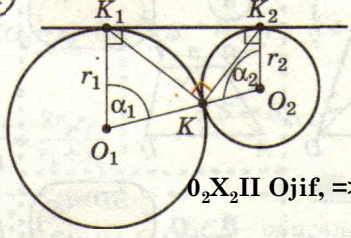


$0_2P1\underline{0_1K_1} = *\underline{K_1K_2} = \underline{0_2P};$

$0_2P = \sqrt{(r_t + r_2)^2 - (Л1 - Г2)^2}$

$(\underline{X_X Л Г_2} = 2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2})$

4



$O_1K_1 \perp K_1K_2$

$\underline{Q_2K_2LK_XK_2}$

$\Downarrow$

$0_2X_2II\ Ojif, => a_x + a_2 = 180°$

$ZKK_1K_2 = -+\frac{01}{2}$

$ZKK_2K_X = \frac{q_2}{2}$

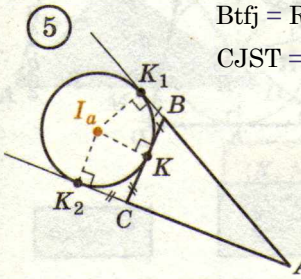
$\Rightarrow ZK_XKK_2 = 180° - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$

$<\wedge ZK,KK_2 = JKT)$

(см. № 9 стр. 280)

5

Вневписанная окружность (треугольника ABC) s'



Btfj = Rff

CJST = CK_2

$\Rightarrow BC =$

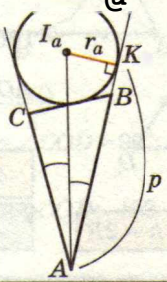
$= K_XB + K_2C$

$AKi = AB + BK_1$

f II

$AK_2 = AC + CK_2$

$<£Kx = Ak7 = £)$



$@ \wedge / <\&-'\blacksquare *«*.$

$S = r(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$

(см. № 1)

$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{S}{2 \sim p\ (p \sim a)}$

$r_a = \frac{S}{p-a}$

Опорные факты трапеции

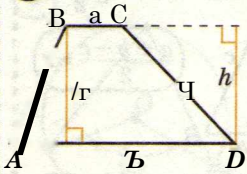
1



$m \parallel a \parallel b$

$m = \frac{a+b}{2}$

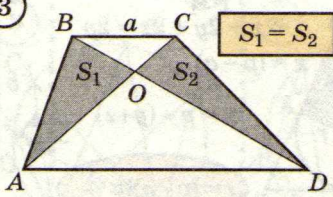
2



ABCD - трапеция

$S = h \cdot \frac{a+b}{2}$

3

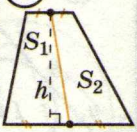


$S_1 = S_2$

$S_1 = S_{ABC} - S_{BOC} = S_{BCD} - S_{BOC}$

равны

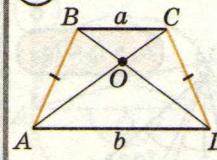
4



$S_1 = S_2$

(т.к. h – общая)

5



(аБ = с£>):@

JJ. □□

$\angle A = \angle D$

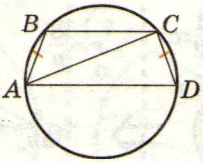
$\angle B = \angle C$

$AC = BD$,

$BO = OC$, $AO = OD$

$ZA+ZC = 180°$

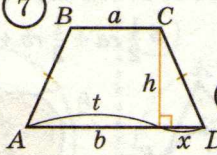
$ZB+ZD = 180°$



^ $AB = CD$

Rabcd= Діся

7



$AB = CD$ ⇓

. a+b

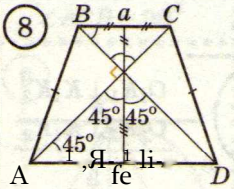
i=X>w

ср. л.

$= \frac{b-a}{x\ 2}$

0 II II t^ SI

8



$AB = CD$, $AC \pm BD$

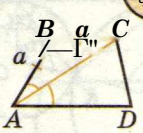
л

$n \cdot \frac{a+i>}{2} = m$

ср. л.

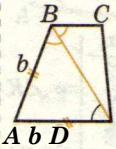
$S = h^2 = /п^2$

9



/AC=/д>

ЧAB=a



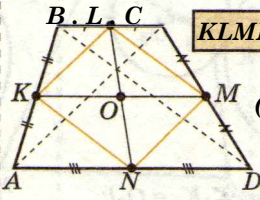
('BD=lg

'AB=Ь

©, *(Если K, L,M,N-середины сторон,*

II

KLMN- параллелограмм

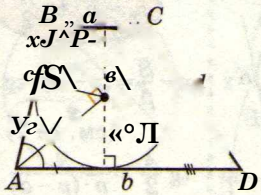


(т.к. LM BD KN, KL\\AC\\NM)

KO—OM; OL = ON

если AB = CD =>AC = BD и KLMN-ромб

11



$ZAOB = 180° - \frac{\angle B}{2} = 180° - \frac{\angle \Gamma}{2} = 90°$;

$AAOB$: $Bm^2 = x \cdot y$ Ï

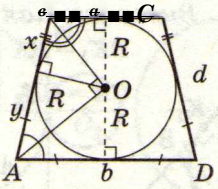
$ZAOB = 90°$

$R = \sqrt{yxy}$

$a + b = d + c$

$h = 2R$

12



(AB^CP)

Д

$x = \frac{a}{2}$

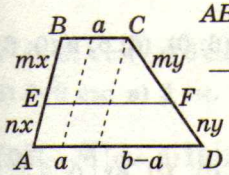
$y = \frac{Ъ}{2}$

$R = \frac{\cdot jab}{2}$

$h = \sqrt{ab}$

Опорные факты трапеции

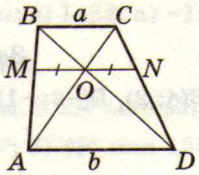
1



$ABCD$ – трапеция, $EF \parallel AD$ ⇓

$$EF = \frac{an+bm}{m+n} \Rightarrow MN = \frac{2ab}{a+b}$$

2



$ABCD$ – трапеция, $MN \parallel AD$ ⇓

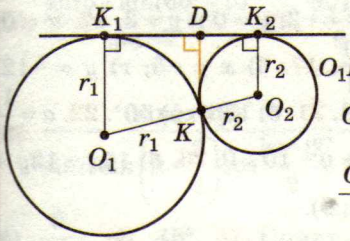
$MO = ON$

$$\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{ND} = \frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA} = \frac{a}{b}$$

3

$$d(K; K_1K_2) = \frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$$

$\angle K_1KK_2 = 90^\circ$;



$KD \parallel O_1K_1 \parallel O_2K_2$ и

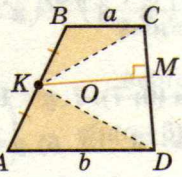
$O_1K_1K_2O_2$ – трапеция;

$O_1K_1 = r_1, O_2K_2 = r_2$;

$O_1K = r_1 \quad KO_2 = r_2$ ⇓

$$d(K; K_1K_2) = KD = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_1}{r_1+r_2} = \frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$$

4



$ABCD$ – трапеция, $AK = KB$, $KM \perp CD$ ⇓

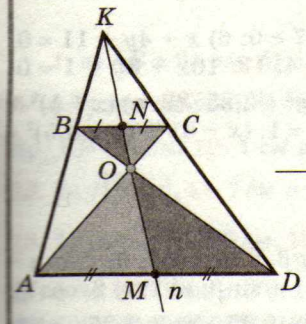
$S = KM \cdot CD$

$$\underbrace{S_{KBC} + S_{AKD}}_{\parallel} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2}b \cdot \frac{h}{2}$$

$$\frac{1}{2}S \Rightarrow S_{KCD} = \frac{1}{2}S \text{ и } S = 2S_{KCD}$$

$ABCD$ – трапеция

5

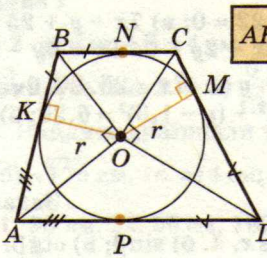


$BN = NC$, $AM = MD$ ⇓

$\{K; N; O; M\} \in n$

6

$ABCD$ – описанная трапеция ⇓



$AK \cdot KB = CM \cdot MD$ ⇓

$AP \cdot BN = NC \cdot PD$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{PD}{AP}$$

1) $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$; $OK \perp AB$, $OM \perp CD$;

2) $\triangle AOB$ и $\triangle COD$: $KB \cdot AK = r^2 = CM \cdot MD$

ОТВЕТЫ И СОВЕТЫ

ГЛАВА I

Задание 1

5. в) На оси Ох. 7, ***B(***4; 2), Z>(-2; -1). 10. Точка А. 11. (0; 0), (6; 0), (6; 6) и (0; 6). 15. Да.

Задание 2

1. б) 10; г) 3. 2. б) $\sqrt{74}$; г) 5. 6. Нет. 8. (4,75; 0). 9. б) (0; 0). 10. б) $\left(0; \frac{10}{13}\right)$. 14. б) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 64$; г) $(x - 3)^2 + y^2 = 16$. 15. б) (-3; 7) и 4. 17. А, ***D, E, F.*** 20. $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 20$. 22. б) (3; 0) и 2. 26. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$. 27. (2; 2), (-2; 2), (-2; -2) или (2; -2). 28. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ или $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$. 31. 7Ї06. 33. C(7; -10), D(-2; -1). 35. а) (0; 7), (0; -7); б) (0; 14). 37. C(2; 0), ***D(***3; 2). 41. ^-3; $\frac{2}{3}$ j. 42. а) $\left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$; **б)** $\left(\frac{1}{3}; \right.$ ^)‘ ^аких точек не существует.

Задание 3

1. б) (1,75; 0) и (0; 7). 7. $y = 10$. 9. c = 2. 11. $x = 0$; x = -2; y = 0 и z/ = 2. 12. x = 0; x = 5; $y = 0$ и $y = -3$. 15. б) y = ^ + 2; г) i/ = -yX-^- 17. б) x = -5; г) $y = -12$. 18. б) $y = x$; г) 3x - $2y$ + 13 = 0. 20. б) $k = -1{,}6$; г) $k = 0{,}8$. 21. б) 135°; в) 60°. 22. a = i; $b = \frac{3}{3}$ j. 23. б) 3x-4r/-1=0. 24. в)г/ = 73x + 2-873; г)x + y - 10 = 0. 26. б) 16x-13y + + 46 = 0; 2x + $13y$ + 12 = 0; x + 3 = 0. 28. $y = 12$. 30. ,ЙГ(0; 0).

Задание 4

1. б) Прямые параллельны; в) прямые совпадают; е) прямые пересекаются в точке (1; 1). 2. а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) нет. 3. а) $m = 4$; б) $m = 3$ или $m = -4$. 4. а) $m = \frac{2}{3}$; б) $m = -\frac{3}{7}$. 5. а) $y = 7x + 3$; б) 3x - y - 2 = 0; в) 3x + $2y$ = 0. 6. а) $y = -0{,}125x - 0{,}625$; б) x + $4y$ - 22 = 0; в) 7x - y + 25 = 0. 7. а) x - y - 7 = 0; б) x + $4y$ + 11 = 0. 9. 6x - y - 19 = 0; 5x - $2y$ = 0; 4x + $7y$ - 29 = 0. 10. 3. 11. 4. 12. 10x + $8y$ + 1 = 0. 13. (5; 5). 17. Да. 19. $y = -7x - 25$. 20. 6л/3 и 2v/35. 21. $x^2 + y^2 = 2{,}25$. 22. а) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$; $(x - 2)^2 + (y - 1{,}5)^2 = 6{,}25$; б) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$; $(x - 3)^2 + (y - 3{,}5)^2 = 6{,}25$. 23. C(-3; 3).

Задание 5

3. а) sinx; б) -cosx. 4. б) sinp; в) ctgp. 5. б) 2sina; г) 2tgp. 6. а) cosP; б) 2sina - - 2 cos a; в) 5tga + 2tgP 4- ctgp. 7. а) $\cos^2 a$; б) 0. 8. а) -1; б) 1 + sinP; в) 1; г) $2/\cos^2 P$; д) 1. 10. а) -0,5; б) 1,5; г) 1,5л/3; д) 0. 11. а) 9; б) 5,75; в) -2,25; д) 1. 12. В)sina = $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; tga = 2v2; ctga = $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; **б)** sin a = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; tga =->/3; ctga = $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 13. 0) .!„() = C°»P. $-\frac{2}{\sqrt{13}}$; ctgd. $-\frac{2}{3}$; **в)** ,m(), c«*p = $\frac{3}{\sqrt{10}}$; Ct_g(l. $\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\frac{1}{3}$.

14. б) cos a = $\frac{\sqrt{21}}{5}$; tga = $\frac{2}{\sqrt{21}}$; ctga = $\frac{\sqrt{21}}{2}$. 18. а) a > p; б) a < P; в) a > P; г) a > p.

19. а) sin 150° < sin 130°; б) cos 100° > cos 140°; г) ctg50° > tg100°; д) sin 120° > sin 50°.
21. 1. 22. 2. 23. а) $\cos^3 a$; б) $\cos^2 a$; в) 1; г) $\cos^2 a$; д) 1. 24. а) -1; б) 1. 25. а) 1; б) 1.

Задание 6

1. б) 4 $см^2$; г) 6 $см^2$. 3. б) 30° или 150°. 4. 8 см. 5. $2R^2 \sin a \sin p \sin(a + P)$. 6. а) $\frac{л}{б}$ см; б) 2>/2 см; в) 2 см. 7. 30° или 150°. 8 а) 90°; б) 45° или 135°. 9. а) $18(\frac{л}{б}-2)$ см и $18(3-\frac{л}{б})$см; б)$18(2-\frac{л}{2})$см и $18(\sqrt{2}-i)$см. 10. б) t и $2t$; в) $т\frac{t\sin\alpha}{|\sin a-\sin p|}ти]\frac{t\sin\beta}{|\sin a-\sin p|}$.

11. $\frac{b(\sin a + \sin p + \sin(a + p))}{\sin(a+p)}$ (td.), $\frac{P\sin a}{\sin a + \sin p + \sin(a + p)}$, $\frac{P\sin p}{\sin a + \sin p + \sin(a + p)}$, $\frac{P\sin(a + P)}{\sin a + \sin p + \sin(a + p)}$. 13. а) 2 см; в) 1 см. 14. а) 4 дм; б) $\frac{л}{8}$ дм. 15. а) 12 см; б) $6\frac{л}{2}$ см; г) 6 см. 16. а) 4 д; б) S дм; в> 4 д. 18. > + -. 19. $\frac{a\sin(\beta-\alpha)+2b\sin\alpha}{2\sin a}$.

20. $\frac{\sin p + \sin(60° + p)}{\sin 60°}$. 21, $\frac{\sqrt{3}}{6}$ дм. 22. с = $\frac{\sin\frac{7}{2}}{\sin\frac{7}{2}}$ x. 23. $\frac{i> \sin a \sin p}{\sin(a+p)\cos}$

25. $\frac{\sin(a + P)}{\sin a\sin P \sin(a+p)}$, $\frac{Z\sin(a + P)}{\sin a\sin P \sin(a+p)}$, $\frac{2m \sin p}{\sin a\sin P \sin(a+p)}$ 29. а) 12 см; б) $\frac{6}{\sin a}$. 30. 45°. 31. Совет. Постройте вспомогательный треугольник по высоте (равной заданному радиусу вписанной окружности), стороне (равной диаметру описанной окружности, умноженному на синус заданного противоположного угла) и углу, под которым эту сторону видно из инцентра треугольника. 32. Искомым ГМТ является серединный перпендикуляр к отрезку АВ с выколотой точкой, принадлежащей отрезку.

Задание 7

1. а) АВ = 35 дм; б) АВ = 6,5 м; в) АВ = 2 см или АВ = 4 см. 3. ~ 43,3 см. 5. 28 см. 6. а) Тупоугольный; б) остроугольный; в) прямоугольный. 8. а) $\frac{5}{13}$ и $\frac{3}{5}$; б) $пр_{C}$АВ = 9 см; $пр_{AC}$СВ = 5 см. 10. 7 см и 7 см. 11. Совет. Найдите диагонали трапеции. 12. 50 см. 13. 24$л\sqrt{10}$ $см^2$. 14. 7 см и 11 см. 15. а) 7 см; б) $>\sqrt{129}$ см. 16. а) 4 см; б)$2л\sqrt{17}$ см. 17.14 см. 18. 14 см или $2л\sqrt{3}$ см. 19. 7 см. 20. 6 см. 21. 96 см. 22. 96 см, $192\sqrt{5}$ $см^2$. 25. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ см. 27. 6 см. 28. Совет. Убедитесь, что треугольник, образованный стороной c и отрезками медиан, проведенных к сторонам a и b, прямоугольный. 32. Совет. Преобразуйте выражение

$\sqrt{a^4 + b^4} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab)(a^2 + b^2 + 2ab)} =$

$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = |a^2 + b^2 - 2ab\cos 45°|\,|a^2 + b^2 + 2ab\cos 45°|$, что сведет задачу к построению среднего геометрического двух отрезков, диагоналей

параллелограмма со сторонами a, $Ъ$ и острым углом 45°. 4. Пусть $ABCD$ вписанный четырехугольник. Обозначим: AB = a; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$; $AC = d_x$ \ $BD = d_2$.

По теореме косинусов находим cos $D = \frac{c^2 + d^2 - d_1^2}{2\,cd}$; $\cos A = \frac{a^2 + d^2 - d_2^2}{2\,ad}$. Учитывая, что cos$B$ = -cos$D$, получим: df = $a^2 + Ъ^2 + 2ab\frac{c^2 + d^2 - d_1^2}{2\,cd}$; отсюда

$d_1^2 = \frac{a^2cd + b^2cd + c^2ab + d^2ab}{cd + ab} = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$. Учитывая, что cosA = -cosC, получим:

$d_2^2 = b^i + c^i + 2bc - \frac{a^2 + d^2 - d_2^2}{2\,ad}$; отсюда $d_2^{\ 2} = \frac{b^2ad + c^2ad + a^2bc + d^2bc}{ad + bc} = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}$.

Тогда: $d_1d_2 = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)^2(cd + ab)}{(ad + bc)(cd + ab)}} = ac + bd$, 4. т. д.

Задание 8

1. а) b * 47,5 см; с * 61,1 см; ZC = 107°; б) a * 92; c » 50; ZA = 102°; в) ZB * 19°; ZC * 76°; с а 29,22; г) ZA * 135°; ZB * 28°; а » 12,1 или ZA * 11°; ZB * 152°; а ≈ 3,3; д) с = 14,4; ZA « 54°; ZB * 75°; е) с » 23; ZA * 35°; ZB * 113°; ж) ZA = 54°; b * 128 см; с » 91,8 см; з) а * 26,9; ft « 13,9; ZB = 15°; ZC = 135°; и) а * 10,5; b * 14,8; ZC = 59°; Й) ZA ~ 58°; ZB * 75,5°; ZC » 46,5°. 2 « 99,7 м. 3. «2 км. 4 ж 100 м. 5. а) В объезд; б) напрямик. В случае, если угол между магистралью и шоссе не превышает 22°.
8. В ответах приведены приближенные значения: а) 50,48 см; 56,92 см; 44,92 см; 58°; 73°; 49°; б) 44,04 см; 41,34 см; 22,96 см; 81°; 68°; 31°; в) 22,57 см; 33,24 см; 38,18 см; 36°; 60°; 84°; г) 6,36 см; 6,36 см; 2,12 см; 70,53°; 70,53°; 38,94°; д) 41,7 см; 34,5 см; 43,1 см; 64°; 48°; 68°; е) 9 см; 19 см; 20 см; 26,5°; 70,6°; 82,9°; ж) 24 см; 25 см; 15,5 см; 68°; 75,1°; 36,9°; з) 22,57 см; 18,06 см; 15,05 см; 85,5°; 52,9°; 41,6°; и) 24 см; 28,8 см; 25,32 см; 52,2°; 71,4°; 56,4°; й) 21 см; 19 см; 16 см; 73°; 60°; 47°.

9. 19 мин. 10. 1349 м. 11 1 см. 12 —^Цг. 13. 8,125 см. 15. 2,56 см. 16 4,5 см.
2cos^

17. $\frac{cr}{b}$. 18. $\frac{5a}{8}$. 19. 37,73 см. 20. $\frac{Rr}{R + r}$.

Первый способ

Пусть BC = a, ZA = a, ZB = p, ZC = y (рис. 1), O_v 0_2, 0_3 - центры окружностей, M - точка их пересечения, x - искомый радиус. Т. к. x - радиус окружности, описанной вокруг треугольника $0j0_20_3$, то

0_20_3 = 2xsina, a = 2Bsina, sin oc = $\frac{a}{2R}$; $0_20_3 = \frac{ax}{R}$.

С другой стороны, xctg$\frac{B}{2}$ + xctg$\frac{y}{2}$ + 0_20_3 = a;

rctg$\frac{3}{2}$, $\frac{y}{2}$ rctg— = a, поэтому $\frac{ax}{r} + \frac{ax}{R}$ = a => $x = -\frac{rR}{r + R}$.

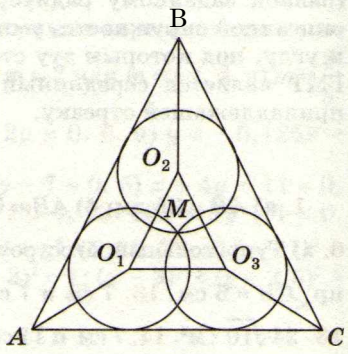


Рис. 1

Второй способ

На рисунке 2: Ор 0_2, O_s - центры равных окружностей, M - точка их пересечения, x - искомый радиус ($0_2H_2 = 0_3H_3$ = x). Кроме того, $M0_1 = M0_2 = M0_3$ = x.

$A0_10_20_3$ ™ $AABC$ (0_10_2 | | AB; 0_10_3 | | AC; $0_20_3$1 | BC), M - точка пересечения биссектрис углов этих треугольников, тогда MN - радиус вписанной в $A0_10_20_3$ окружности; $\frac{MN}{MH} = \frac{MO_2}{MC} = \frac{r}{R} <=> \frac{x}{} = — <=> xr = rR - xR$ •» x = $\frac{rR}{R + r}$. 21. 12,5. Пусть I –

инцентр, ***AM*** - биссектриса (в ДАВС), О - центр окружности, принадлежит ***AC*** (рис. 3). Тогда ***ZCMP*** = 90°. ***ZPMI*** = ***x,*** тогда ***ZCPM = 2x; ZAMC*** = 90° + x; ***ZCAM*** = = 90° - ***3x*** => ***ZCAB*** = 180° - 6x. Отсюда: ***ZABC*** = ***4x.*** По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin 2x} = \frac{AC}{\sin 4x}$. Пользуясь формулой sin2a = 2sinacosa, получим: $\frac{20}{\sin 2x} = \frac{24}{2\sin 2x\cos 2x} \Rightarrow \cos 2x = 0{,}6 \Rightarrow \sin 2x = 0{,}8$. Отсюда: $R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{20}{1{,}6} = 12{,}5$.

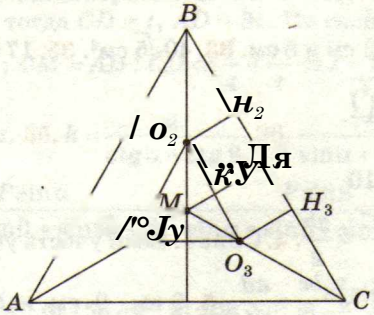


Рис. 2

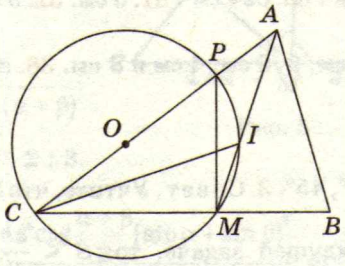


Рис. 3

22. а) Для стороны ***AB*** в ДАВС выполняется равенство ***c = acos B*** + bcosA(l) – очевидно из рисунка 4. Применяя теорему синусов, получим 2 Д sin C = 2i?sinAcosB + 2-RsinBcosA, откуда и следует искомое равенство;

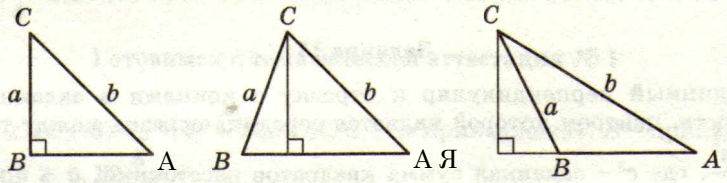


Рис. 4

б) аналогично (1) (см. п. а» запишем: ***a*** = fecosC + ccosB (2); ***b*** = ccosA + acosC (3). Тогда ***a + b = bcosC*** + ccosB + ccosA + acosC. Отсюда: (a + b)(l - cosC) = c(cosJ3 + + cosA) o $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos B + \cos A}{1-\cos C}$„. Применяя теорему синусов, получаем $\frac{2jR\sin A + 2B\sin B}{2.R\sin C} = \frac{\cos B + \cos A}{1-\cos C}$; в) из (1) и (2) (см. п. а) и б)) следует: ***c = acosB*** + D + bcosA = (bcosC + ccosB)cosB + ***bcosA = bcosCcosB*** + ccosBcosB + bcosA » c(l - - $\cos^2 B$) = ***b(cosBcosC*** + cosA) <=> $c\sin^2 B = fc(\cos B\cos C + \cos A)$. Пользуясь теоремой синусов, получаем: 2i?sinCsin²B = ***2R*** sin B (cos B cos ***C*** + cosA) <=> sinCsinB = = cos B cos C + cos A <=> cos A = sin B sin C - cos B cos C; г) по теореме косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ <=> 4B²sin²C = 4i?²sin²A + 4B²sin²B - 2-2i?sinAsinBcosC <=> $\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A\sin B\cos C$ <=> 1 - $\sin^2 A$ = 1 - $\sin^2 C$ + $\sin^2 B$ - 2sinAsinBcosC » •» $\cos^2 A = \cos^2 C + \sin^2 B$ - 2sinAsinBcosC. **23.** Совет. Воспользуйтесь формулой задачи 22 а) или теоремой Птолемея.

Задание 9

1. а) 1,5 см². 2. а) 21 см². 3. а) 24 см². 4. 486 см². 5. $\frac{a^2\sin 30°\sin 45°}{2\sin 105°} \approx 0{,}18a^2$.

6. а) 84 см². 7. а) Д = 8,125 см, г = 4 см. 8. 4,8 см². 9. а) 432 см²; б) 1452 см², 10. а) 300 см². 11. а) 96 см² и 54 см²; б) 188,16 см² и 105,84 см²; в) 245,76 см² и

138,24 см². 12. 6 см². 13. 9,6 см; 19,2 см; 28,8 см; 38,4 см и 16 см. 14. 3 : 1. 15. 1 : 7. 16. 42 см², 61,5 см² и 22,5 см². 17. ***mn.*** 18. Совет. Используйте формулы Герона и $S = pr$. 19. 384 см². 20. $\frac{m^2}{4}$. 23. **а)** 76,5√3 см²; б) 42√34 см²; **в)** 936 см²; **г)** 208 см². 24. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. 25. $\frac{d^2 \sin 2a}{\partial t}$. 26. 88 см². Совет, Не забудьте доказать, что большее основание не может быть равно 10. 27. 43,2 см². 28. **а)** 1620 см². 29. **а)** 36(2 + ч/3) см²; б) $\frac{128}{щ}$ см². 30. 624 см². 31. 5 см. 32. 5 см, 5 см, 2 см и 8 см. 33. 40√5 см². 35. 17 640 см². 37. **2√12** см, **2√12** см, 4 см и 8 см. 38. $c = \sqrt{2\frac{(a^2 + b^2)}{2}}$

Задание 10

I. 45°, 45°. 3. Совет. Учтите, что $S = \frac{ab}{Z}$. 4. Совет. Если учесть указание к предыдущей задаче, то: $S < \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$ и $S < \frac{be}{2} + \frac{ad}{2}$. 5. 9 см, 9 см и 6√2 см. 9. 15√3 см. 11. 15° и 75°. 12. Совет, $a - b = h_a - h_b$. Умножьте это равенство на ab. 13. 45°, 45° и 90°. 14. Треугольник равносторонний. 15. 12 см. 16. 24 см. 17. $r = \frac{ab\sin\alpha}{a+b}\sqrt{2-2\cos\alpha}$. 18. 15 см, 26 см и 37 см.

Задание 11

II. Серединный перпендикуляр к отрезку с концами в заданных точках. 12. Окружность, центром которой является середина отрезка между точками, радиуса $\frac{c^2 - 2a^2}{4}$, где c^2 - заданная сумма квадратов расстояний, a - половина расстояния между точками. 13. Окружность, центром которой является точка, симметричная точке С относительно ***AB,*** а радиус равен стороне ***AB.*** 14. а) Прямая - серединный перпендикуляр отрезка ***AB;*** б) окружность радиуса $4a$; центр расположен на прямой ***AB*** и удален от точки ***A*** на расстояние ***2a,*** от точки ***B*** - на расстояние ***4a,*** где a - половина расстояния АВ; в) окружность радиуса $8/3a$; центр расположен на отрезке ***AB*** и удален от точки А на расстояние $4/3a$, от точки ***B*** - на $2/3a$, где а - половина расстояния АВ. 15. Окружность радиуса $a\sqrt{10}$, центр которой совпадает с центром квадрата. 17. Окружность радиуса $\left|\frac{ak}{k^2 - 1}\right|$, где а - половина расстояния между точками А и В. Центр окружности расположен на прямой ***AB*** на расстоянии $\left|\frac{2a}{1 - k}\right|$ от точки А и на расстоянии $\left|\frac{2k^2a}{1 - k^2}\right|$ от точки ***B.***

Задания для повторения главы I

16. **а)** (-1; -1,5); б) 13; **в)** $(x + 1)^2 + (y + 1{,}5)^2 = \frac{169}{4}$; **г)** да. 17. **а)** (-1; 2) и (1; 0); б) 5 и 1; **в)** $x^2 + (y - 1)^2 = 9$; **г)** нет. 21. $\left(\frac{1}{1 + a^2}; \frac{a}{1 + a^2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{1 + a^2}; -\frac{a}{1 + a^2}\right)$. 22. а) $a = \pm 1$; **б)** $a = \pm 0{,}5$; **в)** $a = 0$; **г)** $a \in \{0; 2; \frac{42}{13}\}$. 23. **а)** $x = 2$; **б)** $y = 3$; **в)** $3x - 2y = 0$; **г)** $x + y - 5 = 0$.

25. **а)** $x - y + 2 = 0$; б) $x + y - 8 = 0$. 26. **а)** $y = 5$; б) $x = -1$; **в)** $x - y + 6 = 0$; **г)** $2x - y + 7 = 0$; д) $3x + y - 2 = 0$; **е)** $x + 2y - 9 = 0$. 27. **а)** $\sqrt{97}$; б) $\sqrt{4x^2 - 25} = 0$; **г)** M(3; 0,5); д) $\sqrt{16y^2 - 41} = 0$; **е)** $\sqrt{9y^2 - 34} = 0$. 28. (0; 6) и (0; -2). 29. Нет. 30. $a = 0$. 31. 2 см и $2\sqrt{13}$ см. 32. Нет. 33. 12 см. Пусть биссектриса AM (рис. 5) пересекает сторону CB под углом 60°; MC = 4 см; MB = 3 см. Проведем биссектрису MD угла CMA. $\triangle AMD$ = $\triangle BMD$. Обозначим AM = l. По свойству биссектрисы: AB : MB = AC : CM $\Leftrightarrow$ AB = $3t$, $AC = 4t$, тогда $CD = t$, $AD = 3t$. По свойству биссектрисы: AM : CM=AD:CD $\Leftrightarrow$ $\frac{l}{4} = \frac{3t}{t} = 12$.

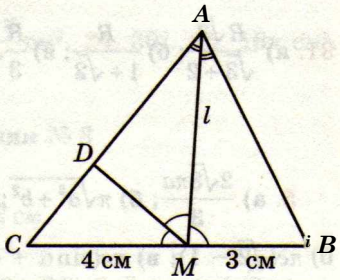


Рис. 5

34. **14** см. 35. $h = \frac{a}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$. 36. $\frac{P\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{-P\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$. $\frac{P\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$. 40. $2 \cdot 3$.

41. **а)** 3 см²; **б)** 156 см²; **в)** 468 см²; **г)** $\frac{l^2 \sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}$; **д)** $\frac{l^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)^2}{4\sin\alpha\sin\beta}$; е) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ см².

42. **а)** 120 см²; б) 150 см²; **в)** 24 см²; **г)** 294 см²; д) 150 см²; **е)** 864 см². 43, **а)** 75 см²; **б)** 168 см²; **в)** 360 дм². 44, **а)** 600 см²; **б)** 140 см²; **в)** 120 см²; **г)** 600 мм². 45 **а)** 37,2 см²; **б)** 54 мм². 46. **а)** 1024 дм²; **б)** 768 см²; **в)** 486 см²; **г)** 960 см²; д) 432 см². 47. **а)** 665 см²; б) 6 см². 48. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ см². 49. 18 см². 50, 13 дм, 14 дм и 15 дм. 51 40, 30 и 14.

Готовимся к тематической аттестации № 1

В-1

1. (-5; 3). 2 $(\sqrt{x} + 3)^2$ $(y - 4)^2 = 25$. 3. A, C - не принадлежат, B - принадлежит. 4. 0(2; -3); r =2. 5 $12\frac{8}{13}$ см.

В - И

1. 5. 2. B(0; 3). 3. B, C, ***D***. 4. $y = 4x + 13$. 5. $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ см.

Готовимся к тематической аттестации № 2

В-1

1. Учитывая, что tg(180° - a) = -tga, строим угол, тангенс которого равен 0,4. Смежный ему угол и будет искомым. 2. 60°. 3. $(16 \pm 4\sqrt{17})$ см. 4. 9 см.

В-II

1. sina = 0,6; tga = -0,75. 2. Нет, так как по теореме синусов: $\frac{AB}{\sin(ZBAC)} = \frac{AC}{\sin(ZABC)} \Rightarrow \sin(ZABC) = \frac{0,8 \cdot 0,4}{0,3} = \frac{3,2}{3} > 1$, чего не может быть. 3. Тупоугольный. 4. 26 см.

ГЛАВА II

Задание 12

1. **а)** 135° и 45°. 2. **а)** 12. 3. **а)** 12. 4. **а)** 10. 5. **а)** Нет; **б)** нет. 9. **а)** $12\sqrt{3}$; **б)** $4\sqrt{3}$. 15. **а)** $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\sqrt{2}$, $2R$; б) $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $a(1 + \sqrt{2})$, $a^4 + 2a^2$. 17. **а)** $\frac{\sqrt{3}R}{2}$. $4^4 - 2^2$ см.

19. а) 4л/2 + 72 см; б) *2^12 + 6^2* см; в) *2yI4 + 2^2* см. 20. а>/б + зТз. 21. 18л/б см.

22. а) 3 : 4 : 2; б) Зл/З : 8 : 6^3; в) л/3 *: 4 :* 6л/3. 23 ^<7з + 2). 24. *-ф.* + 2). 29. *a*/2 2 6 *a*.

*Rsl*3 *R R*

31 а) VaT? в) IW? в| 8 • 32'iГз'■9: 6^'35. 4i- гг (з + л/з)а²

Задание 13

5. а) 2V3*na* *г-* ; б) ял/а *+Ь* ; в) 2лЬ²/(л/4Ь² - а² sina); г) 2ласов-*α*/2; д) 8я см. 6. W106 см. 7. а) 7ta;

б) яс(л/2 - 1); в) 7ic(sina + cosa - 1); г) *2nhctgatg*—. 8. *α*/2 4 см. 9. 48 + 48л/5 см или

48 + 24\/б см. 10. 2л см. 11. а) л/3 см; б) 3 см; в) Зл/З см. 12. 7 раз. 13. 5*85 м.

14. 3,2 оборота. 16. а) л см. 17. а) 120°. 18 а) *π*/4 м. 19. 30°; 330°. 20. 150°; 210°.

21. 40 зубцов. 22. ® 700 м. 23. * 18°. 24. а) —. 25. а) *πa*/3 — л/2->/3. 26. а) *6l*/л - * 0,52. *π*/6

27- 8 м/с. 28. 4ла/*D*. 29. 5 см. 31. Совет. Сравните радиусы окружностей. 32. Нет.

33. *C = nC*j, где *C* - длина заданной окружности, *C*$_t$ - длина построенной окружности. 35.Точка А пройдет 1 км в 4 раза быстрее, чем точка *B*. 36. г.

Задание 14

. 1 а) 4л см². 3. а) Увеличится в 4 раза. 4. а) Увеличится в 4 раза. 5 а) 20л см².

6. 64л см². 7. а) $C_л$ 9 n 7t(a2+b2)/4; б) л a²/4sin a; в) лЛ²/4sin a; лa²/12; лa²/4cos a. 8. а) ..(sina + cosa-1) ; ^2

в) (2cos a/2 + sina)^x · (ia²sin²acos²— „ α/2 „• 2 „)/4(1 +cosa)²' ; 9. p v la sin a/2' Э) ; л 4л '2л/Зл/3' б) ; л/зТз' В) ; 10' а) л л л/зТз' б) ; л л л/4' В> 2^3'

11. 1/4; 12. 2. 14, "/=. 15. лв 8 S/л/о; —. 16. 5 дм. 17. * 134 м². 18. * 11; 7/117. 19. 1 мм.

20. 24(V2-l)/√2 см. 21. * 7,15 дм². 22. **а)** *KR*²/9; в) ^ Б*R*²г/6; д) лД². 23. **а)** 1,8л см². 24. Да.

25. 500π/6 см² * 260см². 26. 5S/л; 27 **а)** —. 28. *R*²/4 • 2>. 29. 49(π –/8 ~ з ^ Д. 3 0 **а)** 4πa²/12; **а)** Д²(л. 2);

б) Д²(4л - Зл/З). 31. **а)** 12л см²; **б)** 18(2л/з - л) см²; в) 12л(7 - 4>/3) см². 34. \ πa²b²/(a+b)².

35. а²(2л + 1 — л/3). 36. Первая хорда. 37. *r*²/6(4л - Зл/З). 38. 39. πm/3 · a(1 + sin■ a/2)/2л8Ш²^2, где

угол а представлен в радианах. 40. л/3 - —11/24 *к*.

Задания для повторения главы II

18. а) 12; б) 9. 19. 18^6 см. 20 4^6 см. 21. а) ~~авш~~ $\frac{a}{a+b}$; б) 0,5Л. 23. а) 48(7 - 4>/3) х Х (л/з - -) см²; б) 16(3 - 2л/2)(4 - тс) см²; **в)** $\frac{36\sqrt{3}-32\pi}{9}$ см². 24. 30°. 25. 16л см². **26. в с**^{тм2}

Готовимся к тематической аттестации № 3

В-1

1. Сторон - 33, диагоналей - 495. 2. 10. 3. 50 см². 4. 2 см.

В-II

1. Сторон - 7, сумма внутренних углов - 900°. 2. 156° и 24°. 3 8 см. 4. 4\/з см.

Готовимся к тематической аттестации № 4

В-1

1. Юл см. 2. 8л см. 3. $\frac{5\pi}{12}$ см. 4. $\frac{175}{24}$ л см².

В-И

1. 8π **см. 2.** $\frac{150}{\pi}$ **см. 3. 15°. 4.** $\frac{175\pi}{3}$ **см².**

ГЛАВА III

Задание 15

1. При параллельном переносе прямая переходит в прямую. 2. Да. 3. Да. 4. Нет. 6. Совет. Выполните параллельный перенос одной боковой стороны параллельно основаниям трапеции на отрезок, равный меньшему основанию, и получите правильный треугольник.

Задание 16

4. Вершины квадрата равноудалены от точки пересечения диагоналей, поэтому при повороте квадрата ***ABCD*** на 90° вершина ***A*** переходит в вершину ***B,*** вершина ***B - в*** вершину С и т. д. Тогда квадрат при таком повороте переходит сам в себя. **5**. Совет. Доказательство аналогично проведенному в предыдущей задаче.

Задание 17

2. Две оси: одна - серединный перпендикуляр отрезка с концами в заданных точках, вторая - прямая, проходящая через эти точки. 4. Если прямые пересекаются, то оси симметрии - две прямые, которые проходят через точку пересечения данных прямых и содержат биссектрисы углов, образованных данными прямыми; если прямые параллельны, то осями симметрии является множество прямых: любая прямая, перпендикулярная к заданным, и одна прямая, параллельная им и равноудаленная от них.

Задание 18

3. Один, он является серединой отрезка, концы которого - заданные точки. **4.** Если две прямые пересекаются, то центр симметрии один - точка пересечения прямых; если же прямые параллельны, то центров симметрии множество - любая точка, равноудаленная от этих прямых. 5. Если три прямые параллельны и одна — равноудалена от двух других. 6. **а)** — в) Если они пересекаются в одной точке.

Задание 19

5. Фигура не изменится, так как прямые перейдут сами в себя. 7. Такие отрезки гомотетичны. Центров гомотетии два - это точки пересечения прямых AA_1 и BB_1 или прямых AB_X и $A^{\wedge}B$. 9. **а)** — **г)** Центров гомотетии два - это точки пересечения прямых, проведенных через концы двух параллельных радиусов этих окружностей, с линией центров. 10. **а)** — в) Центр гомотетии один - точка пересечения прямой, проведенной через концы двух параллельных радиусов этих окружностей, с линией центров; она является серединой отрезка с концами в центрах окружностей. 11. Один - центр этих окружностей.

Задание 20

5. **а)** Да; б) да. 6. **а)** Да; б) да.

Задание 21

1. Поворотом на 180° или центральной симметрией. 4. **а)** Не всегда; б) не обязательно. 8. **а)** Поворот на 180° является центральной симметрией; б) параллельный перенос можно получить в результате последовательного применения двух осевых симметрий; в) поворот можно получить в результате последовательного выполнения двух осевых симметрий; **г)** центральная симметрия является гомотетией с коэффициентом -1.

Задание 22

1 $k = \frac{2}{3}$, углы равны, поэтому относятся как 1:1. 2. **а)** $\frac{P}{P_д} = 3$; б) $\frac{S}{S_1} = 9$. 3. V2. 4. **а)** 12 см, 16 см, 20 см, 24 см и 8 см. 6. **а)** 2 см. 7. 140 см. 8 768 см^2. 9. 225 см. 10. 2400 см^2. 11. а) 2,5 см; б) 5 см. 12. Да. 13 Да. 15. AB = 7,5 дм; AD = $8\frac{1}{3}$ дм.

Задание 23

2. **а)** Две оси симметрии; б) одну ось симметрии; в) две оси симметрии; если прямые перпендикулярны, то четыре. 5. **а)** Бесконечное множество; б) бесконечное множество; в) одну; **г)** бесконечное множество. 7 **а)** Да; б) нет; в) да. 9. Бесконечное множество. 10. Нет. 16. Параллельный перенос, гомотетия, центральная симметрия.

Задание 24

1. Совет. Постройте прямую, параллельную одной стороне угла, так, чтобы расстояния от точки M до стороны угла и построенной прямой относились как 1 : 2. Точка пересечения построенной прямой со второй стороной угла будет одним из концов искомого отрезка. 2 Совет. Примените параллельный перенос, чтобы совместить берега реки. 3. Совет, **а)** Обозначьте прямые, на которых должны лежать концы отрезков как b и c. Примените параллельный перенос к одной из прямых (скажем, c) параллельно прямой I на отрезок заданной длины **4.** Совет. Примените параллельный перенос одной из диагоналей параллельно основаниям так, чтобы образовался треугольник, две стороны которого равны заданным диагоналям. 5. Совет. Выполните поворот одной из прямых относительно точки O на угол 120°. Точка пересечения второй прямой с прямой, полученной в результате поворота, будет вершиной треугольника. 6 Совет. Примените поворот (см. совет к № 5). **1** Совет. Постройте две концентрические окружности с центром в точке M и радиусами, равными заданным расстояниям. Выполните поворот одной из окружностей на 120° относительно центра треугольника. 8. Совет. Выполните повороты треугольников COD и BOC относительно точки O так, чтобы треугольники поменялись местами. 9. ϕ_1 - 60°; ϕ_2 - 60°; (p_3~ 60°. Совет. Выполните пово-

рот треугольника относительно одной из вершин на угол 60°. 10. Совет. Постройте окружность, симметричную заданной окружности относительно прямой, содержащей диагональ квадрата. 12. Совет. Постройте точки ***P*** и ***H,*** симметричные точке А относительно прямых, на которых лежат биссектрисы углов с вершинами В и С. Точки ***P*** и ***H*** принадлежат прямой ВС. 13. Совет. Постройте прямую, симметричную прямой ***a*** относительно прямой ***Ь.*** Точка пересечения построенной прямой с прямой с есть одним из концов искомого отрезка. 15. Совет. Докажите, что точка пересечения диагоналей одного параллелограмма - центр симметрии другого. 16. Совет. Используйте то, что середина отрезка - его центр симметрии. 17. Совет. Используйте то, что центр квадрата является центром симметрии прямых, на которых лежат противоположные стороны квадрата. 18. Совет. См. совет к задаче № 16. 19. Пусть заданы прямые ***m и n .*** Постройте точку ***H ,*** симметричную точке С относительно точки пересечения прямых ***m и n .*** Через точку ***H*** проведите прямую, параллельную прямой ***m,*** точку пересечения ее с прямой ***n*** обозначьте В. Вторую вершину ***A*** треугольника постройте аналогичным образом и докажите, что прямые ***m и n*** - медианы треугольника ***ABC.*** 20. Совет. Сначала постройте ромб с острым углом ***a*** и произвольной стороной, а потом постройте подобный ему ромб с заданной суммой диагоналей. 21. Совет. Сначала впишите произвольную окружность в угол, а потом примените гомотетию с центром в вершине заданного угла для построения окружности, проходящей через заданную точку. 22. Совет, а) Сначала впишите произвольный квадрат в треугольник так, чтобы три его вершины лежали на двух сторонах, а потом для построения искомого квадрата примените гомотетию, за центр которой возьмите вершину треугольника, общую для двух сторон, на которых лежат три вершины вписанного вами квадрата (попробуйте выполнить построение иным способом); б) сначала впишите прямоугольник так, чтобы две его вершины лежали на боковых сторонах треугольника, а диагонали были параллельны этим сторонам, а потом постройте искомый прямоугольник, применяя гомотетию, за центр которой возьмите вершину треугольника (лежащую против основания); попробуйте выполнить построение иным способом. 23. а) Окружность с диаметром, равным радиусу заданной окружности, проходящая через точку А с выколотой точкой А; б) окружность, диаметром которой является отрезок с концами в данной точке А и центре заданной окружности. 24. Две большие дуги окружностей, гомотетичные заданной (центр гомотетии - точка А, коэффициенты гомотетий равны 1/4 или 3/4). Дуги ограничены касательными, проведенными из точки А к окружности. Точки касания выколоты. 25. Совет. Для построения целесообразно использовать теорему о секущей и касательной, проведенных к окружности из одной точки, и опорную задачу на построение среднего пропорционального (стр. 278). 26. Совет. Стоит использовать преобразование поворот.

Задание 25

1. (5; 5), (3; -7), (6; 0). 2. (0; -3), (-3; -1), (0; -5). 3. **а)** (-5; 6); б) (8; 10); в) (-6; 2). 5. а) (-8; 5); **б)** (-20; 10); в) (-13; -3). 6. **а)** x' = x + 12; ***y′*** = ***y*** - 10; **б)** ***x′*** = x + 7; ***y′*** = = ***y*** + 3. 7. **а)** B'(-6; 14); б) ***F***\5; 25). 8. A(-8; 4), B(-15; 9). 9. 1(10; -5), M(3; -7). 11. ***x′*** = ***x*** - 12; ***y′*** = ***y*** + 9. 12. ***x′*** = ***x*** + 1; ***y′*** = ***y*** - 1; M'(5; -7); ***Щ***-5; 7). 14. **а)** ***Зx*** - ***2y*** + 6 = 0; б) ***Зx*** - ***2y*** = 0; в) ***Зx*** - ***2y*** + 17 = 0. 15. Если ***a*** и ***b*** не параллельны, то нужно выполнить параллельный перенос прямой ***a*** так, чтобы заданная точка была равноудалена от а и ***a′.*** Точка пересечения ***a′*** и ***b*** - один из концов искомого отрезка. В случае, если прямые ***a*** и ***b*** параллельны, задача может не иметь решения (если заданная точка не равноудалена от ***a*** и ***Ъ)*** или может иметь бесконечное число решений (если заданная точка равноудалена от ***a*** и ***Ь).*** 16. Искомое ГМТ представлено на рисунке 6.

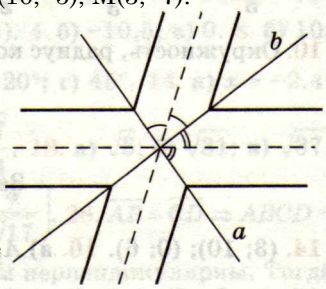


Рис 8

Задание 26

1. A(2; 5). 2. а) A(5; -2), АД5; 2); б) Z)(12; 4), £>Д-12; 4); **в)** M(2; 0), МД2; 0). 3. а) A(-3; 7), АДЗ; 7); б) ***F(***4; -2), i?Д-4; -2); **в)** ЛГ(-1; 3), ЯГДІ; 3). 4 а) Ot/; б) ***Ox.*** 5. а) Z), F; б) А, С. 6. (0; 8), (8; 0), (0; -8), (-8; 0). 8. а) (4; 3); б) (-4; -3). 9. х - ***у*** - 1 = 0. 10. х - 4г/ + 7 = 0 и (19/17; -76/17). 11. а) АД34/13; -41/13), ВД-4; 6); б) АД-1; -2), ВД2,4; 4,8). 12. а) (х + I)² + (г/ - 4)² = 25; б) (х + З)² + (г/ - 6)² = 25. 13 (2; 1), (-2; -1), (-1; -2). 14. Совет. Через ***М*** и точку N_v симметричную точке ***N*** относительно прямой ***I,*** проведите прямую до пересечения с прямой ***I.*** Точка их пересечения ***С*** - искомая. (Для доказательства используйте неравенство треугольника.) 15. Наибольшей разности расстояний соответствует та самая точка С, что и в задаче 14. 16. Точка пересечения прямой ***I*** и прямой ***АВ',*** где ***В'*** - точка, симметричная точке ***В*** относительно ***I.*** 17. Точки A_1 и A_2, симметричные точке А относительно биссектрис, принадлежат прямой ***ВС.*** Таким образом, ***В*** и ***С*** - точки пересечения биссектрис с прямой A_1A_2. 18. Постройте треугольник по основанию, которое равно половине суммы диагоналей, и двум прилежащим к нему углам: $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}$. Проведите в этом треугольнике высоту к основанию. Один из образовавшихся прямоугольных треугольников и является четвертью ромба. 19. Совет. Высоты треугольника, вершинами которого являются заданные точки, параллельны серединным перпендикулярам искомого треугольника.

Задание 27

7. б) (3; -3); **в)** (-5; -19). 9. б) АДЗ; 4); ВД7; 8); СД4; И); **в)** АД-1; -2); ВД-5; -6); СД-2; -9). 10. 0(-0,5; 1); ***Щ0;*** -2). 11. (х - 7)² **+ (*у*** - 10)² = 7. 12. а) 2х - ***Зу*** + 6 = 0; б) 2х - ***Зу*** = 0. 14. Совет. Учитывая, что середина отрезка является его центром симметрии, примените преобразование симметрии относительно точки. 15. Совет. Учитывая, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии, примените преобразование симметрии относительно точки.

17. (3; -3), **(1; -1);** (-3; -3), **(-1; 1).** 18. ***{~;*** $\frac{2}{3}$ 1 и ***{5-;*** $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ –).

Задание 28

1. а) $\frac{3}{2}$ ***G(-y/2i*** $\frac{3}{2}$ -V2); б) £(4; 4>/3); в) 0(2^3; 2); г) М(-6; 6л/3); д) Г(-3; 0). 2. а) (3; 0); б) (8; $\frac{\kappa}{2}$); в) (2; $\frac{3л}{4}$); г) (V2; у); д) (6; -). 3. $\frac{л}{3}$ а) АД0; -3), ВД0; -2), СД2; -5), £»Д-3; 1); б) АД0; 3), B_2(0; 2), СД-2; 5), БД3; -1). 4. М(2; 5). 5. М(-3; 5), МД5; 3). 6 а) АД-2; -3), ВД-2; 3), СД2; 3), £»Д2; -3); б) АДЗ; -2), ВД-3; -2), СД-3; 2), БДЗ; 2). 8. а) АД2; $\frac{\pi}{2}$ 5Д4; $\frac{\pi}{3}$); б) АД2; $\frac{2\pi}{3}$), ВД4; $\frac{\pi}{2}$). 9. Треугольник с вершинами: АДЗ; $\frac{7\pi}{12}$), ВД6; $\frac{5\pi}{6}$), СД2; я). 10. Окружность, радиус которой равен 3, а центр лежит в точке ***М***Д8; $\frac{g\,jr}{12}$).

Задания для повторения главы III

14. (3; 10); (0; 6). 16. а) АД-3; 1); б) АДЗ; -1); в) A_3(3; 1); г)АД5; -9); д)АД1; -3). 17. а) (-2; -2); б) (2; 2); в) (5; 5). 18 а) ***у*** = 2х + 2; б) ***у*** = 2 - 2х; в) ***у*** = -2 - 2х; г) ***у*** = $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

В-I

1. $A_2(-2; -1)$. 2. 0(1; -1). 3. S : $S = 2^2$. 4 $y = -2x$.

В-II

1. $B_x(-1; -3)$. 2. 0(1; -2). 3. S_1: $S = 0{,}5^2$. 4. $y = -x$.

ГЛАВА IV

Задание 29

5. а) M(-2;j-4); б) M(1; -2); в) M(-5; 4). 6. а) G(6; -2); б) G(-2; -2); в) ***Gj-1;*** 1). 10. $\overrightarrow{MN}(7; 7)$; $\overrightarrow{NM}(-7; -7)$; $\overrightarrow{MP}(5; -1)$; $\overrightarrow{PM}(-5; 1)$; $\overrightarrow{Щ}(-2; -8)$; $\overrightarrow{Щ}(2; 8)$; $\overrightarrow{АГР}(-2; -8)$; $\overrightarrow{PN}(2;8y$, $\overrightarrow{NK}(-9; -15)$; tf/V(9; 15); $\overrightarrow{РЩ}(-7; -7)$; $\overrightarrow{КР}(7; 7)$; $\overrightarrow{МАТ} = \overrightarrow{ЇГР}$; $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{РйГ}$; $\overrightarrow{МІГ} = \overrightarrow{iVH}$, $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{PN}$. Равны по модулю все пары противоположных векторов. 12. а).D(0; -6); б) C(-2; 4). 13. $D(-4; 0)$. 14. $y = \sqrt{11}$ или $y = -\sqrt{11}$. 15. x = 4%/з или x = **-4>/з.** 16. Возможные решения: (0; 5); (0; -5); (5; 0); (-5; 0); (3; 4); (4; 3); (-3; 4); (-4; 3); (3; -4); (4; -3); (-3; -4); (-4; -3). 17. АМД-6; 2); $\overrightarrow{BM_2}(1; -5{,}5)$; $\overrightarrow{CM_3}(6; 3{,}5)$. 18. л/Г30/2. 19. C(—1; -6); .0(4; -6) или C(—1; 18); Z>(4; 18).

Задание ЗО

6. а) $\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{(-1; 7)}$; $\vec{x} - \vec{y} = \overrightarrow{(9; -9)}$; б) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$; $\vec{x} - \vec{y} = 7\vec{e}_x - 3\vec{e}_2$; в) $\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{(7; 0)}$; $\vec{x} - \vec{y} = \overrightarrow{(-1; 4)}$; г) $\vec{x} + \vec{y} = 2?_x - 5\ddot{e}_2$; $\vec{x} - \vec{y} = \vec{e}_2$. 7. а) $8?j - 3\vec{e}_2$; **б)** $-Ъ\vec{e}_x - 15\vec{e}_2$; в) $-1{,}5\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$; г) $3\vec{e}_x + 42\ddot{e}_2$. 8. **а)** $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\frac{1}{5}$; **а).** $\frac{5}{13}$. 9. **а).**(10; -2), 2^26; б) (-9; -8), VI45; в) (11; -12), V265; г) (23; -6), V565. 10 **а)** (50; -41); б) (-4; 8). 11. $\vec{a} \| \vec{Ъ} \| \Gamma$ **y;** $\vec{c}$ \\ **d.** 13 **а)** 18; б) 1,5; в) не существует. 14. **а)** -18; б) -1,5; в) —. 15. $\frac{4}{3}$ **а)** x(-25; 20); б) x(25; -20).

16. **а)** $\frac{\sqrt{10}}{5}$; б) $\frac{\sqrt{26}}{13}$. 17. (0,6; -0,8). 18. б), в), г). 19. **а)** $\vec{a} = -\frac{27}{14}\vec{b} + \frac{11}{14}\vec{c}$; б) $\vec{a} = 4\vec{Ъ} + 3\vec{c}$.

20. $\vec{p} = 3{,}5\vec{a} - 7{,}5\vec{Ъ}$. 21. $D(-3; 2)$. 22 $D(-2; 6)$. 24. D(ll; 18) или £>(-19; -6).

25. а) $\overrightarrow{AB}(-12; 5)$, $\overrightarrow{AC}(-3; -4)$; б) $\left(-\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right)$ и $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ или противоположные им векторы; в) $\left(\frac{5}{2}; \frac{65}{18}\right)$. 26. а) -6; б) 1; в) 7; г) 12; д) -16. 27. а) —1; б) 1; в) -1; г) $\frac{1}{2}$; д) -1; е) $\frac{1}{2}$.

Задание 31

2. а) x = 1; б) x = -3,5; в) x = -5; г) x = 0. 3. x(-1; 0,75). 4. б) -10,5; в) 0. 8. б) 10; г) -1; е) -12. 9. б) $\frac{17}{5\sqrt{26}}$; в) $\frac{23}{5\sqrt{26}}$. 10. 90°; 12 л/5 в).120°; г) 45°. 14. а) x = -2,4; б) x = ±6. 15. а) -115 - 14л/3; в) -649. 16. $k = 40$. 17. —. 18 а) л/3; б) л/зї; в) $\frac{\sqrt{37}}{14}$. 19. $\frac{\sqrt{7}}{7}$. 21. а(4; 8). 22. 60°. 23. $\vec{a} = -3/2\vec{Ъ} - 3\vec{c}$. 24. Г; $\left(\frac{1}{\sqrt{17}}; -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$. 26. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ => **ABCD** - параллелограмм; $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 0$ => стороны перпендикулярны. Тогда **ABCD** - прямоугольник.

2. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. 4. Возможны два случая: 1) 60°; 2) угол, косинус которого равен $\frac{13}{14}$.

5. Совет. Обозначьте точку пересечения диагоналей O и докажите, что $\overrightarrow{OM} = 0$.

6. л/ТЗ. 9. Пусть в A ABC прямые h_a, h_b, h_c содержат соответствующие высоты. Точка M принадлежит прямой h_a тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Т. к. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$, то $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ (1). Аналогично точка M принадлежит прямой h_b тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA}$ (2). Если точка M является точкой пересечения высот, проведенных из вершин A и B, то выполняются одновременно оба равенства (1) и (2):

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \\ \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MA} \end{cases}$$

Значит точка M лежит на прямой h_c. 9. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OB}^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$. Аналогично получим $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$. Тогда H - точка пересечения высот. 11. Из равенств $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$ (рис. 7) имеем: $MA^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$; $MB^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM}$. Сложив эти равенства, получим: $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3R^2 + 3r^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3R^2 + 3r^2$ (т. к. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$, а точка O — центр вписанного и описанного кругов).

12. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}$ (рис. 8); $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}$. Отсюда $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{OA}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 3\overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 6R^2$, где R - радиус окружности.

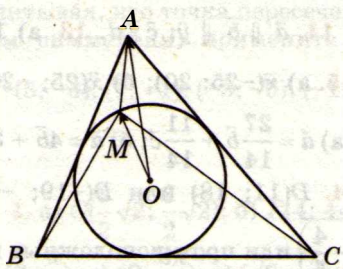


Рис. 7

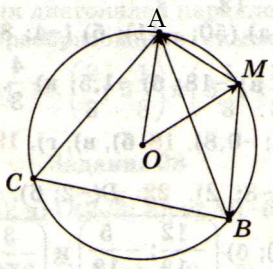


Рис. 8

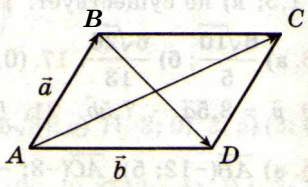


Рис. 9

Задания для повторения главы IV

15, б. 16. б. 17. б) $-(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{TC})$; в) $\overrightarrow{CT} - \overrightarrow{MC}$. 18. а) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$; б) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$; г) $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right|$. 24. а) $\overrightarrow{AB}(12; 5)$, $\overrightarrow{AB} = 12\vec{e}_x + 5\vec{e}_y$; $|\overrightarrow{AB}| = 13$; б) $\overrightarrow{AB}(3; -4)$, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y$; $|\overrightarrow{AB}| = 5$; г) $\overrightarrow{AB}(8; 2)$, $\overrightarrow{AB} = 8\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$; $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{17}$. 25 а) $n = -\frac{1}{3}$; сонаправлены; б) при $n = 6$ векторы сонаправлены; при $n = -6$ противоположно направлены. 26. а) $(3 = -1{,}5$; б) $p = 2$; в) $\pm\sqrt{21}$. 27. $\frac{4}{11}$. 29. 135°. 30. $\frac{\sqrt{2}}{10}$. 32 а) 13; б) 46; в) 481. 34. Обозначим (рис. 9) $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{b} - \vec{a} = \vec{d}_1$; $\vec{b} + \vec{a} = \vec{d}_2$. Сложим $d_1^2 = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$ и $d_2^2 = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$, получаем $d_1^2 + d_2^2 = 2b^2 + 2d^2$. Ч. т. д.

В-1

1.(=ЇЛ), $\overline{y}\overline{I}2.2.X = 0$.3 $D(3\backslash 7)$. 4. а)0; б) -18.

5. Докажите, что $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD} \blacksquare \overrightarrow{DC} = 0$.

В-JI

1. (3; $\overline{2}$), $y\overline{fl}3$. 2. $\frac{1}{-щ.}$ $3.x = -4$. 4. а) 7; б) 28.

5. Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

ГЛАВА V

Задание 33

1. Совет. Используйте теорему 1. 4. Нет. 7. **а)** Бесконечное множество; б) бесконечное множество; в) или бесконечное множество, или одну. 8. Если точка лежит на прямой. 9. Три точки принадлежат одной прямой. 10. Прямая и точка вне ее определяют только одну плоскость, а три точки на прямой определяют множество плоскостей. 11 Да. 12. Да.

Задание 34

1. Или пересекающиеся, или скрещивающиеся. 3. Совет. Используйте определение скрещивающихся прямых. 4. Нет. 6. Да. 7. Совет. Примените метод от противного. 8. Бесконечное множество. 9. Да. 10. **а)** Нет; б) нет; в) да. 13. Совет. Используйте теорему, сформулированную на стр. 183.15. Да. 16. Совет. Рассмотрите случаи: **а)** точка лежит на прямой; б) точка не лежит на прямой. 17. Нет. 18. Нет. 21. Да. 22.Да. 24. Совет. Используйте аксиому 4, приведенную на стр. 182.

Задание 35

4. 25. 6. 3. 7, 6. 9 4. 12. 48 см^2. 13. В 9 раз. 14. з$\overline{T}$з см. 15. Удвоить квадрат диагонали. 16. Нет.

Задание 36

2. Нет. 3. Да. 5. Да, треугольная. 6. Шестнадцатиугольник. 8. Прямая призма. 9.Да. 10. Да. **Да.** 13. В четырехугольник основания можно вписать окружность. 14. 60 см^2. 15. 225 см^2; 125 см^3. 16. 520 см^2; 800 см^3. 17. Да. 18. Да. 19. 2^3 м^3. 20. 1500$\overline{T}\overline{3}$ дм^3. 22. 30 дм^3; 62 дм^2. 23. 3 см; 9л/7 см^3. 24. 75 кг. 25. 60 м^3.

Задание 37

6. **а)** $n + 1$, $2n$, $n + 1$; б) $4n$. 7. **а)** Нет; б) нет. 9. 360°(л - 1). 10. **а)** Нет; б) да. 11. л/$\overline{3}$а^2. 12. 6($\overline{V3}$+l) дм^2. 13. 3 см^2. 14. 4^15 см^2. 15. 4(i + $\overline{T}$з) см^2. 16. З$\overline{б}$Тз см^3. 17. Увеличится в 4,5 раза.

Задание 38

1. $\frac{a}{2mc}$ или $\frac{b}{2n}$. 2. Площади боковых поверхностей одинаковые. 3. Не изменилась. 4. Нет, объем одного в 3 раза больше объема второго. 5 4 см. 10. Нет. 11 $3nR^2$. 12. 100 шаров. 13. Существует, $R = 3$. 14. Арбуз радиуса 20 см. 15. 125. 16. $R = \sqrt[3]{\frac{35}{4\pi}}$. 17. 1,5.

Задания для повторения главы V

18. Совет. Рассмотрите возможное размещение точек А, ***В, С.*** 19. Плоскости совпадают. 20. Три точки принадлежат прямой. 22. Да. 23. Совет. Примените метод от противного. 29. Нет. 31. Нет. 35. а) $6a^2$ и $24a^2$; б) a^3 и $8a^3$; в) а73 и $\overline{2}$а>/3; г) а$\sqrt{2}$ и 2ал/2. 36. а) $\frac{8}{3}$^ см; б) 384 см^2; в) 512 см^3. 39. $\frac{9\sqrt{3}a^2}{4}$ см^2. 41 Нет. 42. 720°. 57. Уменьшится в 9 раз. 58. 2 грн. 59. Один большой. 60. 4S. 61. 1000.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ

1. Д. Совет. Учтите, что первое дерево на расстоянии 2 м : 4 = 0,5 м от начала улицы. 2. Б. 3. Г. 4. А. 5. Г. 6. В. Совет. Рассмотрите случай, когда один из данных углов острый, а второй - тупой. 7. Г. 8. В. 9. Г. 10. А. 11.Г. 12. Д. Совет. Вспомните свойства биссектрисы. 13 В. 14. В. 15. Б. 16. Г. 17. А. 18. Д. 19. Б. 20. В. 21. Г. 22. А. 23. Д. 24. Б. 25. Г. 26. Д. 27. Б. 28. В. 29. А. 30. Г. 31. В. 32. Б. 33. Б. 34. В. 35. Г. 36. В. 37. А. 38. Д. 39. Б. 40. А, В, Г, Д. 41. А, Б, В, Г. 42. А, В. 43. А, Д. Совет. Рассмотрите два возможных случая размещения точки ***С*** относительно отрезка ***АВ.*** 44. В, Г. Совет. См. совет к № 43. 45. В, Д. 46 Г. 47. Б, Д. 48, В. 49. Б, Г. 50 А, Г. Совет. Учтите, что искомая касательная, не параллельная оси ординат, проходит через точку М, и воспользуйтесь формулой расстояния от точки до прямой. 51. Б. 52. Д. 53. А-2, Б-5, В-2, Г-4, Д-4. 54 А-2; Б-7; В-6; Г-4; Д-4; Е-2. 55. А-2; Б-3; В-4; Г-2, Г-4; Д-2, Д-6. 56. А-3; Б-2; В-3; Г-5; Д-5; Е-3; Ж-3. 57. А-3; Б-1; В-4; Г-6; Д-2. 58. А-8; Б-4; В-4, В-3; Г-7; Д-5; Е-1. 59. А-5, А-3; Б-5; В-2; Г-2; Д-5, Д-3. 60. А-8; Б-4; В-2; Г-3; Д-6; Е-5. 61 1) ... окружность с центром, совпадающим с центром заданной окружности, и радиусом, равным расстоянию между центром данной окружности и серединой хорды данной длины; 2) ... окружность с центром в середине заданной гипотенузы и радиусом, равным половине этой гипотенузы; 3) ... прямая - серединный перпендикуляр к отрезку с концами в заданных точках; 4) ... окружность с центром в заданной точке, радиус которой равен радиусу рассматриваемых окружностей; 5)... прямая параллельная данным, которая делит расстояние между ними пополам; 6) ... две взаимно перпендикулярные прямые - биссектрисы образованных заданными прямыми вертикальных углов. 62 1)... его диагонали взаимно перпендикулярны; 2)... его диагонали равны; 3) ... все его стороны равны - это ромб; 4)... его диагонали равны и взаимно перпендикулярны; 5)... угол, противоположный прямому углу, прямой. 63. См. § 16. 1) 3 - его высоты; 2) бесконечное множество - любой диаметр; 3) 2 - биссектрисы пар вертикальных углов; 4) 4 - диагонали и прямые, соединяющие середины противолежащих сторон; 5) 6 - диагонали и прямые, соединяющие середины противолежащих сторон. 64. 20; 9; 5; 6. 65.... биссектрисе угла. 66. ... параллельны. 67. ... взаимно перпендикулярны. 68.... Z***А*** = ZA$_t$, ***ZB = ZB***$_x$; ИЛИ ***а*** = a$_t$; ***Ъ = b***ИЛИ; ... 69. ... равнобедренный. 70.... остроугольный. 71. ... тупой. 72. ... взаимно перпендикулярны. 73_____ равны. 74. а) ... параллельны; б) ... параллельны. 75. ... параллельны. 76. ... принадлежат одной прямой. 77. ... лежат на одной прямой. 78. ... равнобокая. 79.... являются правильными. 80. ***с*** > 0,25(a^2 + ***Ь^2).*** 81. ***а = b * 0 тл с>*** $\left(\frac{17}{2a}\right)^2$ “i $\left(\frac{n}{2Ь}\right)^2$.

82. 13. 83. $\frac{(n-3)n}{1}$. 84. $\frac{c^2}{a+o}$. 85. ... это - нуль-вектор. 86. 30°, 66°, 84°.

87. $AM = 2MC$. 88. $S_{ABO} > S_{CDO}$. 89. 30°, 60°, 90°. Совет. Продлить медиану до пересечения с окружностью, описанной вокруг данного треугольника. 90. 48 см². 91. 46 мм, 46 мм. Совет. Рассмотрите два возможных случая и учтите, что должно выполняться неравенство для сторон треугольника. 92. 8 см и 4 см. 93. 6 см². 94. 30°; 75°; 75°. Совет. Воспользуйтесь теоремой Фалеса и найдите длину высоты, проведенной к боковой стороне. 95. 51°. 96. 0,5 м < AB < 1 м. Совет. Учтите, что в равнобедренном треугольнике ABC угол B - тупой. Тогда $AB < AC = 1$; $2AB > AC = 1$. 97. 5 см. Совет. Учтите, что тупым может быть только угол при вершине равнобедренного треугольника, тогда высота, проведенная к боковой стороне, расположена вне треугольника. 98 34 см. Совет. См. совет к №97. 99.5см. Совет. Учтите свойство биссектрисы угла как ГМТ равноудаленных от сторон угла. 100 120°. 101. 90°. 102. $\frac{a\,\mathrm{rctg}\frac{}{2}}{\sin 2a}$. 103. А - точка пересечения серединного перпендикуляра к BC с прямой a. 104. 2 : 1. 105. $\frac{5}{10}$ S. Совет. Воспользуйтесь тем, что: медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника; площади подобных фигур относятся как квадраты коэффициентов подобия. 106. $\frac{13}{36}$ S. Совет. Воспользуйтесь советом к предыдущей задаче и учтите, что $S_{APMK} = S_{ACN} + S_{CPM} - S_{MNK}$, где N - середина AB. 107. 6см, 4 см и 6 см. 108. 80см². Совет. Учтите, что сумма углов выпуклого четырехугольника 360°. 109. 24 см². Совет. Запишите площадь ромба через произведение его диагоналей и примените теорему Пифагора к треугольнику, катетами которого являются половины диагоналей. 110. 45°; 135°; 135°; 45°; 4 см. 111. 54 см². 112. Основания: 4 см и 12 см; боковые стороны: 8 см и 8 см. 113. $9\sqrt{2}$ см. 114. $\frac{98}{9}$ см². 115. $\frac{3a\sqrt{b}}{a+3b}$. 116. 12 см. 117. $4\sqrt{3}$ м и 4 м. 118. Нет. Совет. Обратите внимание на ординаты точек. 119. Да. Совет. Запишите уравнение прямой AC и проверьте, принадлежит ли точка B этой прямой. 120. $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$. 121. $y = -1$. 122. $x = -11$. 123. $y = -2x$. 124. $y = 0{,}5x + 2{,}5$. 125. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 7{,}2$. Совет. Найдите радиус окружности, воспользовавшись формулой для расстояния от точки до прямой, $R = d((-1; 3); 2x - y - 1 = 0)$.

126. а) $O\left(\frac{a}{2}; \frac{b^2 + c^2 - ab}{2c}\right)$; б) $A\left(b; \frac{ab - b^2}{c}\right)$; в) $M\left(\frac{a+b}{3}; \frac{c}{3}\right)$. 127. а) Извне треугольника; б) извне треугольника. 128. а) 0; б) 2; в) 2. 129. $\frac{5\sqrt{13}}{26}$. 130. Поворот на угол, косинус которого равен $\frac{3}{5}$ с центром в точке (2; -4). 131. 132. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. $x = x_0 + k(x - x_0) + a$, $y_x = y_0 + k(y - y_0) + b$.

СОДЕРЖАНИЕ

Уважаемый ученик! ... 3
Информация для учащихся ... 4
Информация для учителей и родителей ... 5
Вступление ... 6

Глава I. КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛОВ ОТ 0° ДО 180°. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 1. Система координат Декарта. Расстояние между двумя точками на координатной плоскости и уравнение окружности. Координаты середины отрезка ... 9
Практическая работа 1 ... 19
Задание 1 ... 19
Задание 2 ... 20
§ 2. Уравнение прямой ... 23
Задание 3 ... 29
§ 3. Взаимное расположение двух прямых на координатной плоскости ... 32
Задание 4 ... 38
§ 4. Тригонометрические функции углов от 0° до 180° ... 40
Практическая работа 2 ... 43
Задание 5 ... 44
§ 5. Теорема синусов ... 46
Практическая работа 3 ... 49
Задание 6 ... 49
§6. Теорема косинусов ... 51
Практическая работа 4 ... 53
Задание 7 ... 53
§ 7. Решение треугольников ... 55
Задание 8 ... 57
§ 8. Площадь треугольника и четырехугольника ... 60
Задание 9 ... 64
§ 9. Метод площадей в теоремах и задачах ... 67
Задание 10 ... 73
§ 10. Метод координат как способ решения геометрических задач ... 75
Задание 11 ... 79
Задания для повторения главы 1 ... 80
Готовимся к тематической аттестации №1 ... 84
Готовимся к тематической аттестации №2 ... 84

Глава II. **ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА**

§ 11. Основные свойства правильных многоугольников и вычисление их элементов ... **85**
Практическая работа 5 ... **94**
Практическая работа 6 ... **94**
Задание 12 ... **94**
§ 12. Длина окружности и дуги окружности. Радианная мера угла ... **97**
Практическая работа 7 ... **100**
Практическая работа 8* ... **100**
Задание 13 ... **100**
§ 13. Площадь круга, кругового сектора и сегмента ... **103**
Практическая работа 9 ... **105**
Задание 14 ... **105**
Задания для повторения главы II ... **107**
Готовимся к тематической аттестации № 3 ... **109**
Готовимся к тематической аттестации №4 ... **109**

Глава III. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§14. Геометрические преобразования на плоскости и их свойства ... **110**
Практическая работа 10 ... **115**
Задание 15 ... **116**
Практическая работа 11 ... **116**
Практическая работа 12 ... **116**
Задание 16 ... **117**
Практическая работа 13 ... **117**
Задание 17 ... **117**
Практическая работа 14 ... **118**
Задание 18 ... **118**
Практическая работа 15 ... **118**
Задание 19 ... **118**
Практическая работа 16 ... **119**
Задание 20 ... **119**
Практическая работа 17 ... **119**
Практическая работа 18 ... **120**
Задание 21 ... **120**
§15. Подобие многоугольников ... **121**
Практическая работа 19 ... **122**
Задание 22 ... **122**
§ 16. Группы симметрии фигур ... **124**
Практическая работа 20 ... **126**
Задание 23 ... **126**
§ 17. Метод использования свойств геометрических преобразований при решении задач ... **127**

Задание 24 130

§ 18. Параллельный перенос на координатной плоскости 132
Практическая работа 21 133
Задание 25 134

§ 19. Преобразование симметрии на координатной плоскости 135
Практическая работа 22 137
Практическая работа 23 137
Задание 26 137
Практическая работа 24 138
Практическая работа 25 138
Задание 27 138

§ 20. Полярная система координат и преобразование поворот на координатной плоскости 140
Практическая работа 26 142
Практическая работа 27 143
Задание 28 143
Задания для повторения главы III 144
Готовимся к тематической аттестации №5 145

Глава IV. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

§21. Понятие вектора 146
Практическая работа 28 149
Практическая работа 29 149
Практическая работа 30 149
§ 22. Действия над векторами 150
Практическая работа 31 152
Практическая работа 32 153
Практическая работа 33 153
§23. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам 154
Практическая работа 34 154
§ 24. Координаты вектора 155
Практическая работа 35 157
Задание 29 157
§25. Действия над векторами, заданными своими координатами 159
Практическая работа 36 162
Практическая работа 37 162
Практическая работа 38 162
Задание 30 162
§ 26. Скалярное произведение двух векторов 165
Задание 31 168

§ 27. Векторный метод доказательства теорем и решения геометрических задач 171

Задание 32 177
Задания для повторения главы IV 179
Готовимся к тематической аттестации №6 180

Глава V. ЭЛЕМЕНТЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 28. Основы построения стереометрии 181

Практическая работа 39.....183
Задание 33.....183
§ 29. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Перпендикуляр к плоскости.....184
Практическая работа 40.....186
Задание 34.....187
§ 30. Многогранники. Правильные многогранники.....188
Практическая работа 41.....192
Задание 35.....192
§ 31. Призмы. Объем пространственной фигуры.....193
Практическая работа 42.....196
Задание 36.....197
§ 32. Пирамиды.....198
Практическая работа 43.....200
Задание 37.....200
§ 33. Тела вращения.....201
Практическая работа 44.....204
Практическая работа 45.....204
Задание 38.....204
Задания для повторения главы V.....206

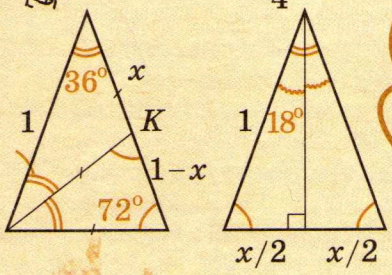
Глава VI. ЛЮБОПЫТНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

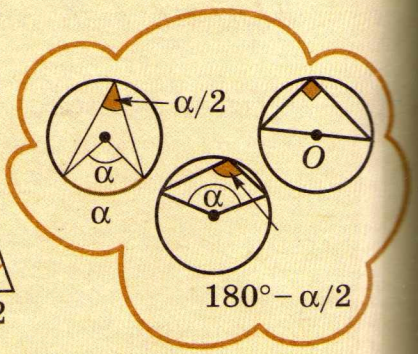
Приложение 1. Об открытии Декарта и поиске геометрического места точек плоскости . . . 209
Приложение 2. Еще раз об открытии Декарта, благодаря которому геометрия может помогать алгебре.....215
Приложение 3. Гармонические четверки точек.....221
Приложение 4. Снова о золотом сечении.....224
Приложение 5. Геометрические преобразования приходят на помощь.....227
Приложение 6. Элементы проективной геометрии, или что можно сделать с помощью линейки и неподвижной окружности.....232
Приложение 7. Инверсия в дивертисменте геометрических построений.....235
Приложение 8. Индукция в геометрии.....246
ПРОВЕРЬ СЕБЯ. ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ.....251
ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ПЛАНИМЕТРИИ.....266
СЛОВАРИК.....272
Опорные задачи на построение (7 класс).....277
Опорные задачи на построение (8-9 классы).....278
Замечательные точки треугольника.....279
Опорные факты про окружности.....280
Опорные задачи окружности.....281
Опорные факты трапеции.....282

ОТВЕТЫ И СОВЕТЫ.....284



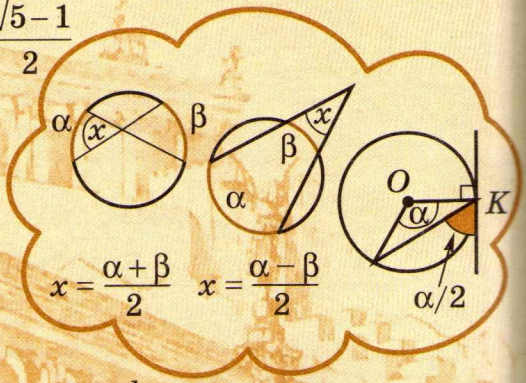
$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$



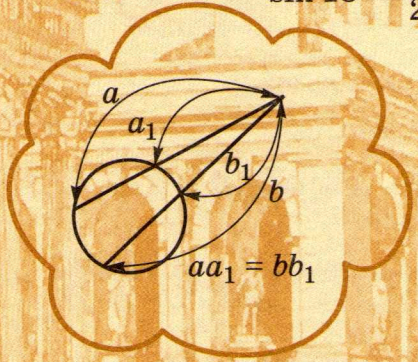


$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x} \to x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

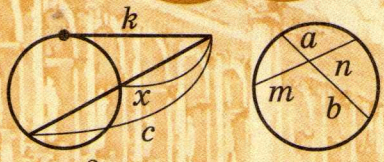
$$\sin 18^\circ = \frac{x}{2} : 1$$



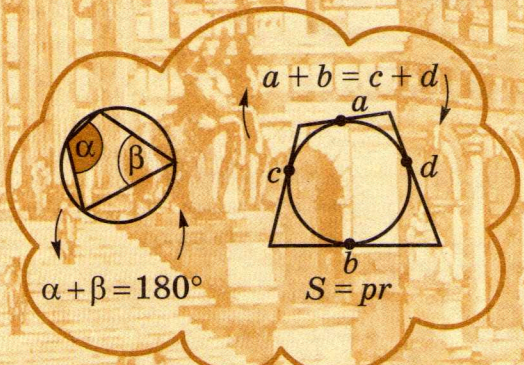
$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad x = \frac{\alpha-\beta}{2}$$



$$aa_1 = bb_1$$

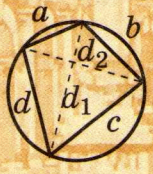


$$k^2 = xc \qquad mn = ab$$



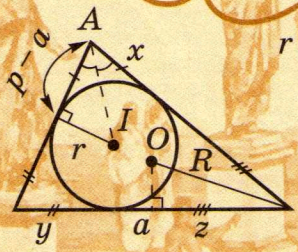
$$\alpha + \beta = 180^\circ \qquad S = pr$$

теорема Птолемея



$$ac + bd = d_1 d_2$$





$$r = \frac{S}{p} = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

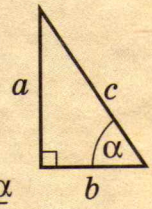
$$2x + 2y + 2z = 2p \to x = p - (y + z) = p - a$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$



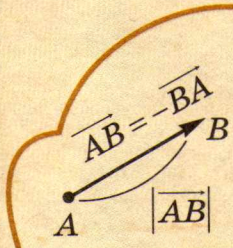
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

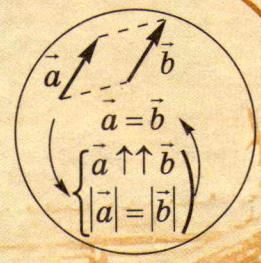
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

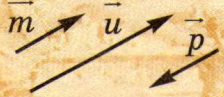


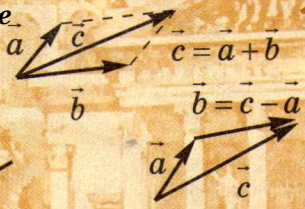




коллинеарные

$\vec{m} \parallel \vec{u} \parallel \vec{p}$

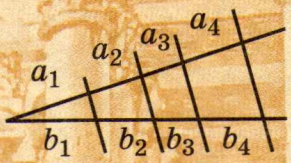




$\vec{m}$ ТТ $\vec{u}$ - сонаправленные

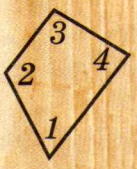
$\vec{u}$ Т4- $\vec{p}$ - противоположно направленные

теорема Фалеса



$n_1 \parallel n_2 \parallel n_3 \parallel n_4$

$a_1 : a_2 : a_3 \ldots =$
$= b_1 : b_2 : b_3 \ldots$

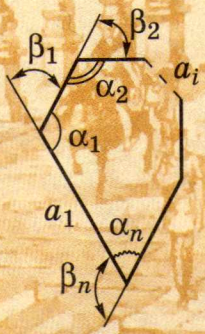


$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 180^\circ (n - 2)$

$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 360^\circ$

$a_i < a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n$





Теоретический и практический материал данного учебника можно использовать для;

- общеобразовательных учебных заведений,
- классов с углубленным изучением математики,
- проведения внеклассных занятий,
- самообразования учеников.

$a \parallel b$ – прямые о и bпараллельны

$a \perp b$ – прямые о и bперпендикулярны

Д ABC -треугольник ABC

A $A]$ A -угол A

$\angle(a\,b)$; $\hat{ab}$-угол между прямыми о и b (или лучами о и Ь)



Aea -точка A принадлежит прямой о

$A£a$ - точка A не принадлежит прямой a

$\{A,\ 8\}$<=о - точки A и B принадлежат прямой о

$\{A,\ B\}$<$£a$ - точки Л и Б не принадлежат прямой a

{о, Ь, с} - множество элементов a, b, c

=> - знак логического следования, «тогда следует»

$\rightarrow$ – «тогда имеем» или «тогда строим»

$\equiv$ – «совпадает» или «тождественное равенство»

$\triangleq$ – «обозначили как»

$\overset{def}{=}$ – равно по определению

$d(A;a)$ – расстояние от точки A до прямой о

$d(b;a)$ – расстояние между прямыми b и о

$[AB]$ – отрезок AB

$|AB|$ – длина отрезка Лв

(AB) – прямая AB

$[AB)$ – луч AB с началом в точке A

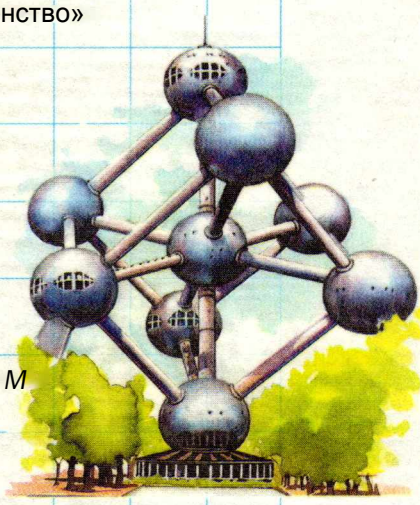
$a \cap b = M$ – прямая о пересекает прямую b в точке M

$Пр_n\,A$ – проекция точки A на прямую $п$

$Пр_n\,AC$ – проекция отрезка AC на прямую $п$

Ч. т. д. – что и требовалось доказать

ГМТ – геометрическое место точек



ISBN 978-966-504-935-7

9 789665 049357 >