

А. Г. Мерзляк  
В. Б. Полонский  
Е. М. Рабинович  
М. С. Якир

а  
g

10

# ГЕОМЕТРИЯ

СБОРНИК ЗАДАЧ  
И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ



ВІСНІВ

*«Схвалено Міністерством освіти і науки України  
для використання у загальноосвітніх навчальних закладах»  
(Письмо № 1.4/18-Г-477 от 06.07.2010 г.)*

Посібник є дидактичним матеріалом з геометрії для 10 класу загальноосвітніх шкіл. Він містить близько 1000 задач. Першу частину «Тренувальні вправи» поділено на три однотипних варіанти по 316 задач у кожному. Друга частина містить контрольні роботи (два варіанти) для оцінювання навчальних досягнень учнів. Третя частина містить завдання для підсумкових контрольних робіт за навчальним матеріалом першого і другого семестрів.

Для вчителів загальноосвітніх навчальних закладів та учнів 10 класів.

**Мерзляк А. Г.**

М52 Геометрія. 10 кл. : сборник задач и контрольных работ / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович, М. С. Якир. — Х. : Гимназия, 2010. — 144 с. : илл.

ISBN 978-966-474-109-2.

Пособие является дидактическим материалом по геометрии для 10 класса общеобразовательных учебных заведений. Оно содержит около 1000 задач. Первая часть «Тренировочные упражнения» разделена на три однотипных варианта по 316 задач в каждом. Вторая часть содержит контрольные работы (два варианта) для оценивания учебных достижений учащихся. Третья часть содержит задания для итоговых контрольных работ по учебному материалу первой и второй семестров.

Для учителей общеобразовательных учебных заведений и учащихся 10 классов.

**ББК 22.1я72**

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский,  
Е. М. Рабинович, М. С. Якир, 2010  
© СК «Г. Г. Г.», оригинал-макет,  
2010

ISBN 978-966-474-109-2

## ОТ АВТОРОВ

### Ученикам

Дорогие дети! В этом году вы расширите и углубите свои знания геометрии, ознакомитесь со многими новыми понятиями, фактами. Мы надеемся, что задачи, предложенные в этой книге, помогут сделать это знакомство не только полезным, но и интересным.

### Учителю

Мы очень надеемся, что, приобретя эту книгу не только для себя, а и «на класс», Вы не пожалеете. Даже если Вам повезло и Вы работаете по учебнику, который нравится, все равно задач, как и денег, бывает либо мало, либо совсем мало. Мы надеемся, что это пособие поможет ликвидировать «задачный дефицит».

Первая часть — «Тренировочные упражнения» — разделена на три однотипных варианта по 316 номеров в каждом. Ко многим (наиболее сложным) задачам первого и второго вариантов приведены ответы и указания к решению. Отсутствие ответов к заданиям третьего варианта, по нашему мнению, расширяет возможности учителя при составлении самостоятельных и проверочных работ. На стр. 6 приведена таблица тематического распределения тренировочных упражнений.

Вторая часть пособия содержит 8 контрольных работ (два варианта). Содержимое заданий для контрольных работ разделим условно на две части. Первая соответствует начальному и среднему уровням учебных достижений учащихся. Задания этой части обозначены символом  $n^\circ$  ( $n$  — номер задания). Вторая часть соответствует достаточному и высокому уровням. Задания каждого из этих уровней обозначены символами  $n^*$  и  $n^{**}$  соответственно. Выполнение первой части максимально оценивается в 6 баллов. Правильно решенные задачи уровня  $n^*$  добавляют еще 4 балла, то есть ученик может получить отличную оценку 10 баллов. Если ученику удалось еще решить задачу  $n^{**}$ , то он получает оценку 12 баллов.

В третьей части пособия приведены две итоговые контрольные работы (четыре варианта) по учебному материалу первого и второго семестров. Эти контрольные работы не являются обязательными. Они могут быть проведены и как зачетные, и как тренировочные.

4

Продолжительность их проведения в зависимости от особенностей класса может быть от 45 мин до 60 мин.

Каждый вариант итоговой контрольной работы состоит из трех частей, отличающихся по сложности и форме тестовых заданий.

В *первой части* контрольной работы предложено 10 заданий с выбором одного правильного ответа. Для каждого тестового задания с выбором ответа предоставлено четыре варианта ответов, из которых только один правильный. Задание с выбором ответа считается выполненным правильно, если в бланке ответов указана только одна буква, которой обозначен правильный ответ (образец бланка и правила его заполнения приведены в конце пособия). При этом учащийся не должен приводить какие-либо соображения, поясняющие его выбор.

Правильное решение каждого задания этого блока №№ 1–10 оценивается **одним баллом**.

*Вторая часть* контрольной работы состоит из 4 заданий в открытой форме с кратким ответом. Такое задание считается выполненным правильно, если в бланке ответов записан правильный ответ (например, число, выражение и т.п.). Все необходимые вычисления, преобразования и т.д. учащиеся выполняют в черновиках.

Правильное решение каждого из заданий №№ 11–14 этого блока оценивается **двумя баллами**.

*Третья часть* контрольной работы состоит из 2 заданий в открытой форме с развернутым ответом. Задания третьей части считаются выполненными правильно, если учащийся привел развернутую запись решения задания с обоснованием каждого этапа и дал правильный ответ. Правильное решение каждого из заданий №№ 15; 16 этого блока оценивается **четырьмя баллами**.

Сумма баллов, начисленных за правильно выполненные учащимся задания, переводится в школьную оценку по специальной шкале.

Система начисления баллов за правильно выполненные задания для оценивания работ учащихся приведена в таблице 1.

Таблица 1.

Номера заданий	Количество баллов	Всего
1 – 16	по 1 баллу	10 баллов
11 – 14	по 2 балла	8 баллов
15; 16	по 4 балла	8 баллов
Всего баллов		26 баллов

Соответствие количества набранных учащимся баллов оценке по 12-балльной системе оценивания учебных достижений учащихся приведено в таблице 2.

Таблица 2.

Количество набранных баллов	Оценка по 12-балльной системе оценивания учебных достижений учащихся
1 – 2	1
3 – 4	2
5 – 6	3
7 – 8	4
9 – 10	5
11 – 12	6
13 – 14	7
15 – 16	8
17 – 19	9
20 – 22	10
23 – 24	11
25 – 26	12

Желаем вам творческого энтузиазма и терпения...

## Тематическое распределение тренировочных упражнений

Тема	Номера упражнений
Систематизация и обобщение фактов и методов планиметрии	1 – 82
Аксиомы стереометрии и следствия из них	83 – 108
Построение сечений многогранников	109 – 117
Параллельные прямые в пространстве. Скрещивающиеся прямые	118 – 130
Параллельность прямой и плоскости	131 – 145
Параллельные плоскости. Свойства параллельных плоскостей	146 – 161
Параллельное проектирование. Изображение фигур в стереометрии	162 – 181
Перпендикулярность прямой и плоскости	182 – 206
Перпендикуляр и наклонная	207 – 224
Теорема о трех перпендикулярах	225 – 250
Перпендикулярные плоскости	251 – 264
Расстояние между скрещивающимися прямыми	265 – 275
Угол между скрещивающимися прямыми	276 – 280
Угол между прямой и плоскостью	281 – 292
Угол между плоскостями	293 – 309
Площадь ортогональной проекции многоугольника	310 – 316

## ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

### Вариант 1

#### Систематизация и обобщение фактов и методов планиметрии

- Углы  $MKP$  и  $NKP$  прямые. Докажите, что точки  $M$ ,  $K$  и  $N$  лежат на одной прямой.
- Докажите равенство треугольников по углу, биссектрисе этого угла и углам, которые она образует с противоположной стороной.
- Докажите равенство равнобедренных треугольников по высоте, проведенной к боковой стороне, и углу, который эта высота образует со второй боковой стороной.
- Докажите равенство равнобедренных треугольников по боковой стороне и медиане, проведенной к ней.
- Докажите от противного, что из двух смежных углов хотя бы один не больше, чем  $90^\circ$ .
- Докажите от противного, что если биссектрисы углов  $AOB$  и  $COD$  не лежат на одной прямой, то эти углы не являются вертикальными.
- Прямая  $b$  параллельна стороне  $KP$  треугольника  $LKP$ . Может ли прямая  $b$  быть параллельной сторонам  $LK$  и  $LP$ ? Ответ обоснуйте.
- Докажите от противного, что если прямые  $a$  и  $b$  пересекаются и прямая  $a$  параллельна прямой  $m$ , то прямые  $b$  и  $m$  пересекаются.
- На рисунке 1  $AC \parallel DB$  и  $CO = OD$ . Докажите, что  $\triangle AOC = \triangle BOD$ .

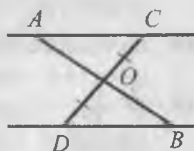


Рис. 1

- В равнобедренном треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = BC$ ,  $\angle B = 48^\circ$ , отрезки  $AT$  и  $AM$  — высота и биссектриса треугольника соответственно. Найдите угол  $TAM$ .
- Один из углов треугольника равен  $100^\circ$ . Высота и биссектриса, проведенные из вершины этого угла, образуют угол  $20^\circ$ . Найдите неизвестные углы треугольника.
- Один из острых углов прямоугольного треугольника равен  $21^\circ$ . Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины прямого угла.
- Точки  $E$ ,  $F$ ,  $P$  и  $K$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$  четырехугольника  $ABCD$  соответственно (рис. 2). Докажите, что  $EF \parallel KP$ .

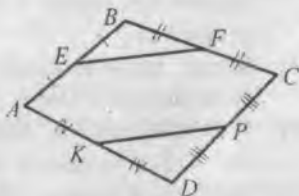


Рис. 2

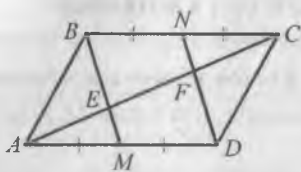


Рис. 3

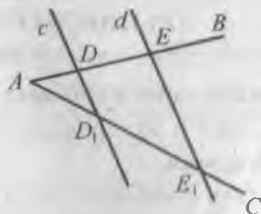


Рис. 4

14. Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон:
  - 1) произвольного четырехугольника;
  - 2) четырехугольника, у которого диагонали равны.
15. Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AD$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  (рис. 3). Отрезки  $BM$  и  $DN$  пересекают диагональ  $AC$  в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что точки  $E$  и  $F$  делят отрезок  $AC$  на три равные части.
16. Точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой  $l$  на расстоянии 5 см и 9 см от нее соответственно. Найдите расстояние от середины  $C$  отрезка  $AB$  до прямой  $l$ .
17. Параллельные прямые  $c$  и  $d$  пересекают стороны угла  $BAC$  (рис. 4). Найдите длину отрезка  $DE$ , если  $AD = 4$  см,  $D_1E_1 = 16$  см и  $DE = AD_1$ .
18. Продолжения боковых сторон  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $F$ . Найдите  $AB$ , если  $AF = 10$  см и  $BC : AD = 2 : 5$ .
19. В треугольник  $ABC$  вписан ромб  $AKPE$  так, что угол  $A$  у них общий, а вершина  $P$  принадлежит стороне  $BC$ . Найдите сторону ромба, если  $AB = 6$  см,  $AC = 3$  см.
20. Одна из диагоналей трапеции равна 28 см и делит другую диагональ на отрезки длиной 5 см и 9 см. Найдите большее основание трапеции и отрезки, на которые точка пересечения диагоналей делит первую диагональ, если меньшее основание равно 6 см.
21. Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, а медиана, проведенная к нему, — 5 см. Найдите гипотенузу треугольника.
22. В остроугольном треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 10$  см,  $BC = 15$  см, а высота  $BD = 8$  см. Найдите сторону  $AC$ .
23. Из точки к прямой проведены две наклонные. Длина одной из них равна 25 см, а длина ее проекции на эту прямую — 15 см. Найдите длину второй наклонной, если она образует с прямой угол  $30^\circ$ .



24. Из точки к прямой проведены две наклонные, проекции которых на эту прямую равны 5 см и 9 см. Найдите длины наклонных, если их разность равна 2 см.
25. Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых равны 10 см и 6 см, а длины их проекций на эту прямую относятся как 5 : 2. Найдите расстояние от точки до данной прямой.
26. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найдите катеты треугольника.
27. Боковая сторона равнобедренного треугольника меньше основания на 9 см, а отрезки, на которые биссектриса угла при основании делит высоту, проведенную к основанию, относятся как 5 : 4. Найдите высоту треугольника, проведенную к основанию.
28. В равнобокой трапеции  $ABCD$  известно, что  $AB = CD = 4$  см,  $BC = 6$  см,  $AD = 10$  см. Найдите углы трапеции.
29. Из точки, находящейся на расстоянии 12 см от прямой, проведены к ней две наклонные, образующие с прямой углы  $45^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите длины наклонных и их проекций на прямую.
30. Из точки, находящейся на расстоянии 8 см от прямой, проведены к ней две наклонные, образующие с прямой углы  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Найдите расстояние между основаниями наклонных. Сколько решений имеет задача?
31. Найдите площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 6 см, а боковая сторона — 5 см.
32. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 см и 12 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к гипотенузе.
33. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 4 см и 7 см, а угол между ними равен: 1)  $30^\circ$ ; 2)  $120^\circ$ .
34. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 26 см, 28 см и 30 см.
35. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки длиной 5 см и 6 см. Найдите площадь треугольника, если меньшая из двух других сторон равна 15 см.
36. Одна сторона треугольника на 5 см больше второй, а угол между ними равен  $60^\circ$ . Найдите периметр треугольника, если его третья сторона равна 7 см.
37. Две стороны треугольника относятся как 5 : 3, а угол между ними равен  $120^\circ$ . Найдите эти стороны, если периметр треугольника равен 15 см.

38. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $BC = a$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ .  
Найдите стороны  $AC$  и  $AB$ .
39. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна  $c$ , а острый угол равен  $\alpha$ . Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины его прямого угла.
40. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его сторону в отношении  $1 : 3$ , считая от вершины тупого угла. Периметр параллелограмма равен  $84$  см. Найдите его стороны.
41. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны  $9$  см и  $15$  см, а одна из диагоналей перпендикулярна его стороне.
42. Найдите площадь ромба, если его сторона равна  $15$  см, а сумма диагоналей —  $42$  см.
43. Перпендикуляр, опущенный из точки пересечения диагоналей ромба на его сторону, делит ее на отрезки длиной  $4$  см и  $9$  см. Найдите площадь ромба.
44. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны  $9$  см и  $12$  см, а угол между ними —  $60^\circ$ .
45. Высоты параллелограмма равны  $8$  см и  $10$  см, а угол между ними —  $60^\circ$ . Найдите площадь параллелограмма.
46. Диагональ равнобокой трапеции образует с основанием угол  $32^\circ$ , а ее боковая сторона равна меньшему основанию. Найдите углы трапеции.
47. В равнобокой трапеции биссектриса тупого угла параллельна боковой стороне. Найдите основания трапеции, если ее периметр равен  $60$  см, а боковая сторона —  $14$  см.
48. Диагональ  $AC$  трапеции  $ABCD$  перпендикулярна ее основаниям. Длина большего основания  $AD$  равна  $14$  см,  $\angle BAD = 120^\circ$ ,  $AB = 6$  см. Найдите среднюю линию трапеции.
49. Найдите площадь равнобокой трапеции, большее основание которой равно  $9$  см, боковая сторона —  $8$  см, а тупой угол равен  $135^\circ$ .
50. Найдите площадь равнобокой трапеции, основания которой равны  $10$  см и  $12$  см, а диагонали делят ее острые углы пополам.
51. Около треугольника  $ABC$  описана окружность с центром в точке  $O$ . Найдите угол  $BOC$ , если: 1)  $\angle A = 78^\circ$ ; 2)  $\angle A = 128^\circ$ .
52. Найдите углы равнобедренного треугольника, вписанного в окружность, боковая сторона которого стягивает дугу, градусная мера которой  $38^\circ$ .

53. Точки  $C$  и  $D$  окружности лежат по одну сторону от диаметра  $AB$  (рис. 5). Найдите угол  $DCB$ , если  $\angle ACD = 41^\circ$ .

54. Три угла четырехугольника, вписанного в окружность, взятые в порядке следования, относятся как  $2 : 6 : 7$ . Найдите углы четырехугольника.

55. Основания трапеции, в которую можно вписать окружность, равны 7 см и 9 см. Найдите периметр трапеции.

56. В равнобокую трапецию вписана окружность, точка касания которой с боковой стороной трапеции делит ее на отрезки длиной 3 см и 12 см. Найдите площадь трапеции.

57. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 6$  см,  $\angle C = 30^\circ$ . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

58. Основание равнобедренного треугольника равно 24 см, а боковая сторона — 13 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

59. Длина дуги окружности равна 15 см, а ее градусная мера —  $18^\circ$ . Найдите радиус окружности.

60. Длина окружности, радиус которой 10 см, равна длине дуги второй окружности, содержащей  $150^\circ$ . Найдите радиус второй окружности.

61. Площадь сектора составляет  $\frac{3}{8}$  площади круга. Найдите градусную меру центрального угла, соответствующего данному сектору.

62. Найдите площадь круга, вписанного в равнобедренный треугольник, основание которого равно 10 см, а боковая сторона — 13 см.

63. Площади двух квадратов относятся как  $2 : 5$ . Сторона большего квадрата равна 8 см. Найдите сторону меньшего квадрата.

64. Сторона правильного треугольника равна 4 см. Найдите радиусы его вписанной и описанной окружностей.

65. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен  $5\sqrt{2}$  см. Найдите сторону квадрата и радиус вписанной в него окружности.

66. Радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен  $4\sqrt{3}$  см. Найдите сторону шестиугольника и радиус описанной около него окружности.

67. Вычислите площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 4 см.

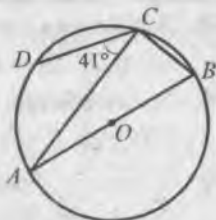


Рис. 5

68. Вершинами треугольника являются точки  $A(-2; 1)$ ,  $B(-1; 5)$ ,  $C(-6; 2)$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.
69. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек  $A(3; -2)$  и  $B(1; 2)$ .

70. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок  $AB$ , если  $A(3; -6)$ ,  $B(-1; 4)$ .

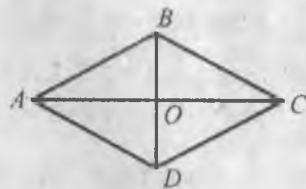


Рис. 6

71. Четырехугольник  $ABCD$  — ромб (рис. 6). Укажите вектор, равный вектору: 1)  $\overline{CD}$ ; 2)  $\overline{DC}$ ; 3)  $\overline{AD}$ ; 4)  $\overline{BO}$ ; 5)  $\overline{DO}$ ; 6)  $\overline{AO}$ .

72. Четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм. Найдите:

1)  $\overline{AB} - \overline{DC} + \overline{BC}$ ;

3)  $\overline{AB} + \overline{CA} - \overline{DA}$ .

2)  $\overline{AD} - \overline{BA} + \overline{DB} - \overline{DC}$ ;

73. Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  (рис. 7). Выразите векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{AD}$  через векторы  $\overline{CO} = \overline{a}$  и  $\overline{BO} = \overline{b}$ .

74. Даны точки  $A(4; 0)$  и  $B(0; -3)$ . Найдите координаты точки  $C$  такой, что  $\overline{CA} + \overline{CB} = \overline{0}$ .

75. Найдите модуль вектора  $\overline{n} = 3\overline{a} - 4\overline{b}$ , где  $\overline{a}(1; -2)$ ;  $\overline{b}(-1; 3)$ .

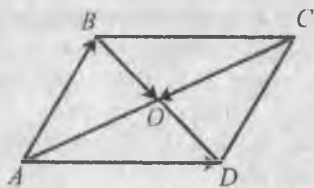


Рис. 7

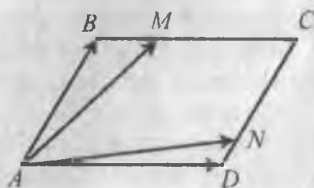


Рис. 8

76. На сторонах  $BC$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно, причем  $BM = \frac{1}{3}BC$ ,  $CN = \frac{4}{5}CD$  (рис. 8).

Выразите векторы  $\overline{AM}$  и  $\overline{AN}$  через векторы  $\overline{AB} = \overline{a}$  и  $\overline{AD} = \overline{b}$ .

77. На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены такие точки  $D$  и  $E$  соответственно, что  $AD : DC = 3 : 2$ ,  $BE : EC = 1 : 3$ . Выразите

векторы  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AE}$  и  $\overline{BD}$  через векторы  $\overline{BE} = \vec{a}$  и  $\overline{AD} = \vec{b}$ .

78. Найдите значение  $k$ , при котором векторы  $\vec{m}(-2; k)$  и  $\vec{n}(3; 6)$  коллинеарны.

79. Медианы  $BM$  и  $CD$  правильного треугольника  $ABC$  со стороной 8 см пересекаются в точке  $O$ . Найдите скалярное произведение векторов:

1)  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ ;                      3)  $\overline{BM}$  и  $\overline{AC}$ ;                      5)  $\overline{CD}$  и  $\overline{OM}$ ;

2)  $\overline{AB}$  и  $\overline{BC}$ ;                      4)  $\overline{OM}$  и  $\overline{OC}$ ;                      6)  $\overline{OB}$  и  $\overline{OM}$ .

80. Найдите косинус угла между векторами  $\vec{a}(-2; 3)$  и  $\vec{b}(3; -4)$ .

81. Даны векторы  $\vec{a}(5; 2)$  и  $\vec{b}(-4; y)$ . При каком значении  $y$  векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны?

82. Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ . Найдите:

1)  $|\vec{a} + \vec{b}|$ ;    2)  $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$ .

### Аксиомы стереометрии и следствия из них

83. Можно ли утверждать, что:

- 1) любые две точки всегда лежат на одной прямой;
- 2) любые четыре точки всегда лежат в одной плоскости?

84. Могут ли две различные плоскости иметь только одну общую точку?

85. Можно ли утверждать, что любая прямая, которая пересекает каждую из двух данных пересекающихся прямых, лежит в плоскости, проходящей через эти прямые?

86. Верно ли утверждение, что прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, является касательной к окружности в этой точке: 1) на плоскости; 2) в пространстве?

87. Докажите, что если через две прямые нельзя провести плоскость, то эти прямые не пересекаются.
88. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ . В плоскости  $\beta$  проведена прямая  $b$ , пересекающая плоскость  $\alpha$ . Докажите, что точка пересечения прямой  $b$  и плоскости  $\alpha$  принадлежит прямой  $a$ .
89. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $m$ . Плоскость  $\gamma$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно по прямым  $a$  и  $b$ , пересекающимся в точке  $A$ . Докажите, что точка  $A$  принадлежит прямой  $m$ .
90. Можно ли утверждать, что через прямую и две точки, не принадлежащие ей, можно провести плоскость?
91. Докажите, что через две произвольные точки можно провести хотя бы одну плоскость.
92. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  не лежат в одной плоскости. Докажите, что каждые три из них не лежат на одной прямой.
93. Три прямые лежат в плоскости  $\alpha$  и пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что существует плоскость, отличная от  $\alpha$ , которая пересекает данные прямые.
94. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $c$ . Докажите, что существует еще одна плоскость, отличная от плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ , содержащая прямую  $c$ .
95. Прямая  $b$  пересекает плоскость  $\beta$  в точке  $B$ . Прямая  $a$  принадлежит плоскости  $\beta$  и не проходит через точку  $B$ . Докажите, что прямые  $a$  и  $b$  не пересекаются.
96. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  расположены в пространстве так, что продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  пересекаются. Докажите, что указанные точки принадлежат одной плоскости.
97. Прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что все прямые, которые пересекают прямую  $b$  и проходят через произвольную точку прямой  $a$ , отличную от точки  $O$ , лежат в одной плоскости.
98. Среди  $n$  данных прямых каждые две пересекаются. Докажите, что все эти прямые лежат в одной плоскости или проходят через одну точку.
99. Прямые  $a$  и  $b$  не лежат в одной плоскости. Прямые  $c$  и  $d$  пересекают каждую из прямых  $a$  и  $b$ . Верно ли утверждение, что прямые  $c$  и  $d$  не пересекаются?
100. Даны плоскость  $\alpha$  и точка  $K$ , не принадлежащая ей. Из точки  $K$  провели два луча, пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $A$  и  $B$ .

Прямая  $l$  пересекает лучи  $KA$  и  $KB$  и плоскость  $\alpha$ . Докажите, что прямые  $l$  и  $AB$  пересекаются.

101. Вершина  $D$  плоского четырехугольника  $ABCD$  принадлежит плоскости  $\alpha$ , а остальные вершины лежат вне этой плоскости. Продолжения сторон  $BA$  и  $BC$  пересекают плоскость  $\alpha$  в точках  $M$  и  $K$  соответственно. Докажите, что точки  $M$ ,  $D$  и  $K$  лежат на одной прямой.
102. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ . На плоскости  $\alpha$  отмечены точки  $M$  и  $N$  такие, что прямые  $MN$  и  $a$  не параллельны, а в плоскости  $\beta$  выбрана точка  $K$ , не принадлежащая прямой  $a$ . Постройте линии пересечения плоскости  $MNK$  с плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .
103. Две соседние вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма принадлежат плоскости  $\beta$ . Принадлежат ли плоскости  $\beta$  две другие вершины параллелограмма?
104. Можно ли утверждать, что все точки окружности принадлежат плоскости, если эта окружность имеет с данной плоскостью:
- 1) две общие точки;                      2) три общие точки?
105. Через три точки можно провести две различные плоскости. Как расположены эти точки?
106. Даны четыре точки, одна из которых не принадлежит плоскости, которую определяют три остальные. Докажите, что ни одна из точек не принадлежит плоскости, которую определяют три остальные.
107. Середины трех сторон треугольника принадлежат плоскости  $\alpha$ . Принадлежат ли плоскости  $\alpha$  вершины треугольника?
108. Точки  $M$  и  $N$  лежат по одну сторону от плоскости  $\beta$ , а точки  $M$  и  $K$  — по разные стороны. Известно, что прямые  $MN$ ,  $MK$  и  $NK$  пересекают плоскость  $\beta$ . Докажите, что точки их пересечения с плоскостью  $\beta$  лежат на одной прямой.

### Построение сечений многогранников

109. Постройте сечение куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки: 1)  $A_1$ ,  $C_1$  и  $D$ ; 2)  $A$ ,  $C$  и середину ребра  $BB_1$ .
110. Точка  $M$  — середина ребра  $SA$  пирамиды  $SABC$ . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $B$ ,  $C$  и  $M$ .

111. Каждое ребро треугольной пирамиды равно  $a$ . Постройте сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через середины трех ребер, выходящих из одной вершины, и вычислите его периметр и площадь.
112. Постройте точку пересечения прямой с плоскостью нижнего основания четырехугольной призмы, если эта прямая проходит через две точки, принадлежащие: 1) боковым ребрам одной грани; 2) боковым ребрам, не принадлежащим одной грани; 3) боковому ребру и боковой грани, которой это ребро не принадлежит; 4) двум соседним боковым граням; 5) двум противоположным боковым граням.
113. Постройте сечение треугольной пирамиды  $SABC$  (рис. 9) плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $P$  и  $K$ , принадлежащие ребрам  $SA$ ,  $AC$  и  $SB$  соответственно.
114. Постройте сечение прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки  $B$ ,  $C$  и  $D_1$ , если прямые  $AD$  и  $BC$  не параллельны.
115. Постройте сечение прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  (рис. 10) плоскостью, проходящей через точку  $A$  и точки  $E$  и  $F$ , которые лежат на ребрах  $BB_1$  и  $B_1 C_1$  соответственно.
116. Постройте сечение прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 11) плоскостью, проходящей через вершины  $C$ ,  $D_1$  и точку  $F$  на ребре  $AA_1$ .
117. В треугольной пирамиде  $SABC$  (рис. 12) точка  $M$  принадлежит грани  $ASB$ , точка  $N$  — грани  $BSC$ , точка  $K$  — ребру  $AC$ . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ .

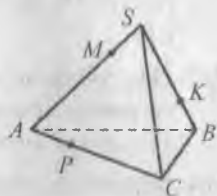


Рис. 9

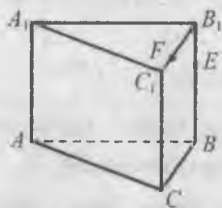


Рис. 10

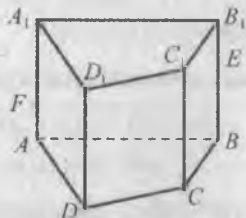


Рис. 11

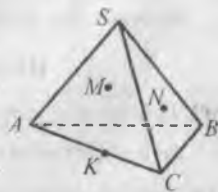


Рис. 12



### Параллельные прямые в пространстве.

#### Скрещивающиеся прямые

118. Можно ли утверждать, что прямая, которая пересекает одну из двух параллельных прямых, пересекает и вторую:  
 1) на плоскости; 2) в пространстве?
119. Даны две параллельные прямые. Можно ли утверждать, что прямая, пересекающая каждую из данных прямых, лежит в плоскости этих прямых?
120. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  — скрещивающиеся.
121. Через точки  $A$  и  $B$  прямой  $l$  проведены перпендикулярные ей прямые  $AA_1$  и  $BB_1$ . Можно ли утверждать, что прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  параллельны: 1) на плоскости; 2) в пространстве?
122. Прямые  $a$  и  $b$  параллельны. Через точку  $M$ , не принадлежащую этим прямым, проведена прямая, пересекающая прямые  $a$  и  $b$ . Лежат ли прямые  $a$  и  $b$  и точка  $M$  в одной плоскости?
123. Через точки  $A$  и  $B$  можно провести две параллельные прямые, пересекающие прямую  $a$ . Докажите, что точки  $A$  и  $B$  и прямая  $a$  лежат в одной плоскости.
124. Прямые  $a$  и  $b$  скрещивающиеся и прямые  $c$  и  $b$  скрещивающиеся. Верно ли утверждение, что прямые  $a$  и  $c$  скрещивающиеся?
125. Треугольник  $ADE$  и трапеция  $ABCD$  ( $AD$  — основание) не лежат в одной плоскости, точка  $K$  — середина стороны  $AE$ , точка  $P$  — середина стороны  $DE$ . Докажите, что  $KP \parallel BC$ .
126. Две параллельные прямые  $a$  и  $b$  соответственно параллельны прямым  $m$  и  $n$ . Параллельны ли прямые  $m$  и  $n$ ?
127. Через вершину  $A$  параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая  $a$ , не принадлежащая плоскости  $ABC$ , а через точку  $C$  — прямая  $b$ , параллельная прямой  $BD$ . Докажите, что прямые  $a$  и  $b$  скрещивающиеся.
128. Через прямые  $a$  и  $b$  проведены плоскости, пересекающиеся по прямой  $c$ . Докажите, что если прямая  $c$  не пересекает прямые  $a$  и  $b$ , то  $a \parallel b$ .
129. Точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$  — середины отрезков  $BD$ ,  $CD$ ,  $AB$  и  $AC$  соответственно (рис. 13),  $AD = 16$  см,  $BC = 18$  см. Найдите периметр четырехугольника  $MNPQ$ .

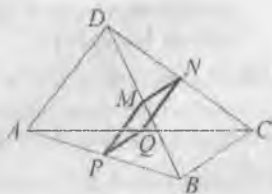


Рис. 13

130. Даны треугольник  $ABC$  и плоскость  $\alpha$ , не пересекающая его. Через вершины треугольника  $ABC$  и середину  $M$  медианы  $AD$  этого треугольника проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость  $\alpha$  в точках  $A_1, B_1, C_1$  и  $M_1$  соответственно (рис. 14). Найдите длину отрезка  $MM_1$ , если  $AA_1 = 3$  см,  $BB_1 = 8$  см,  $CC_1 = 6$  см.

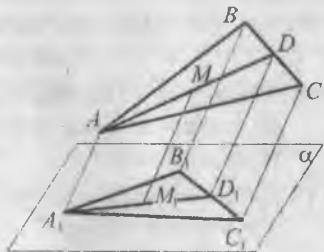


Рис. 14

### Параллельность прямой и плоскости

131. Точка  $A$  не принадлежит плоскости  $\alpha$ . Сколько существует прямых, которые проходят через точку  $A$  и параллельны плоскости  $\alpha$ ?
132. Прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ . Существуют ли в плоскости  $\alpha$  прямые, не параллельные прямой  $a$ ?
133. Прямые  $a$  и  $b$  параллельны. Как расположена прямая  $b$  относительно плоскости  $\alpha$ , если прямая  $a$ : 1) принадлежит плоскости  $\alpha$ ; 2) пересекает плоскость  $\alpha$ ; 3) параллельна плоскости  $\alpha$ ?
134. Прямая  $a$  принадлежит плоскости  $\alpha$  и параллельна плоскости  $\beta$ . Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $m$ . Докажите, что прямые  $a$  и  $m$  параллельны.
135. Через середины двух сторон треугольника проведена плоскость, отличная от плоскости треугольника. Каково взаимное расположение этой плоскости и третьей стороны треугольника?
136. Прямая  $a$  параллельна прямой  $b$ , а прямая  $b$  параллельна плоскости  $\alpha$ . Обязательно ли прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ ?
137. Докажите, что все прямые, которые пересекают одну из двух скрещивающихся прямых и параллельны другой прямой, лежат в одной плоскости.
138. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $c$ . В плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  выбраны такие прямые  $a$  и  $b$  соответственно, что  $a \parallel b$ . Докажите, что прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  попарно параллельны.
139. Диагональ  $BD$  параллелограмма  $ABCD$  параллельна плоскости  $\gamma$ , а лучи  $AD$  и  $AB$  пересекают эту плоскость в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Докажите, что треугольники  $DAB$  и  $MAN$  подобны.

140. Плоскость  $\alpha$  пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  в точках  $B_1$  и  $C_1$  соответственно, причем  $AC_1 : C_1C = 3 : 2$  и  $B_1C_1 = 5$  см. Найдите длину отрезка  $BC$ , если прямая  $BC$  и плоскость  $\alpha$  параллельны.

141. Прямые  $MN$  и  $KP$  скрещивающиеся. Точка  $E$  — середина отрезка  $NP$ . Постройте плоскость, которая проходит через точку  $E$  и параллельна прямым  $MN$  и  $KP$ .

142. Трапеция  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) лежит в плоскости  $\alpha$ ,  $AB = 8$  см. Вне плоскости  $\alpha$  выбрали точку  $M$  и на отрезке  $AM$  отметили такую точку  $K$ , что  $AK : KM = 3 : 1$ . Постройте точку  $F$  пересечения плоскости  $DKC$  с прямой  $MB$  и найдите длину отрезка  $KF$  (рис. 15).

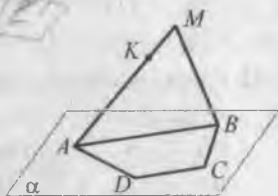


Рис. 15

143. Постройте сечение треугольной пирамиды  $SABC$  плоскостью, которая проходит через вершину  $S$ , точку на ребре  $AC$  и параллельна прямой  $BC$ .

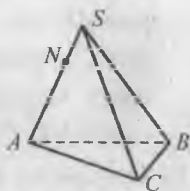


Рис. 16

144. Постройте сечение пирамиды  $SABC$  (рис. 16) плоскостью, которая проходит через точку  $N$  на ребре  $SA$  и параллельна прямым  $AB$  и  $SC$ .

145. Постройте сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью, проходящей через середины  $M$  и  $K$  ребер  $SA$  и  $SB$  соответственно и точку  $N$  на ребре  $BC$ .

### Параллельные плоскости. Свойства параллельных плоскостей

146. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. Как расположены прямые, принадлежащие плоскости  $\alpha$ , относительно плоскости  $\beta$ ?

147. Могут ли быть параллельными плоскости, проходящие через непараллельные прямые?

148. Две соседние стороны параллелограмма параллельны плоскости  $\alpha$ . Каково взаимное расположение плоскости  $\alpha$  и плоскости параллелограмма?

149. Точка  $D$  не лежит в плоскости треугольника  $ABC$ . На отрезках  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$  выбраны такие точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно, что  $DA_1 : A_1A = DB_1 : B_1B = DC_1 : C_1C$ . Докажите, что плоскости  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  параллельны.

150. Треугольник  $ABC$  лежит в плоскости  $\alpha$ . Через его вершины проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость  $\beta$ , параллельную плоскости  $\alpha$ , в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.
151. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. В плоскости  $\alpha$  выбраны точки  $M$  и  $N$ , а в плоскости  $\beta$  — точки  $M_1$  и  $N_1$  такие, что прямые  $MM_1$  и  $NN_1$  параллельны. Найдите длины отрезков  $NN_1$  и  $M_1N_1$ , если  $MN = 5$  см,  $MM_1 = 6$  см.
152. Сторона  $AB$  треугольника  $ABC$  лежит в плоскости  $\alpha$ . Плоскость  $\beta$ , параллельная плоскости  $\alpha$ , пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Найдите длину отрезка  $A_1B_1$ , если  $A_1C = 9$  см,  $AA_1 = 3$  см,  $AB = 8$  см.
153. Через точки  $A$  и  $A_1$ , лежащие вне плоскости  $\alpha$ , проведены прямые  $AB$ ,  $AC$ ,  $A_1B_1$ ,  $A_1C_1$  так, что прямая  $AB$  параллельна прямой  $A_1B_1$ , а прямая  $AC$  — прямой  $A_1C_1$ , где точки  $B$ ,  $C$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — точки пересечения соответствующих прямых с плоскостью  $\alpha$ . Докажите, что прямые  $BC$  и  $B_1C_1$  параллельны или совпадают.
154. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. Прямые  $a$  и  $b$  принадлежат плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Через прямую  $a$  проведена плоскость, пересекающая плоскость  $\beta$  по прямой  $c$ , которая параллельна прямой  $b$ . Докажите, что  $a \parallel b$ .
155. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. На плоскости  $\alpha$  выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на плоскости  $\beta$  — точки  $C$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны.
156. Плоскость  $\alpha$  параллельна плоскости  $\beta$  и прямой  $a$ , не лежащей в плоскости  $\beta$ . Докажите, что прямая  $a$  параллельна плоскости  $\beta$ .
157. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. Через точку  $B$  плоскости  $\beta$  провели прямую  $b$ , параллельную плоскости  $\alpha$ . Докажите, что прямая  $b$  принадлежит плоскости  $\beta$ .
158. Основанием прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является квадрат со стороной 6 см. боковое ребро параллелепипеда равно 4 см. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину  $M$  ребра  $A_1 B_1$  и прямую  $AC$ , и вычислите периметр сечения.

159. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки  $M, K$  и  $N$ , принадлежащие соответственно ребрам  $AB, B_1 C_1$  и  $CC_1$ .

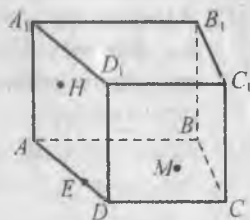


Рис. 17

160. Постройте сечение прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки  $E, F$  и  $K$ , принадлежащие ребрам  $CD, BB_1$  и  $A_1 D_1$  соответственно.

161. Постройте сечение прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 17) плоскостью, проходящей через точки  $H$  и  $M$ , которые принадлежат граням  $AA_1 B_1 B$  и  $DD_1 C_1 C$  соответственно, и точку  $E$  ребра  $AD$ .

### Параллельное проектирование.

#### Изображение фигур в стереометрии

162. Какие геометрические фигуры могут быть параллельными проекциями: 1) прямой; 2) двух параллельных прямых; 3) треугольника?

163. Могут ли две пересекающиеся прямые проектироваться: 1) в две пересекающиеся прямые; 2) в параллельные прямые; 3) в одну прямую; 4) в прямую и точку на ней; 5) в прямую и точку вне ее?

164. Даны прямая и точка, ей не принадлежащая. Может ли проекция данной точки принадлежать проекции данной прямой?

165. Можно ли при параллельном проектировании прямоугольника получить: 1) квадрат; 2) трапецию?

166. Можно ли при параллельном проектировании параллелограмма получить четырехугольник с углами  $30^\circ, 70^\circ, 150^\circ, 110^\circ$ ?

167. Может ли параллельной проекцией двух неравных отрезков быть два равных отрезка?

168. Может ли параллельной проекцией отрезка быть: 1) прямая; 2) луч; 3) точка?

169. В каком случае треугольник проектируется: 1) в отрезок; 2) в равный ему треугольник?

170. При каких условиях квадрат проектируется в прямоугольник?

171. Четырехугольник  $ABCD$  является параллельной проекцией ромба (рис. 18),  $OE \parallel AD$ . Какой вид имеет проектируемый четырехугольник, если  $OE$  и  $CD$  — проекции двух перпендикулярных отрезков?

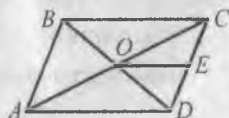


Рис. 18

172. Треугольник  $ABC$  является параллельной проекцией равностороннего треугольника (рис. 19). Постройте изображения перпендикуляров, проведенных из точек  $M$  и  $N$  к сторонам  $AC$  и  $AB$  треугольника.
173. Даны проекции вершин треугольника  $ABC$  на плоскость (рис. 20). Постройте проекцию биссектрисы угла  $B$ , если  $AB : BC = 3 : 5$ .
174. Точки  $A, B$  и  $C$ , не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями трех вершин параллелограмма. Постройте проекцию четвертой вершины параллелограмма. Сколько решений имеет задача?
175. Треугольник  $ABC$  является параллельной проекцией равнобедренного прямоугольного треугольника, на гипотенузу которого во внешнюю сторону построен квадрат (квадрат лежит в плоскости треугольника). Постройте параллельную проекцию этого квадрата.
176. Дана параллельная проекция окружности с центром  $O$  (рис. 21). Постройте проекцию диаметра окружности, перпендикулярного хорде  $AB$ .
177. Дана параллельная проекция окружности с центром  $O$ . Постройте параллельную проекцию правильного треугольника, вписанного в эту окружность.
178. Точки  $A, B$  и  $C$ , не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями трех последовательных вершин правильного шестиугольника. Постройте проекции остальных вершин этого шестиугольника.
179. На изображении равнобокой трапеции постройте изображения ее высот, проведенных из вершин тупых углов.
180. Треугольник  $ABC$  является изображением треугольника  $A_1B_1C_1$ , у которого  $\angle C_1 = 90^\circ$  и  $A_1C_1 : B_1C_1 = 3 : 4$ . Постройте изображение центра вписанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ .

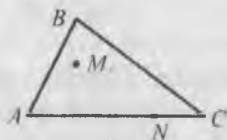


Рис. 19

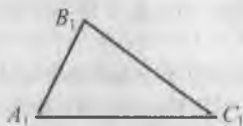


Рис. 20

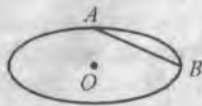


Рис. 21

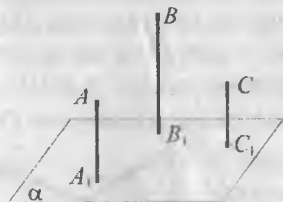


Рис. 22

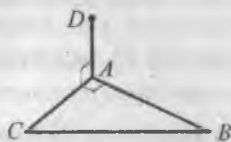


Рис. 23

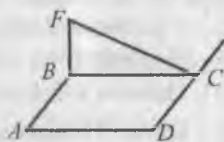


Рис. 24

181. Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — параллельные проекции точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на плоскость  $\alpha$  (рис. 22). Постройте прямую пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $ABC$ .

### Перпендикулярность прямой и плоскости

182. Верно ли утверждение, что если прямая не перпендикулярна плоскости, то она не перпендикулярна ни одной прямой этой плоскости?
183. Через точку  $E$ , лежащую вне плоскости треугольника  $ABC$ , провели прямую  $EA$ , перпендикулярную прямым  $AB$  и  $AC$ . На отрезке  $BC$  взяли произвольную точку  $D$ . Определите вид треугольника  $EAD$ .
184. Докажите, что каждое ребро куба перпендикулярно двум его граням.
185. Точка  $D$  лежит вне плоскости треугольника  $ABC$  (рис. 23).  $\angle DAC = \angle BAC = 90^\circ$ . Укажите прямую и плоскость, которые перпендикулярны между собой.

186. На рисунке 24 изображен квадрат  $ABCD$ . Прямая  $FB$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Докажите, что прямые  $FC$  и  $CD$  перпендикулярны.

187. На рисунке 25 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Является ли прямоугольником четырехугольник  $A_1 B C D_1$ ?

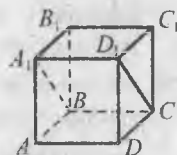


Рис. 25

188. Определите вид треугольника, если через одну из его сторон можно провести плоскость, перпендикулярную другой стороне.

189. Точка  $M$  лежит вне плоскости параллелограмма  $ABCD$  (рис. 26),  $MA = MC$  и  $MB = MD$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Докажите, что прямая  $MO$  перпендикулярна плоскости параллелограмма.

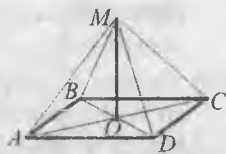


Рис. 26

190. Точка  $D$  лежит вне плоскости равнобедренного треугольника  $ABC$  и равноудалена от точек  $B$  и  $C$ , точка  $M$  — середина основания  $BC$ . Докажите, что прямая  $BC$  перпендикулярна плоскости  $ADM$ .

191. Прямая  $AO$  перпендикулярна плоскости окружности с центром  $O$ .

Точка  $B$  лежит на окружности. Найдите расстояние от точки  $A$  до точки  $B$ , если радиус окружности равен 8 см и  $\angle ABO = 60^\circ$ .

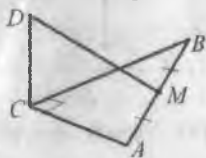


Рис. 27

192. В треугольнике  $ABC$  (рис. 27) известно, что  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 9$  см,  $BC = 12$  см, точка  $M$  — середина  $BA$ . Прямая  $DC$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ ,  $DC = 18$  см. Найдите  $DM$ .

193. Через точку  $O$  пересечения диагоналей квадрата  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $SO$  и точка  $S$  соединена с серединой  $E$  стороны  $DC$  (рис. 28). Найдите длину отрезка  $SC$ , если  $AB = 8$  см,  $\angle SEO = 60^\circ$ .

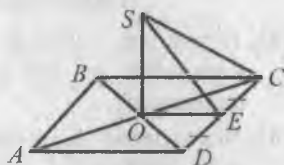


Рис. 28

194. Сторона квадрата  $ABCD$  равна 6 см.

Через точку  $O$  пересечения диагоналей квадрата к его плоскости проведен перпендикуляр  $SO$ . Найдите длину отрезка  $SO$ , если  $\angle SAO = 60^\circ$ .

195. Точка  $M$  лежит вне плоскости треугольника  $ABC$  и равноудалена от его вершин. Как расположена точка  $O$  — проекция точки  $M$  на плоскость  $ABC$  — относительно треугольника  $ABC$ , если этот треугольник остроугольный?

196. Из точек  $A$  и  $B$ , лежащих вне плоскости  $\alpha$ , проведены к ней перпендикуляры  $AA_1$  и  $BB_1$ . Докажите, что если прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  параллельны, то четырехугольник  $AA_1B_1B$  — прямоугольник.

197. Докажите, что если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

198. Прямая  $FC$  перпендикулярна плоскости квадрата  $ABCD$ , сторона которого равна  $a$ . Найдите расстояние от точки  $F$  до вершин квадрата, если  $FC = b$ .

199. Через центр  $O$  правильного треугольника  $ABC$  со стороной 9 см проведен перпендикуляр  $OM$  к его плоскости длиной 3 см. Найдите угол  $MAO$ .



200. Точка  $M$  находится на расстоянии 5 см от каждой вершины равнобедренного треугольника  $ABC$ , в котором  $AB = BC = 6$  см,  $AC = 8$  см. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости треугольника.

201. Прямая  $EC$  перпендикулярна плоскости квадрата  $ABCD$  (рис. 29),  $O$  — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости  $OCE$ .

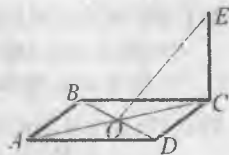


Рис. 29

202. Точка  $S$  равноудалена от вершин квадрата  $ABCD$ . Найдите угол  $ASC$ , если  $SA = AB$ .

203. Из точки  $D$ , не принадлежащей плоскости равностороннего треугольника  $ABC$ , проведен перпендикуляр  $AD$  к его плоскости. Через центр  $O$  треугольника проведена прямая  $FO$ , параллельная  $AD$ . Найдите расстояние от точки  $F$  до вершин треугольника, если  $OF = 6$  см и  $BC = 8\sqrt{3}$  см.

204. Концы отрезка, расположенного по одну сторону от плоскости, удалены от нее на 5 см и 7 см. Найдите расстояние от середины этого отрезка до плоскости.

205. Через вершину  $A$  квадрата  $ABCD$  проведена прямая  $AE$ , перпендикулярная его плоскости. Докажите, что прямая  $CD$  перпендикулярна плоскости  $EAD$ .

206. Отрезки  $FA$  и  $CE$  — перпендикуляры к плоскости параллелограмма  $ABCD$ . Докажите, что плоскости  $FAB$  и  $ECD$  параллельны.

### Перпендикуляр и наклонная

207. На рисунке 30 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажите проекции отрезка  $B_1 D$  на плоскости граней куба.

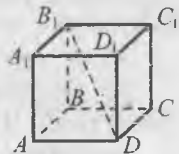


Рис. 30

208. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр длиной 9 см и наклонная длиной 11 см. Найдите длину проекции этой наклонной на плоскость.

209. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Длина наклонной равна 8 см, а угол между ней и перпендикуляром равен  $60^\circ$ . Найдите длины перпендикуляра и проекции наклонной.

210. Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведены наклонные  $AB$  и  $AD$ , длины которых равны 17 см и 10 см соответственно. Найдите длину проекции наклонной  $AD$ , если длина проекции наклонной  $AB$  равна 15 см.
211. Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведены две наклонные  $AC$  и  $AD$  и перпендикуляр  $AB$ . Найдите длины проекций этих наклонных на плоскость, если  $AC = 8$  см,  $\angle CAB = 60^\circ$ ,  $\angle DAB = 45^\circ$ .
212. Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведены наклонные  $AB$  и  $AC$  длиной 15 см и 20 см соответственно. Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости, если проекции наклонных на эту плоскость относятся как 9 : 16.
- ✓ 213. Докажите, что равные наклонные, проведенные к плоскости из одной точки, имеют равные проекции.
214. Четырехугольник  $ABCD$  — ромб. Прямая  $PB$  перпендикулярна плоскости ромба (рис. 31). Докажите, что углы  $PDA$  и  $PDC$  равны.
215. Прямая  $AD$  перпендикулярна плоскости треугольника  $ABC$  (рис. 32). Точка  $D$  равноудалена от точек  $B$  и  $C$ . Найдите расстояние между точками  $B$  и  $C$ , если  $AD = 3$  см,  $\angle BDA = \angle BDC = 60^\circ$ .
- ✓ 216. Точка  $K$  равноудалена от вершин параллелограмма  $ABCD$ . Докажите, что  $ABCD$  — прямоугольник.
- ✓ 217. Точка  $F$  находится на расстоянии 6 см от вершин прямоугольника и на расстоянии 4 см от его плоскости. Найдите стороны прямоугольника, если одна из них в два раза больше другой.
218. В ромбе  $ABCD$  известно, что  $AB = BD = 6$  см. Прямая  $EA$  перпендикулярна плоскости ромба, а точка  $E$  удалена от его плоскости на 2 см. Найдите длину наклонной  $EC$ .
219. Из точки, лежащей вне плоскости, проведены к ней две наклонные, длины которых равны 15 см и 27 см. Сумма длин проекций этих наклонных на плоскость равна 24 см. Найдите проекцию каждой наклонной.
220. Два отрезка, длины которых равны 13 см и 20 см, упираются своими концами в параллельные плоскости. Найдите расстояние

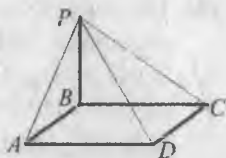


Рис. 31

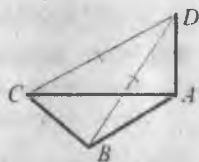


Рис. 32

между плоскостями, если разность проекций этих отрезков на одну из плоскостей равна 11 см.

221. Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведены равные наклонные  $AB$  и  $AC$ , угол между которыми равен  $60^\circ$ . Найдите угол между наклонной  $AB$  и ее проекцией на плоскость  $\alpha$ , если проекции наклонных перпендикулярны.
222. Из точки  $T$  к плоскости  $\alpha$  проведены наклонные  $TA$  и  $TB$  и перпендикуляр  $TO$ ,  $TA = 17$  см,  $OA = 15$  см,  $AB = 3\sqrt{19}$  см,  $\angle AOB = 60^\circ$ . Найдите длину наклонной  $TB$ .
223. Через вершину  $A$  параллелограмма  $ABCD$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная диагонали  $BD$ . Расстояние между прямой  $BD$  и плоскостью  $\alpha$  равно 5 см, а проекции отрезков  $AB$  и  $AD$  на эту плоскость равны 8 см и 7 см соответственно. Найдите диагональ  $AC$  параллелограмма, если диагональ  $BD$  равна 9 см.
224. Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведены перпендикуляр  $AM$  и наклонные  $AB$  и  $AC$ , причем  $\angle BAM + \angle CAM = 90^\circ$ . Докажите, что  $MC : MB = AC^2 : AB^2$ .

### Теорема о трех перпендикулярах

225. На рисунке 33 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что прямая  $AO$  перпендикулярна прямой  $D_1 C$ .
226. На рисунке 34 изображен ромб  $ABCD$ . Прямая  $FC$  перпендикулярна его плоскости. Докажите, что прямые  $AF$  и  $BD$  перпендикулярны.
227. К плоскости прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) проведен перпендикуляр  $DA$  (рис. 35). Найдите расстояние между точками  $D$  и  $B$ , если  $BC = a$ ,  $DC = b$ .
228. Точка  $M$  принадлежит перпендикуляру к плоскости ромба, проходящему через точку пересечения его диагоналей. Докажите, что точка  $M$  равноудалена от сторон ромба.

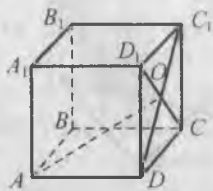


Рис. 33

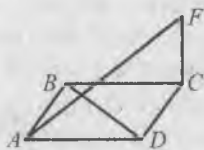


Рис. 34

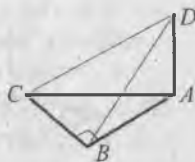


Рис. 35

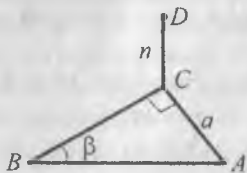


Рис. 36

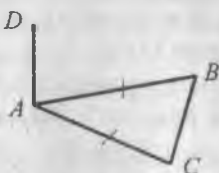


Рис. 37

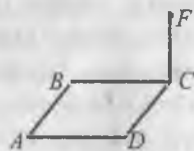


Рис. 38

229. Через вершину  $C$  треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $KC$ . Прямая, проходящая через точку  $K$  и середину  $AB$ , перпендикулярна прямой  $AB$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.
230. Через вершину прямого угла  $C$  треугольника  $ABC$  (рис. 36) проведен перпендикуляр  $DC$  к его плоскости длиной  $n$ . Найдите расстояние от точки  $D$  до прямой  $AB$ , если  $AC = a$ ,  $\angle B = \beta$ .
231. Прямая  $AD$  перпендикулярна плоскости равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = AC$ ). Проведите перпендикуляр из точки  $D$  к прямой  $BC$  (рис. 37).
232. Через вершину  $C$  ромба  $ABCD$  проведен перпендикуляр  $FC$  к его плоскости (рис. 38). Постройте перпендикуляр, опущенный из точки  $F$  на диагональ  $BD$  ромба.
233. Через середину  $O$  гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  проведен перпендикуляр  $KO$  к его плоскости (рис. 39). Постройте перпендикуляры, опущенные из точки  $K$  на катеты треугольника.
234. Точка  $M$  — середина стороны  $BC$  правильного треугольника  $ABC$  (рис. 40). Через точку  $M$  проведен перпендикуляр  $ME$  к плоскости треугольника. Постройте перпендикуляры, опущенные из точки  $E$  на прямые  $AB$ ,  $AC$  и  $BD$ , где точка  $D$  — середина стороны  $AC$ .
235. Через вершину прямого угла  $C$  треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $CM$  длиной  $4\sqrt{7}$  см. Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$ , если  $AC = BC = 8$  см.

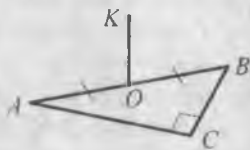


Рис. 39

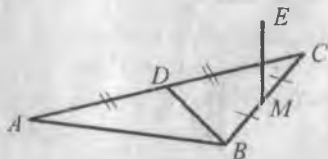


Рис. 40

236. Через точку  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $OM$  длиной 4 см. Найдите расстояние от точки  $M$  до прямых, содержащих стороны параллелограмма, если  $AB = 12$  см,  $BC = 20$  см,  $\angle BAD = 30^\circ$ .
237. Через вершину прямого угла  $C$  треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $CK$ . Расстояние от точки  $K$  до прямой  $AB$  равно 13 см. Найдите расстояние от точки  $K$  до плоскости треугольника, если его катеты равны 15 см и 20 см.
238. Через вершину угла  $D$  треугольника  $DFE$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $DS$  длиной 16 см. Найдите расстояние от точки  $S$  до стороны  $EF$ , если  $DE = 13$  см,  $DF = 15$  см,  $EF = 14$  см.
239. В треугольник  $ABC$  вписана окружность с центром  $O$ . Через точку  $O$  к плоскости треугольника проведен перпендикуляр  $SO$  длиной 5 см. Точка  $S$  удалена от стороны  $AB$  на 13 см. Найдите радиус вписанной окружности.
240. Через центр  $O$  окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной 6 см, к плоскости треугольника проведен перпендикуляр  $OM$  длиной 3 см. Найдите расстояние от точки  $M$  до сторон треугольника.
241. Основания равнобокой трапеции равны 8 см и 18 см. Через центр  $O$  окружности, вписанной в эту трапецию, к ее плоскости проведен перпендикуляр  $OM$ . Точка  $M$  находится на расстоянии 10 см от сторон трапеции. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости трапеции.
242. Диагонали ромба равны 18 см и 24 см. Точка  $K$  находится на расстоянии 3 см от плоскости ромба и равноудалена от его сторон. Найдите это расстояние.
243. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = BC = 17$  см,  $AC = 16$  см. Точка  $P$  находится на расстоянии 8 см от всех сторон треугольника  $ABC$ . Найдите расстояние от точки  $P$  до плоскости треугольника.
244. Площадь ромба равна  $S$ , а его острый угол —  $\alpha$ . Точка  $F$  удалена от плоскости ромба на расстояние  $m$ . Найдите расстояние от точки  $F$  до сторон ромба, если она равноудалена от них.
245. Точка  $D$  находится на одинаковых расстояниях  $DA$  и  $DB$  от сторон прямого угла с вершиной  $C$ . Точка  $O$  — проекция точки  $D$  на плоскость этого угла. Докажите, что четырехугольник  $OACB$  — квадрат.

246. Стороны прямоугольника равны 15 см и 20 см. Через середину  $M$  его большей стороны к плоскости прямоугольника проведен перпендикуляр  $MK$  длиной 8 см. Найдите расстояние от точки  $K$  до диагоналей прямоугольника.
247. Через вершину  $D$  прямоугольника  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $DE$ . Точка  $E$  удалена от стороны  $AB$  на 4 см, от стороны  $BC$  — на 9 см. Найдите длину отрезка  $DE$ , если  $BD = 7$  см.
248. Из точки  $D$  к плоскости  $\gamma$  проведены перпендикуляр  $DO$  и наклонная  $DA$ , образующая со своей проекцией угол  $\alpha$ . В плоскости  $\gamma$  через точку  $A$  проведена прямая  $m$ , образующая с прямой  $OA$  угол  $\beta$ . Найдите косинус угла между наклонной  $DA$  и прямой  $m$ .
249. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 26$  см,  $BC = 28$  см,  $AC = 27$  см. Через вершину  $B$  треугольника проведена наклонная, образующая с лучами  $BA$  и  $BC$  равные углы. Проекция наклонной пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . Найдите длину отрезка  $BD$ .
250. Основания трапеции равны 14 см и 18 см. Через большее основание трапеции проведена плоскость, которая находится на расстоянии 8 см от меньшего основания трапеции. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до проведенной плоскости.

### Перпендикулярные плоскости

251. Верно ли утверждение, что через точку, не лежащую в данной плоскости, можно провести только одну плоскость, перпендикулярную данной?
252. Верно ли утверждение, что если плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $\beta$ , а плоскость  $\beta$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ , то плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$  параллельны?
253. Докажите, что если прямая пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ , то плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны плоскости  $\gamma$ .
254. Через вершину  $C$  квадрата  $ABCD$  проведена прямая  $MC$ , перпендикулярная его плоскости. Докажите, что плоскости  $MAD$  и  $MDC$  перпендикулярны.
255. Два прямоугольных равнобедренных треугольника имеют общую гипотенузу, равную 8 см. Плоскости этих треугольников перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами их прямых углов.

256. Точка  $E$  равноудалена от сторон квадрата  $ABCD$ . Докажите, что плоскости  $AEC$  и  $BED$  перпендикулярны.
257. Точка  $Q$  равноудалена от вершин прямоугольника  $ABCD$ . Докажите, что плоскости  $AQC$  и  $ABC$  перпендикулярны.
258. Точка  $S$  равноудалена от вершин квадрата  $ABCD$ . Точка  $O$  — ее проекция на плоскость квадрата. Из точки  $S$  проведен перпендикуляр  $SM$  к стороне  $AB$  квадрата. Докажите, что плоскости  $ASB$  и  $OSM$  перпендикулярны.
259. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны и пересекаются по прямой  $a$ . Плоскость  $\gamma$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно по прямым  $b$  и  $c$ , параллельным прямой  $a$ . Расстояние между прямыми  $b$  и  $a$  равно 8 см, а между прямыми  $c$  и  $a$  — 15 см. Найдите расстояние между прямой  $a$  и плоскостью  $\gamma$ .
260. Концы отрезка, длина которого равна 13 см, принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, а расстояния от концов отрезка до линии пересечения плоскостей равны 8 см и 5 см. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из концов отрезка к линии пересечения плоскостей.
261. Концы отрезка лежат в двух перпендикулярных плоскостях. Проекция отрезка на плоскости равны 20 см и 16 см. Расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из концов отрезка к линии пересечения плоскостей, равно 12 см. Найдите длину отрезка.
262. Отрезок лежит в одной из двух перпендикулярных плоскостей и не пересекает другую. Концы этого отрезка удалены от прямой  $l$  пересечения плоскостей на 9 см и 5 см. Во второй плоскости проведена прямая  $m$ , параллельная прямой  $l$ . Расстояние от одного из концов данного отрезка до прямой  $m$  равно 15 см. Найдите расстояние от середины отрезка и от его другого конца до прямой  $m$ .
263. Прямоугольник  $ABCD$  перегнули по диагонали  $AC$  так, что плоскости  $ABC$  и  $ACD$  оказались перпендикулярными. Найдите расстояние между точками  $B$  и  $D$ , если стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см.
264. Докажите, что если плоскости  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  попарно перпендикулярны, то линии их пересечения также попарно перпендикулярны.

### Расстояние между скрещивающимися прямыми

265. На рисунке 41 изображен куб с ребром  $a$ . Найдите расстояние между прямыми  $MN$  и  $PK$ .

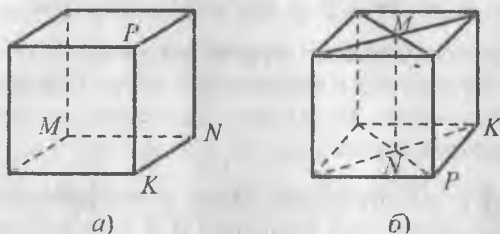


Рис. 41

266. Через вершину прямого угла  $C$  треугольника  $ABC$  проведена прямая  $l$ , перпендикулярная его плоскости. Найдите расстояние между прямыми  $l$  и  $AB$ , если  $AB = 13$  см,  $AC = 5$  см.
267. Через вершину  $B$  равнобедренного треугольника  $ABC$  проведена прямая  $a$ , перпендикулярная его плоскости. Найдите расстояние между прямыми  $a$  и  $AC$ , если  $AB = AC = 10$  см,  $BC = 12$  см.
268. Через точку  $D$  окружности с центром  $O$  и радиусом 8 см проведена прямая  $a$ , перпендикулярная плоскости окружности. Через центр окружности в ее плоскости проведена прямая  $b$ , образующая угол  $60^\circ$  с прямой  $OD$ . Найдите расстояние между прямыми  $a$  и  $b$ .
269. Через точку  $A$  окружности с центром  $O$  и радиусом 6 см проведена прямая  $l$ , перпендикулярная плоскости окружности, а через точку  $B$  окружности — прямая  $b$ , касательная к окружности. Найдите расстояние между прямыми  $b$  и  $l$ , если угол  $AOB$  равен  $120^\circ$ .
270. В параллелограмме  $ABCD$  сторона  $CD$  равна 10 см, а угол  $B$  —  $120^\circ$ . Через сторону  $AD$  параллелограмма проведена плоскость, перпендикулярная плоскости параллелограмма, и в этой плоскости через точку  $A$  проведена прямая  $a$ , скрещивающаяся с прямой  $BC$ . Найдите расстояние между прямыми  $a$  и  $BC$ .
271. Через гипотенузу  $AB$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  проведена плоскость  $\alpha$ . Расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\alpha$  равно 3 см. Найдите расстояние между прямой  $AB$  и прямой, которая проходит через точку  $C$  и перпендикулярна плоскости  $\alpha$ , если  $AC = BC = 6$  см.



272. Прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ . Докажите, что расстояние между прямой  $a$  и каждой прямой, принадлежащей плоскости  $\alpha$  и скрещивающейся с прямой  $a$ , равно расстоянию между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha$ .

273. Точки  $A$  и  $B$  находятся по одну сторону от плоскости  $\alpha$  на расстоянии 8 см от нее. Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведен перпендикуляр  $AA_1$ , а из точки  $B$  — наклонная  $BB_1$  длиной 10 см. Найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BB_1$ , если  $AB = 7$  см,  $A_1B_1 = 11$  см (рис. 42).

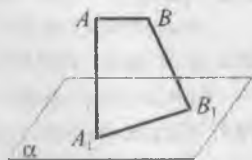


Рис. 42

274. Плоскости прямоугольников  $ABCD$  и  $ABEF$  перпендикулярны. Найдите расстояние между прямыми  $DE$  и  $AB$ , если  $AF = 8$  см,  $BC = 15$  см (рис. 43).

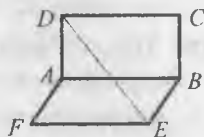


Рис. 43

275. Длина ребра куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равна 2 см. Найдите расстояние между прямыми  $DB_1$  и  $AB$ .

**Угол между скрещивающимися прямыми**

276. Прямая  $MA$  перпендикулярна сторонам  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ . Найдите угол между прямыми  $MA$  и  $BC$ .

277. Через вершину  $A$  прямоугольника  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $AM$  (рис. 44). На отрезке  $MB$  выбрали произвольную точку  $K$ . Найдите угол между прямыми  $AK$  и  $BC$ .

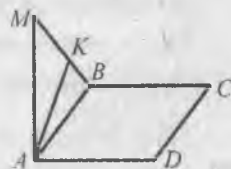


Рис. 44

278. Докажите, что если точка  $M$  равноудалена от сторон правильного треугольника  $ABC$ , то прямые  $AM$  и  $BC$  перпендикулярны.

279. На рисунке 45 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми: 1)  $AD$  и  $BB_1$ ; 2)  $DD_1$  и  $B_1C$ ; 3)  $B_1C$  и  $DC_1$ .

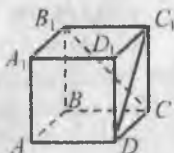


Рис. 45

280. Через центр  $O$  квадрата  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $OM$ . Расстояние от точки  $M$  до точки  $A$  равно стороне квадрата. Найдите угол между прямыми  $ME$  и  $AC$ , где точка  $E$  — середина стороны  $AB$ .

## Угол между прямой и плоскостью

281. Наклонная образует с плоскостью угол  $30^\circ$ . Найдите длину ее проекции на эту плоскость, если длина наклонной равна 4 см.
282. Найдите угол между наклонной и плоскостью, если длина наклонной равна 6 см, а длина ее проекции — 3 см.
283. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямой  $DC_1$  и плоскостью  $ABC$ .
284. Докажите, что параллельные прямые, пересекающие плоскость, образуют с ней равные углы.
285. Из точки  $A$ , лежащей вне плоскости  $\alpha$ , проведены к ней равные наклонные  $AB_1$ ,  $AB_2$ ,  $AB_3$ , ... и перпендикуляр  $AO$ . Докажите, что точки  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , ... лежат на окружности с центром  $O$ .
286. Точка  $A$  находится на расстоянии 9 см от плоскости  $\alpha$ . Наклонные  $AB$  и  $AC$  образуют с плоскостью  $\alpha$  углы  $45^\circ$  и  $60^\circ$ , а угол между проекциями наклонных равен  $150^\circ$ . Найдите расстояние между точками  $B$  и  $C$ .
287. Через вершину  $B$  равностороннего треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $DB$  длиной  $4\sqrt{3}$  см. Найдите угол между прямой  $AD$  и плоскостью треугольника, если его площадь равна  $4\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.
288. Точки  $A$  и  $B$  лежат в двух перпендикулярных плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Из точек  $A$  и  $B$  проведены перпендикуляры  $AA_1$  и  $BB_1$  к линии пересечения плоскостей. Найдите углы, которые образует отрезок  $AB$  с плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , если  $AA_1 = 2\sqrt{3}$  см,  $BB_1 = 2\sqrt{6}$  см,  $A_1B = 6$  см.
289. Точки  $A$  и  $B$  лежат в двух перпендикулярных плоскостях. Отрезок  $AB$  образует с этими плоскостями углы  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из точек  $A$  и  $B$  к линии пересечения плоскостей, если  $AB = 8$  см.
290. Через центр  $O$  правильного треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $MO$  длиной 9 см. Перпендикуляр, проведенный из точки  $M$  к прямой  $AB$ , образует с плоскостью  $ABC$  угол  $30^\circ$ . Найдите длину отрезка  $AB$ .
291. Из точки к плоскости проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы по  $30^\circ$ . Найдите угол между проекциями наклонных, если угол между наклонными равен  $60^\circ$ .

292. Через вершину прямого угла проведена прямая, образующая с его сторонами углы по  $60^\circ$ . Найдите угол, который образует эта прямая с плоскостью прямого угла.

### Угол между плоскостями

293. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $m$ . В плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  проведены прямые  $a$  и  $b$  соответственно, параллельные прямой  $m$ . Расстояние между прямыми  $a$  и  $m$  равно 5 см, между прямыми  $b$  и  $m$  — 3 см. Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , если расстояние между прямыми  $a$  и  $b$  равно 7 см.
294. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $m$ , а угол между ними равен  $30^\circ$ . Найдите расстояние между прямой  $m$  и плоскостью  $\gamma$ , которая пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  по параллельным прямым, удаленным от линии пересечения плоскостей на 2 см и  $2\sqrt{3}$  см.
295. Квадрат и прямоугольник, площади которых соответственно равны  $36 \text{ см}^2$  и  $54 \text{ см}^2$ , имеют общую сторону, а угол между их плоскостями равен  $30^\circ$ . Найдите расстояние между параллельными сторонами прямоугольника и квадрата.
296. Сторона  $BC$  равностороннего треугольника  $ABC$  принадлежит плоскости  $\alpha$ , а расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $\alpha$  равно 1 см. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $\alpha$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна  $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2$ .
297. Через гипотенузу  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол  $30^\circ$ . Найдите расстояние от вершины  $C$  до этой плоскости, если катеты треугольника равны 6 см и 8 см.
298. Равнобедренные треугольники  $ABC$  и  $ABD$  имеют общее основание  $AB$ . Угол между их плоскостями равен  $60^\circ$ . Найдите длину отрезка  $CD$ , если  $BC = 15 \text{ см}$ ,  $BD = 13 \text{ см}$ ,  $AB = 24 \text{ см}$ .
299. Равнобедренные треугольники  $ABC$  и  $DBC$  имеют общее основание  $BC$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $DBC$ , если  $AB = 2\sqrt{21} \text{ см}$ ,  $AD = 2\sqrt{15} \text{ см}$ ,  $\angle BDC = 90^\circ$ ,  $BC = 12 \text{ см}$ .
300. Равносторонний треугольник  $ABE$  и квадрат  $ABCD$  имеют общую сторону  $AB$  длиной 4 см. Найдите угол между их плоскостями, если  $EC = 2\sqrt{2} \text{ см}$ .

301. На рисунке 46 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .  
Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1 BC$ .

302. Через гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол  $45^\circ$ . Найдите углы, которые образуют катеты треугольника с этой плоскостью.

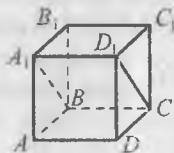


Рис. 46

303. Угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , пересекающимися по прямой  $a$ , равен  $60^\circ$ . В плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  выбраны точки  $M$  и  $K$  соответственно и из них проведены перпендикуляры  $MM_1$  и  $KK_1$  к прямой  $a$ . Найдите длину отрезка  $MK$ , если  $KK_1 = 3$  см,  $MM_1 = 8$  см,  $K_1 M_1 = \sqrt{15}$  см.

304. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ . Из точек  $A$  и  $B$ , лежащих в плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, проведены перпендикуляры  $AC = 5$  см и  $BD = 8$  см к прямой  $a$ . Расстояние между точками  $C$  и  $D$  равно 24 см,  $AB = 25$  см. Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

305. Сторона квадрата  $ABCD$  равна 4 см. Через его центр  $O$  проведена прямая  $OE$ , перпендикулярная плоскости квадрата. Плоскость, проведенная через сторону  $AB$ , пересекает прямую  $OE$  в точке  $F$ . Угол между плоскостями  $ABF$  и  $ABC$  равен  $60^\circ$ . Найдите длину проекции отрезка  $OF$  на плоскость  $ABF$ .

306. Из точки  $M$ , лежащей вне плоскости  $\alpha$ , проведены к ней две наклонные  $MA$  и  $MB$ , образующие с плоскостью  $\alpha$  углы  $30^\circ$  и  $45^\circ$  соответственно. Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $MAB$ , если  $\angle AMB = 90^\circ$ .

307. В одной из двух пересекающихся плоскостей проведена прямая, образующая со второй плоскостью угол  $30^\circ$ , а с линией пересечения этих плоскостей — угол  $45^\circ$ . Найдите угол между плоскостями.

308. Точка  $M$  равноудалена от вершин квадрата  $ABCD$ . Угол между прямой  $MA$  и плоскостью  $ABC$  равен  $\alpha$ . Найдите угол между плоскостями  $MAB$  и  $ABC$ .

309. Точка  $P$  равноудалена от вершин правильного треугольника  $ABC$ . Угол между прямой  $PA$  и плоскостью  $ABC$  равен  $\beta$ . Найдите угол между плоскостями  $APC$  и  $BPC$ .

**Площадь ортогональной проекции многоугольника**

310. Может ли площадь ортогональной проекции многоугольника быть равной площади самого многоугольника?
311. Найдите площадь ортогональной проекции многоугольника на некоторую плоскость, если площадь многоугольника равна  $8 \text{ см}^2$ , а угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции равен  $30^\circ$ .
312. Площадь многоугольника равна  $8 \text{ см}^2$ , а площадь его ортогональной проекции —  $4 \text{ см}^2$ . Найдите угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.
313. Ортогональной проекцией треугольника  $ABC$  на некоторую плоскость является прямоугольный треугольник  $A_1B_1C_1$  с гипотенузой  $10 \text{ см}$  и катетом  $8 \text{ см}$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равен  $45^\circ$ .
314. Площадь четырехугольника равна  $126 \text{ см}^2$ . Его ортогональной проекцией является прямоугольник, диагональ которого равна  $\sqrt{130} \text{ см}$ , а одна из сторон —  $9 \text{ см}$ . Найдите угол между плоскостями четырехугольника и прямоугольника.
315. Площадь треугольника  $A_1B_1C_1$  равна  $42 \text{ см}^2$ . Он является ортогональной проекцией треугольника  $ABC$  со сторонами  $7 \text{ см}$ ,  $17 \text{ см}$  и  $18 \text{ см}$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .
316. Площадь трапеции равна  $48\sqrt{3} \text{ см}^2$ , а ее ортогональная проекция — равнобокая трапеция с основаниями  $4 \text{ см}$  и  $20 \text{ см}$  и боковой стороной  $10 \text{ см}$ . Найдите угол между плоскостями трапеций.

## Вариант 2

## Систематизация и обобщение фактов и методов планиметрии

1. Углы  $ABD$  и  $CBD$  прямые. Докажите, что точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой.
2. Докажите равенство треугольников по медиане, углам, которые она образует со стороной треугольника, к которой она проведена, и углам, которые она образует со сторонами угла, из вершины которого она проведена.
3. Докажите равенство равнобедренных треугольников, если равны их основания и высоты, проведенные к основаниям.
4. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.
5. Докажите от противного, что из двух смежных углов хотя бы один не меньше, чем  $90^\circ$ .
6. Докажите от противного, что каждый угол имеет только одну биссектрису.
7. Прямая  $a$  параллельна стороне  $AB$  треугольника  $ABC$ . Может ли прямая  $a$  быть параллельной сторонам  $BC$  и  $AC$ ? Ответ обоснуйте.
8. Докажите от противного, что если прямые  $m$  и  $n$  параллельны и прямая  $a$  пересекает прямую  $m$ , то она пересекает и прямую  $n$ .
9. На рисунке 47  $AB = CD$  и  $AB \parallel CD$ . Докажите, что  $\triangle ADB = \triangle CBD$ .

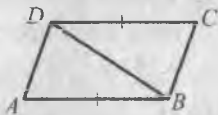


Рис. 47

10. Отрезки  $CH$  и  $CM$  — высота и биссектриса треугольника  $ABC$  соответственно,  $\angle A = 68^\circ$ ,  $\angle B = 26^\circ$ . Найдите угол  $HCM$ .
11. Биссектриса одного из углов остроугольного треугольника образует с высотой, проведенной из той же вершины, угол, равный  $10^\circ$ , а один из двух других углов треугольника равен  $70^\circ$ . Найдите неизвестные углы треугольника.
12. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника провели биссектрису и высоту, угол между которыми равен  $19^\circ$ . Найдите острые углы треугольника.
13. В ромбе  $ABCD$  точки  $E$ ,  $F$ ,  $K$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  соответственно (рис. 48). Докажите, что  $EF \perp FK$ .

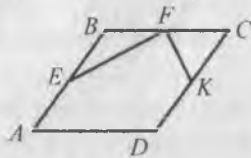


Рис. 48

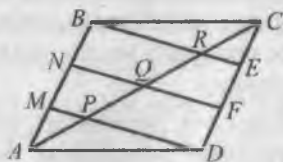


Рис. 49

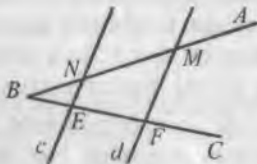


Рис. 50

14. Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон: 1) прямоугольника; 2) ромба.
15. На стороне  $AB$  параллелограмма  $ABCD$  (рис. 49) отметили точки  $M$  и  $N$ , а на стороне  $CD$  — точки  $E$  и  $F$  так, что  $BN = NM = MA = CE = EF = FD$ . Отрезки  $BE, NF, MD$  пересекают диагональ  $AC$  в точках  $R, Q, P$  соответственно. Докажите, что  $AP = PQ = QR = RC$ .
16. Точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой  $l$ , точка  $M$  — середина отрезка  $AB$ . Точки  $A$  и  $M$  удалены от прямой  $l$  на 6 см и 1 см соответственно. Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $l$ .
17. Параллельные прямые  $c$  и  $d$  пересекают стороны угла  $ABC$  (рис. 50). Найдите длину отрезка  $EF$ , если  $BE = 4$  см,  $MN = 9$  см,  $BN = EF$ .
18. Продолжения боковых сторон  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $N$ ,  $DN = 36$  см. Найдите  $CD$ , если  $AB : BN = 5 : 7$  и  $AD > BC$ .
19. В треугольник  $ABC$  вписан ромб  $DMNA$  так, что угол  $A$  у них общий, а вершина  $M$  принадлежит стороне  $BC$ . Найдите сторону ромба, если  $CM = 6$  см,  $BM = 4$  см,  $AB = 20$  см.
20. Точка пересечения диагоналей трапеции делит одну из диагоналей на отрезки длиной 7 см и 11 см. Найдите основания трапеции, если их разность равна 16 см.
21. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) катет  $AC$  равен 5 см, а медиана  $AM$  — 13 см. Найдите гипотенузу  $AB$ .
22. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  тупой,  $AC = 13$  см,  $AB = 15$  см, а высота  $AE$  равна 12 см. Найдите сторону  $BC$ .
23. Из точки к прямой проведены две наклонные. Длина одной из них равна 15 см, а ее проекция на эту прямую — 12 см. Найдите длину второй наклонной, если она образует с прямой угол  $45^\circ$ .
24. Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых равны 5 см и 7 см, а разность их проекций на эту прямую — 4 см. Найдите расстояние от точки до данной прямой.

25. Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых относятся как  $2 : 3$ , а длины их проекций на эту прямую равны  $2$  см и  $7$  см. Найдите длины наклонных.
26. Катеты прямоугольного треугольника относятся как  $3 : 4$ , а разность отрезков, на которые делит гипотенузу биссектриса прямого угла, равна  $10$  см. Найдите периметр треугольника.
27. Отношение боковой стороны к основанию равнобедренного треугольника равно  $5 : 6$ , а разность отрезков, на которые биссектриса угла при основании делит высоту, проведенную к основанию, равна  $6$  см. Найдите стороны треугольника.
28. В равнобокой трапеции  $ABCD$  известно, что  $AB = CD = 2$  см,  $BC = 6\sqrt{2}$  см,  $AD = 8\sqrt{2}$  см. Найдите углы трапеции.
29. Из точки, находящейся на расстоянии  $8$  см от прямой, проведены к ней две наклонные, образующие с прямой углы  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Найдите длины наклонных и их проекций на данную прямую.
30. Из точки, находящейся на расстоянии  $10$  см от прямой, проведены к ней две наклонные, образующие с прямой углы  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите расстояние между основаниями наклонных. Сколько решений имеет задача?
31. Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна  $17$  см, а высота, опущенная на основание, —  $5$  см.
32. Катет прямоугольного треугольника равен  $10$  см, а гипотенуза —  $26$  см. Найдите высоту треугольника, проведенную к гипотенузе.
33. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны  $9$  см и  $3\sqrt{2}$  см, а угол между ними равен: 1)  $45^\circ$ ; 2)  $150^\circ$ .
34. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны  $13$  см,  $14$  см и  $15$  см.
35. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, один из которых на  $3$  см больше другого. Две другие стороны треугольника равны  $14$  см и  $21$  см. Найдите площадь треугольника.
36. Стороны треугольника, одна из которых на  $8$  см больше другой, образуют угол  $120^\circ$ , а третья сторона равна  $28$  см. Найдите периметр треугольника.
37. Одна сторона треугольника равна  $35$  см, а две другие относятся как  $3 : 8$  и образуют угол  $60^\circ$ . Найдите неизвестные стороны треугольника.



38. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = c$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \gamma$ .  
Найдите стороны  $BC$  и  $AC$ .
39. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен  $\alpha$ , а биссектриса этого угла равна  $l$ . Найдите стороны треугольника.
40. Биссектриса острого угла параллелограмма делит его сторону в отношении  $2 : 3$ , считая от вершины тупого угла. Периметр параллелограмма равен 42 см. Найдите его стороны.
41. Найдите площадь параллелограмма, диагонали которого равны 16 см и 20 см, а одна из диагоналей перпендикулярна его стороне.
42. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 25 см, а разность диагоналей — 10 см.
43. Перпендикуляр, проведенный из вершины тупого угла ромба, делит сторону на отрезки длиной 7 см и 9 см, считая от вершины тупого угла. Найдите площадь ромба.
44. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 8 см и 14 см, а угол между ними —  $150^\circ$ .
45. Стороны параллелограмма равны 24 см и 30 см, а угол между высотами —  $30^\circ$ . Найдите площадь параллелограмма.
46. В равнобокой трапеции диагональ равна большему основанию и образует с ним угол  $38^\circ$ . Найдите углы трапеции.
47. В равнобокой трапеции с тупым углом  $120^\circ$  через вершину тупого угла проведена прямая, которая параллельна боковой стороне и отсекает от большего основания отрезок длиной 12 см. Найдите периметр трапеции, если ее меньшее основание равно 16 см.
48. Боковая сторона равнобокой трапеции равна 18 см, а большее основание — 32 см. Угол между ними равен  $60^\circ$ . Найдите среднюю линию трапеции.
49. Найдите площадь равнобокой трапеции, меньшее основание которой равно 10 см, боковая сторона — 6 см, а тупой угол равен  $120^\circ$ .
50. Найдите площадь равнобокой трапеции, основания которой равны 22 см и 50 см, а диагонали делят ее тупые углы пополам.
51. Около треугольника  $DEF$  описана окружность с центром в точке  $O$ . Найдите угол  $DOF$ , если: 1)  $\angle E = 38^\circ$ ; 2)  $\angle E = 148^\circ$ .
52. Найдите углы равнобедренного треугольника, вписанного в окружность, если его основание стягивает дугу, градусная мера которой  $192^\circ$ .

53. Точки  $D$  и  $B$  окружности лежат по одну сторону от диаметра  $AC$  (рис. 51). Найдите угол  $ABD$ , если  $\angle DAC = 52^\circ$ .

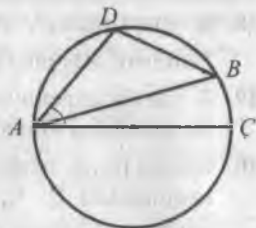


Рис. 51

54. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $A$  больше угла  $B$  на  $58^\circ$  и в 4 раза больше угла  $C$ . Найдите углы четырехугольника.

55. Боковая сторона равнобокой трапеции, в которую можно вписать окружность, равна 12 см. Найдите периметр трапеции.

56. Радиус окружности, вписанной в равнобокую трапецию, равен 8 см, а один из отрезков, на которые точка касания вписанной окружности делит боковую сторону, — 4 см. Найдите площадь трапеции.

57. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $BC = 5\sqrt{3}$  см,  $\angle A = 120^\circ$ . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

58. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а боковая сторона — 10 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

59. Длина дуги окружности равна  $8\pi$  см, а ее градусная мера —  $24^\circ$ . Найдите радиус окружности.

60. Дуга окружности, радиус которой 6 см, содержит  $240^\circ$ . Найдите радиус окружности, длина которой равна длине этой дуги.

61. Площадь сектора составляет  $\frac{8}{15}$  площади круга. Найдите градусную меру центрального угла, соответствующего данному сектору.

62. Стороны треугольника равны 26 см, 28 см и 30 см. Найдите площади его описанного и вписанного кругов.

63. Стороны двух правильных треугольников относятся как 4 : 7, а площадь большего из них равна  $98 \text{ см}^2$ . Найдите площадь меньшего треугольника.

64. Сторона квадрата равна 6 см. Найдите радиусы его вписанной и описанной окружностей.

65. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен 2 см. Найдите сторону квадрата и радиус вписанной в него окружности.

66. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен  $4\sqrt{3}$  см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, и сторону треугольника.

67. Вычислите площадь правильного восьмиугольника, вписанного в окружность, радиус которой 6 см.
68. Вершинами треугольника являются точки  $A(4; -2)$ ,  $B(-4; 4)$ ,  $C(-12; 10)$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.
69. На оси ординат найдите точку, равноудаленную от точек  $A(4; -5)$  и  $B(2; 3)$ .
70. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок  $AB$ , если  $A(-3; 9)$ ,  $B(5; -7)$ .

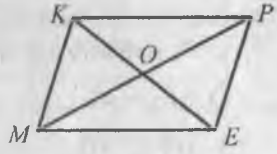


Рис. 52

71. Четырехугольник  $MKPE$  — параллелограмм (рис. 52). Укажите вектор, равный вектору: 1)  $\overline{KP}$ ; 2)  $\overline{PK}$ ; 3)  $\overline{KM}$ ; 4)  $\overline{MO}$ ; 5)  $\overline{PO}$ ; 6)  $\overline{OE}$ .
72. Четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм. Найдите: 1)  $\overline{AB} - \overline{DB} - \overline{CD}$ ; 3)  $\overline{AB} - \overline{CB} + \overline{CA}$ .  
2)  $\overline{CB} + \overline{CD} - \overline{BA} - \overline{DB}$ ;
73. Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  (рис. 53). Выразите векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{BC}$  через векторы  $\overline{AO} = \overline{m}$  и  $\overline{OD} = \overline{n}$ .
74. Даны точки  $M(0; 5)$  и  $N(-6; 0)$ . Найдите координаты точки  $K$  такой, что  $\overline{MK} - \overline{KN} = \vec{0}$ .
75. Найдите модуль вектора  $\overline{m} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$ , где  $\overline{a}(-4; 2)$ ;  $\overline{b}(1; -2)$ .
76. На сторонах  $AB$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  отмечены такие точки  $E$  и  $F$  соответственно, что  $AE = \frac{5}{6}AB$ ,  $BF = \frac{2}{3}BC$  (рис. 54). Выразите векторы  $\overline{DE}$  и  $\overline{DF}$  через векторы  $\overline{DA} = \overline{a}$  и  $\overline{DC} = \overline{b}$ .

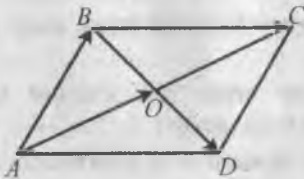


Рис. 53

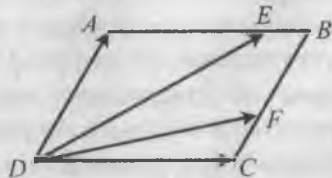


Рис. 54

77. На сторонах  $DF$  и  $EF$  треугольника  $DEF$  отмечены такие точки  $P$  и  $K$  соответственно, что  $DP : PF = 1 : 4$ ,  $EK : KF = 4 : 3$ . Выразите векторы  $\overline{EF}$ ,  $\overline{FD}$ ,  $\overline{DE}$ ,  $\overline{KD}$  и  $\overline{PE}$  через векторы  $\overline{DP} = \overline{m}$  и  $\overline{FK} = \overline{n}$ .
78. Найдите значение  $n$ , при котором векторы  $\overline{a}(n; -8)$  и  $\overline{b}(-4; -2)$  коллинеарны.
79. Диагонали квадрата  $ABCD$  со стороной 4 см пересекаются в точке  $O$ . Найдите скалярное произведение векторов:
- 1)  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ ;                      3)  $\overline{DA}$  и  $\overline{BD}$ ;                      5)  $\overline{DO}$  и  $\overline{CO}$ ;  
 2)  $\overline{DA}$  и  $\overline{AO}$ ;                      4)  $\overline{OA}$  и  $\overline{OC}$ ;                      6)  $\overline{BC}$  и  $\overline{AD}$ .
80. Найдите косинус угла между векторами  $\overline{a}(4; -1)$  и  $\overline{b}(-6; -8)$ .
81. Даны векторы  $\overline{c}(x; 6)$  и  $\overline{d}(3; -2)$ . При каком значении  $x$  векторы  $\overline{c}$  и  $\overline{d}$  перпендикулярны?
82. Даны векторы  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$ ,  $|\overline{a}| = 4$ ,  $|\overline{b}| = 5$ ,  $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 135^\circ$ . Найдите:
- 1)  $|\overline{a} - \overline{b}|$ ;                                      2)  $|\overline{a} + 3\overline{b}|$ .

### Аксиомы стереометрии и следствия из них

83. Можно ли утверждать, что:
- 1) любые три точки всегда лежат на одной прямой;  
 2) любые три точки всегда лежат в одной плоскости?
84. Сколько различных плоскостей можно провести через одну прямую?
85. Можно ли утверждать, что любая прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей данного треугольника, лежит в плоскости этого треугольника?
86. Может ли прямая проходить через центр окружности, но не иметь с окружностью общих точек?
87. Верно ли утверждение, что если через две прямые можно провести плоскость, то эти прямые параллельны?
88. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ . В плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  проведены соответственно прямые  $m$  и  $n$ , которые пересекаются. Где находится точка их пересечения?

89. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $m$ . В плоскости  $\alpha$  проведена прямая  $a$ , пересекающая прямую  $m$ . Через прямую  $a$  проведена плоскость  $\gamma$ , пересекающая плоскость  $\beta$  по прямой  $b$ . Докажите, что прямые  $a$  и  $b$  пересекаются.
90. Через прямую  $a$  и точку  $A$  можно провести две различные плоскости. Какой вывод можно сделать?
91. Точка  $A$  принадлежит плоскости  $\alpha$ . Докажите, что через точку  $A$  можно провести плоскость, не совпадающую с плоскостью  $\alpha$ .
92. Среди точек  $A, B, C$  и  $D$  никакие три не лежат на одной прямой. Могут ли эти точки лежать в одной плоскости?
93. В плоскости  $\alpha$  лежат две параллельные прямые. Докажите, что существует плоскость, отличная от плоскости  $\alpha$ , которая пересекает две данные параллельные прямые.
94. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $c$ . Докажите, что существует плоскость, которая пересекает прямую  $c$  и плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ .
95. Прямая  $a$  принадлежит плоскости  $\alpha$ . Докажите, что существует прямая, которая не пересекает прямую  $a$  и не лежит с ней в одной плоскости.
96. Точки  $A, B, C$  и  $D$  расположены в пространстве так, что диагонали четырехугольника  $ABCD$  пересекаются. Докажите, что указанные точки лежат в одной плоскости.
97. Через точку  $A$  проведены две прямые, пересекающие каждую из прямых  $a$  и  $b$  в точках, отличных от точки  $A$ . Докажите, что прямые  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости.
98. Даны прямая  $a$  и точка  $A$  вне ее. Докажите, что все прямые, которые проходят через точку  $A$  и пересекают прямую  $a$ , лежат в одной плоскости.
99. Прямые  $a$  и  $b$  не лежат в одной плоскости. Прямая  $c$  пересекает прямые  $a$  и  $b$ . Существует ли прямая, пересекающая прямые  $a, b$  и  $c$  в трех различных точках?
100. Прямые  $MA, MB$  и  $MC$  пересекают плоскость  $\alpha$  в точках  $A, B$  и  $C$ , не лежащих на одной прямой. Существует ли прямая, пересекающая прямые  $MA, MB$  и  $MC$  в трех различных точках?
101. Вершина  $D$  плоского четырехугольника  $ABCD$  принадлежит плоскости  $\alpha$ , а остальные вершины лежат вне этой плоскости. Продолжения стороны  $BC$  и диагонали  $AC$  пересекают плоскость  $\alpha$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Докажите, что точки  $D, M$  и  $N$  лежат на одной прямой.

102. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ . Треугольник  $ABC$  расположен так, что две его вершины  $A$  и  $C$  принадлежат плоскости  $\alpha$  (прямые  $AC$  и  $a$  не параллельны), а вершина  $B$  — плоскости  $\beta$ . Постройте линии пересечения плоскости  $ABC$  с плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .
103. Две противоположные вершины трапеции и точка пересечения диагоналей принадлежат плоскости  $\alpha$ . Принадлежат ли плоскости  $\alpha$  две другие вершины трапеции?
104. Можно ли утверждать, что все точки окружности принадлежат плоскости, если:
- 1) хорда и центр окружности принадлежат плоскости;
  - 2) две хорды окружности принадлежат плоскости?
105. Сколько плоскостей можно провести через три точки, лежащие на одной прямой?
106. Любые четыре точки фигуры принадлежат одной плоскости. Докажите, что вся фигура принадлежит этой плоскости.
107. Основания биссектрис треугольника принадлежат плоскости  $\alpha$ . Принадлежат ли плоскости  $\alpha$  вершины треугольника?
108. Вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  лежат по одну сторону от плоскости  $\alpha$ , а вершина  $C$  — по другую. Докажите, что точки пересечения сторон  $BC$  и  $AC$  и медианы  $CM$  с плоскостью  $\alpha$  лежат на одной прямой.

### Построение сечений многогранников

109. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки: 1)  $A$ ,  $C$  и  $B_1$ ; 2)  $B_1$ ,  $D_1$  и середину ребра  $AA_1$ .
110. Точка  $M$  — середина ребра  $SB$  пирамиды  $SABC$ . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $M$  и прямую  $AC$ .
111. Ребро куба равно  $a$ . Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины трех ребер, выходящих из одной вершины, и вычислите его периметр и площадь.
112. Постройте точку пересечения прямой с плоскостью основания четырехугольной пирамиды, если эта прямая проходит через две точки, принадлежащие: 1) боковым ребрам одной грани; 2) боковым ребрам, не принадлежащим одной грани; 3) боковому ребру и боковой грани, которой это ребро не принадлежит; 4) двум

соседним боковым граням; 5) двум противоположным боковым граням.

113. Постройте сечение треугольной пирамиды  $SABC$  (рис. 55) плоскостью, которая проходит через точки  $T$ ,  $F$  и  $E$ , принадлежащие ребрам  $SA$ ,  $AB$  и  $BC$  соответственно.

114. Постройте сечение прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, которая проходит через точки  $A$  и  $B$  и точку  $M$ , принадлежащую ребру  $DD_1$ , если прямые  $AB$  и  $CD$  не параллельны.

115. Постройте сечение прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  (рис. 56) плоскостью, проходящей через точку  $C$  и точки  $P$  и  $M$ , которые лежат на ребрах  $BB_1$  и  $A_1 B_1$  соответственно.

116. Постройте сечение прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 57) плоскостью, проходящей через вершины  $B_1$  и  $C$  и точку  $K$  на ребре  $DD_1$ .

117. В пирамиде  $SABC$  (рис. 58) точка  $M$  принадлежит грани  $ASC$ , точка  $N$  — грани  $ASB$ , точка  $K$  — ребру  $BC$ . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ .

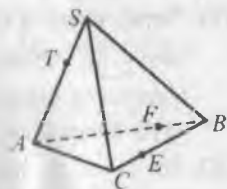


Рис. 55

### Параллельные прямые в пространстве.

#### Скрещивающиеся прямые

118. Прямые  $a$  и  $b$  не параллельны, прямая  $c$  параллельна прямой  $a$ . Можно ли утверждать, что прямая  $b$  пересекает прямую  $c$ :

1) на плоскости;

2) в пространстве?

119. Точки  $A$  и  $B$  принадлежат прямой  $a$ , точки  $C$  и  $D$  — прямой  $b$ , причем  $a \parallel b$ . Докажите, что прямые  $AC$  и  $BD$  не являются скрещивающимися.

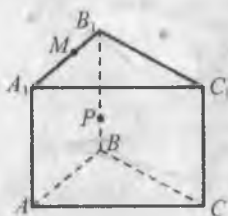


Рис. 56

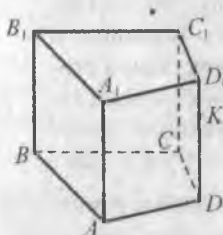


Рис. 57

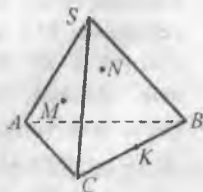


Рис. 58

120. Точка  $A$  не лежит в плоскости треугольника  $DEF$ . Докажите, что прямые  $AD$  и  $EF$  скрещивающиеся.
121. Через точку  $A$  прямой  $l$  к ней проведен перпендикуляр  $AA_1$ . Через точку  $A_1$  проведена прямая  $m$ , перпендикулярная прямой  $AA_1$ . Можно ли утверждать, что прямые  $l$  и  $m$  параллельны:  
1) на плоскости; 2) в пространстве?
122. На одной из двух пересекающихся прямых выбрали точку и через нее провели прямую, параллельную второй прямой. Докажите, что эти три прямые лежат в одной плоскости.
123. Может ли каждая из двух скрещивающихся прямых пересекать каждую из двух пересекающихся прямых?
124. Прямые  $a$  и  $b$  скрещивающиеся, прямая  $c$  параллельна прямой  $a$ . Верно ли утверждение, что прямые  $b$  и  $c$  скрещивающиеся?
125. Точка  $D$  не принадлежит плоскости треугольника  $ABC$ , точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$  — середины отрезков  $AD$ ,  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что  $MN \parallel PQ$ .
126. Две скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  соответственно параллельны прямым  $m$  и  $n$ . Верно ли утверждение, что прямые  $m$  и  $n$  скрещивающиеся?
127. Через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  проведена прямая  $a$ , не принадлежащая плоскости треугольника. Докажите, что прямые  $a$  и  $BM$  — скрещивающиеся, где точка  $M$  — середина стороны  $AC$ .
128. Три плоскости попарно пересекаются по прямым  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Докажите, что если эти плоскости не имеют общей точки, то  $a \parallel b \parallel c$ .
129. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  не лежат в одной плоскости, точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  и  $F$  — середины отрезков  $AB$ ,  $BD$ ,  $DC$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что отрезки  $MK$  и  $NF$  пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
130. Треугольник  $ABC$  не пересекает плоскость  $\alpha$ . Через его вершины и середины  $M$  и  $N$  соответственно сторон  $AB$  и  $AC$  проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $M_1$ ,  $N_1$  (рис. 59). Найдите длины отрезков  $BB_1$  и  $CC_1$ , если  $AA_1 = 9$  см,  $NN_1 = 8$  см,  $MM_1 = 10$  см.

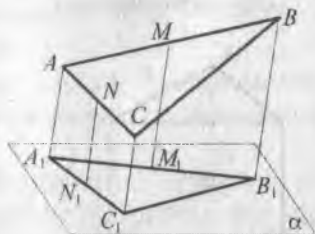


Рис. 59



**Параллельность прямой и плоскости**

131. Через точку  $A$ , не принадлежащую плоскости  $\alpha$ , проведена прямая, параллельная плоскости  $\alpha$ . Сколько существует в плоскости  $\alpha$  прямых, параллельных прямой  $a$ ?
132. Прямые  $a$  и  $b$  параллельны плоскости  $\alpha$ . Могут ли прямые  $a$  и  $b$  пересекаться?
133. Прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ . Верно ли утверждение:
- 1) прямая  $a$  не пересекает ни одной прямой, лежащей в плоскости  $\alpha$ ;
  - 2) прямая  $a$  параллельна любой прямой, лежащей в плоскости  $\alpha$ ;
  - 3) прямая  $a$  параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости  $\alpha$ ?
134. Докажите, что если прямая  $a$  параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна прямой их пересечения.
135. Отрезок  $AB$  лежит в плоскости  $\alpha$ . Точка  $M$  не принадлежит плоскости  $\alpha$ . Точки  $K$  и  $P$  — середины отрезков  $MA$  и  $MB$  соответственно. Докажите, что прямая  $KP$  параллельна плоскости  $\alpha$ .
136. Прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$ . Лежит ли в плоскости  $\alpha$  хотя бы одна прямая, параллельная прямой  $a$ ?
137. Прямые  $a$  и  $b$  скрещивающиеся. Сколько существует плоскостей, которые содержат прямую  $b$  и параллельны прямой  $a$ ?
138. Через параллельные прямые  $a$  и  $b$  проведены две плоскости, пересекающиеся по прямой  $c$ . Докажите, что прямые  $a$  и  $b$  параллельны прямой  $c$ .
139. Через середину  $M$  стороны  $AB$  треугольника  $ABC$  проведена плоскость, которая параллельна прямой  $AC$  и пересекает сторону  $BC$  в точке  $N$ . Докажите, что отрезок  $MN$  — средняя линия треугольника  $ABC$ .
140. Плоскость, параллельная стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $A_1$  и  $C_1$  соответственно. Найдите отношение  $AA_1 : AB$ , если  $A_1C_1 = 6$  см,  $AC = 9$  см.
141. Прямые  $a$  и  $b$  принадлежат соответственно параллельным плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ . Докажите, что через любую точку, не принадлежащую данным плоскостям, можно провести плоскость, параллельную прямым  $a$  и  $b$ .

142. Вне плоскости параллелограмма  $ABCD$  выбрали точку  $E$ . На отрезке  $BE$  отметили точку  $F$  так, что  $BF : FE = 4 : 1$  (рис. 60). Постройте точку  $M$  пересечения плоскости  $AFD$  и прямой  $CE$  и найдите длину отрезка  $FM$ , если  $BC = 12$  см.

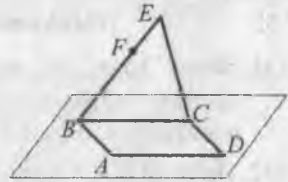


Рис. 60

143. Постройте сечение треугольной пирамиды  $SABC$  плоскостью, которая параллельна прямой  $AB$  и проходит через вершину  $C$  и точку на ребре  $SB$ .
144. Постройте сечение пирамиды  $SABC$  (рис. 61) плоскостью, которая проходит через точку  $P$  на ребре  $SB$  и параллельна прямым  $BC$  и  $SA$ .
145. Постройте сечение призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, которая проходит через точки  $E$  и  $F$ , принадлежащие соответственно ребрам  $A_1 D_1$  и  $B_1 C_1$ , и параллельна прямой  $AA_1$ .

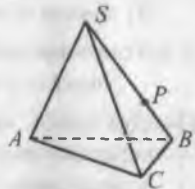


Рис. 61

### Параллельные плоскости. Свойства параллельных плоскостей

146. Две плоскости параллельны одной и той же прямой. Верно ли утверждение, что эти плоскости параллельны?
147. Каждая из двух данных плоскостей параллельна каждой из двух данных пересекающихся прямых. Параллельны ли эти плоскости?
148. Основания трапеции параллельны плоскости  $\alpha$ . Можно ли утверждать, что плоскость трапеции и плоскость  $\alpha$  параллельны?
149. Точка  $D$  лежит вне плоскости треугольника  $ABC$ . На отрезках  $BA$ ,  $BC$  и  $BD$  выбраны соответственно точки  $K$ ,  $F$  и  $E$  так, что  $BK : BA = BF : BC = BE : BD$ . Докажите, что плоскости  $KEF$  и  $ADC$  параллельны.
150. Даны параллелограмм  $ABCD$  и точка  $S$  вне его плоскости. Плоскость  $\beta$  пересекает прямые  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ ,  $SD$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  соответственно так, что  $AB \parallel A_1 B_1$ ,  $AD \parallel A_1 D_1$ . Докажите, что четырехугольник  $A_1 B_1 C_1 D_1$  — параллелограмм.
151. Параллельные прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекают плоскость  $\alpha$  в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что любая прямая, которая параллельна плоскости  $\alpha$  и пересекает каждую из прямых  $l_1$  и  $l_2$ , пересекает эти прямые в точках, расстояние между которыми равно  $AB$ .

152. Сторона  $AB$  треугольника  $ABC$  лежит в плоскости  $\alpha$ . Плоскость  $\beta$  параллельна плоскости  $\alpha$  и пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Найдите длину отрезка  $A_1B_1$ , если  $AB = 12$  см,  $CB_1 : B_1B = 2 : 3$ .
153. Через противоположные стороны четырехугольника  $ABCD$  проведены попарно параллельные плоскости. Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм.
154. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. Через прямую  $a$  плоскости  $\alpha$  проведены плоскости  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , пересекающие плоскость  $\beta$  по прямым  $b_1$  и  $b_2$  соответственно. Докажите, что  $b_1 \parallel b_2$ .
155. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. Отрезки  $AB$  и  $CD$ , лежащие в этих плоскостях, не параллельны. Могут ли отрезки  $AD$  и  $BC$  быть параллельными?
156. Плоскость  $\alpha$  параллельна плоскости  $\beta$ , плоскость  $\beta$  параллельна плоскости  $\gamma$ . Докажите, что плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$  параллельны.
157. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. В плоскости  $\alpha$  лежит прямая  $a$ . Через точку  $B$  плоскости  $\beta$  проведена прямая  $b$ , параллельная прямой  $a$ . Докажите, что прямая  $b$  лежит в плоскости  $\beta$ .
158. Точка  $M$  — середина ребра  $BC$  пирамиды  $SABC$ . Постройте сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через точку  $M$  и параллельна плоскости  $ASC$ , и вычислите площадь сечения, если  $SA = 24$  см,  $SC = 10$  см,  $AC = 26$  см.
159. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, которая проходит через точки  $M$ ,  $P$  и  $K$ , принадлежащие соответственно ребрам  $C_1 D_1$ ,  $BC$  и  $DD_1$ .

160. Постройте сечение прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, которая проходит через точки  $M$ ,  $N$  и  $P$ , принадлежащие ребрам  $BC$ ,  $A_1 B_1$  и  $DD_1$  соответственно.

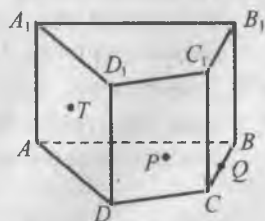


Рис. 62

161. Постройте сечение прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 62) плоскостью, которая проходит через точки  $T$  и  $P$ , принадлежащие граням  $AA_1 D_1 D$  и  $DD_1 C_1 C$  соответственно, и точку  $Q$  на ребре  $BC$ .

**Параллельное проектирование.  
Изображение фигур в стереометрии**

162. Какие геометрические фигуры могут быть параллельными проекциями: 1) отрезка; 2) двух параллельных отрезков; 3) параллелограмма?
163. Могут ли две параллельные прямые проектироваться: 1) в две пересекающиеся прямые; 2) в параллельные прямые; 3) в одну прямую; 4) в прямую и точку, принадлежащую этой прямой; 5) в прямую и точку, не принадлежащую этой прямой?
164. Как должны быть расположены относительно направления проектирования две пересекающиеся прямые, чтобы они проектировались в прямую и точку, ей принадлежащую?
165. Можно ли при параллельном проектировании ромба получить: 1) трапецию; 2) квадрат?
166. Можно ли при параллельном проектировании выпуклого четырехугольника с углами  $20^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $160^\circ$ ,  $80^\circ$  получить ромб?
167. Может ли параллельной проекцией двух равных отрезков быть два неравных отрезка?
168. Может ли параллельной проекцией луча быть: 1) отрезок; 2) прямая; 3) точка?
169. В каком случае отрезок проектируется: 1) в точку; 2) в равный ему отрезок?
170. При каких условиях квадрат проектируется в ромб?
171. Параллелограмм  $ABCD$  — изображение ромба с острым углом  $60^\circ$  (рис. 63). Постройте изображение высоты, опущенной из вершины тупого угла  $B$  на сторону  $AD$ .
172. Четырехугольник  $ABCD$  — проекция ромба (рис. 64),  $M$  — точка на стороне  $BC$ . Постройте изображения перпендикуляров, опущенных из точки  $M$  на диагонали ромба.
173. Треугольник  $A_1B_1C_1$  — изображение равнобедренного треугольника  $ABC$  (рис. 65). Постройте изображение точки пересечения биссектрис этого треугольника, если  $AB : BC : AC = 5 : 5 : 8$ .



Рис. 63



Рис. 64

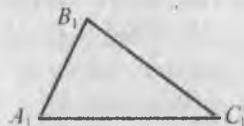


Рис. 65

174. Точки  $M_1, N_1, P_1$  являются изображениями вершин  $A$  и  $B$  и середины стороны  $CD$  параллелограмма  $ABCD$ . Постройте изображение параллелограмма. Сколько решений имеет задача?

175. Треугольник  $ABC$  — параллельная проекция правильного треугольника, на сторонах которого в его плоскости построены в свою очередь правильные треугольники. Постройте параллельные проекции этих треугольников.

176. На изображении окружности (рис. 66) постройте изображение ее центра.



Рис. 66

177. Дана параллельная проекция окружности с центром  $O$ . Постройте параллельную проекцию квадрата, вписанного в эту окружность.

178. Точки  $A, B, O$ , не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями двух вершин квадрата и его центра. Постройте изображение квадрата. Сколько решений имеет задача?

179. Дано изображение треугольника и двух его высот. Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника.

180. Стороны прямоугольника относятся как  $3 : 1$ . Постройте изображение перпендикуляра, проведенного из вершины прямоугольника к его диагонали.

181. Точки  $A_1, B_1, C_1$  — параллельные проекции точек  $A, B, C$  на плоскость  $\alpha$  (рис. 67), прямая  $p_1$  — проекция прямой  $p$ , лежащей в плоскости  $ABC$ , на плоскость  $\alpha$ . Постройте прямую  $p$ .

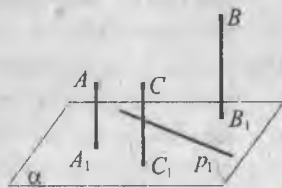


Рис. 67

### Перпендикулярность прямой и плоскости

182. Может ли прямая быть перпендикулярной только одной прямой плоскости?

183. Через точку  $M$ , лежащую вне плоскости треугольника  $ABC$ , проведена прямая  $MA$ , перпендикулярная прямым  $AB$  и  $AC$ . Докажите, что прямая  $MA$  перпендикулярна медиане  $AN$  треугольника  $ABC$ .

184. Как расположена относительно плоскости круга прямая, перпендикулярная двум его диаметрам?

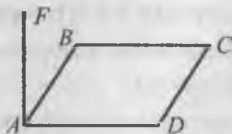


Рис. 68

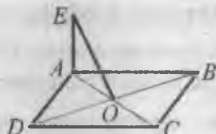


Рис. 69

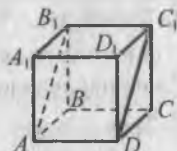


Рис. 70

185. На рисунке 68 изображен прямоугольник  $ABCD$ ,  $FA \perp AD$ . Укажите прямую и плоскость, которые перпендикулярны друг другу.
186. Четырехугольник  $ABCD$  — ромб (рис. 69), прямая  $AE$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Докажите, что  $EO \perp DB$ .
187. На рисунке 70 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что четырехугольник  $AB_1 C_1 D$  — прямоугольник.
188. Через одну сторону ромба проходит плоскость, перпендикулярная соседней стороне. Докажите, что этот ромб — квадрат.
189. Точка  $M$  лежит вне плоскости равностороннего треугольника  $ABC$  (рис. 71),  $MA = MB = MC$ , точка  $O$  — центр правильного треугольника. Докажите, что прямая  $MO$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .
190. Точка  $M$  лежит вне плоскости равностороннего треугольника  $ABC$  и равноудалена от всех его вершин, точка  $N$  — середина стороны  $AB$ . Докажите, что прямая  $AB$  перпендикулярна плоскости  $NMC$ .
191. Прямая  $AO$  перпендикулярна плоскости окружности с центром  $O$ . Точка  $B$  лежит на окружности. Найдите радиус окружности, если  $AB = 12$  см,  $\angle ABO = 30^\circ$ .

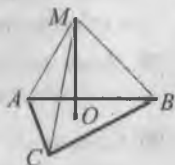


Рис. 71

192. Через вершину  $A$  правильного треугольника  $ABC$  проведен перпендикуляр  $AK$  к плоскости треугольника (рис. 72). Найдите расстояние от точки  $K$  до вершин треугольника, если  $BC = 12\sqrt{3}$  см,  $\angle KBA = 30^\circ$ .

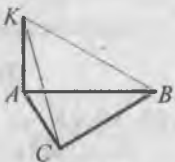


Рис. 72

193. Через точку  $M$  пересечения диагоналей прямоугольника  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $SM$  и точка  $S$  соединена с серединой  $F$  стороны  $CD$  (рис. 73). Найдите длину отрезка  $SD$ , если  $AB = 10$  см,  $BC = 24$  см,  $\angle MSF = 60^\circ$ .

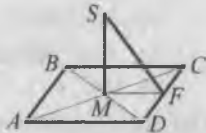


Рис. 73

194. Прямая  $SA$  перпендикулярна плоскости прямоугольника  $ABCD$ ,  $AD = 6$  см,  $CD = 8$  см,  $\angle SCA = 30^\circ$ . Найдите  $SA$ .
195. Точка  $M$  лежит вне плоскости треугольника  $ABC$  и равноудалена от его вершин. Как расположена точка  $O$  — проекция точки  $M$  на плоскость  $ABC$  — относительно треугольника  $ABC$ , если этот треугольник прямоугольный?
196. Плоскость  $\alpha$  проходит через середины сторон  $AD$  и  $BC$  четырехугольника  $ABCD$  и перпендикулярна прямым  $AD$  и  $BC$ . Докажите, что если  $BC = AD$ , то четырехугольник  $ABCD$  — прямоугольник.
197. Могут ли две пересекающиеся плоскости быть перпендикулярными одной прямой?
198. Через вершину  $B$  прямоугольника  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $SB$ . Известно, что  $SA = a$ ,  $SC = b$ ,  $SD = c$ . Найдите  $SB$ .
199. Через вершину  $B$  равнобедренного треугольника  $ABC$  проведен перпендикуляр  $SB$  к его плоскости длиной 4 см. Найдите  $\angle SMB$ , где точка  $M$  — середина стороны  $AC$ , если  $AB = BC = 5$  см,  $AC = 6$  см.
200. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 18 см. Точка  $M$  находится на расстоянии 15 см от всех его вершин. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости треугольника.
201. Прямая  $BK$  перпендикулярна плоскости ромба  $ABCD$  (рис. 74),  $O$  — точка пересечения диагоналей ромба. Докажите, что прямая  $AC$  перпендикулярна плоскости  $KBO$ .
202. Даны ромб  $ABCD$  и точка  $S$  вне его плоскости такая, что  $SA = SC$  и  $SB = SD$ . Найдите угол  $BSD$ , если  $SB = AD$  и  $\angle BAD = 60^\circ$ .
203. Из точки  $M$ , не принадлежащей плоскости прямоугольника  $ABCD$ , проведен перпендикуляр  $AM$  к его плоскости. Через точку  $O$  пересечения диагоналей прямоугольника проведена прямая  $OK$ , параллельная прямой  $AM$ . Найдите расстояние от точки  $K$  до вершин прямоугольника, если  $AB = 3$  см,  $BC = 4$  см,  $OK = 6$  см.
204. Концы отрезка, расположенного по одну сторону от плоскости, удалены от нее на 9 см и 11 см. Найдите расстояние от середины отрезка до этой плоскости.
205. Через вершину  $B$  квадрата  $ABCD$  проведена прямая  $BF$ , перпендикулярная прямым  $AB$  и  $BD$ . Докажите, что прямая  $AC$  перпендикулярна плоскости  $bfd$ .

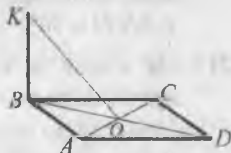


Рис. 74

206. Через вершины  $B$  и  $D$  ромба  $ABCD$  проведены перпендикуляры  $BM$  и  $DN$  к плоскости ромба. Докажите, что плоскость  $ABM$  параллельна плоскости  $CDN$ .

### Перпендикуляр и наклонная

207. На рисунке 75 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Укажите проекции отрезка  $BD_1$  на плоскости граней куба.

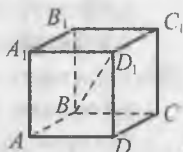


Рис. 75

208. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная длиной 12 см. Найдите длину перпендикуляра, если длина проекции наклонной равна 7 см.
209. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Длина проекции наклонной равна 6 см. Найдите длины перпендикуляра и наклонной, если угол между перпендикуляром и наклонной равен  $30^\circ$ .
210. Из точки  $M$  к плоскости  $\alpha$  проведены наклонные  $MN$  и  $MK$ , а также перпендикуляр  $MF$ . Найдите  $MF$  и  $MK$ , если  $MN = 20$  см,  $NF = 16$  см,  $KF = 5$  см.
211. Из точки  $M$  к плоскости  $\alpha$  проведены наклонные  $MK$  и  $MC$  и перпендикуляр  $MD$ . Найдите длины наклонных, если  $KD = 6$  см,  $\angle MCD = 30^\circ$ ,  $\angle MKD = 60^\circ$ .
212. Из точки  $M$  к плоскости  $\alpha$  проведены наклонные  $MN$  и  $MK$ , длины которых относятся как 25 : 26. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\alpha$ , если проекции наклонных  $MN$  и  $MK$  равны соответственно 14 см и 20 см.

213. Докажите, что если проекции двух наклонных, проведенных к плоскости из одной точки, равны, то равны и наклонные.

214. В четырехугольнике  $ABCD$  известно, что  $AB = AD$  (рис. 76). Прямая  $SA$  перпендикулярна плоскости четырехугольника,  $\angle DSC = \angle BSC$ . Докажите, что  $BC = CD$ .

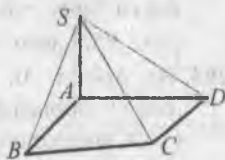


Рис. 76

215. Прямая  $FB$  перпендикулярна плоскости треугольника  $ABC$  (рис. 77). Точка  $F$  равноудалена от точек  $A$  и  $C$ . Найдите длину отрезка  $FB$ , если  $AC = 6$  см,  $\angle CBA = 120^\circ$ ,  $\angle CFA = 90^\circ$ .

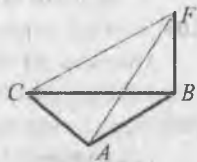


Рис. 77



216. Точка  $M$  равноудалена от вершин ромба  $ABCD$ . Докажите, что  $ABCD$  — квадрат.
217. Точка  $M$  находится на расстоянии 10 см от вершин равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) и на расстоянии 6 см от его плоскости. Найдите стороны треугольника, если  $\angle BAC = 30^\circ$ .
218. В прямоугольнике  $ABCD$  известно, что  $AB = 2BC$ . Прямая  $FB$  перпендикулярна плоскости прямоугольника,  $FB = 7$  см,  $FD = 12$  см. Найдите стороны прямоугольника.
219. Из точки, лежащей вне плоскости, проведены к ней две наклонные, проекции которых равны 9 см и 5 см. Найдите длины наклонных, если их разность равна 2 см.
220. Два отрезка длиной 10 см и 17 см упираются своими концами в параллельные плоскости. Найдите расстояние между плоскостями, если сумма проекций этих наклонных на одну из плоскостей равна 21 см.
221. Из точки  $M$  к плоскости  $\alpha$  проведены две равные наклонные, угол между которыми равен  $90^\circ$ . Найдите угол между наклонными и их проекциями на плоскость  $\alpha$ , если угол между проекциями наклонных равен  $120^\circ$ .
222. Из точки  $M$  к плоскости  $\alpha$  проведены наклонные  $MA$  и  $MB$  и перпендикуляр  $MC$ ,  $MA = 10$  см,  $MC = 8$  см,  $AB = \sqrt{316}$  см,  $\angle ACB = 120^\circ$ . Найдите длину наклонной  $MB$ .
223. Через вершину  $C$  треугольника  $ABC$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная стороне  $AB$ . Расстояние от прямой  $AB$  до плоскости  $\alpha$  равно 6 см, а проекции сторон  $CA$  и  $CB$  на эту плоскость равны 4 см и 8 см соответственно. Найдите медиану  $CM$  треугольника  $ABC$ , если  $AB = 10$  см.
224. Из точки  $M$  к плоскости  $\alpha$  проведены перпендикуляр  $MA$  и наклонные  $MB$  и  $MC$ , причем  $MA^2 = AC \cdot AB$ . Докажите, что  $\angle AMB + \angle AMC = 90^\circ$ .

**Теорема о трех перпендикулярах**

225. На рисунке 78 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что прямая  $CO$  перпендикулярна прямой  $A_1 B$ .

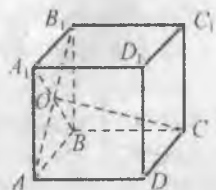


Рис. 78

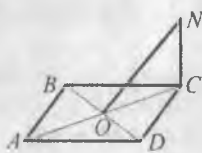


Рис. 79

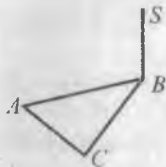


Рис. 80

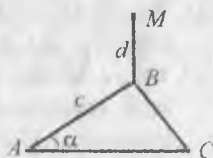


Рис. 81

226. На рисунке 79 изображен квадрат  $ABCD$ , прямая  $NC$  перпендикулярна его плоскости. Докажите, что прямые  $BD$  и  $NO$  перпендикулярны.
227. К плоскости равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) провели перпендикуляр  $SB$  (рис. 80). Найдите расстояние от точки  $S$  до прямой  $AC$ , если  $AC = c$ ,  $BC = b$ ,  $SB = a$ .
228. Точка  $S$  принадлежит перпендикуляру к плоскости треугольника, проходящему через точку пересечения его биссектрис. Докажите, что точка  $S$  равноудалена от сторон треугольника.
229. Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $MB$ . Прямая, проходящая через точку  $M$ , перпендикулярна отрезку  $AC$  и пересекает этот отрезок в его середине. Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
230. Через вершину угла  $B$  треугольника  $ABC$  проведен перпендикуляр  $MB$  к его плоскости (рис. 81). Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $AC$ , если  $AB = c$ ,  $MB = d$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .
231. Точка  $M$  — центр равностороннего треугольника  $ABC$  (рис. 82). Прямая  $FM$  перпендикулярна плоскости треугольника. Постройте перпендикуляры, опущенные из точки  $F$  на стороны треугольника.
232. К плоскости прямоугольника  $ABCD$  проведен перпендикуляр  $FK$  (рис. 83). Проведите перпендикуляр из точки  $F$  к прямой  $AB$ .
233. Из точки  $M$  к плоскости квадрата  $ABCD$  проведен перпендикуляр  $MN$  (рис. 84). Постройте перпендикуляр, проведенный из точки  $M$  к прямой  $AC$ .



Рис. 82

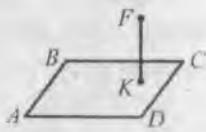


Рис. 83

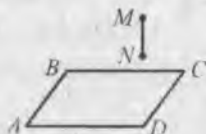


Рис. 84

234. Точка  $N$  принадлежит плоскости правильного шестиугольника  $ABCDEF$  (рис. 85). К плоскости шестиугольника проведен перпендикуляр  $MN$ . Постройте перпендикуляр, проведенный из точки  $M$  к прямой  $CD$ .

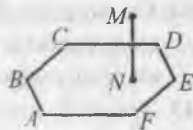


Рис. 85

235. Через вершину прямого угла  $B$  прямоугольного треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $BK$  длиной 7 см. Найдите расстояние от точки  $K$  до прямой  $AC$ , если  $AC = 8\sqrt{2}$  см,  $\angle BAC = 45^\circ$ .
236. Через точку  $O$  пересечения диагоналей ромба  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $OF$  длиной 2 см. Найдите расстояние от точки  $F$  до сторон ромба, если  $AC = 16$  см,  $BD = 12$  см.
237. Через вершину угла  $C$  треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $CN$ . Расстояние от точки  $N$  до прямой  $AB$  равно 26 см. Найдите расстояние от точки  $N$  до плоскости треугольника, если  $AC = 30$  см,  $AB = 28$  см,  $BC = 26$  см.
238. Через вершину  $B$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) к плоскости треугольника проведен перпендикуляр  $BT$  длиной 5 см. Найдите расстояние от точки  $T$  до стороны  $AC$ , если  $AC = 8$  см,  $AB = 6$  см.
239. В треугольник  $ABC$  вписана окружность с центром  $O$ . Через точку  $O$  к плоскости треугольника проведен перпендикуляр  $FO$ . Точка  $F$  удалена от стороны  $AB$  треугольника на 5 см. Найдите длину отрезка  $FO$ , если  $AB = 15$  см,  $AC = 12$  см,  $BC = 9$  см.
240. Через центр  $O$  окружности, вписанной в правильный треугольник, к плоскости треугольника проведен перпендикуляр  $OD$  длиной 6 см. Точка  $D$  удалена от сторон треугольника на расстояние 14 см. Найдите сторону треугольника.
241. Основания равнобокой трапеции равны 2 см и 14 см. Через центр  $O$  окружности, вписанной в эту трапецию, проведен перпендикуляр  $OK$  к плоскости трапеции,  $OK = 6$  см. Найдите расстояние от точки  $K$  до сторон трапеции.
242. Диагонали ромба равны 60 см и 80 см. Точка  $M$  удалена от каждой из сторон ромба на 26 см. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости ромба.
243. Точка  $M$  удалена от каждой из сторон треугольника  $ABC$  на 10 см, а от его плоскости — на 6 см. Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если его площадь равна  $96$  см<sup>2</sup>.

244. Сторона ромба равна  $a$ , а один из углов равен  $\alpha$ . Точка  $M$  удалена от плоскости ромба на расстояние  $b$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до сторон ромба, если она равноудалена от них.
245. Точка  $S$  находится на одинаковом расстоянии от сторон угла. Докажите, что проекция точки  $S$  на плоскость данного угла принадлежит его биссектрисе.
246. Стороны прямоугольника равны 12 см и 16 см. Через середину  $F$  меньшей стороны к плоскости прямоугольника проведен перпендикуляр  $FT$  длиной 2 см. Найдите расстояние от точки  $T$  до диагоналей прямоугольника.
247. Через вершину  $C$  ромба  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $CF$ . Точка  $F$  удалена от стороны  $AB$  на 25 см. Найдите расстояние от точки  $F$  до плоскости ромба, если диагонали ромба равны 30 см и 40 см.
248. Из точки  $S$  к плоскости  $\pi$  проведены перпендикуляр  $SF$  и наклонная  $SK$ , образующая со своей проекцией угол  $\gamma$ . Через точку  $K$  в плоскости  $\pi$  проведена прямая  $a$ , образующая с наклонной  $SK$  угол  $\varphi$ . Найдите угол между прямыми  $FK$  и  $a$ .
249. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 18$  см,  $BC = 26$  см,  $AC = 21$  см. Через вершину  $A$  треугольника проведена наклонная, образующая с лучами  $AC$  и  $AB$  равные углы. Проекция наклонной пересекает сторону  $BC$  в точке  $F$ . Найдите длины отрезков  $BF$  и  $CF$ .
250. Основания трапеции равны 8 см и 12 см. Через меньшее основание трапеции проведена плоскость, удаленная на 4 см от большего основания. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до данной плоскости.

### Перпендикулярные плоскости

251. Верно ли утверждение, что если плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $\beta$ , то любая прямая, перпендикулярная плоскости  $\alpha$ , не имеет общих точек с плоскостью  $\beta$ ?
252. Верно ли утверждение, что если прямая  $a$  и плоскость  $\alpha$  перпендикулярны плоскости  $\beta$ , то прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ ?
253. Докажите, что если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то линия их пересечения также перпендикулярна этой плоскости.
254. Точка  $D$  равноудалена от вершин  $A$  и  $C$  равнобедренного треугольника  $ABC$ ,  $AB = BC$ . Точка  $M$  — середина стороны  $AC$ . Докажите, что плоскости  $ABC$  и  $BDM$  перпендикулярны.

255. Два равносторонних треугольника  $ABC$  и  $ABC_1$  имеют общую сторону  $AB$ , длина которой равна 10 см. Плоскости этих треугольников перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами  $C$  и  $C_1$ .
256. Точка  $M$  равноудалена от сторон ромба  $ABCD$ . Докажите, что плоскости  $AMC$  и  $BMD$  перпендикулярны.
257. Точка  $S$  равноудалена от вершин равностороннего треугольника  $ABC$ , точка  $M$  — середина стороны  $AC$ . Докажите, что плоскости  $MSB$  и  $ABC$  перпендикулярны.
258. Точка  $M$  равноудалена от вершин  $C$  и  $D$  прямоугольника  $ABCD$ . Из точки  $M$  к стороне  $AB$  проведен перпендикуляр  $MN$ . Докажите, что плоскость прямоугольника перпендикулярна плоскости  $MNO$ , где  $O$  — точка пересечения диагоналей прямоугольника.
259. Плоскости  $\pi$  и  $\gamma$  перпендикулярны и пересекаются по прямой  $m$ . Плоскость  $\varphi$  пересекает плоскости  $\pi$  и  $\gamma$  по прямым  $k$  и  $p$ , параллельным прямой  $m$ . Расстояние между прямыми  $k$  и  $p$  равно 20 см, а между прямыми  $m$  и  $p$  — 16 см. Найдите расстояние между прямыми  $m$  и  $k$ , а также расстояние от прямой  $m$  до плоскости  $\varphi$ .
260. Концы отрезка, длина которого равна 25 см, принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, а расстояния от концов отрезка до линии пересечения плоскостей равны 20 см и 9 см. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из концов отрезка на линию пересечения плоскостей.
261. Точки  $A$  и  $B$  принадлежат двум перпендикулярным плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно,  $a$  — линия пересечения этих плоскостей.  $AD$  и  $BC$  — перпендикуляры, проведенные из точек  $A$  и  $B$  к прямой  $a$ . Найдите длину отрезка  $AB$ , если  $AD = 5$  см,  $BC = 6$  см,  $DC = 12$  см.
262. Отрезок лежит в одной из двух перпендикулярных плоскостей и не пересекает другую. Один из концов отрезка удален от прямой  $a$  пересечения плоскостей на 12 см. Во второй плоскости проведена прямая  $b$ , параллельная  $a$ . Концы данного отрезка удалены от прямой  $b$  на 13 см и  $\sqrt{41}$  см. Найдите расстояние от середины отрезка до прямой  $a$ .
263. Прямоугольник  $ABCD$  перегнули по диагонали так, что плоскости  $ABD$  и  $CBD$  оказались перпендикулярными. Найдите расстояние между точками  $A$  и  $C$ , если  $AB = 30$  см,  $BD = 50$  см.

264. Докажите, что если прямые пересечения плоскостей  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  попарно перпендикулярны, то плоскости попарно перпендикулярны.

### Расстояние между скрещивающимися прямыми

265. На рисунке 86 изображен куб с ребром  $a$ . Найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $CD$ .

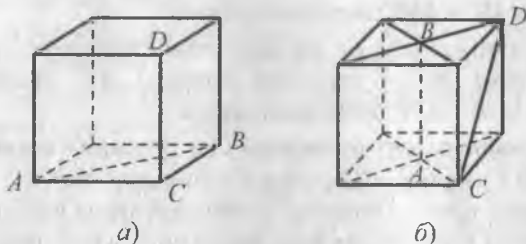


Рис. 86

266. Через вершину острого угла  $A$  прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) проведена прямая  $a$ , перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояние между прямыми  $BC$  и  $a$ , если  $BC = 7$  см,  $AC = 25$  см.
267. Через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  проведена прямая  $l$ , перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояние между прямыми  $l$  и  $BC$ , если  $AB = 13$  см,  $BC = 14$  см,  $AC = 15$  см.
268. Через середину хорды  $AB$  окружности радиусом 5 см проведена прямая  $n$ , перпендикулярная плоскости окружности. Найдите расстояние между прямой  $n$  и диаметром  $BC$ , если  $AC = 8$  см.
269. Через точку  $A$  окружности проведены хорды  $AB$  и  $AC$ . Через точку  $B$  проведена прямая  $m$ , перпендикулярная плоскости окружности, а через точку  $C$  прямая  $k$  — касательная к окружности. Найдите расстояние между прямыми  $m$  и  $k$ , если  $AB = 6$  см,  $AC = 8$  см,  $\angle BAC = 60^\circ$ .
270. Через вершину  $A$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = AC$ ) проведена плоскость, перпендикулярная плоскости  $ABC$ , и в этой плоскости через точку  $A$  проведена прямая  $m$ . Найдите расстояние между прямыми  $m$  и  $BC$ , если  $BC = 8$  см,  $\angle BAC = 120^\circ$ .
271. Через основание  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  проведена плоскость  $\alpha$ . Расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$  равно 4 см. Найдите расстояние между прямой  $BC$  и прямой, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно плоскости  $\alpha$ , если  $BC = 12$  см,  $AB = 10$  см.

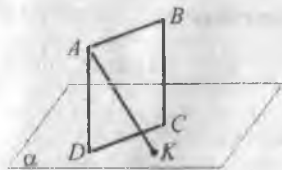


Рис. 87

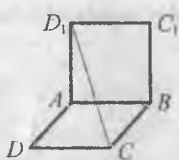


Рис. 88

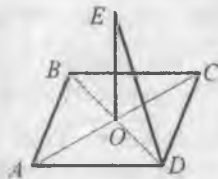


Рис. 89

272. Скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  принадлежат параллельным плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Докажите, что расстояние между прямыми  $a$  и  $b$  равно расстоянию между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .
273. Плоскость  $\alpha$  проведена через сторону  $CD$  прямоугольника  $ABCD$  перпендикулярно его плоскости (рис. 87). Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведена наклонная  $AK$  длиной 15 см. Найдите расстояние между прямыми  $BC$  и  $AK$ , если  $AB = 8$  см,  $AD = 9$  см,  $KC = 12$  см.
274. Плоскости квадратов  $ABCD$  и  $ABC_1D_1$  перпендикулярны (рис. 88). Найдите расстояние между прямыми  $CD_1$  и  $AB$ , если  $AB = 6$  см.
275. Длина ребра куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равна 4 см. Найдите расстояние между прямыми  $AC_1$  и  $BB_1$ .

### Угол между скрещивающимися прямыми

276. Отрезок  $AM$  — медиана треугольника  $ABC$ , прямая  $MK$  перпендикулярна прямым  $AM$  и  $BC$ . Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $MK$ .
277. Через центр  $O$  квадрата  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $EO$  (рис. 89). Найдите угол между прямыми  $ED$  и  $AC$ .
278. Через центр  $O$  правильного шестиугольника  $ABCDEF$  к его плоскости проведена перпендикулярная прямая. На этой прямой выбрали точку  $K$  и соединили ее серединой  $P$  стороны  $AB$ . Докажите, что прямые  $KP$  и  $FC$  перпендикулярны.
279. На рисунке 90 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми: 1)  $AB$  и  $CC_1$ ; 2)  $B_1 C_1$  и  $AC$ ; 3)  $A_1 D$  и  $AC$ .
280. Через вершину  $B$  прямоугольника  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $FB$  длиной 6 см. Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $FD$ , если  $AB = 9$  см,  $BC = 12$  см.

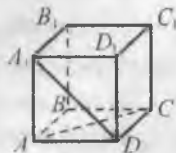


Рис. 90

## Угол между прямой и плоскостью

281. Наклонная образует с плоскостью угол  $60^\circ$ . Найдите длину наклонной, если длина ее проекции 9 см.
282. Найдите угол между наклонной и плоскостью, если длина наклонной равна 15 см, а расстояние от конца наклонной до плоскости — 3 см.
283. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямой  $AC_1$  и плоскостью  $ABC$ .
284. Докажите, что боковые стороны равнобедренного треугольника образуют равные углы с плоскостью, проходящей через его основание.
285. Точка  $M$  лежит вне плоскости правильного треугольника  $ABC$ , а наклонные  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$  образуют равные углы с плоскостью  $ABC$ . Докажите, что проекция точки  $M$  на плоскость треугольника — центр этого треугольника.
286. Точка  $K$  находится на расстоянии 6 см от плоскости  $\alpha$ . Наклонные  $KA$  и  $KB$  образуют с плоскостью  $\alpha$  углы  $45^\circ$  и  $30^\circ$ , а угол между проекциями наклонных равен  $135^\circ$ . Найдите расстояние между точками  $A$  и  $B$ .
287. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = AC$ ,  $BC = 12$  см, площадь треугольника равна  $18$  см<sup>2</sup>. Через вершину  $A$  проведен к плоскости треугольника перпендикуляр  $DA$  такой, что  $DE = 3\sqrt{2}$  см, где точка  $E$  — середина  $BC$ . Найдите угол между прямой  $DE$  и плоскостью треугольника.
288. Концы отрезка  $AB$ , длина которого равна  $2\sqrt{2}$  см, лежат в двух перпендикулярных плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Из точек  $A$  и  $B$  опущены перпендикуляры  $AA_1$  и  $BB_1$  на линию пересечения плоскостей.  $AB_1 = \sqrt{6}$  см,  $AA_1 = 2$  см. Найдите углы, которые образует отрезок  $AB$  с плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .
289. Точки  $A$  и  $B$  лежат в двух перпендикулярных плоскостях. С одной из плоскостей отрезок  $AB$  образует угол  $30^\circ$ . Точка  $A$  находится на расстоянии 4 см от этой плоскости, а расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из точек  $A$  и  $B$  к линии пересечения плоскостей, равно  $4\sqrt{2}$  см. Найдите угол между отрезком  $AB$  и второй плоскостью.



290. Через вершину  $A$  прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle ABC = 90^\circ$ ) к плоскости треугольника проведен перпендикуляр  $DA$ . Найдите расстояние от точки  $D$  до прямой  $BC$ , если прямая  $DB$  образует с плоскостью  $ABC$  угол  $\beta$ ,  $AC = c$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .
291. Треугольники  $ABC$  и  $ADC$  лежат в разных плоскостях. Найдите углы, которые образуют прямые  $AB$  и  $CB$  с плоскостью  $ADC$ , если  $AB = BC = AC$ ,  $AD = DC$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ , прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости  $ADC$ .
292. Через вершину угла, равного  $60^\circ$ , проведена прямая, образующая с его сторонами углы по  $60^\circ$ . Найдите угол, который образует эта прямая с плоскостью данного угла.

### Угол между плоскостями

293. Угол между двумя плоскостями равен  $30^\circ$ . В каждой из плоскостей проведена прямая, параллельная линии их пересечения. Расстояние от одной из этих прямых до линии пересечения плоскостей равно 8 см, а от другой —  $2\sqrt{3}$  см. Найдите расстояние между проведенными прямыми.
294. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , угол между которыми равен  $60^\circ$ , пересекаются по прямой  $l$ . Плоскость  $\gamma$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно по прямым  $a$  и  $b$ , параллельным прямой  $l$ . Расстояние между прямыми  $a$  и  $b$  равно  $2\sqrt{19}$  см, между прямыми  $a$  и  $l$  — 6 см. Найдите расстояние от прямой  $b$  до плоскости  $\alpha$ .
295. Квадрат и прямоугольник, площади которых соответственно равны  $36 \text{ см}^2$  и  $96 \text{ см}^2$ , имеют общую сторону, а расстояние между их параллельными сторонами равно 14 см. Найдите угол между плоскостями квадрата и прямоугольника.
296. Сторона  $AB$  равностороннего треугольника  $ABC$  принадлежит плоскости  $\alpha$ . Из точки  $C$  к плоскости  $\alpha$  проведен перпендикуляр  $CO$ . Расстояние от точки  $O$  до прямой  $AB$  равно  $3\sqrt{3}$  см, площадь треугольника  $ABC$  равна  $36\sqrt{3} \text{ см}^2$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $\alpha$ .
297. Через сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол  $45^\circ$ . Найдите расстояние от вершины  $C$  до этой плоскости, если  $AB = 14$  см,  $BC = 13$  см,  $AC = 15$  см.

298. Равнобедренные треугольники  $ABC$  и  $ADC$  имеют общее основание  $AC$ . Угол между их плоскостями равен  $60^\circ$ ,  $AC = 12$  см,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle ADC = 120^\circ$ . Найдите длину отрезка  $BD$ .
299. Два равнобедренных треугольника  $MNK$  и  $MEK$  имеют общее основание  $MK$ . Найдите угол между плоскостями  $MNK$  и  $MEK$ , если  $MN = 5\sqrt{3}$  см,  $EK = 13$  см,  $EN = \sqrt{74}$  см,  $MK = 10$  см.
300. Прямоугольники  $ABCD$  и  $AMKD$  имеют общую сторону  $AD$ . Найдите угол между плоскостями прямоугольников, если  $AD = 6$  см,  $DK = 16$  см,  $DC = 12$  см,  $MC = 10$  см.
301. На рисунке 91 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $AB_1 C_1$ .
302. Через сторону правильного треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол  $30^\circ$ . Найдите углы, которые образуют две другие стороны треугольника с этой плоскостью.
303. Угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , которые пересекаются по прямой  $a$ , равен  $45^\circ$ . В плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  выбраны точки  $C$  и  $D$  соответственно и из них проведены перпендикуляры  $DA$  и  $CB$  к прямой  $a$ . Найдите длину отрезка  $AB$ , если  $AD = 6\sqrt{2}$  см,  $CB = 8$  см,  $DC = 11$  см.
304. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $l$ . Из точек  $A$  и  $B$ , лежащих в плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, проведены перпендикуляры  $AM$  и  $BN$  к прямой  $l$ . Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , если  $AM = 12$  см,  $BN = 8\sqrt{3}$  см,  $AN = 4\sqrt{10}$  см,  $AB = 8$  см.
305. Через центр  $O$  правильного треугольника  $ABC$  проведена прямая  $l$ , перпендикулярная плоскости треугольника. Плоскость, проведенная через сторону  $AB$ , пересекает прямую  $l$  в точке  $M$ . Угол между плоскостями  $ABC$  и  $ABM$  равен  $60^\circ$ . Найдите длину стороны треугольника  $ABC$ , если длина проекции отрезка  $MO$  на плоскость  $ABM$  равна  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  см.
306. Из точки  $M$ , лежащей вне плоскости  $\alpha$ , проведены к ней две наклонные  $MA$  и  $MB$ , образующие с плоскостью  $\alpha$  углы  $45^\circ$  и  $60^\circ$  соответственно. Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $MAB$ , если угол между проекциями наклонных  $MA$  и  $MB$  равен  $150^\circ$ .

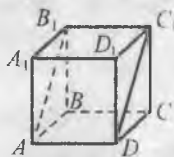


Рис. 91

307. Угол между двумя плоскостями равен  $60^\circ$ . В одной из плоскостей проведена прямая, образующая со второй плоскостью угол  $30^\circ$ . Найдите угол, образованный этой прямой с линией пересечения плоскостей.
308. Точка  $M$  равноудалена от вершин правильного шестиугольника  $ABCDEF$ . Угол между прямой  $MA$  и плоскостью  $ABC$  равен  $\alpha$ . Найдите угол между плоскостями  $MAB$  и  $ABC$ .
309. Точка  $K$  равноудалена от вершин квадрата  $ABCD$ . Угол между прямой  $KA$  и плоскостью  $ABC$  равен  $\beta$ . Найдите угол между плоскостями  $ABK$  и  $ADK$ .

### Площадь ортогональной проекции многоугольника

310. Может ли площадь ортогональной проекции многоугольника быть больше, чем площадь самого многоугольника?
311. Найдите площадь многоугольника, если площадь его ортогональной проекции на некоторую плоскость равна  $32\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>, а угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции равен  $45^\circ$ .
312. Площадь многоугольника равна 24 см<sup>2</sup>, а площадь его ортогональной проекции — 16 см<sup>2</sup>. Найдите угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.
313. Ортогональной проекцией треугольника  $ABC$  на некоторую плоскость является прямоугольный треугольник  $A_1B_1C_1$  такой, что катет  $A_1C_1$  равен 30 см, медиана, проведенная к гипотенузе  $A_1B_1$ , — 17 см. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна  $160\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.
314. Площадь четырехугольника равна  $56\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>. Его ортогональной проекцией на некоторую плоскость является ромб, одна из диагоналей которого равна 14 см. Найдите вторую диагональ ромба, если угол между плоскостью четырехугольника и плоскостью ромба равен  $45^\circ$ .
315. Площадь треугольника  $A_1B_1C_1$  равна 22,5 см<sup>2</sup>. Он является ортогональной проекцией треугольника  $ABC$  со сторонами 6 см, 10 см и 14 см. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .
316. Ортогональной проекцией трапеции является равнобокая трапеция, основания которой равны 4 см и 8 см, а диагонали перпендикулярны. Найдите площадь данной трапеции, если угол между ее плоскостью и плоскостью проекции равен  $60^\circ$ .

## Вариант 3

## Систематизация и обобщение фактов и методов планиметрии

- Углы  $AOB$  и  $AOC$  равны между собой, а точки  $B$ ,  $O$  и  $C$  лежат на одной прямой. Докажите, что углы  $AOB$  и  $AOC$  прямые.
- Докажите равенство остроугольных треугольников по высоте и углам, которые она образует со сторонами угла, из вершины которого она проведена.
- Докажите равенство равнобедренных треугольников по высоте, проведенной к боковой стороне, и углу, который она образует с основанием.
- Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.
- Докажите от противного, что если два луча делят развернутый угол на три угла, то среди этих углов хотя бы один не больше, чем  $60^\circ$ .
- Докажите от противного, что если разность двух углов равна  $3^\circ$ , то они не могут быть вертикальными.
- Прямая  $s$  параллельна стороне  $CD$  треугольника  $CDE$ . Может ли прямая  $s$  быть параллельной сторонам  $CE$  и  $DE$ ? Ответ обоснуйте.
- Докажите от противного, что если прямые  $a$  и  $b$  параллельны и прямая  $c$  не пересекает прямую  $a$ , то она не пересекает и прямую  $b$ .
- На рисунке 92  $CE = EK$ ,  $PM \parallel KE$ . Докажите, что  $CM = PM$ .
- Отрезки  $DH$  и  $DK$  — высота и биссектриса треугольника  $DME$  соответственно,  $\angle DME = 123^\circ$ ,  $\angle DEM = 19^\circ$ . Найдите угол  $HDK$ .
- В треугольнике  $ABC$   $\angle C = 126^\circ$ , отрезки  $AD$  и  $AN$  — высота и биссектриса треугольника соответственно,  $\angle DAN = 48^\circ$ . Найдите неизвестные углы треугольника  $ABC$ .
- В прямоугольном треугольнике один из острых углов меньше угла между биссектрисой и высотой, проведенными к гипотенузе, на  $29^\circ$ . Найдите острые углы треугольника.
- В четырехугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны. Точки  $M$ ,  $F$ ,  $K$  и  $P$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно. Докажите, что  $MK = FP$ .

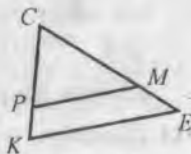


Рис. 92

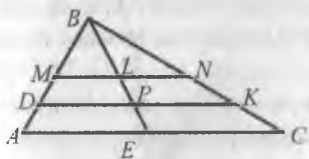


Рис. 93

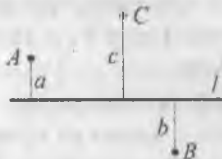


Рис. 94

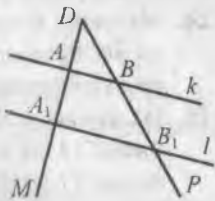


Рис. 95

14. Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон:
  - 1) квадрата;
  - 2) четырехугольника с перпендикулярными диагоналями.
15. Отрезок  $BE$  — медиана треугольника  $ABC$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AC = 24$  см (рис. 93). Известно, что  $MN \parallel AC$ ,  $DK \parallel AC$ ,  $BM = MA$ ,  $MD = DA$ . Найдите  $LP$ .
16. Расстояния от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  до прямой  $l$  (рис. 94) равны соответственно  $a$ ,  $b$  и  $c$  ( $a < b < c$ ). Известно, что середины отрезков  $AB$  и  $BC$  равноудалены от прямой  $l$ . Докажите, что  $2b = a + c$ .
17. Параллельные прямые  $k$  и  $l$  пересекают стороны угла  $MDP$  (рис. 95). Найдите длину отрезка  $AA_1$ , если  $DA = 8$  см,  $BB_1 = 9$  см,  $AA_1 = 2DB_1$ .
18. Продолжения боковых сторон  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ ,  $AM = 20$  см. Найдите  $AB$ , если  $DC : CM = 3 : 2$ .
19. В треугольник  $ABC$  вписан ромб  $DKFC$  так, что угол  $C$  у них общий, а вершина  $K$  принадлежит стороне  $AB$ . Сторона ромба равна 4 см,  $BF = 3$  см. Найдите  $AC$ .
20. Основания трапеции равны 6 см и 14 см, а диагонали — 15 см и 20 см. Найдите отрезки, на которые точка пересечения диагоналей делит каждую диагональ.
21. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ )  $AC = 52$  см,  $AB = 20$  см. Найдите медиану  $AM$  треугольника.
22. В остроугольном треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 17$  см,  $BC = 25$  см, а высота  $BD$  делит сторону  $AC$  на отрезки  $AD$  и  $DC$  такие, что  $AD : DC = 2 : 5$ . Найдите  $AC$ .
23. Из точки к прямой проведены две наклонные. Одна из них равна 22 см и образует с прямой угол  $45^\circ$ . Найдите длину второй наклонной, если ее проекция на эту прямую равна  $\sqrt{82}$  см.

24. Из точки к прямой проведены две наклонные, проекции которых на эту прямую равны 5 см и 9 см. Найдите длины наклонных, если их сумма равна 28 см.
25. Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых равны 15 см и 20 см, а длины их проекций на эту прямую относятся как 9 : 16. Найдите расстояние от точки до данной прямой.
26. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на отрезки длиной 25 см и 20 см. Найдите стороны треугольника.
27. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найдите стороны треугольника.
28. В равнобокой трапеции  $ABCD$  известно, что  $AB = CD = 7$  см,  $BC = 2$  см,  $AD = 8$  см. Найдите синус и косинус угла  $CAD$ .
29. Из точки, находящейся на расстоянии 16 см от прямой, проведены к ней две наклонные, образующие с прямой углы  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите длины наклонных и их проекций на прямую.
30. Из точки, находящейся на расстоянии 20 см от прямой, проведены к ней две наклонные, образующие с прямой углы  $60^\circ$  и  $45^\circ$ . Найдите расстояние между основаниями наклонных. Сколько решений имеет задача?
31. Найдите площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 16 см, а боковая сторона — 10 см.
32. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 см и 15 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к гипотенузе.
33. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 6 см и 5 см, а угол между ними равен: 1)  $60^\circ$ ; 2)  $135^\circ$ .
34. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 3 см, 7 см и 8 см.
35. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найдите площадь треугольника, если большая из двух остальных сторон равна 25 см.
36. Одна сторона треугольника на 4 см меньше другой, а угол между ними равен  $120^\circ$ . Найдите периметр треугольника, если третья его сторона равна  $\sqrt{79}$  см.
37. Две стороны треугольника относятся как  $3\sqrt{2} : 7$ , а угол между ними равен  $45^\circ$ . Найдите эти стороны, если третья сторона треугольника равна 30 см.

38. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AC = b$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ .  
Найдите стороны  $AB$  и  $BC$ .
39. Биссектриса прямоугольного треугольника, проведенная из вершины его прямого угла, равна  $l$ , а острый угол равен  $\alpha$ . Найдите катеты треугольника.
40. Биссектрисы углов  $A$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке, лежащей на стороне  $BC$ . Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 30 см.
41. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 25 см и 7 см, а одна из диагоналей перпендикулярна его стороне.
42. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 20 см, а разность диагоналей — 8 см.
43. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей ромба к его стороне, делит ее на отрезки длиной 16 см и 25 см. Найдите площадь ромба.
44. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 8 см и 14 см, а угол между ними —  $45^\circ$ .
45. Высоты параллелограмма равны 14 см и 12 см, а угол между ними —  $45^\circ$ . Найдите площадь параллелограмма.
46. Диагональ равнобокой трапеции образует с боковой стороной прямой угол. Известно, что боковая сторона в два раза меньше большего основания. Найдите углы трапеции.
47. В трапеции  $ABCD$  ( $AB = CD$ ) угол  $B$  — тупой, его биссектриса пересекает основание  $AD$  в точке  $K$ ,  $BK = AB = 13$  см. Найдите разность оснований трапеции.
48. В прямоугольной трапеции  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) диагональ  $AC$  равна 14 см, перпендикулярна боковой стороне  $CD$  и делит угол  $A$  в отношении 2 : 1, считая от большего основания. Найдите среднюю линию трапеции.
49. Найдите площадь равнобокой трапеции, меньшее основание которой равно 7 см, боковая сторона — 10 см, а угол при большем основании —  $60^\circ$ .
50. Найдите площадь равнобокой трапеции, основания которой равны 4 см и 10 см, а диагонали делят ее тупые углы пополам.
51. Около треугольника  $ABC$  описана окружность с центром в точке  $O$ . Найдите угол  $AOB$ , если: 1)  $\angle C = 54^\circ$ ; 2)  $\angle C = 136^\circ$ .

52. Найдите углы равнобедренного треугольника, вписанного в окружность, основание которого стягивает дугу, градусная мера которой равна  $100^\circ$ .
53. Точки  $M$  и  $N$  окружности лежат по одну сторону от диаметра  $AB$  (рис. 96). Найдите угол  $BMN$ , если  $\angle AMN = 110^\circ$ .
54. Три угла четырехугольника, вписанного в окружность, взятые в порядке следования, относятся как  $4 : 8 : 11$ . Найдите углы четырехугольника.
55. Боковые стороны трапеции, в которую можно вписать окружность, равны  $5$  см и  $11$  см. Найдите периметр трапеции.
56. Точка касания окружности, вписанной в равнобокую трапецию, делит ее боковую сторону на отрезки длиной  $9$  см и  $16$  см. Найдите площадь трапеции.
57. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AC = 5\sqrt{2}$  см,  $\angle B = 45^\circ$ . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
58. Основание равнобедренного треугольника равно  $70$  см, а боковая сторона —  $37$  см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.
59. Длина дуги окружности равна  $20$  см, а ее градусная мера —  $15^\circ$ . Найдите радиус окружности.
60. Длина окружности, радиус которой  $12$  см, равна длине дуги второй окружности, содержащей  $135^\circ$ . Найдите радиус второй окружности.
61. Площадь сектора составляет  $\frac{9}{20}$  площади круга. Найдите градусную меру центрального угла, соответствующего данному сектору.
62. Стороны треугольника равны  $20$  см,  $34$  см и  $42$  см. Найдите отношение площадей описанного и вписанного в этот треугольник кругов.
63. Стороны двух правильных шестиугольников относятся как  $3 : 5$ , а площадь меньшего из них равна  $72$  см<sup>2</sup>. Найдите площадь большего шестиугольника.
64. Сторона правильного треугольника равна  $6$  см. Найдите радиусы его вписанной и описанной окружностей.

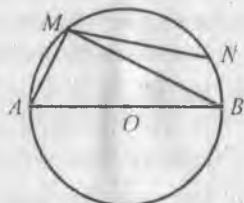


Рис. 98



65. Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен 8 см. Найдите сторону квадрата и радиус описанной около него окружности.
66. Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен  $5\sqrt{3}$  см. Найдите сторону шестиугольника и радиус вписанной в него окружности.
67. Вычислите площадь правильного шестиугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 4 см.
68. Вершинами треугольника являются точки  $A(-3; 1)$ ,  $B(2; -5)$ ,  $C(3; 6)$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.
69. На прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов, найдите точку, равноудаленную от точек  $A(1; 1)$  и  $B(3; 5)$ .
70. Составьте уравнение окружности, радиусом которой является отрезок  $MN$ , если  $M(-3; 1)$ ,  $N(1; 6)$ . Сколько решений имеет задача?

71. Четырехугольник  $ABCD$  — прямоугольник (рис. 97). Укажите вектор, равный вектору: 1)  $\overrightarrow{AB}$ ; 2)  $\overrightarrow{BA}$ ; 3)  $\overrightarrow{DA}$ ; 4)  $\overrightarrow{OC}$ ; 5)  $\overrightarrow{OA}$ ; 6)  $\overrightarrow{BO}$ .

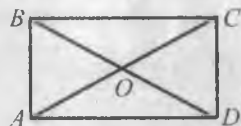


Рис. 97

72. Четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм. Найдите:

1)  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ ; 2)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB}$ ; 3)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA}$ .

73. Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  (рис. 98). Выразите векторы  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{DC}$  через векторы  $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ .

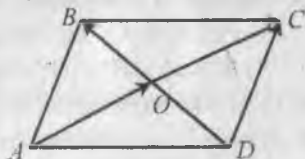


Рис. 98

74. Даны точки  $A(-2; 3)$  и  $B(5; 0)$ . Найдите координаты точки  $C$  такой, что  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ .

75. Найдите модуль вектора  $\vec{m} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$ , где  $\vec{a}(5; 6)$ ;  $\vec{b}(1; -4)$ .

76. На сторонах  $AD$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, причем  $AP = \frac{1}{4}AD$ ,  $CQ = \frac{2}{7}CD$ . (рис. 99).

Выразите векторы  $\overrightarrow{BP}$  и  $\overrightarrow{BQ}$  через векторы  $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$  и  $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$ .

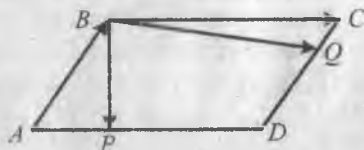


Рис. 99

77. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  выбрали такие точки  $K$  и  $M$  соответственно, что  $AK : KB = 2 : 5$ .  $AM : MC = 4 : 3$ . Выразите векторы  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CK}$  и  $\overline{MB}$  через векторы  $\overline{AK} = \vec{a}$  и  $\overline{CM} = \vec{c}$ .
78. Найдите значение  $m$ , при котором векторы  $\vec{a}(m; 3)$  и  $\vec{b}(5; -8)$  коллинеарны.
79. Диагонали ромба  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $AD = 10$  см. Найдите скалярное произведение векторов:
- 1)  $\overline{CB}$  и  $\overline{CD}$ ;      3)  $\overline{AB}$  и  $\overline{BC}$ ;      5)  $\overline{BO}$  и  $\overline{OC}$ ;  
 2)  $\overline{DC}$  и  $\overline{DA}$ ;      4)  $\overline{AO}$  и  $\overline{AB}$ ;      6)  $\overline{DO}$  и  $\overline{OB}$ .
80. Найдите косинус угла между векторами  $\vec{a}(5; -1)$  и  $\vec{b}(2; 6)$ .
81. Даны векторы  $\vec{a}(6; -1)$  и  $\vec{b}(x; 2)$ . При каком значении  $x$  векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны?
82. Даны векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ . Найдите:
- 1)  $|\vec{a} - \vec{b}|$ ;      2)  $|\vec{a} + 4\vec{b}|$ .

### Аксиомы стереометрии и следствия из них

83. Можно ли утверждать, что:
- 1) существуют две точки, не лежащие на одной прямой;  
 2) любые две точки всегда лежат в одной плоскости?
84. Сколько различных плоскостей можно провести через две точки?
85. Можно ли утверждать, что любая прямая, пересекающая две стороны треугольника, лежит в плоскости этого треугольника?
86. Может ли прямая пересекать хорду окружности, но не пересекать саму окружность?
87. Верно ли утверждение, что если через две прямые можно провести плоскость, то эти прямые пересекаются?
88. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ . В плоскости  $\alpha$  проведена прямая  $m$ , пересекающая прямую  $a$  в точке  $M$ . В какой точке прямая  $m$  пересекает плоскость  $\beta$ ?
89. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $m$ . Плоскость  $\gamma$ , пересекая прямую  $m$ , пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  по прямым  $a$  и  $b$  соответственно. Докажите, что прямые  $a$  и  $b$  пересекаются.

90. Точка  $A$  принадлежит прямой  $a$ , а точка  $B$  — не принадлежит. Сколько плоскостей можно провести через прямую  $a$  и точки  $A$  и  $B$ ?
91. Прямая  $a$  принадлежит плоскости  $\alpha$ . Докажите, что через прямую  $a$  можно провести плоскость, отличную от плоскости  $\alpha$ .
92. Среди точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  есть три, лежащие на одной прямой. Верно ли утверждение, что через данные четыре точки проходит единственная плоскость?
93. Даны прямая  $a$  и точка  $A$  вне ее. Докажите, что существует плоскость, которая проходит через точку  $A$  и пересекает прямую  $a$ .
94. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ . Докажите, что существует плоскость  $\gamma$ , отличная от плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ , содержащая прямую  $a$ .
95. Прямая  $a$  принадлежит плоскости  $\alpha$ . Прямая  $b$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке, не принадлежащей прямой  $a$ . Докажите, что прямые  $a$  и  $b$  не лежат в одной плоскости.
96. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  расположены в пространстве так, что прямые  $AB$  и  $CD$  не пересекаются. Следует ли из этого, что указанные точки не лежат в одной плоскости?
97. Прямые  $a$  и  $b$  не пересекаются. Можно ли утверждать, что все прямые, пересекающие прямые  $a$  и  $b$ , лежат в одной плоскости?
98. Прямые  $a$  и  $b$ ,  $b$  и  $c$ ,  $a$  и  $c$  пересекаются, и точки их пересечения не совпадают. Лежат ли прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  в одной плоскости?
99. Точки  $A$  и  $B$  принадлежат прямой  $a$ , точки  $D$  и  $C$  принадлежат прямой  $b$ . Прямые  $a$  и  $b$  не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые  $AC$  и  $BD$  не пересекаются.
100. Лучи  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  пересекают плоскость  $\alpha$  в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Прямая  $l$  пересекает эти лучи в трех различных точках. Докажите, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежат на одной прямой.
101. Вершина  $A$  треугольника  $ABC$  принадлежит плоскости  $\alpha$ , а вершины  $B$  и  $C$  ей не принадлежат. Прямая  $BC$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $D$ , а продолжение медианы  $CM$  — в точке  $N$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $D$  и  $N$  лежат на одной прямой.
102. Вершины  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  принадлежат плоскости  $\alpha$ , а вершина  $B$  ей не принадлежит. В плоскости  $\alpha$  выбрана точка  $D$ , не принадлежащая прямой  $AC$ . Внутри треугольника  $ABC$  отметили точку  $O$ . Постройте линию пересечения плоскости  $BOD$  с плоскостью  $\alpha$ .

103. Две соседние вершины и точка пересечения диагоналей трапеции принадлежат плоскости  $\alpha$ . Принадлежат ли плоскости  $\alpha$  две остальные вершины трапеции?
104. Можно ли утверждать, что все точки окружности принадлежат плоскости, если: 1) две точки окружности и ее центр принадлежат плоскости; 2) диаметр окружности принадлежит плоскости?
105. Каждая из двух плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  проходит через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Следует ли из этого, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  совпадают?
106. Среди данных  $n$  точек любые четыре принадлежат одной плоскости. Докажите, что все  $n$  точек лежат в одной плоскости.
107. Основания высот треугольника принадлежат плоскости  $\alpha$ . Принадлежат ли плоскости  $\alpha$  вершины треугольника?
108. Вершины  $A$  и  $B$  плоского четырехугольника  $ABCD$  лежат по одну сторону от плоскости  $\alpha$ , а вершины  $C$  и  $D$  — по другую сторону. Докажите, что точки пересечения диагоналей и сторон  $BC$  и  $AD$  четырехугольника с плоскостью  $\alpha$  лежат на одной прямой.

#### Построение сечений многогранников

109. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки: 1)  $B$ ,  $D$  и  $C_1$ ; 2)  $A$ ,  $C$  и середину ребра  $DD_1$ .
110. Точки  $M$  и  $K$  — середины ребер  $AC$  и  $BC$  пирамиды  $SABC$  соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью  $SMK$ .
111. В пирамиде  $SABC$  известно, что  $SB = 26$  см,  $SC = 28$  см,  $BC = 30$  см. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины ребер  $SA$ ,  $AC$  и  $AB$ , и вычислите его периметр и площадь.
112. Постройте точку пересечения прямой с плоскостью нижнего основания треугольной призмы, если эта прямая проходит через две точки, принадлежащие: 1) двум боковым ребрам; 2) боковому ребру и ребру верхнего основания, не имеющего общих точек с данным боковым ребром; 3) боковому ребру и боковой грани, которой это ребро не принадлежит; 4) боковой грани и ребру верхнего основания, которой этой грани не принадлежит; 5) двум боковым граням.
113. Постройте сечение треугольной пирамиды  $SABC$  (рис. 100) плоскостью, проходящей через точки  $D$ ,  $E$  и  $F$ , принадлежащие ребрам  $SA$ ,  $SB$  и  $BC$  соответственно.

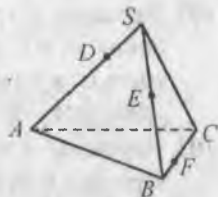


Рис. 100

114. Постройте сечение прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точку  $A$  и точки  $M$  и  $K$ , которые принадлежат соответственно ребрам  $BB_1$  и  $DD_1$ .

115. Постройте сечение прямой призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  (рис. 101) плоскостью, которая проходит через точку  $B_1$  и точки  $M$  и  $K$ , лежащие на ребрах  $AC$  и  $AA_1$  соответственно.

116. Постройте сечение прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 102) плоскостью, проходящей через вершины  $A$  и  $D_1$  и точку  $M$  на ребре  $BB_1$ .

117. В треугольной пирамиде  $SABC$  (рис. 103) точка  $M$  принадлежит грани  $ASC$ , точка  $N$  — грани  $ASB$ , точка  $K$  — грани  $CSB$ . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ .

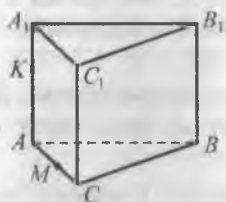


Рис. 101

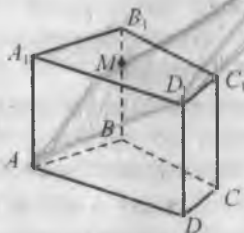


Рис. 102

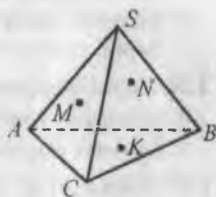


Рис. 103

### Параллельные прямые в пространстве.

#### Скрещивающиеся прямые

118. Прямые  $a$  и  $b$  параллельны, прямая  $c$  не пересекает прямую  $a$ . Можно ли утверждать, что прямая  $c$  не пересекает прямую  $b$ :

- 1) на плоскости;                      2) в пространстве?

119. Точки  $A$  и  $B$  принадлежат прямой  $a$ , точки  $C$  и  $D$  — прямой  $b$ , причем  $a \parallel b$ . Докажите, что прямые  $BC$  и  $AD$  не являются скрещивающимися.

120. Прямые  $AB$  и  $CD$  — скрещивающиеся. Докажите, что прямые  $AC$  и  $BD$  также скрещивающиеся.

121. Через точки  $A$  и  $B$  прямой  $l$  проведены перпендикулярные ей прямые. На них отметили соответственно такие точки  $A_1$  и  $B_1$ , что  $AA_1 = BB_1$ . Верно ли утверждение, что прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  параллельны: 1) на плоскости; 2) в пространстве?

122. На одной из двух параллельных прямых выбрали точку и через нее провели прямую, которая пересекает другую. Докажите, что эти три прямые лежат в одной плоскости.
123. Может ли каждая из двух параллельных прямых пересекать каждую из двух скрещивающихся прямых?
124. Прямые  $a$  и  $b$  и прямые  $b$  и  $c$  пересекаются. Верно ли утверждение, что прямые  $a$  и  $c$  также пересекаются?
125. Точка  $D$  не принадлежит плоскости треугольника  $ABC$ , точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  — середины отрезков  $AC$ ,  $DC$ ,  $DB$ ,  $AB$  соответственно. Докажите, что  $MN \parallel PQ$ .
126. Две пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$  соответственно параллельны прямым  $m$  и  $n$ . Верно ли утверждение, что прямые  $m$  и  $n$  пересекаются?
127. Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  проведена прямая  $b$ , не принадлежащая плоскости треугольника. Докажите, что прямая  $b$  и прямая, содержащая медиану треугольника  $ABC$ , проведенную из вершины  $A$ , — скрещивающиеся.
128. Через пересекающиеся прямые  $a$  и  $b$  проведены две плоскости, которые пересекаются по прямой  $c$ . Может ли какая-либо из прямых  $a$  и  $b$  быть параллельной прямой  $c$ ?
129. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  не лежат в одной плоскости. Докажите, что отрезки, соединяющие середины отрезков  $AB$  и  $CD$ ,  $AD$  и  $BC$ ,  $AC$  и  $BD$ , пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

130. Треугольник  $ABC$  не пересекает плоскость  $\alpha$  (рис. 104). Через его вершины, середины  $M$  и  $N$  сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно и середину  $K$  отрезка  $MN$  проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $M_1$ ,  $N_1$ ,  $K_1$  соответственно. Найдите длину отрезка  $KK_1$ , если  $AA_1 = 7$  см,  $BB_1 = 9$  см,  $CC_1 = 15$  см.

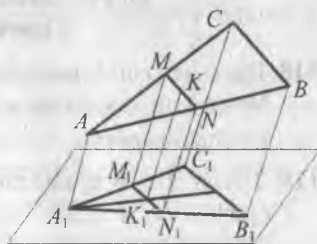


Рис. 104

### Параллельность прямой и плоскости

131. Прямая  $a$  параллельна прямой  $b$ , лежащей в плоскости  $\alpha$ . Верно ли утверждение, что прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ ?

132. Прямые  $a$  и  $b$  параллельны плоскости  $\alpha$ . Верно ли утверждение, что  $a \parallel b$ ?
133. Прямые  $a$  и  $b$  пересекаются. Как может быть расположена прямая  $b$  относительно плоскости  $\alpha$ , если прямая  $a$ :
- 1) принадлежит плоскости  $\alpha$ ;
  - 2) пересекает плоскость  $\alpha$ ;
  - 3) параллельна плоскости  $\alpha$ ?
134. Точка  $M$  не принадлежит плоскости параллелограмма  $ABCD$ . Докажите, что прямая  $AD$  параллельна плоскости  $MCB$ .
135. Точки  $A, B, C$  и  $D$  не лежат в одной плоскости. Точка  $M$  — середина отрезка  $AD$ , точка  $K$  — середина отрезка  $CD$ . Докажите, что прямая  $AC$  параллельна плоскости  $BKM$ .
136. Прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$ , прямая  $b$  параллельна прямой  $a$ . Докажите, что прямая  $b$  пересекает плоскость  $\alpha$ .
137. Прямые  $a$  и  $b$  — скрещивающиеся. Существует ли плоскость, параллельная каждой из данных скрещивающихся прямых?
138. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $c$ . В плоскости  $\alpha$  проведена прямая  $a$ , параллельная прямой  $c$ . Через прямую  $a$  проведена плоскость  $\gamma$ , пересекающая плоскость  $\beta$  по прямой  $b$ . Докажите, что прямые  $b$  и  $c$  параллельны.
139. Через середину  $M$  боковой стороны  $AB$  трапеции  $ABCD$  проведена плоскость, параллельная основаниям  $BC$  и  $AD$  и пересекающая боковую сторону  $CD$  в точке  $N$ . Докажите, что отрезок  $MN$  — средняя линия трапеции.
140. Плоскость, параллельная стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $B_1$  и  $C_1$  соответственно, причем  $AB_1 : BB_1 = 5 : 3$ . Найдите  $B_1C_1$ , если  $BC = 6$  см.
141. Сколько существует плоскостей, которые проходят через одну из двух данных скрещивающихся прямых и параллельны другой?
142. Отрезок  $MN$  — средняя линия треугольника  $ABC$  (рис. 105). Вне плоскости треугольника выбрали точку  $D$ . На отрезке  $MD$  отметили точку  $E$  так, что  $ME : ED = 5 : 2$ . Постройте точку  $F$  пересечения плоскости  $BEC$  и прямой  $DN$  и найдите длину отрезка  $EF$ , если  $BC = 30$  см.

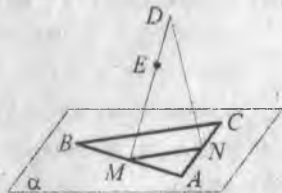


Рис. 105

143. Постройте сечение треугольной пирамиды  $SABC$  плоскостью, которая проходит через вершину  $B$ , точку на ребре  $SA$  и параллельна прямой  $AC$ .
144. Постройте сечение пирамиды  $SABC$  (рис. 106) плоскостью, которая проходит через точку  $D$  на ребре  $BC$  и параллельна прямым  $AC$  и  $SB$ .
145. Постройте сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью, которая проходит через точки  $D$  и  $E$ , принадлежащие соответственно ребрам  $SA$  и  $SC$ , и параллельна прямой  $BC$ .

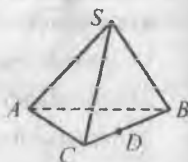


Рис. 106

### Параллельные плоскости. Свойства параллельных плоскостей

146. Две прямые плоскости  $\alpha$  параллельны плоскости  $\beta$ . Следует ли из этого, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны?
147. Каждая из двух данных плоскостей параллельна каждой из двух данных прямых. Параллельны ли данные плоскости?
148. Боковые стороны трапеции параллельны плоскости  $\alpha$ . Параллельны ли плоскость трапеции и плоскость  $\alpha$ ?
149. Вне плоскости треугольника  $ABC$  лежит точка  $D$ . На отрезках  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  выбраны соответственно точки  $M$ ,  $N$  и  $P$  так, что  $AM : MB = AN : NC = AP : PD$ . Докажите, что плоскости  $MNP$  и  $DBC$  параллельны.
150. Докажите, что если четыре прямые, проходящие через точку  $S$ , пересекают плоскость  $\alpha$  в вершинах трапеции, то они пересекают любую плоскость, которая параллельна  $\alpha$  и не проходит через точку  $S$ , также в вершинах трапеции.
151. Одна из двух параллельных прямых пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $A$  и  $A_1$  соответственно, а другая — соответственно в точках  $B$  и  $B_1$ ,  $AB = A_1B_1$ . Можно ли утверждать, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны?
152. Через точку  $C$ , не принадлежащую двум параллельным плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ , проведены два луча, один из которых пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно, а другой — соответственно в точках  $A_2$  и  $B_2$ . Известно, что  $CA_1 = 4$  см,  $B_1B_2 = 9$  см,  $A_1A_2 = CB_1$ . Найдите  $A_1A_2$  и  $A_1B_1$ .
153. Можно ли через боковые стороны трапеции провести параллельные плоскости?



154. Плоскость  $\alpha$  параллельна плоскости  $\beta$ , плоскость  $\gamma$  параллельна плоскости  $\varphi$ . Плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$  пересекаются по прямой  $a$ , плоскости  $\beta$  и  $\varphi$  — по прямой  $b$ . Докажите, что  $a \parallel b$ .
155. Прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ . Докажите, что если плоскость  $\beta$  пересекает прямую  $a$ , то она пересекает и плоскость  $\alpha$ .
156. Прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ . Плоскость  $\alpha$  пересекает плоскость  $\beta$ . Верно ли утверждение, что прямая  $a$  пересекает плоскость  $\beta$ ?
157. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку параллельно данной плоскости, лежат в одной плоскости.
158. Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равно 4 см. На отрезке  $AC$  отметили точку  $M$  так, что  $AM : MC = 3 : 1$ . Постройте сечение куба плоскостью, которая проходит через точку  $M$  и параллельна плоскости  $BC_1 D_1$ , и вычислите периметр сечения.
159. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, которая проходит через точки  $K$ ,  $E$  и  $F$ , принадлежащие соответственно ребрам  $AD$ ,  $AA_1$  и  $C_1 D_1$ .
160. Постройте сечение прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, которая проходит через точки  $E$ ,  $F$  и  $K$ , принадлежащие ребрам  $AA_1$ ,  $BC$  и  $C_1 D_1$  соответственно.
161. Постройте сечение прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 107) плоскостью, которая проходит через точки  $M$  и  $K$ , принадлежащие граням  $AA_1 B_1 B$  и  $BB_1 C_1 C$  соответственно, и точку  $N$  на ребре  $C_1 D_1$ .

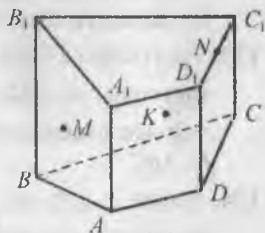


Рис. 107

### Параллельное проектирование.

#### Изображение фигур в стереометрии

162. Какие геометрические фигуры могут быть параллельными проекциями: 1) луча; 2) двух скрещивающихся прямых; 3) трапеции?
163. Могут ли две скрещивающиеся прямые проектироваться: 1) в две пересекающиеся прямые; 2) в параллельные прямые; 3) в одну прямую; 4) в прямую и точку, принадлежащую этой прямой; 5) в две точки?
164. Как должны быть расположены относительно направления проектирования две скрещивающиеся прямые, чтобы они про-

ектировались в прямую и точку, ей не принадлежащую?

165. Можно ли при параллельном проектировании квадрата получить: 1) ромб; 2) прямоугольник?
166. Можно ли при параллельном проектировании прямоугольника получить четырехугольник с углами  $90^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $140^\circ$ ?
167. Может ли параллельная проекция отрезка быть больше, чем отрезок, который проектируется?
168. Может ли параллельной проекцией прямой быть: 1) отрезок; 2) луч; 3) точка?
169. Может ли параллельной проекцией угла быть: 1) отрезок; 2) равный ему угол?
170. При каких условиях прямоугольник проектируется в прямоугольник?
171. Параллелограмм  $ABCD$  — изображение квадрата (рис. 108). Постройте изображение перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей квадрата к его стороне.
172. Треугольник  $ABC$  является параллельной проекцией равностороннего треугольника (рис. 109). Постройте изображение высоты треугольника, проведенной из вершины  $B$ , и перпендикуляра, опущенного из точки  $F$  на сторону  $AC$ .
173. Треугольник  $A_1B_1C_1$  (рис. 110) — изображение прямоугольного треугольника  $ABC$ , у которого  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC : CB = 3 : 4$ . Постройте изображение центра вписанной окружности треугольника  $ABC$ .
174. Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $O_1$ , не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями двух вершин и точки пересечения диагоналей параллелограмма. Постройте изображение параллелограмма. Сколько решений имеет задача?
175. Параллелограмм  $ABCD$  является параллельной проекцией квадрата, на сторонах которого во внешнюю сторону как на гипотенузах построены равнобедренные прямоугольные треугольники (треугольники лежат в плоскости квадрата). Постройте параллельные проекции этих треугольников.



Рис. 108

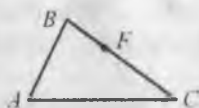


Рис. 109



Рис. 110

176. На изображении окружности с центром  $O$  (рис. 111) постройте изображения двух перпендикулярных диаметров.

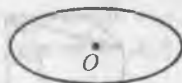


Рис. 111

177. Дана параллельная проекция окружности с центром в точке  $O$ . Постройте параллельную проекцию вписанного в нее правильного шестиугольника.

178. Точки  $A, B, O$ , не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями двух вершин правильного треугольника и его центра. Постройте изображение правильного треугольника. Сколько решений имеет задача?

179. На изображении ромба постройте изображение его высоты, проведенной из вершины тупого угла, если одна из диагоналей ромба равна его стороне.

180. На изображении ромба  $ABCD$  постройте изображение высоты, проведенной из вершины  $A$ , если  $\angle ABC = 120^\circ$ .

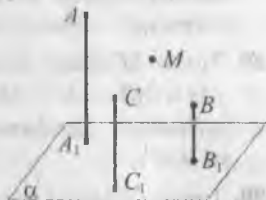


Рис. 112

181. Точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  — параллельные проекции точек  $A, B$  и  $C$  на плоскость  $\alpha$  (рис. 112). Постройте проекцию на плоскость  $\alpha$  точки  $M$ , лежащей в плоскости  $ABC$ .

### Перпендикулярность прямой и плоскости

182. Верно ли утверждение, что прямая, перпендикулярная двум прямым плоскости, перпендикулярна этой плоскости?

183. Через вершину  $C$  прямоугольника  $ABCD$  проведена прямая  $MC$ , перпендикулярная прямым  $BC$  и  $AC$ . Докажите, что  $MC \perp CD$ .

184. Как расположена относительно плоскости треугольника прямая, перпендикулярная двум его сторонам?

185. На рисунке 113 изображен квадрат  $ABCD$ ,  $MC \perp BC$ . Укажите прямую и плоскость, которые перпендикулярны между собой.

186. Четырехугольник  $ABCD$  — прямоугольник (рис. 114). Прямая  $MA$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ . Докажите, что  $MD \perp CD$ .

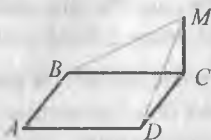


Рис. 113

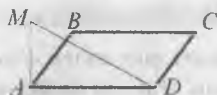


Рис. 114

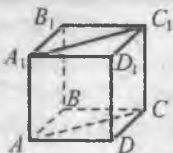


Рис. 115

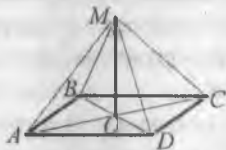


Рис. 116

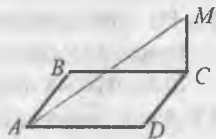


Рис. 117

187. На рисунке 115 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что четырехугольник  $AA_1 C_1 C$  — прямоугольник.
188. Через одну сторону параллелограмма проходит плоскость, перпендикулярная соседней стороне. Докажите, что этот параллелограмм — прямоугольник.
189. Точка  $M$  лежит вне плоскости прямоугольника  $ABCD$  (рис. 116),  $MA = MB = MC = MD$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей прямоугольника. Докажите, что прямая  $MO$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .
190. Точка  $M$  лежит вне плоскости квадрата  $ABCD$  и равноудалена от его вершин. Докажите, что прямая  $AC$  перпендикулярна плоскости  $BMD$ .
191. Прямая  $AO$  перпендикулярна плоскости окружности с центром в точке  $O$ . Точка  $B$  лежит на окружности. Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости окружности, если радиус окружности равен 6 см,  $\angle ABO = 45^\circ$ .
192. Прямая  $CM$  перпендикулярна плоскости прямоугольника  $ABCD$  (рис. 117). Найдите  $MC$ , если  $AB = 3$  см,  $AD = 4$  см,  $AM = 13$  см.
193. Через вершину  $B$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) к его плоскости проведен перпендикуляр  $MB$  (рис. 118). Точка  $M$  соединена с серединой  $F$  стороны  $AC$ . Найдите длину отрезка  $MF$ , если  $MB = 10$  см,  $\angle BMC = 60^\circ$ ,  $\angle FMC = 45^\circ$ .

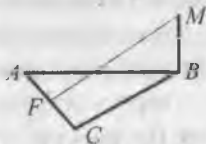


Рис. 118

194. Сторона правильного треугольника  $ABC$  равна 8 см. Через центр  $O$  треугольника  $ABC$  проведен перпендикуляр  $SO$  к его плоскости. Найдите длину отрезка  $SO$ , если  $\angle SAO = 30^\circ$ .
195. Точка  $M$  лежит вне плоскости треугольника  $ABC$  и равноудалена от его вершин. Как расположена точка  $O$  — проекция точки  $M$  на плоскость  $ABC$  — относительно треугольника  $ABC$ , если этот треугольник тупоугольный?

196. Из точек  $A$  и  $B$ , лежащих вне плоскости  $\alpha$ , проведены к ней перпендикуляры  $AA_1$  и  $BB_1$ . Докажите, что если отрезки  $AB$  и  $A_1B_1$  равны, то четырехугольник  $AA_1B_1B$  — прямоугольник.
197. Докажите, что если прямая перпендикулярна двум плоскостям, то эти плоскости параллельны.
198. Через вершину  $B$  ромба  $ABCD$  проведен перпендикуляр  $SB$  к плоскости ромба. Найдите  $SD$ , если  $SB = 4$  см, сторона ромба — 3 см, а угол  $ABC$  равен  $120^\circ$ .
199. В прямоугольнике  $ABCD$  известно, что  $BC = 1$  см,  $CD = \sqrt{3}$  см. Через вершину  $A$  проведен перпендикуляр  $MA$  к плоскости прямоугольника. Найдите угол  $MCA$ , если  $MA = 2$  см.
200. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = BC = 15$  см,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Точка  $M$  находится на расстоянии 39 см от всех его вершин. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости треугольника  $ABC$ .
201. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $\angle A = 48^\circ$ ,  $\angle C = 42^\circ$  (рис. 119). Через вершину  $A$  проведен перпендикуляр  $DA$  к плоскости треугольника. Докажите, что  $DB \perp BC$ .
202. Точка  $S$  равноудалена от всех вершин прямоугольника  $ABCD$ . Найдите угол  $BSD$ , если  $AB = 3$  см,  $AD = 4$  см,  $SB = 5$  см.
203. Из точки  $M$ , не принадлежащей плоскости квадрата  $ABCD$ , проведен перпендикуляр  $BM$  к его плоскости. Через центр  $O$  квадрата проведена прямая  $NO$  параллельно  $BM$ . Найдите расстояние от точки  $N$  до вершин квадрата, если  $AB = 4\sqrt{2}$  см,  $NO = 3$  см.
204. Концы отрезка расположены по разные стороны от плоскости и удалены от нее на 5 см и 7 см. Найдите расстояние от середины этого отрезка до плоскости.
205. Через вершину  $C$  прямоугольника  $ABCD$  проведена прямая  $MC$  перпендикулярно прямой  $CD$ . Докажите, что прямая  $AB$  перпендикулярна плоскости  $MCB$ .
206. Через вершины  $B$  и  $D$  трапеции  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) проведены перпендикуляры  $MB$  и  $ND$  к плоскости трапеции. Докажите, что плоскости  $BMC$  и  $NDA$  параллельны.

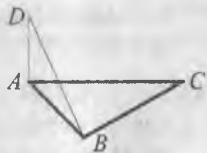


Рис. 119

## Перпендикуляр и наклонная

207. На рисунке 120 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Укажите проекции отрезка  $A_1 C$  на плоскости граней куба.

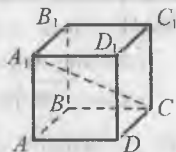


Рис. 120

208. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр длиной 10 см и наклонная. Найдите длину наклонной, если длина ее проекции равна 6 см.

209. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр длиной 8 см и наклонная. Угол между наклонной и ее проекцией на плоскость равен  $60^\circ$ . Найдите длины наклонной и ее проекции.

210. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) известно, что  $AC = 24$  см,  $BC = 10$  см. Из точки  $D$  к плоскости треугольника проведен перпендикуляр  $AD$  такой, что  $AD = 18$  см. Найдите длины наклонных  $DB$  и  $DC$ .

211. Из точки  $F$  к плоскости  $\alpha$  проведены две наклонные  $FM$  и  $FN$  и перпендикуляр  $FK$ . Найдите длины наклонных, если  $MK = 4$  см,  $\angle FMK = 30^\circ$ ,  $\angle NFK = 60^\circ$ .

212. Из точки  $M$  к плоскости проведены две наклонные  $MB$  и  $MA$ , длины которых относятся как  $5 : 7$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости, если проекции наклонных равны 12 см и  $12\sqrt{5}$  см.

213. Две точки находятся на разных расстояниях от плоскости. Из этих точек к плоскости проведены две равные наклонные. Докажите, что большая из проекций соответствует наклонной, проведенной из точки, расположенной ближе к плоскости.

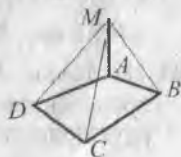


Рис. 121

214. В четырехугольнике  $ABCD$  известно, что  $AB = AD$ ,  $CB = CD$  (рис. 121). Прямая  $MA$  перпендикулярна плоскости четырехугольника. Докажите, что  $\angle DMC = \angle BMC$ .

215. Из точки  $D$  к плоскости  $ABC$  проведен перпендикуляр  $DA$ ,  $DA = d$  (рис. 122). Наклонные  $DB$  и  $DC$  образуют со своими проекциями углы, равные  $30^\circ$ , а их проекции образуют угол  $120^\circ$ . Найдите длину отрезка  $BC$ .

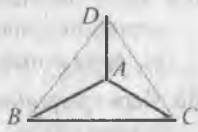


Рис. 122

216. Биссектрисы треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Прямая  $MO$  перпендикулярна плоскости треугольника. Точка  $M$  равноудалена от вершин треугольника. Докажите, что треугольник  $ABC$  — равносторонний.
217. Точка  $K$  находится на расстоянии 17 см от вершин квадрата и на расстоянии 8 см от его плоскости. Найдите сторону квадрата.
218. В ромбе  $ABCD$  известно, что  $AB = 10$  см,  $BD = 12$  см. Прямая  $MC$  перпендикулярна плоскости ромба. Найдите длину наклонной  $MA$ , если точка  $M$  удалена от плоскости ромба на 16 см.
219. Из точки, не принадлежащей плоскости, проведены к ней две наклонные, длины проекций которых равны 12 см и 16 см, а сумма длин наклонных — 56 см. Найдите длины наклонных.
220. Два отрезка длиной 10 см и 17 см упираются своими концами в параллельные плоскости. Найдите расстояние между этими плоскостями, если сумма проекций этих отрезков на одну из плоскостей равна 21 см.
221. Из данной точки к плоскости проведены две равные наклонные, угол между которыми  $60^\circ$ , а их проекции перпендикулярны. Найдите длины наклонных, если расстояние от данной точки до плоскости равно 4 см.
222. Из точки  $M$  к плоскости  $\alpha$  проведены две равные наклонные  $MA$  и  $MB$  и перпендикуляр  $MO$ ,  $AB = 12$  см,  $\angle MAB = 60^\circ$ ,  $\angle ABO = 30^\circ$ . Найдите длину отрезка  $MO$ .
223. Сторона ромба равна 6 см, а острый угол —  $30^\circ$ . Через вершину острого угла проведена плоскость, параллельная меньшей диагонали ромба, на расстоянии 4 см от нее. Найдите проекции диагоналей на эту плоскость.
224. Из точки  $S$  к плоскости  $\alpha$  проведены перпендикуляр  $SD$  и наклонные  $SK$  и  $SF$ , причем  $SD^2 = DF \cdot DK$ . Докажите, что  $\angle FSD = \angle SKD$ .

### Теорема о трех перпендикулярах

225. На рисунке 123 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Докажите, что прямые  $B_1 O$  и  $AC$  перпендикулярны.

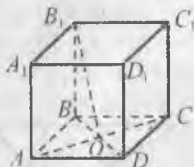


Рис. 123

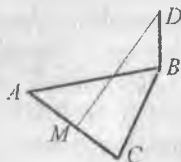


Рис. 124

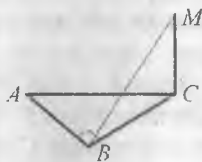


Рис. 125

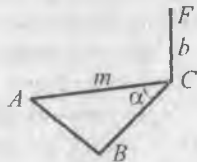


Рис. 126

226. На рисунке 124 изображен равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AC$ . Прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости треугольника,  $DM \perp AC$ . Докажите, что точка  $M$  — середина  $AC$ .
227. К плоскости прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) проведен перпендикуляр  $MC$  (рис. 125). Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$ , если  $MC = a$ ,  $AC = b$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ .
228. Через вершину  $A$  ромба  $ABCD$  проведена прямая  $SA$ , перпендикулярная плоскости ромба. Докажите, что точка  $S$  равноудалена от прямых  $CB$  и  $CD$ .
229. Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $MB$ . Прямая, проходящая через точку  $M$  и середину  $AC$ , делит угол  $AMC$  пополам. Докажите, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.
230. Через вершину  $C$  равнобедренного треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $FC$  (рис. 126). Найдите расстояние от точки  $F$  до прямой  $AB$ , если  $AC = BC = m$ ,  $\angle ACB = \alpha$ ,  $FC = b$ .
231. Прямая  $CD$  перпендикулярна плоскости прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle ABC = 90^\circ$ ). Проведите перпендикуляр из точки  $D$  к прямой  $AB$  (рис. 127).
232. Диагонали квадрата  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Прямая  $FO$  перпендикулярна плоскости квадрата (рис. 128). Проведите перпендикуляры из точки  $F$  к сторонам квадрата.
233. Точка  $O$  принадлежит плоскости прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ). Прямая  $DO$  перпендикулярна плоскости тре-

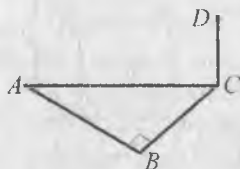


Рис. 127



Рис. 128

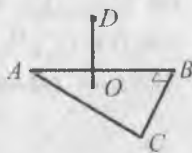


Рис. 129



угольника (рис. 129). Проведите перпендикуляры из точки  $D$  к сторонам  $AB$  и  $BC$ .

233. Точка  $O$  принадлежит плоскости прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ). Прямая  $DO$  перпендикулярна плоскости треугольника (рис. 129). Проведите перпендикуляры из точки  $D$  к сторонам  $AB$  и  $BC$ .

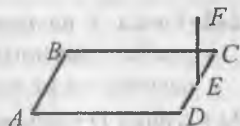


Рис. 130

234. Через середину  $E$  стороны  $DC$  квадрата  $ABCD$  к плоскости квадрата проведен перпендикуляр  $FE$  (рис. 130). Проведите перпендикуляры из точки  $F$  к сторонам и диагоналям квадрата.
235. Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведены перпендикуляр  $AB$  длиной 12 см и наклонная  $AC$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $l$ , которая принадлежит плоскости  $\alpha$  и проходит через точку  $C$  перпендикулярно прямой  $BC$ , если  $BC = 16$  см.
236. Прямая  $FC$  перпендикулярна плоскости ромба  $ABCD$ ,  $BD = FC = 20$  см,  $\angle BAD = 60^\circ$ . Найдите расстояние от точки  $F$  до прямых, содержащих стороны ромба.
237. Через вершину прямого угла  $B$  треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $BN$ . Расстояние от точки  $N$  до прямой  $AC$  равно 13 см. Найдите расстояние от точки  $N$  до плоскости треугольника, если  $AC = 25$  см,  $AB = 15$  см.
238. Через вершину  $M$  треугольника  $KMN$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $PM$ . Найдите расстояние от точки  $P$  до прямой  $KN$ , если  $PM = 1$  см,  $MK = 2\sqrt{3}$  см,  $MN = 4$  см,  $\angle KMN = 150^\circ$ .
239. Через точку  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  проведен перпендикуляр  $OM$  к его плоскости. Найдите расстояние от точки  $M$  до прямых, содержащих стороны параллелограмма, если  $AB = 5$  см,  $AD = 12$  см,  $OM = 4$  см, площадь параллелограмма равна  $30$  см<sup>2</sup>.
240. Сторона равностороннего треугольника  $ABC$  равна 6 см. Через центр  $O$  треугольника к его плоскости проведен перпендикуляр  $OM$  длиной 3 см. Найдите угол между перпендикуляром, проведенным из точки  $M$  к стороне  $AB$ , и проекцией этого перпендикуляра на плоскость  $ABC$ .
241. В трапеции  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) известно, что  $CD = 16$  см,  $\angle CDA = 30^\circ$ . Точка  $M$  удалена от каждой из сторон трапеции на 5 см. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости трапеции.

242. Точка  $S$  находится на расстоянии 12 см от каждой из сторон ромба, диагонали которого равны 16 см и 12 см. Найдите расстояние от точки  $S$  до плоскости ромба.
243. Точка  $D$  удалена на 5 см от каждой из сторон треугольника  $ABC$ . Найдите расстояние от точки  $D$  до плоскости треугольника, если  $AB = 13$  см,  $BC = 14$  см,  $AC = 15$  см.
244. Сторона ромба равна  $a$ , а его площадь —  $S$ . Точка  $M$  не принадлежит плоскости ромба и удалена от каждой из его сторон на расстояние  $b$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости ромба.
245. Проекция точки  $F$  на плоскость угла  $ABC$  принадлежит биссектрисе этого угла. Докажите, что точка  $F$  равноудалена от сторон угла.
246. Точка  $M$  принадлежит диагонали  $AC$  прямоугольника  $ABCD$ . Через точку  $M$  к плоскости прямоугольника проведен перпендикуляр  $MF$  длиной 4 см. Найдите расстояние от точки  $F$  до стороны  $AB$ , если  $AB = 12$  см,  $BC = 16$  см,  $AM : MC = 3 : 1$ .
247. Через вершину  $D$  прямоугольника  $ABCD$  проведен перпендикуляр  $DF$  к его плоскости. Найдите длину этого перпендикуляра, если  $DC = 12$  см,  $FA = \sqrt{106}$  см,  $DB = 13$  см.
248. Из точки  $A$  к плоскости  $\gamma$  проведены перпендикуляр  $AO$  и наклонная  $AK$ . Через точку  $K$  в плоскости  $\gamma$  проведена прямая, образующая с прямой  $KO$  угол  $\alpha$ . Найдите расстояние от этой прямой до точки  $A$ , если  $\angle AKO = \beta$ ,  $AK = a$ .
249. Через вершину  $B$  прямого угла  $ABC$  проведена прямая, образующая с его сторонами углы  $\alpha$  и  $\beta$  (эта прямая не лежит в плоскости  $ABC$ ). Найдите угол между данной прямой и ее проекцией на плоскость  $ABC$ .
250. Через середины сторон  $AB$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  проведена плоскость, параллельная диагонали  $AC$  и удаленная от нее на 9 см. Найдите расстояние от точки  $D$  до данной плоскости.

### Перпендикулярные плоскости

251. Верно ли утверждение, что если плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны и прямая  $m$  параллельна плоскости  $\alpha$ , то прямая  $m$  перпендикулярна плоскости  $\beta$ ?
252. Верно ли утверждение, что если прямая перпендикулярна одной из двух перпендикулярных плоскостей, то она параллельна другой из этих плоскостей?

253. Прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$  имеют общую точку  $M$ , причем  $a \perp b$ ,  $a \perp c$ ,  $b \perp c$ . Докажите, что плоскость, проходящая через прямые  $a$  и  $b$ , перпендикулярна плоскости, проходящей через прямые  $a$  и  $c$ , и плоскости, проходящей через прямые  $b$  и  $c$ .
254. Через точку  $D$  проведена прямая  $DA$ , перпендикулярная плоскости прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ). Докажите, что плоскости  $DAC$  и  $DBC$  перпендикулярны.
255. Два равнобедренных треугольника  $ABC$  и  $AB_1C$  имеют общее основание  $AC = 8$  см. Плоскости этих треугольников перпендикулярны. Найдите расстояние между точками  $B$  и  $B_1$ , если  $AB = 10$  см,  $AB_1 = 17$  см.
256. Точка  $M$  не принадлежит плоскости прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) и равноудалена от его вершин. Докажите, что плоскости  $AMB$  и  $ABC$  перпендикулярны.
257. В равнобокой трапеции  $ABCD$  ( $BC' \parallel AD$ ) известно, что  $\angle CAD = 45^\circ$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей. Прямая  $MO$  перпендикулярна плоскости трапеции. Докажите, что плоскости  $AMC$  и  $BMD$  перпендикулярны.
258. Точка  $S$  равноудалена от вершин равностороннего треугольника  $ABC$ , точка  $O$  — центр этого треугольника. Докажите, что плоскость  $SOC$  перпендикулярна плоскости  $ASB$ .
259. Плоскости  $\beta$  и  $\varphi$  перпендикулярны и пересекаются по прямой  $m$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $m$  и пересекает плоскости  $\beta$  и  $\varphi$  по прямым  $n$  и  $p$  соответственно. Найдите расстояние между прямыми  $n$  и  $p$ , если расстояние от прямой  $m$  до плоскости  $\alpha$  равно 9 см, а расстояние между прямыми  $m$  и  $n$  — 15 см.
260. Длина отрезка равна 12 см. Его концы принадлежат двум перпендикулярным плоскостям. Расстояния от концов отрезка до линии пересечения этих плоскостей равны 6 см и  $6\sqrt{2}$  см. Найдите углы, которые отрезок образует со своими проекциями на данные плоскости.
261. Длина отрезка, концы которого принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, равна 8 см. Углы, которые образует данный отрезок со своими проекциями на данные плоскости, равны  $45^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из концов отрезка к линии пересечения плоскостей.

262. Отрезок  $AB$  лежит в одной из двух перпендикулярных плоскостей и не пересекает вторую. На этом отрезке отметили точку  $M$  такую, что  $AM:MB=3:1$ . Во второй плоскости проведена прямая  $p$ , параллельная линии  $a$  пересечения плоскостей. Расстояние между точкой  $A$  и прямой  $p$  равно 34 см, между точкой  $B$  и прямой  $p$  — 20 см, между прямыми  $a$  и  $p$  — 16 см. Найдите расстояние между точкой  $M$  и прямой  $p$ .
263. Прямоугольный треугольник  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) перегнули по его медиане  $BM$  так, что плоскости  $BAM$  и  $BMC$  оказались перпендикулярными. Найдите расстояние между точками  $A$  и  $C$ , если  $AB = 12$  см,  $\cos \angle BAM = \frac{3}{5}$ .
264. Докажите, что если плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны плоскости  $\gamma$  и пересекаются по прямой  $a$ , то прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .

#### Расстояние между скрещивающимися прямыми

265. На рисунке 131 изображен куб с ребром  $a$ . Найдите расстояние между прямыми  $FE$  и  $KM$ .

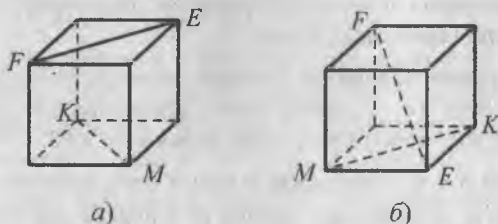


Рис. 131

266. Через вершину  $C$  прямоугольника  $ABCD$  проведена прямая  $d$ , перпендикулярная плоскости прямоугольника. Найдите расстояние между прямыми  $d$  и  $AB$ , если  $AB = 16$  см,  $BD = 30$  см.
267. Через вершину  $A$  прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) проведена прямая  $m$ , перпендикулярная плоскости  $ABC$ . Найдите расстояние между прямой  $m$  и прямой, содержащей медиану  $BM$  треугольника, если  $AC = 30$  см,  $\cos \angle ACB = \frac{4}{5}$ .
268. К окружности с центром  $O$  и радиусом 8 см провели касательную  $l$  в точке  $M$ . Через точку  $K$  окружности перпендикулярно его плоскости провели прямую  $m$ . Найдите расстояние между прямыми  $m$  и  $l$ , если  $\angle KOM = 60^\circ$ .

269. Через середину  $K$  стороны  $AB$  треугольника  $ABC$  провели прямую  $n$ , перпендикулярную плоскости треугольника. Найдите расстояние от этой прямой до прямой  $BC$ , если  $AB = 13$  см,  $BC = 14$  см,  $AC = 15$  см.
270. Через вершину  $A$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) проведена плоскость, перпендикулярная плоскости  $ABC$  и параллельная прямой  $BC$ . В этой плоскости через точку  $A$  проведена прямая. Найдите расстояние от этой прямой до прямой  $BC$ , если  $AB = 25$  см,  $AC = 48$  см.
271. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = BC = 37$  см,  $AC = 70$  см. Через сторону  $AC$  треугольника проведена плоскость  $\alpha$ , расстояние от которой до точки  $B$  равно 9 см. Найдите расстояние между прямой  $AC$  и прямой, которая проходит через точку  $B$  перпендикулярно плоскости  $\alpha$ .
272. Прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$  и пересекает ее в точке  $A$ , прямая  $b$  — скрещивающаяся с ней прямая, прямая  $c$  — проекция прямой  $b$  на плоскость  $\alpha$ . Докажите, что расстояние между прямыми  $a$  и  $b$  равно расстоянию от точки  $A$  до прямой  $c$ .
273. Через точку  $D$  проведена прямая  $DB$ , перпендикулярная плоскости равностороннего треугольника  $ABC$  (рис. 132). Найдите расстояние между прямой  $AD$  и прямой, проходящей через точку  $C$  перпендикулярно плоскости  $ABC$ , если  $AB = 6$  см.

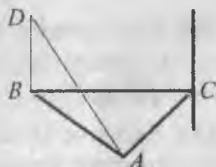


Рис. 132

274. Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$ . Квадрат перегнули по прямой  $MN$  так, что плоскости прямоугольников  $AMND$  и  $BCNM$  оказались перпендикулярными (рис. 133). Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $MN$ , если  $AD = 4$  см.

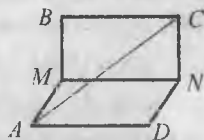


Рис. 133

275. Длина ребра куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равна 6 см, точка  $M$  — середина ребра  $CD$ . Найдите расстояние между прямыми  $AM$  и  $CC_1$ .

### Угол между скрещивающимися прямыми

276. Через основание  $M$  высоты  $BM$  треугольника  $ABC$  проведен перпендикуляр  $OM$  к его плоскости. Найдите угол между прямыми  $BM$  и  $OC$ .

277. Через вершину  $C$  ромба  $ABCD$  проведен перпендикуляр  $EC$  к плоскости ромба (рис. 134). На отрезке  $AE$  выбрали произвольную точку  $F$ . Найдите угол между прямыми  $BD$  и  $FC$ .

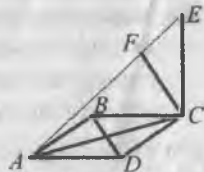


Рис. 134

278. Точка  $O$  — центр правильного треугольника  $ABC$ , точка  $D$  — середина стороны  $AB$ , отрезок  $MN$  — средняя линия этого треугольника, отрезок  $KO$  — перпендикуляр к плоскости  $ABC$ . Докажите, что прямые  $KD$  и  $MN$  перпендикулярны.

279. На рисунке 135 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Найдите угол между прямыми: 1)  $C_1 D_1$  и  $AA_1$ ; 2)  $CD$  и  $A_1 B$ ; 3)  $A_1 B$  и  $AD_1$ .

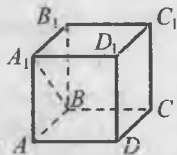


Рис. 135

280. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = BC = 13$  см,  $AC = 10$  см, точка  $D$  — середина  $AC$ , точка  $E$  — середина  $AB$ , точка  $F$  — середина  $BC$ .

Прямая  $PD$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ ,  $BP = 2\sqrt{61}$  см. Найдите угол между прямыми  $EF$  и  $PC$ .

#### Угол между прямой и плоскостью

281. Наклонная образует с плоскостью угол  $45^\circ$ . Найдите расстояние от конца наклонной до плоскости, если длина наклонной равна  $\sqrt{18}$  см.

282. Найдите угол между наклонной и плоскостью, если длина наклонной равна 24 см, а расстояние от конца наклонной до плоскости — 18 см.

283. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известно, что  $AB = 15$  см,  $BC = 8$  см,  $A_1 C = 34$  см. Найдите угол между прямой  $A_1 C$  и плоскостью  $ABC$ .

284. Плоскость проходит через диагональ  $BD$  ромба  $ABCD$ . Докажите, что стороны  $AB$  и  $CD$  образуют с этой плоскостью равные углы.

285. Точка  $M$  лежит вне плоскости квадрата  $ABCD$ , а наклонные  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  и  $MD$  образуют равные углы с плоскостью  $ABC$ . Докажите, что проекцией точки  $M$  на плоскость этого квадрата является его центр.

286. Из точки  $B$  к плоскости  $\alpha$  провели наклонные  $BA$  и  $BC$ , образующие с этой плоскостью углы  $60^\circ$  и  $30^\circ$  соответственно,  $BA = 4\sqrt{6}$  см. Найдите расстояние между точками  $A$  и  $C$ , если угол между проекциями наклонных равен  $120^\circ$ .

287. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = BC = 8$  см, площадь этого треугольника равна  $48$  см<sup>2</sup>. Через вершину  $C$  к плоскости треугольника проведен перпендикуляр  $FC$ . Из точки  $F$  опущен перпендикуляр  $FK$  на прямую  $AB$ . Найдите угол между прямой  $FK$  и плоскостью  $ABC$ , если  $FK = 18$  см.
288. Точки  $M$  и  $N$  лежат в двух перпендикулярных плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Из точек  $M$  и  $N$  опущены перпендикуляры  $ME$  и  $NK$  на линию пересечения плоскостей,  $NE = 10$  см,  $EK = 8$  см,  $MK = 15$  см. Найдите углы, которые образует отрезок  $MN$  с плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .
289. Концы отрезка  $AB$  лежат в двух перпендикулярных плоскостях. Отрезок  $AB$  образует с этими плоскостями углы  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из точек  $A$  и  $B$  к линии пересечения плоскостей, равно  $8$  см. Найдите длину отрезка  $AB$ .
290. Через вершину  $B$  квадрата  $ABCD$  к плоскости квадрата проведен перпендикуляр  $KB$ . Найдите расстояние от точки  $K$  до прямой  $AC$ , если  $AD = a$ , прямая  $KO$  образует с плоскостью квадрата угол  $\varphi$  ( $O$  — точка пересечения диагоналей квадрата).
291. Треугольники  $ABC$  и  $ADC$  лежат в разных плоскостях. Найдите углы, которые образуют прямые  $AD$  и  $CD$  с плоскостью  $ABC$ , если  $AD = CD$ ,  $AB = CB$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ , прямая  $BD$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .
292. Луч  $OM$  проведен через вершину  $O$  прямого угла  $AOB$ ,  $\angle MOA = 45^\circ$ ,  $\angle MOB = 60^\circ$ . Найдите угол между прямой  $OM$  и плоскостью  $AOB$ .

### Угол между плоскостями

293. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $c$ . В плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  проведены прямые  $a$  и  $b$  соответственно, параллельные прямой  $c$ . Расстояние между прямыми  $a$  и  $b$  равно  $21$  см, между прямыми  $a$  и  $c$  —  $9$  см, угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  —  $60^\circ$ . Найдите расстояние между прямыми  $b$  и  $c$ .
294. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $m$ . Плоскость  $\gamma$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  по прямым  $a$  и  $b$  соответственно, которые параллельны прямой  $m$ . Найдите расстояние между прямой  $m$  и плоскостью  $\gamma$ , если угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  равен  $60^\circ$ , расстояние между прямыми  $a$  и  $b$  —  $35$  см, а расстояние между прямыми  $a$  и  $m$  на  $25$  см больше расстояния между прямыми  $b$  и  $m$ .

295. Площади квадрата  $ABCD$  и прямоугольного треугольника  $FBC$  ( $\angle FBC = 90^\circ$ ) равны  $50 \text{ см}^2$  и  $10\sqrt{2} \text{ см}^2$  соответственно. Расстояние от точки  $F$  до прямой  $AD$  равно  $\sqrt{26}$  см. Найдите угол между плоскостями квадрата и треугольника.
296. Гипотенуза  $AB$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  принадлежит плоскости  $\beta$ , площадь этого треугольника равна  $49 \text{ см}^2$ , а расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\beta$  —  $5$  см. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $\beta$ .
297. Через сторону  $BC$  треугольника  $ABC$  проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол  $60^\circ$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до этой плоскости, если  $AB = BC = 13$  см,  $AC = 10$  см.
298. Угол между плоскостями треугольников  $ABC$  и  $ABD$  равен  $60^\circ$ ,  $AC = BC = 20$  см,  $AB = 24$  см,  $AD = BD$ ,  $\angle ADB = 90^\circ$ . Найдите длину отрезка  $CD$ .
299. Найдите угол между плоскостями треугольников  $ABC$  и  $AMC$ , если  $AB = BC = AC = a$ ,  $AM = MC$ ,  $\angle AMC = 90^\circ$ ,  $BM = \frac{a}{2}$ .
300. Найдите угол между плоскостями треугольника  $ABC$  и прямоугольника  $ABDE$ , если  $AB = 15$  см,  $BD = 12$  см,  $AC = 17$  см,  $BC = 8$  см,  $CD = 10$  см.
301. На рисунке 136 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между плоскостями  $A_1 A D$  и  $B_1 B D$ .
302. Через катет прямоугольного равнобедренного треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол  $60^\circ$ . Найдите углы, которые образуют две другие стороны треугольника с этой плоскостью.
303. Угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , которые пересекаются по прямой  $m$ , равен  $30^\circ$ . В плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  выбраны точки  $M$  и  $E$  соответственно и из них проведены перпендикуляры  $MN$  и  $EK$  к прямой  $m$ . Найдите длину отрезка  $ME$ , если  $MN = 10\sqrt{3}$  см,  $KE = 5$  см,  $MK = 5\sqrt{14}$  см.
304. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $m$ . Из точек  $A$  и  $M$ , лежащих в плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, проведены перпенди-

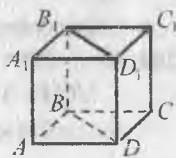


Рис. 136



- куляры  $MK$  и  $AE$  к прямой  $m$ . Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , если  $KE = 2\sqrt{7}$  см,  $ME = 10$  см,  $MA = 2\sqrt{17}$  см,  $AE = 8$  см.
305. Через точку  $O$  пересечения диагоналей прямоугольника  $ABCD$  проведена прямая  $m$ , перпендикулярная плоскости прямоугольника. Плоскость, проведенная через сторону  $AB$ , пересекает прямую  $m$  в точке  $E$ . Угол между плоскостями  $ACB$  и  $AEB$  равен  $30^\circ$ . Найдите длину проекции отрезка  $EO$  на плоскость  $AEB$ , если  $AD = 12$  см.
306. Из точки  $A$ , лежащей вне плоскости  $\alpha$ , проведены к ней две наклонные  $AB$  и  $AC$ , которые образуют с плоскостью  $\alpha$  углы  $30^\circ$  и  $60^\circ$  соответственно. Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $ABC$ , если угол между проекциями наклонных прямой.
307. Угол между двумя плоскостями равен  $45^\circ$ . В одной из плоскостей проведена прямая, образующая с линией пересечения угол  $30^\circ$ . Найдите угол, который образует эта прямая с другой плоскостью.
308. Точка  $M$  равноудалена от вершин правильного треугольника  $ABC$ . Угол между прямой  $MA$  и плоскостью  $ABC$  равен  $\alpha$ . Найдите угол между плоскостями  $MAB$  и  $ABC$ .
309. Точка  $S$  равноудалена от вершин правильного шестиугольника  $ABCDEF$ . Угол между прямой  $SA$  и плоскостью  $ABC$  равен  $\beta$ . Найдите угол между плоскостями  $SAB$  и  $SAF$ .

### Площадь ортогональной проекции многоугольника

310. Может ли площадь многоугольника быть больше, чем площадь его ортогональной проекции?
311. Найдите площадь ортогональной проекции многоугольника на некоторую плоскость, если площадь многоугольника равна  $18 \text{ см}^2$ , а угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции равен  $60^\circ$ .
312. Площадь многоугольника равна  $46\sqrt{2} \text{ см}^2$ , а площадь его ортогональной проекции —  $46 \text{ см}^2$ . Найдите угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.
313. Ортогональной проекцией треугольника  $ABC$  на некоторую плоскость является прямоугольный равнобедренный треугольник  $A_1B_1C_1$  с гипотенузой  $12$  см. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна  $72 \text{ см}^2$ .

314. Площадь четырехугольника равна  $180 \text{ см}^2$ . Его ортогональной проекцией является параллелограмм, одна из сторон которого равна  $12 \text{ см}$ , а угол между сторонами —  $60^\circ$ . Найдите неизвестную сторону параллелограмма, если угол между плоскостью данного четырехугольника и плоскостью его проекции равен  $30^\circ$ .
315. Площадь треугольника  $ABC$  равна  $75 \text{ см}^2$ . Его ортогональной проекцией на некоторую плоскость является треугольник  $A_1B_1C_1$  со сторонами  $8 \text{ см}$ ,  $18 \text{ см}$  и  $20 \text{ см}$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .
316. Ортогональной проекцией равнобокой трапеции на плоскость  $\alpha$  является трапеция площадью  $50 \text{ см}^2$ . Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью данной трапеции, если основания этой трапеции равны  $5 \text{ см}$  и  $15 \text{ см}$ , а диагональ перпендикулярна боковой стороне.

## КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

## Вариант 1

## Контрольная работа № 1

Тема. *Систематизация и обобщение фактов и методов планиметрии*

- 1.° На рисунке 137  $DP = PE$ ,  $DK = KE$ . Докажите равенство углов  $KDM$  и  $KEM$ .
- 2.° В треугольнике  $ABC$  высота  $BD$  делит сторону  $AC$  на отрезки  $AD$  и  $DC$ ,  $BC = 6$  см,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle CBD = 45^\circ$ . Найдите сторону  $AB$  треугольника.
- 3.° Продолжения боковых сторон  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ ,  $DC : CM = 3 : 5$ ,  $BC$  — меньшее основание трапеции. Найдите основания трапеции, если их сумма равна 26 см.
- 4.° Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых равны 13 см и 15 см. Найдите расстояние от точки до прямой, если разность проекций наклонных на эту прямую равна 4 см.
- 5.° Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне и образует с основанием трапеции угол  $\alpha$ . Найдите высоту трапеции, если радиус окружности, описанной около трапеции, равен  $R$ .

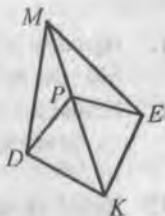


Рис. 137

## Контрольная работа № 2

Тема. *Введение в стереометрию*

- 1.° На рисунке 138 изображен куб  $ABCA_1B_1C_1D_1$ . Укажите прямую пересечения плоскостей  $AC_1D$  и  $ABB_1$ .
- 2.° Даны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  такие, что  $AB = 2$  см,  $BC = 5$  см,  $AC = 3$  см. Сколько существует плоскостей, содержащих точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ ? Ответ обоснуйте.
- 3.° Плоскость  $\alpha$  проходит через вершины  $A$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$  и точку  $O$  пересечения его диагоналей. Докажите, что точка  $B$  принадлежит плоскости  $\alpha$ .
- 4.° Прямая  $t$  является линией пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ . Прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$  и пересекает плоскость  $\beta$ . Докажите, что прямые  $a$  и  $t$  пересекаются.

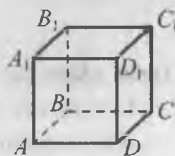


Рис. 138

- 5.\*\* Постройте сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью, которая проходит через точки  $M$ ,  $K$  и  $N$ , принадлежащие соответственно ребрам  $SA$ ,  $SB$  и  $BC$ , причем прямые  $MK$  и  $AB$  не параллельны.

### Контрольная работа № 3

Тема. *Взаимное расположение прямых в пространстве.*

#### *Параллельность прямой и плоскости*

- 1.° Прямые  $a$  и  $b$  скрещивающиеся и прямые  $a$  и  $c$  скрещивающиеся. Можно ли утверждать, что прямые  $b$  и  $c$  скрещивающиеся?
- 2.° Прямая  $a$  параллельна прямой  $b$ , лежащей в плоскости  $\alpha$ . Можно ли утверждать, что прямая  $a$  обязательно параллельна плоскости  $\alpha$ ?
- 3.° Через концы отрезка  $MN$  и его середину  $K$  проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость  $\alpha$  в точках  $M_1$ ,  $N_1$  и  $K_1$  соответственно. Найдите длину отрезка  $KK_1$ , если отрезок  $MN$  не пересекает плоскость  $\alpha$  и  $MM_1 = 22$  см,  $NN_1 = 8$  см.
- 4.° Плоскость  $\alpha$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  в точках  $M$  и  $K$  соответственно и параллельна стороне  $AC$ ,  $MK = 4$  см,  $MB : MA = 2 : 3$ . Найдите длину стороны  $AC$  треугольника.
- 5.° Точка  $B$  не лежит в плоскости треугольника  $ADC$ . Точки  $M$ ,  $P$ ,  $K$  и  $E$  — середины отрезков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$  соответственно,  $MK = PE = 10$  см,  $AC = 12$  см. Найдите длину отрезка  $BD$ .
- 6.\*\* Через параллельные прямые  $a$  и  $b$  проведены две плоскости, которые пересекаются по прямой  $c$ . Докажите, что прямые  $a$  и  $b$  параллельны прямой  $c$ .

### Контрольная работа № 4

Тема. *Параллельные плоскости. Изображение фигур на плоскости*

- 1.° Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. В плоскости  $\alpha$  выбраны точки  $A$  и  $B$ , а в плоскости  $\beta$  — точки  $C$  и  $D$  такие, что прямые  $AC$  и  $BD$  параллельны. Найдите длины отрезков  $CD$  и  $BD$ , если  $AB = 4$  см,  $AC = 5,6$  см.
- 2.° Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — параллельные проекции вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  параллелограмма  $ABCD$  на некоторую плоскость соответственно (рис. 139). Постройте проекцию вершины  $D$  параллелограмма на эту плоскость.



Рис. 139

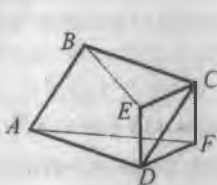


Рис. 140

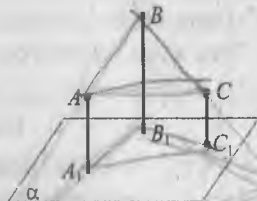


Рис. 141

- 3.° Четырехугольники  $ABCD$  и  $DECF$  — параллелограммы, причем точка  $B$  не принадлежит плоскости  $AFD$  (рис. 140). Докажите, что плоскости  $AFD$  и  $BCE$  параллельны.
- 4.° Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. Из точки  $M$ , не принадлежащей этим плоскостям и не находящейся между ними, проведены два луча. Один из них пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $A_1$  и  $B_1$ , а другой — в точках  $A_2$  и  $B_2$  соответственно. Найдите длину отрезка  $B_1B_2$ , если он на 2 см больше отрезка  $A_1A_2$ ,  $MB_1 = 7$  см,  $A_1B_1 = 4$  см.
- 5.\*\* Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — параллельные проекции точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на плоскость  $\alpha$  (рис. 141). Постройте прямую пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $ABC$ .

### Контрольная работа № 5

#### Тема. Перпендикулярность прямой и плоскости

- 1.° Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведена наклонная длиной 10 см. Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости, если проекция наклонной на плоскость равна 6 см.
- 2.° Через вершину прямого угла  $C$  прямоугольного треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $CM$ . Найдите длину стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ , если  $CM = 8$  см,  $BM = 17$  см,  $\angle CAB = 30^\circ$ .
- 3.° На рисунке 142 изображен прямоугольник  $ABCD$ . Отрезок  $MC$  — перпендикуляр к плоскости  $ABC$ . Докажите, что прямая  $AD$  перпендикулярна плоскости  $DMC$ .
- 4.° Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведены две наклонные  $AB$  и  $AD$ . Проекция этих наклонных на плоскость  $\alpha$  равны 7 см и 18 см. Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ , если  $AB : AD = 5 : 6$ .

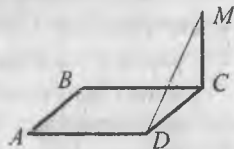
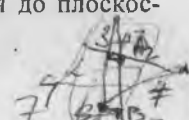


Рис. 142



- 5.\*\* Прямая  $PB$  перпендикулярна плоскости ромба  $ABCD$ . Докажите, что  $\angle PDA = \angle PDC$ .

### Контрольная работа № 6

Тема. *Теорема о трех перпендикулярах.*

*Перпендикулярность плоскостей*

- 1.° Через вершину  $C$  квадрата  $ABCD$  проведена прямая  $MC$ , перпендикулярная плоскости квадрата (рис. 143).

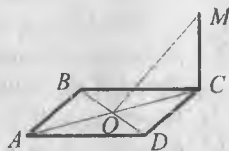


Рис. 143

- 1) Докажите, что прямые  $BD$  и  $MO$  перпендикулярны.
  - 2) Вычислите расстояние от точки  $M$  до прямой  $BD$ , если  $MC = 1$  см,  $CD = 4$  см.
- 2.° Через вершину  $D$  прямоугольника  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $DE$ . Точка  $E$  удалена от стороны  $AB$  на 10 см, а от стороны  $BC$  — на 17 см. Найдите длину диагонали  $BD$ , если  $DE = 8$  см.
- 3.° Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны. Прямая  $a$  — линия их пересечения. В плоскости  $\alpha$  выбрали точку  $A$ , а в плоскости  $\beta$  — точку  $B$  такие, что расстояния от них до прямой  $a$  равны 4 см и 5 см соответственно. Найдите расстояние между точками  $A$  и  $B$ , если расстояние между их проекциями на прямую  $a$  равно  $2\sqrt{2}$  см.
- 4.\*\* Сторона равностороннего треугольника равна 12 см. Точка  $P$  равноудалена от сторон треугольника и находится на расстоянии 2 см от его плоскости. Найдите расстояние от точки  $P$  до сторон треугольника.

### Контрольная работа № 7

Тема. *Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями*

- 1.° Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведена наклонная, длина которой равна 6 см и которая образует с плоскостью  $\alpha$  угол  $60^\circ$ . Найдите длину проекции наклонной на плоскость и расстояние от точки  $A$  до плоскости.
- 2.° Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ . В плоскости  $\alpha$  выбрали точку  $A$  такую, что расстояние от нее до плоскости  $\beta$  равно 4 см, а до прямой  $a$  — 8 см. Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

- 3.\* Треугольник  $ABC$ , площадь которого равна  $24 \text{ см}^2$ , является ортогональной проекцией равностороннего треугольника  $A_1B_1C_1$  со стороной  $8 \text{ см}$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .
- 4.\* Угол между плоскостями треугольников  $ABC$  и  $ABD$  равен  $45^\circ$ . Треугольник  $ABC$  — равносторонний со стороной  $4\sqrt{3} \text{ см}$ , треугольник  $ABD$  — равнобедренный,  $AD = BD = \sqrt{14} \text{ см}$ . Найдите длину отрезка  $CD$ .
- 5.\*\* Из точки к плоскости проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы по  $30^\circ$ . Найдите угол между проекциями наклонных, если угол между наклонными равен  $60^\circ$ .

### Контрольная работа № 8

Тема. *Обобщение и систематизация знаний учащихся*

- 1.° Прямая  $m$  параллельна прямой  $n$ , которая параллельна плоскости  $\beta$ . Можно ли утверждать, что прямая  $m$  обязательно параллельна плоскости  $\beta$ ? \*
- 2.° Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $b$ , а прямая  $b$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ . Каково взаимное расположение плоскостей  $\alpha$  и  $\gamma$ ?<sup>1</sup>
- 3.° Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$ , в котором  $AB = BC = 34 \text{ см}$ ,  $AC = 32 \text{ см}$ , проведен перпендикуляр  $DB$  к плоскости треугольника. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $ADC$ , если  $DB = 20 \text{ см}$ .
- 4.\* Точка  $M$  равноудалена от всех сторон квадрата со стороной  $6 \text{ см}$  и находится на расстоянии  $9 \text{ см}$  от плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки  $M$  до сторон квадрата.
- 5.\* Точка  $A$  находится на расстоянии  $9 \text{ см}$  от плоскости  $\alpha$ . Наклонные  $AB$  и  $AC$  образуют с плоскостью  $\alpha$  углы  $45^\circ$  и  $60^\circ$  соответственно. Найдите расстояние между точками  $C$  и  $B$ , если угол между проекциями наклонных равен  $150^\circ$ .
- 6.\*\* Через гипотенузу прямоугольного равнобедренного треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол  $45^\circ$ . Найдите углы, которые образуют катеты треугольника с этой плоскостью.

<sup>1</sup> Ответ на вопрос задачи не требует обоснования.

## Вариант 2

## Контрольная работа № 1

Тема. *Систематизация и обобщение фактов и методов планиметрии*

- 1.° На рисунке 144  $AB = BC$ ,  $AD = DC$ .

Докажите равенство отрезков  $AE$  и  $EC$ .

- 2.° Высота  $BD$  треугольника  $ABC$  делит сторону  $AC$  на отрезки  $AD$  и  $DC$ ,  $AB = 12$  см,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle CBD = 45^\circ$ . Найдите сторону  $BC$  треугольника.

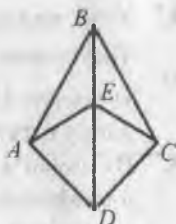


Рис. 144

- 3.° Продолжения боковых сторон  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $F$ ,  $AB : BF = 3 : 7$ ,  $AD$  — большее основание трапеции. Найдите основания трапеции, если их разность равна 6 см.
- 4.° Из точки к прямой проведены две наклонные, проекции которых на прямую равны 9 см и 16 см. Найдите расстояние от точки до прямой, если одна из наклонных на 5 см больше другой.
- 5.\*\* Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, а угол между боковой стороной и большим основанием трапеции равен  $\alpha$ . Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если ее высота равна  $h$ .

## Контрольная работа № 2

Тема. *Введение в стереометрию*

- 1.° На рисунке 145 изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажите прямую пересечения плоскостей  $B_1 CD$  и  $ADD_1$ .

- 2.° Даны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  такие, что  $AB = 4$  см,  $BC = 6$  см,  $AC = 7$  см. Сколько существует плоскостей, содержащих точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ ? Ответ обоснуйте.

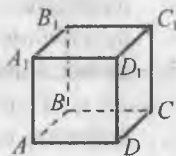


Рис. 145

- 3.° Плоскость  $\alpha$  проходит через вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  и середину  $D$  стороны  $AC$ . Докажите, что точка  $C$  принадлежит плоскости  $\alpha$ .
- 4.° Известно, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются. Прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$  и пересекает плоскость  $\beta$  в точке  $A$ , прямая  $b$  лежит в плоскости  $\beta$  и пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $B$ . Докажите, что прямая  $AB$  является линией пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ .



- 5.\*\* Постройте сечение куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через вершину  $B_1$  и точки  $M$  и  $K$ , которые принадлежат соответственно ребрам  $AB$  и  $CC_1$ .

### Контрольная работа № 3

Тема. *Взаимное расположение прямых в пространстве.*

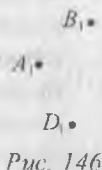
#### *Параллельность прямой и плоскости*

- 1.° Прямые  $a$  и  $b$  скрещивающиеся, а прямые  $b$  и  $c$  параллельны. Можно ли утверждать, что прямые  $a$  и  $c$  скрещивающиеся?
- 2.° Прямая  $a$  не параллельна прямой  $b$ , принадлежащей плоскости  $\alpha$ . Можно ли утверждать, что прямая  $a$  обязательно не является параллельной плоскости  $\alpha$ ?
- 3.° Через концы отрезка  $AB$  и его середину  $C$  проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость  $\alpha$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Найдите длину отрезка  $CC_1$ , если отрезок  $AB$  не пересекает плоскость  $\alpha$  и  $AA_1 = 18$  см,  $BB_1 = 10$  см.
- 4.° Плоскость  $\beta$  пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  в точках  $N$  и  $D$  соответственно и параллельна стороне  $BC$ ,  $AD = 6$  см,  $DN : CB = 3 : 4$ . Найдите длину стороны  $AC$  треугольника.
- 5.° Точка  $D$  не лежит в плоскости треугольника  $ABC$ . Точки  $M$ ,  $P$ ,  $K$  и  $E$  — середины отрезков  $AD$ ,  $DC$ ,  $CB$  и  $AB$  соответственно.  $AC = BD = 8$  см,  $MP = KE$ . Найдите длину отрезка  $MP$ .
- 6.\*\* Через каждую из прямых  $a$  и  $b$  проведена плоскость. Эти плоскости пересекаются по прямой  $c$ , которая не пересекает ни одну из прямых  $a$  и  $b$ . Докажите, что прямые  $a$  и  $b$  параллельны.

### Контрольная работа № 4

Тема. *Параллельные плоскости. Изображение фигур на плоскости*

- 1.° Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. В плоскости  $\alpha$  выбрали точки  $A$  и  $C$ , а в плоскости  $\beta$  — точки  $B$  и  $D$  такие, что прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны. Найдите длины отрезков  $AB$  и  $BD$ , если  $AC = 7$  см,  $CD = 4,7$  см.
- 2.° Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $D_1$  — параллельные проекции вершин  $A$ ,  $B$  и  $D$  параллелограмма  $ABCD$  на некоторую плоскость соответственно (рис. 146). Постройте проекцию вершины  $C$  параллелограмма на эту плоскость.



- 3.\* Четырехугольники  $ABCD$  и  $BDEF$  — параллелограммы, причем точка  $F$  не принадлежит плоскости  $ADE$  (рис. 147). Докажите, что плоскости  $ADE$  и  $BCF$  параллельны.

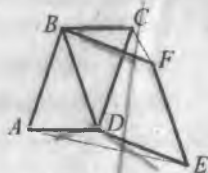


Рис. 147

- 4.\* Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. Через точку  $M$ , находящуюся между этими плоскостями, проведены две прямые. Одна из них пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $A_1$  и  $B_1$ , а другая — в точках  $A_2$  и  $B_2$  соответственно. Найдите длину отрезка  $A_1A_2$ , если он на 1 см меньше отрезка  $B_1B_2$ ,  $MA_2 = 4$  см,  $A_2B_2 = 10$  см.

- 5.\*\* Точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — параллельные проекции точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  на плоскость  $\alpha$  (рис. 148). Постройте точку пересечения прямой, содержащей медиану треугольника  $ABC$ , проведенную из вершины  $A$ , с плоскостью  $\alpha$ .

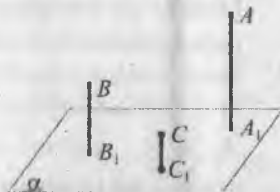


Рис. 148

### Контрольная работа № 5

#### Тема. Перпендикулярность прямой и плоскости

- 1.° Из точки  $M$  к плоскости  $\beta$  проведена наклонная. Проекция наклонной на эту плоскость равна 5 см, а расстояние от точки  $M$  до плоскости равно 12 см. Найдите длину наклонной.
- 2.° Через вершину прямого угла  $C$  прямоугольного треугольника  $ABC$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $CD$ . Найдите длину стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ , если  $AD = 20$  см,  $CD = 16$  см,  $\angle CAB = 60^\circ$ .

- 3.\* На рисунке 149 треугольник  $BCE$  и прямоугольник  $ABCD$  не лежат в одной плоскости,  $\angle ABE = 90^\circ$ . Докажите, что прямая  $DC$  перпендикулярна плоскости  $BCE$ .

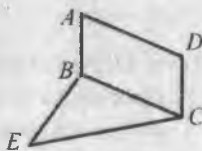


Рис. 149

- 4.\* Из точки  $K$  к плоскости  $\beta$  проведены две наклонные  $KP$  и  $KD$ . Найдите расстояние от точки  $K$  до плоскости  $\beta$ , если  $KD - KP = 2$  см, а длины проекций наклонных равны 9 см и 5 см.
- 5.\*\* Прямая  $SA$  перпендикулярна плоскости четырехугольника  $ABCD$ . Известно, что  $AB = AD$ ,  $\angle DSC = \angle BSC$ . Докажите, что  $BC = CD$ .

## Контрольная работа № 6

Тема. Теорема о трех перпендикулярах.

Перпендикулярность плоскостей

- 1.° Через вершину  $A$  равностороннего треугольника  $ABC$  проведена прямая  $DA$ , перпендикулярная плоскости треугольника, точка  $M$  — середина стороны  $BC$  (рис. 150).

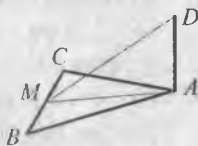


Рис. 150

- 1) Докажите, что прямые  $BC$  и  $MD$  перпендикулярны.
- 2) Вычислите расстояние от точки  $D$  до прямой  $BC$ , если  $AD = 4$  см,  $AB = 6$  см.
- 2.° Через вершину  $A$  прямоугольника  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $AP$ . Найдите длину этого перпендикуляра, если  $BC = 12$  см,  $DB = 13$  см, а точка  $P$  удалена от прямой  $BC$  на  $\sqrt{106}$  см.
- 3.° Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны. Прямая  $l$  — линия их пересечения. В плоскости  $\alpha$  выбрали точку  $M$ , а в плоскости  $\beta$  — точку  $N$  такие, что расстояния от них до прямой  $l$  равны 6 см и 7 см соответственно. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из точек  $M$  и  $N$  к прямой  $l$ , если расстояние между точками  $M$  и  $N$  равно  $\sqrt{110}$  см.
- 4.°° Сторона ромба равна 4 см, а острый угол —  $60^\circ$ . Точка  $M$  удалена от каждой стороны ромба на 5 см. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости ромба.

## Контрольная работа № 7

Тема. Угол между прямой и плоскостью. Угол между плоскостями

- 1.° Из точки  $P$  к плоскости  $\beta$  проведена наклонная, образующая с плоскостью угол  $30^\circ$ . Найдите длину наклонной и расстояние от точки  $P$  до плоскости  $\beta$ , если проекция наклонной на плоскость равна 6 см.
- 2.° Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $l$ . В плоскости  $\alpha$  выбрали точку  $K$  и из нее провели перпендикуляр  $KM$  к плоскости  $\beta$ . Расстояние от точки  $K$  до плоскости  $\beta$  равно  $4\sqrt{3}$  см, а расстояние от точки  $M$  до прямой  $l$  — 4 см. Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .
- 3.° Площадь треугольника  $ABC$  равна  $36$  см<sup>2</sup>. Его ортогональная проекция — равнобедренный прямоугольный треугольник  $A_1B_1C_1$ ,

- гипотенуза которого равна  $6\sqrt{2}$  см. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .
- 4.° Угол между плоскостями треугольников  $ABC$  и  $AKC$  равен  $60^\circ$ ,  $AC = 24$  см,  $BC = BA = 20$  см,  $KC = KA = 15$  см. Найдите длину отрезка  $BK$ .
- 5.\*\* Из точки к плоскости проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы по  $45^\circ$ . Найдите угол между наклонными, если угол между их проекциями равен  $90^\circ$ .

### Контрольная работа № 8

Тема. *Обобщение и систематизация знаний учащихся*

- 1.° Прямая  $p$  не параллельна прямой  $q$ , принадлежащей плоскости  $\gamma$ . Может ли прямая  $p$  быть параллельной плоскости  $\gamma$ ?
- 2.° Прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$  и параллельна плоскости  $\beta$ . Каково взаимное расположение плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ ?<sup>1</sup>
- 3.° Через вершину  $C$  треугольника  $ABC$ , в котором  $AC = BC$ , проведен перпендикуляр  $KC$  к плоскости треугольника. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $ABK$ , если  $AB = 12$  см,  $AK = 10$  см,  $KC = 4$  см.
- 4.° Точка  $F$  равноудалена от всех вершин прямоугольника со сторонами 12 см и 16 см и находится на расстоянии 5 см от плоскости прямоугольника. Найдите расстояние от точки  $F$  до вершин прямоугольника.
- 5.° Точка  $K$  находится на расстоянии 4 см от плоскости  $\alpha$ . Наклонные  $KA$  и  $KB$  образуют с плоскостью  $\alpha$  углы  $45^\circ$  и  $30^\circ$  соответственно, а угол между наклонными равен  $135^\circ$ . Найдите расстояние между точками  $A$  и  $B$ .
- 6.\*\* Через сторону правильного треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол  $30^\circ$ . Найдите углы, которые образуют две другие стороны треугольника с этой плоскостью.



<sup>1</sup> Ответ на вопрос задачи не требует обоснования.

## ИТОГОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

## Итоговая контрольная работа № 1

Тема. *Введение в стереометрию. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве*

## Вариант 1

## Часть первая

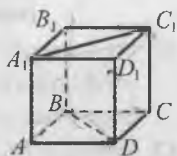
Задания 1 - 10 содержат по четыре варианта ответов, из которых только ОДИН ответ ПРАВИЛЬНЫЙ. Выберите правильный ответ и отметьте его в бланке ответов.

1. Сколько плоскостей можно провести через три точки?  
А) одну; В) одну или бесконечно много;  
Б) бесконечно много; Г) одну или ни одной.
2. Две прямые не параллельны и не пересекаются. Сколько плоскостей можно провести через эти прямые?  
А) одну; Б) две; В) ни одной; Г) бесконечно много.
3. Точка  $M$  лежит вне плоскости треугольника  $ABC$ . Каково взаимное расположение прямых  $AM$  и  $BC$ ?

- А) пересекаются; В) скрещивающиеся;  
Б) параллельны; Г) определить невозможно.

4. На рисунке изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Среди данных пар прямых укажите пару параллельных прямых.

- А)  $AB$  и  $A_1 C_1$ ; Б)  $AD$  и  $BB_1$ ; В)  $BC$  и  $A_1 D_1$ ; Г)  $A_1 B_1$  и  $BD$ .



5. Боковые стороны трапеции параллельны плоскости  $\alpha$ . Каково взаимное расположение плоскости  $\alpha$  и плоскости трапеции?  
А) параллельны; В) совпадают;  
Б) пересекаются; Г) определить невозможно.
6. Прямые  $a$  и  $b$  параллельны. Сколько существует плоскостей, которые проходят через прямую  $a$  и параллельны прямой  $b$ ?

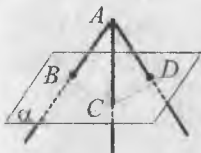
- А) одна; Б) две; В) бесконечно много; Г) ни одной.

7. Дан треугольник  $ABC$ . Плоскость, параллельная прямой  $AB$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $M$ , а сторону  $BC$  — в точке  $K$ . Какова длина отрезка  $MK$ , если точка  $M$  — середина стороны  $AC$  и  $AB = 12$  см?

- А) 12 см; Б) 6 см; В) 4 см; Г) определить невозможно.

8. На рисунке изображены точка  $A$ , лежащая вне плоскости  $\alpha$ , и точки  $B$ ,  $C$  и  $D$ , принадлежащие этой плоскости. Укажите линию пересечения плоскостей  $ABC$  и  $ACD$ .

- А)  $BC$ ; Б)  $CD$ ; В)  $AD$ ; Г)  $AC$ .

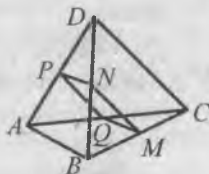


9. Какая из данных фигур не может быть параллельной проекцией на плоскость прямоугольника?
- А) отрезок;                                  В) трапеция;  
 Б) квадрат;                                  Г) произвольный параллелограмм.
10. Какое из утверждений верно?
- А) если прямая  $a$  не параллельна прямой  $b$ , лежащей в плоскости  $\alpha$ , то прямая  $a$  обязательно не параллельна плоскости  $\alpha$ ;
- Б) если прямая  $a$ , не лежащая в плоскости  $\alpha$ , параллельна прямой  $b$  этой плоскости, то прямая  $a$  обязательно параллельна плоскости  $\alpha$ ;
- В) если прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$ , а прямая  $b$  принадлежит плоскости  $\alpha$ , то прямая  $a$  обязательно пересекает прямую  $b$ ;
- Г) если две прямые в пространстве не имеют общих точек, то они параллельны.

### Часть вторая

Решите задания 11 – 14. Запишите ответ в бланк ответов.

11. Отрезок  $AB$  не пересекает плоскость  $\alpha$ , точки  $A$  и  $B$  удалены от этой плоскости на 9 см и 13 см. Чему равно расстояние от середины отрезка  $AB$  до плоскости  $\alpha$ ?
12. Точки  $A, B, C$  и  $D$ , изображенные на рисунке, не лежат в одной плоскости. Точки  $M, N, P$  и  $Q$  — середины отрезков  $BC, BD, AD$  и  $AC$  соответственно,  $AB = 14$  см,  $CD = 18$  см. Вычислите периметр четырехугольника  $MNPQ$ .
13. Через точку пересечения медиан треугольника  $ABC$  параллельно прямой  $AB$  проведена плоскость, пересекающая стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Найдите длину отрезка  $DE$ , если  $AB = 18$  см.
14. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. Из точки  $O$ , не принадлежащей этим плоскостям и не находящейся между ними, проведены два луча. Один из них пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $C_1$  и  $D_1$ , а другой — в точках  $C_2$  и  $D_2$  соответственно. Найдите длину отрезка  $C_1C_2$ , если он на 5 см меньше отрезка  $D_1D_2$ ,  $OC_1 = 4$  см,  $C_1D_1 = 10$  см.



**Часть третья**

Решение задач 15 и 16 должно содержать обоснование, в нем надо записать последовательные логические действия и объяснения.

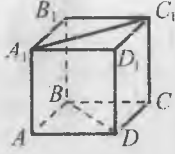
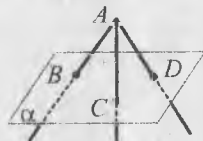
15. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями трех последовательных вершин правильного шестиугольника. Постройте проекции остальных трех вершин этого шестиугольника.
16. Постройте сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью, проходящей через точки  $D$ ,  $E$  и  $F$ , которые принадлежат соответственно ребрам  $AB$ ,  $BC$  и  $SC$ , причем прямые  $DE$  и  $AC$  не параллельны.



## Вариант 2

## Часть первая

Задания 1 – 10 содержат по четыре варианта ответов, из которых только ОДИН ответ ПРАВИЛЬНЫЙ. Выберите правильный ответ и отметьте его в бланке ответов.

- Сколько плоскостей можно провести через две прямые?  
 А) одну; В) одну или ни одной;  
 Б) бесконечно много; Г) одну или бесконечно много.
  - Прямые  $a$  и  $b$  параллельны плоскости  $\alpha$ . Каково взаимное расположение прямых  $a$  и  $b$ ?  
 А) обязательно параллельны; В) обязательно скрещивающиеся;  
 Б) обязательно пересекаются; Г) определить невозможно.
  - Точка  $M$  лежит вне плоскости квадрата  $ABCD$ . Каково взаимное расположение прямых  $MB$  и  $AC$ ?  
 А) определить невозможно; В) параллельны;  
 Б) пересекаются; Г) скрещивающиеся.
  - На рисунке изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Среди данных пар прямых укажите пару параллельных прямых.  
 А)  $A_1 D$  и  $B_1 C_1$ ; В)  $A_1 B_1$  и  $A_1 C_1$ ;  
 Б)  $AA_1$  и  $BD$ ; Г)  $DC$  и  $A_1 B_1$ .
- 
- Диагонали параллелограмма параллельны плоскости  $\alpha$ . Каково взаимное расположение плоскости  $\alpha$  и плоскости параллелограмма?  
 А) совпадают; В) параллельны;  
 Б) пересекаются; Г) определить невозможно.
  - Прямые  $a$  и  $b$  — скрещивающиеся. Сколько существует плоскостей, которые проходят через прямую  $a$  и параллельны прямой  $b$ ?  
 А) одна; Б) две; В) бесконечно много; Г) ни одной.
  - Дан треугольник  $ABC$ . Плоскость, параллельная прямой  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  в точке  $D$ , а сторону  $AC$  — в точке  $E$ . Какова длина стороны  $BC$ , если точка  $D$  — середина отрезка  $AB$  и  $DE = 8$  см?  
 А) 8 см; Б) 12 см; В) 16 см; Г) определить невозможно.
  - На рисунке изображены точка  $A$ , лежащая вне плоскости  $\alpha$ , и точки  $B$ ,  $C$  и  $D$ , принадлежащие этой плоскости. Укажите линию пересечения плоскостей  $ACD$  и  $ABD$ .  
 А)  $BC$ ; Б)  $CD$ ; В)  $AD$ ; Г)  $AC$ .
- 



9. Какое из утверждений верно?

- А) если прямая в пространстве пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и вторую прямую;
- Б) если прямая параллельна плоскости, то она параллельна любой прямой этой плоскости;
- В) если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и вторую плоскость;
- Г) если две прямые в пространстве не пересекаются, то они не лежат в одной плоскости.

10. Какая из данных фигур не может быть параллельной проекцией на плоскость равнобокой трапеции?

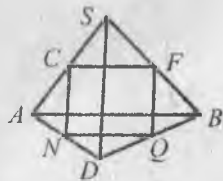
- А) прямоугольная трапеция;
- Б) равнобокая трапеция;
- В) отрезок;
- Г) параллелограмм.

### Часть вторая

Решите задания 11 - 14. Запишите ответ в бланк ответов.

11. Через концы отрезка  $DP$  и его середину  $A$  проведены параллельные прямые, которые пересекают некоторую плоскость  $\varphi$  в точках  $D_1$ ,  $P_1$  и  $A_1$  соответственно. Найдите длину отрезка  $PP_1$ , если отрезок  $DP$  не пересекает плоскость  $\varphi$  и  $DD_1 = 25$  см,  $AA_1 = 13$  см.

12. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $D$  и  $S$ , изображенные на рисунке, не лежат в одной плоскости. Точки  $F$ ,  $Q$ ,  $N$ ,  $C$  — середины отрезков  $BS$ ,  $DB$ ,  $AD$  и  $AS$  соответственно,  $SD = AB = 30$  см. Вычислите периметр четырехугольника  $FQNC$ .



13. Точка  $M$  лежит вне плоскости параллелограмма  $ABCD$ . Через прямую  $AB$  проведена плоскость  $\alpha$ , пересекающая прямые  $MC$  и  $MD$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Чему равна длина отрезка  $EF$ , если  $ME : EC = 3 : 2$  и  $AB = 20$  см?
14. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны. Через точку  $D$ , находящуюся между этими плоскостями, проведены две прямые. Одна из них пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $M_1$  и  $N_1$ , а вторая — в точках  $M_2$  и  $N_2$  соответственно. Найдите длину отрезка  $M_1M_2$ , если он на 8 см больше отрезка  $N_1N_2$ ,  $N_1M_1 = 30$  см,  $DN_1 = 5$  см.

**Часть третья**

Решение задач 15 и 16 должно содержать обоснование, в нем надо записать последовательные логические действия и объяснения.

15. Точки  $A$ ,  $B$  и  $O$ , не лежащие на одной прямой, являются соответственно параллельными проекциями двух соседних вершин квадрата и его центра. Постройте изображение квадрата.
16. Постройте сечение прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $K$  и  $N$ , которые принадлежат соответственно ребрам  $AB$ ,  $BC$  и  $CC_1$ , причем прямые  $MK$  и  $AC$  не параллельны.

## Вариант 3

## Часть первая

Задания 1 – 10 содержат по четыре варианта ответов, из которых только ОДИН ответ ПРАВИЛЬНЫЙ. Выберите правильный ответ и отметьте его в бланке ответов.

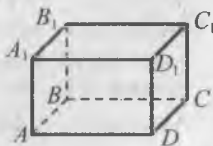
1. Сколько плоскостей можно провести через две точки?

- А) одну;      Б) две;      В) бесконечно много;      Г) ни одной.

2. Точки  $D$ ,  $E$  и  $F$  таковы, что  $DE = 10$  см,  $DF = 6$  см,  $EF = 4$  см. Сколько плоскостей можно провести через точки  $D$ ,  $E$  и  $F$ ?

- А) одну;      Б) две;      В) ни одной;      Г) бесконечно много.

3. На рисунке изображен прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Какая из данных пар прямых является парой скрещивающихся прямых?



- А)  $AA_1$  и  $CC_1$ ;      В)  $AD$  и  $B_1 C_1$ ;  
Б)  $BC$  и  $DD_1$ ;      Г)  $A_1 B_1$  и  $BB_1$ .

4. Прямая  $m$  проходит через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  и не лежит в его плоскости. Каково взаимное расположение прямых  $m$  и  $BC$ ?

- А) скрещивающиеся;      В) параллельны;  
Б) пересекаются;      Г) определить невозможно.

5. Сторона  $AC$  треугольника  $ABC$ , изображенного на рисунке, принадлежит плоскости  $\alpha$ , точки  $M$  и  $K$  – середины сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника соответственно, точка  $B$  находится вне плоскости  $\alpha$ . Каково взаимное расположение прямой  $MK$  и плоскости  $\alpha$ ?

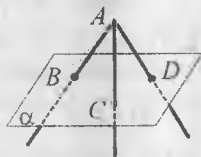


- А) прямая и плоскость пересекаются;  
Б) прямая и плоскость параллельны;  
В) прямая принадлежит плоскости;  
Г) определить невозможно.

6. Треугольник  $ABC$  и плоскость  $\alpha$  расположены так, что прямые  $AB$  и  $BC$  параллельны плоскости  $\alpha$ . Каково взаимное расположение прямой  $AC$  и плоскости  $\alpha$ ?

- А) прямая пересекает плоскость;  
Б) прямая параллельна плоскости;  
В) прямая принадлежит плоскости;  
Г) определить невозможно.

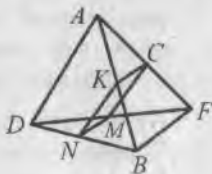
7. Прямые  $a$  и  $b$  скрещивающиеся, точки  $A$  и  $A_1$  принадлежат прямой  $a$ , точки  $B$  и  $B_1$  — прямой  $b$ . Каково взаимное расположение прямых  $AB$  и  $A_1B_1$ ?
- А) пересекаются;                      В) параллельны;  
 Б) скрещивающиеся;                Г) определить невозможно.
8. На рисунке изображена точка  $A$ , лежащая вне плоскости  $\alpha$ , и точки  $B$ ,  $C$  и  $D$ , принадлежащие этой плоскости. Укажите линию пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $ABC$ .
- А)  $BC$ ;    Б)  $CD$ ;    В)  $AD$ ;    Г)  $AC$ .
9. Прямая  $a$  и плоскость  $\alpha$  параллельны. Сколько плоскостей, параллельных плоскости  $\alpha$ , можно провести через прямую  $a$ ?
- А) одну;    Б) две;    В) бесконечно много;    Г) ни одной.
10. Какая из данных фигур не может быть параллельной проекцией на плоскость пары параллельных прямых?
- А) пара точек;                              В) две пересекающиеся прямые;  
 Б) прямая;                                      Г) две параллельные прямые.



### Часть вторая

Решите задания 11 – 14. Запишите ответ в бланк ответов.

11. Точки  $A$  и  $C$  принадлежат плоскости  $\alpha$ , точки  $B$  и  $D$  — плоскости  $\beta$ . Какова длина отрезка  $BD$ , если  $AC = 14$  см,  $AB \parallel CD$ ,  $\alpha \parallel \beta$ ?
12. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $D$  и  $F$ , изображенные на рисунке, не лежат в одной плоскости. Точки  $N$ ,  $M$ ,  $C$ ,  $K$  — середины отрезков  $BD$ ,  $DF$ ,  $FA$  и  $AB$  соответственно,  $BF = 24$  см,  $AD = 18$  см. Вычислите периметр четырехугольника  $NMCK$ .
13. Плоскость  $\alpha$  пересекает стороны  $MF$  и  $MK$  треугольника  $MFK$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно и параллельна стороне  $FK$ ,  $AB = 12$  см,  $AM : AF = 3 : 5$ . Найдите длину стороны  $FK$  треугольника.
14. Даны треугольник  $ABC$  и плоскость  $\alpha$ , не пересекающая его. Через вершины треугольника  $ABC$  и середину  $M$  его медианы  $BD$  проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $M_1$  соответственно. Найдите длину отрезка  $MM_1$ , если  $AA_1 = 9$  см,  $BB_1 = 12$  см,  $CC_1 = 19$  см.



**Часть третья**

Решение задач 15 и 16 должно содержать обоснование, в нем надо записать последовательные логические действия и объяснения.

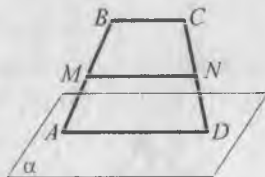
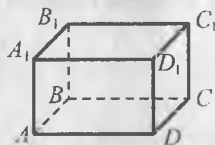
15. Точки  $A$ ,  $B$  и  $O$ , не лежащие на одной прямой, являются соответственно параллельными проекциями двух вершин правильного треугольника и его центра. Постройте изображение этого треугольника.
16. Постройте сечение куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, которая проходит через точку  $M$ , принадлежащую ребру  $AD$ , и параллельна плоскости  $A_1 AC$ .

## Вариант 4

## Часть первая

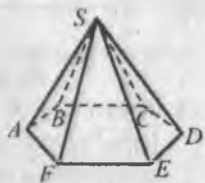
Задания 1 – 10 содержат по четыре варианта ответов, из которых только ОДИН ответ ПРАВИЛЬНЫЙ. Выберите правильный ответ и отметьте его в бланке ответов.

- Сколько плоскостей можно провести через одну прямую?
  - А) одну;
  - Б) бесконечно много;
  - В) ни одной;
  - Г) бесконечно много или ни одной.
- Точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  таковы, что  $MK = 8$  см,  $KN = 9$  см,  $MN = 6$  см. Сколько плоскостей можно провести через точки  $M$ ,  $K$  и  $N$ ?
  - А) одну;
  - Б) две;
  - В) бесконечно много;
  - Г) ни одной.
- На рисунке изображен прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Какая из данных пар прямых является парой параллельных прямых?
  - А)  $AA_1$  и  $AB$ ;
  - Б)  $BB_1$  и  $CD$ ;
  - В)  $A_1 B_1$  и  $CD$ ;
  - Г)  $DD_1$  и  $AB$ .
- Прямая  $n$  параллельна стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  и не лежит в его плоскости. Каково взаимное расположение прямых  $n$  и  $AB$ ?
  - А) пересекаются;
  - Б) параллельны;
  - В) скрещивающиеся;
  - Г) определить невозможно.
- Основание  $AD$  трапеции  $ABCD$ , изображенной на рисунке, принадлежит плоскости  $\alpha$ , а основание  $BC$  не принадлежит этой плоскости. Точки  $M$  и  $N$  – середины боковых сторон трапеции. Каково взаимное расположение прямой  $MN$  и плоскости  $\alpha$ ?
  - А) прямая и плоскость пересекаются;
  - Б) прямая и плоскость параллельны;
  - В) прямая принадлежит плоскости;
  - Г) определить невозможно.
- Параллелограмм  $ABCD$  и плоскость  $\alpha$  расположены так, что прямые  $AC$  и  $BD$  параллельны плоскости  $\alpha$ . Каково взаимное расположение прямой  $AB$  и плоскости  $\alpha$ ?
  - А) прямая пересекает плоскость;
  - Б) прямая принадлежит плоскости;
  - В) прямая параллельна плоскости;
  - Г) установить невозможно.



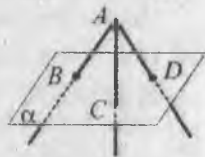
7. На рисунке изображена пирамида  $SAB CDEF$ , основанием которой является правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Плоскость какой из боковых граней параллельна прямой  $AB$ ?

- А)  $CSD$ ;      В)  $ESF$ ;  
 Б)  $DSE$ ;      Г) такая грань не существует.



8. На рисунке изображена точка  $A$ , лежащая вне плоскости  $\alpha$ , и точки  $B, C$  и  $D$ , принадлежащие этой плоскости. Укажите линию пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $ACD$ .

- А)  $BC$ ;      Б)  $CD$ ;      В)  $AD$ ;      Г)  $AC$ .



9. Точка  $A$  не принадлежит плоскости  $\alpha$ . Сколько существует прямых, проходящих через точку  $A$  и параллельных плоскости  $\alpha$ ?

- А) одна;      Б) две;      В) бесконечно много;      Г) ни одной.

10. Какая из данных фигур не может быть параллельной проекцией на плоскость пары скрещивающихся прямых?

- А) прямая;      В) две пересекающиеся прямые;  
 Б) прямая и точка вне ее;      Г) две параллельные прямые.

**Часть вторая**

Решите задания 11 - 14. Запишите ответ в бланк ответов.

11. Отрезки  $AB$  и  $CD$  параллельных прямых содержатся между параллельными плоскостями. Какова длина отрезка  $CD$ , если  $AB = 5$  см?

12. Точки  $M, N, P$  и  $F$ , изображенные на рисунке, не лежат в одной плоскости. Точки  $A, B, Q, T$  — середины отрезков  $MF, PF, PN$  и  $MN$  соответственно,  $MP = FN = 10$  см. Вычислите периметр четырехугольника  $ABQT$ .



13. Плоскость  $\beta$  пересекает стороны  $CF$  и  $CD$  треугольника  $CDF$  в точках  $M$  и  $Q$  соответственно и параллельна стороне  $FD$ ,  $MQ = 6$  см,  $FD = 25$  см,  $MC = 10$  см. Найдите длину стороны  $FC$  треугольника.

14. Даны параллелограмм  $ABCD$  и плоскость  $\alpha$ , не пересекающая его. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  соответственно. Найдите длину отрезка  $CC_1$ , если  $AA_1 = 10$  см,  $BB_1 = 16$  см,  $DD_1 = 14$  см.

**Часть третья**

Решение задач 15 и 16 должно содержать обоснование, в нем надо записать последовательные логические действия и объяснения.

15. Точки  $A$ ,  $B$  и  $M$ , не лежащие на одной прямой, являются параллельными проекциями двух соседних вершин квадрата и середины его противоположной стороны соответственно. Постройте изображение этого квадрата.
16. Постройте сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью, которая проходит через точку  $M$ , принадлежащую ребру  $CD$ , и параллельна плоскости  $BSD$ .





Итоговая контрольная работа № 2

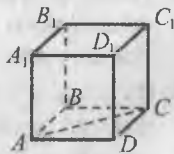
Тема. *Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве*

Вариант 1

Часть первая

Задания 1 – 10 содержат по четыре варианта ответов, из которых только ОДИН ответ ПРАВИЛЬНЫЙ. Выберите правильный ответ и отметьте его в бланке ответов.

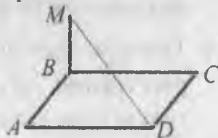
- Точка  $A$  лежит вне плоскости  $\alpha$ . Сколько можно провести через точку  $A$  прямых, перпендикулярных плоскости  $\alpha$ ?  
 А) одну;      Б) две;      В) бесконечно много;      Г) ни одной.
- Точка  $A$  удалена от плоскости  $\alpha$  на 8 см. Из этой точки проведена к плоскости  $\alpha$  наклонная  $AB$  длиной 10 см. Найдите длину проекции наклонной  $AB$  на плоскость  $\alpha$ .  
 А) 2 см;      Б) 8 см;      В) 6 см;      Г) 5 см.
- Из точки  $M$ , лежащей вне плоскости  $\alpha$ , проведены к ней перпендикуляр  $MA$  и наклонные  $MB$  и  $MC$ . Известно, что  $AB < AC$ . Сравните длины наклонных  $MB$  и  $MC$ .  
 А)  $MB > MC$ ;      В)  $MB < MC$ ;  
 Б)  $MB = MC$ ;      Г) сравнить невозможно.
- На рисунке изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$ . Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $DD_1$ .



- А)  $a$ ;      Б)  $\frac{a}{2}$ ;      В)  $a\sqrt{2}$ ;      Г)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

- Даны три плоскости  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  такие, что  $\alpha \perp \beta$ ,  $\beta \perp \gamma$ . Укажите верное утверждение.  
 А) плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$  параллельны;  
 Б) плоскости  $\alpha$  и  $\gamma$  перпендикулярны;  
 В) угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\gamma$  равен  $45^\circ$ ;  
 Г) ни одно из утверждений А)–В) не является верным.

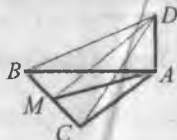
- Прямая  $MB$  перпендикулярна плоскости параллелограмма  $ABCD$ , изображенного на рисунке. Укажите угол между прямой  $MD$  и плоскостью параллелограмма.



- Из точки  $B$  к плоскости  $\alpha$  проведена наклонная  $BC$ , образующая с плоскостью  $\alpha$  угол  $30^\circ$ . Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $\alpha$ , если проекция наклонной  $BC$  на эту плоскость равна 12 см.

- А) 6 см;      Б)  $4\sqrt{3}$  см;      В)  $12\sqrt{3}$  см;      Г) 24 см.

8. Прямая  $DA$  перпендикулярна плоскости равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC$ , изображенного на рисунке, точка  $M$  — середина стороны  $BC$ . Укажите угол между плоскостями  $ABC$  и  $DBC$ .



А)  $\angle DBA$ ; Б)  $\angle DMA$ ; В)  $\angle DCA$ ; Г)  $\angle DAM$ .

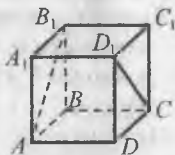
9. Площадь многоугольника равна  $16 \text{ см}^2$ , а площадь его ортогональной проекции на некоторую плоскость —  $8\sqrt{2} \text{ см}^2$ . Чему равен угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции?

А)  $0^\circ$ ; Б)  $30^\circ$ ; В)  $45^\circ$ ; Г)  $60^\circ$ .

10. На рисунке изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $CD_1$ .

А)  $60^\circ$ ; Б)  $45^\circ$ ; В)  $0^\circ$ ; Г)  $90^\circ$ .



### Часть вторая

Решите задания 11 – 14. Запишите ответ в бланк ответов.

11. Точка  $D$  находится на расстоянии 4 см от каждой из вершин правильного треугольника  $ABC$ , сторона которого равна 6 см. Найдите расстояние от точки  $D$  до плоскости  $ABC$ .
12. Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведены перпендикуляр  $AD$  и наклонные  $AB$  и  $AC$ ,  $AB = 25$  см,  $AC = 17$  см, проекции наклонных на плоскость  $\alpha$  относятся как 5 : 2. Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ .
13. Концы отрезка, длина которого равна  $5\sqrt{5}$  см, принадлежат двум перпендикулярным плоскостям. Расстояния от концов этого отрезка до линии пересечения плоскостей равны 5 см и 8 см. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из концов отрезка на линию пересечения плоскостей.
14. Точка  $M$  равноудалена от сторон квадрата  $ABCD$  и находится на расстоянии  $2\sqrt{3}$  см от плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки  $M$  до стороны квадрата, если сторона квадрата равна 4 см.

**Часть третья**

Решение задач 15 и 16 должно содержать обоснование, в нем надо записать последовательные логические действия и объяснения.

15. Через вершину  $C$  ромба  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $CF$ . Точка  $F$  удалена от диагонали  $BD$  на 25 см. Найдите расстояние от точки  $F$  до плоскости ромба, если  $BD = 20$  см,  $AB = 10\sqrt{5}$  см.
16. Через катет прямоугольного равнобедренного треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол  $60^\circ$ . Найдите углы, которые образуют две другие стороны треугольника с этой плоскостью.

## Вариант 2

## Часть первая

Задания 1 – 10 содержат по четыре варианта ответов, из которых только ОДИН ответ ПРАВИЛЬНЫЙ. Выберите правильный ответ и отметьте его в бланке ответов.

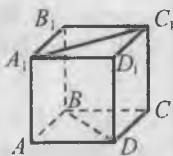
1. Точка  $A$  лежит вне плоскости  $\alpha$ . Сколько можно провести через точку  $A$  плоскостей, перпендикулярных плоскости  $\alpha$ ?
- А) одну;    Б) две;    В) бесконечно много;    Г) ни одной.

2. Точка  $B$  удалена от плоскости  $\beta$  на 12 см. Из этой точки проведена к плоскости  $\beta$  наклонная  $BC$ . Найдите длину наклонной, если длина ее проекции на плоскость  $\beta$  равна 5 см.
- А) 17 см;    Б) 15 см;    В) 13 см;    Г) 11 см.

3. Из точки  $M$ , лежащей вне плоскости  $\alpha$ , проведены к ней перпендикуляр  $MK$  и наклонные  $ME$  и  $MF$ , причем  $ME > MF$ . Сравните проекции этих наклонных на плоскость  $\alpha$ .

- А)  $KE > KF$ ;    В)  $KE < KF$ ;  
Б)  $KE = KF$ ;    Г) сравнить невозможно.

4. На рисунке изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$ . Найдите расстояние между прямыми  $BD$  и  $A_1 C_1$ .

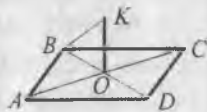


- А)  $a$ ;    Б)  $a\sqrt{2}$ ;    В)  $2a$ ;    Г)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

5. Даны прямая  $m$  и  $n$  и плоскость  $\alpha$  такие, что  $m \parallel n$ ,  $m \perp \alpha$ . Укажите верное утверждение.

- А) прямая  $n$  параллельна плоскости  $\alpha$ ;  
Б) прямая  $n$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ ;  
В) прямая  $n$  лежит в плоскости  $\alpha$ ;  
Г) прямая  $n$  пересекает плоскость  $\alpha$  под углом  $60^\circ$ .

6. Прямая  $KO$  перпендикулярна плоскости ромба  $ABCD$ , изображенного на рисунке. Укажите угол между прямой  $BK$  и плоскостью ромба.



- А)  $\angle BOK$ ;    Б)  $\angle ABK$ ;    В)  $\angle OBK$ ;    Г)  $\angle CBK$ .

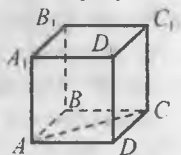
7. Из точки  $K$  к плоскости  $\phi$  проведена наклонная  $KE$  длиной 18 см. Чему равен угол между наклонной  $KE$  и плоскостью  $\phi$ , если точка  $K$  удалена от данной плоскости на 9 см?

- А)  $30^\circ$ ;    Б)  $45^\circ$ ;    В)  $60^\circ$ ;    Г) определить невозможно.

8. Прямая  $MB$  перпендикулярна плоскости квадрата  $ABCD$ , изображенного на рисунке, точка  $K$  — середина стороны  $CD$ . Укажите угол между плоскостью квадрата и плоскостью  $CMD$ .



- А)  $\angle MAB$ ; Б)  $\angle MDB$ ; В)  $\angle MKB$ ; Г)  $\angle MCB$ .
9. Площадь многоугольника равна  $24 \text{ см}^2$ . Найдите площадь ортогональной проекции этого многоугольника на плоскость, образующую угол  $60^\circ$  с плоскостью многоугольника.  
 А)  $12 \text{ см}^2$ ; Б)  $24 \text{ см}^2$ ; В)  $36 \text{ см}^2$ ; Г)  $48 \text{ см}^2$ .
10. На рисунке изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми  $A_1 D_1$  и  $AC$ .  
 А)  $30^\circ$ ; Б)  $45^\circ$ ; В)  $60^\circ$ ; Г)  $90^\circ$ .



### Часть вторая

Решите задания 11 – 14. Запишите ответ в бланк ответов.

11. Точка  $K$  находится на расстоянии 4 см от каждой из вершин правильного треугольника  $ABC$ . Найдите длину стороны треугольника, если точка  $K$  удалена от плоскости  $ABC$  на 2 см.
12. Из точки  $B$  к плоскости  $\gamma$  проведены перпендикуляр  $BO$  и наклонные  $BA$  и  $BC$ . Известно, что  $BA = 12 \text{ см}$ ,  $BC = 30 \text{ см}$ , проекции наклонных на плоскость  $\gamma$  относятся как  $10 : 17$ . Найдите длину проекции наклонной  $BA$  на плоскость  $\gamma$ .
13. Концы отрезка  $AB$  принадлежат двум перпендикулярным плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ . Проекция отрезка  $AB$  на плоскость  $\alpha$  равна 5 см, а его проекция на плоскость  $\beta$  —  $2\sqrt{10}$  см. Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из концов отрезка  $AB$  на линию пересечения плоскостей, равно 4 см. Найдите длину отрезка  $AB$ .
14. Точка  $P$  равноудалена от сторон ромба  $ABCD$  и находится на расстоянии 8 см от его плоскости. Найдите расстояние от точки  $P$  до сторон ромба, если высота ромба равна 12 см.

**Часть третья**

Решение задач 15 и 16 должно содержать обоснование, в нем надо записать последовательные логические действия и объяснения.

15. Через вершину  $A$  прямоугольника  $ABCD$  к его плоскости проведен перпендикуляр  $AK$ . Точка  $K$  удалена от стороны  $BC$  на 15 см. Найдите расстояние от точки  $K$  до стороны  $CD$ , если  $BD = \sqrt{337}$  см,  $AK = 12$  см.
16. Через сторону правильного треугольника проведена плоскость, образующая с двумя другими сторонами треугольника углы по  $60^\circ$ . Найдите угол между плоскостью данного треугольника и проведенной плоскостью.

**Вариант 3**

**Часть первая**

Задания 1 – 10 содержат по четыре варианта ответов, из которых только ОДИН ответ ПРАВИЛЬНЫЙ. Выберите правильный ответ и отметьте его в бланке ответов.

1. Плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых. Как расположена вторая из этих прямых относительно данной плоскости?

- А) параллельна плоскости;                      В) лежит в плоскости;  
 Б) перпендикулярна плоскости;            Г) определить невозможно.

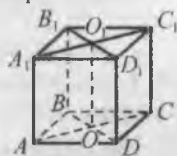
2. Из точки  $C$  к плоскости  $\gamma$  проведена наклонная длиной 17 см. Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\gamma$ , если проекция проведенной наклонной на эту плоскость равна 8 см.

- А) 8 см;                      Б) 9 см;                      В) 12 см;                      Г) 15 см.

3. В пространстве даны прямая  $a$  и точка  $A$  вне ее. Сколько можно провести через точку  $A$  прямых, перпендикулярных прямой  $a$ ?

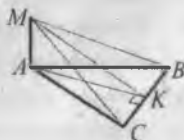
- А) одну;                      В) ни одной;  
 Б) две;                      Г) бесконечно много.

4. На рисунке изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$ . Найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $OO_1$ .



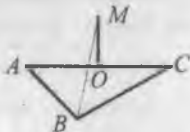
- А)  $a$ ;    Б)  $\frac{a}{2}$ ;    В)  $a\sqrt{2}$ ;    Г)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

5. Через вершину  $A$  правильного треугольника  $ABC$ , изображенного на рисунке, провели прямую  $MA$ , перпендикулярную плоскости треугольника, отрезок  $AK$  — высота треугольника  $ABC$ . Какая из данных плоскостей перпендикулярна плоскости  $MAK$ ?



- А) плоскость  $BMC$ ;                      В) плоскость  $AMC$ ;  
 Б) плоскость  $AMB$ ;                      Г) ни одна из данных плоскостей.

6. Через середину  $O$  стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ , изображенного на рисунке, провели прямую  $MO$ , перпендикулярную плоскости треугольника. Укажите угол между прямой  $MB$  и плоскостью  $ABC$ .

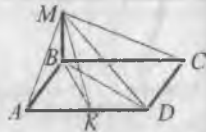


- А)  $\angle ABM$ ;    Б)  $\angle OBM$ ;    В)  $\angle CBM$ ;    Г)  $\angle BOM$ .

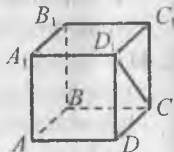
7. Из точки  $P$ , удаленной от плоскости  $\alpha$  на  $4\sqrt{3}$  см, к этой плоскости проведена наклонная. Найдите длину наклонной, если угол между ней и плоскостью  $\alpha$  равен  $60^\circ$ .

- А) 8 см;                      Б) 6 см;                      В)  $8\sqrt{3}$  см;                      Г)  $6\sqrt{3}$  см.

8. Прямая  $MB$  перпендикулярна плоскости прямоугольника  $ABCD$ , изображенного на рисунке, точка  $K$  — середина стороны  $AD$ . Укажите угол между плоскостью прямоугольника и плоскостью  $AMD$ .



- А)  $\angle MAB$ ; Б)  $\angle MKB$ ; В)  $\angle MDB$ ; Г)  $\angle ABM$ .
9. Площадь многоугольника равна площади ортогональной проекции этого многоугольника на некоторую плоскость. Чему равен угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции?



- А)  $0^\circ$ ; Б)  $45^\circ$ ; В)  $90^\circ$ ; Г) такой случай невозможен.
10. На рисунке изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .  
Найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $CD_1$ .
- А)  $30^\circ$ ; Б)  $45^\circ$ ; В)  $60^\circ$ ; Г)  $90^\circ$ .

### Часть вторая

Решите задания 11 – 14. Запишите ответ в бланк ответов.

11. Точка  $M$  находится на расстоянии 8 см от каждой из вершин квадрата  $ABCD$ . Найдите длину стороны квадрата, если точка  $M$  удалена от его плоскости на  $4\sqrt{3}$  см.
12. Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведены перпендикуляр  $AO$  и наклонные  $AB$  и  $AC$ , причем наклонная  $AB$  на 4 см меньше наклонной  $AC$ . Проекции данных наклонных на плоскость  $\alpha$  равны 1 см и 7 см. Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ .
13. Концы отрезка, длина которого равна 10 см, принадлежат двум перпендикулярным плоскостям. Углы между данным отрезком и этими плоскостями равны  $45^\circ$  и  $30^\circ$ . Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из концов отрезка на линию пересечения плоскостей.
14. Точка  $S$  равноудалена от сторон трапеции и находится на расстоянии  $\sqrt{7}$  см от ее плоскости. Найдите расстояние от точки  $S$  до сторон трапеции, если ее высота равна  $6\sqrt{2}$  см.



**Часть третья**

Решение задач 15 и 16 должно содержать обоснование, в нем надо записать последовательные логические действия и объяснения.

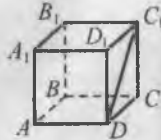
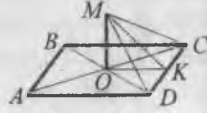
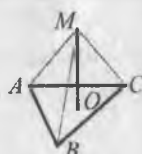
15. Треугольник  $ABC$  – равнобедренный прямоугольный с прямым углом  $C$  и гипотенузой 4 см. Отрезок  $CM$  перпендикулярен плоскости треугольника и равен 2 см. Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$ .
16. Через вершину  $A$  прямоугольника  $ABCD$  проведен перпендикуляр  $MA$  к плоскости прямоугольника. Угол между прямой  $MC$  и плоскостью прямоугольника равен  $30^\circ$ ,  $AD = \sqrt{2}$  см,  $CD = 2$  см. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $MDC$ .



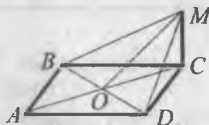
## Вариант 4

## Часть первая

Задания 1 – 10 содержат по четыре варианта ответов, из которых только ОДИН ответ ПРАВИЛЬНЫЙ. Выберите правильный ответ и отметьте его в бланке ответов.

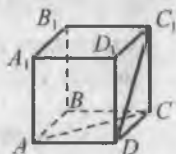
- Прямые  $a$  и  $b$  перпендикулярны одной плоскости. Каково взаимное расположение прямых  $a$  и  $b$ ?  
 А) пересекаются; В) скрещивающиеся;  
 Б) параллельны; Г) определить невозможно.
  - Из точки  $A$ , удаленной от плоскости  $\alpha$  на 20 см, проведена к этой плоскости наклонная  $AC$  длиной 25 см. Найдите длину проекции наклонной  $AC$  на плоскость  $\alpha$ .  
 А) 10 см; Б) 15 см; В) 20 см; Г) 5 см.
  - В пространстве даны прямая  $a$  и точка  $A$ , принадлежащая ей. Сколько можно провести через точку  $A$  прямых, перпендикулярных прямой  $a$ ?  
 А) одну; Б) две; В) ни одной; Г) бесконечно много.
  - На рисунке изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$ . Найдите расстояние между прямыми  $A_1 D_1$  и  $C_1 D$ .  
 А)  $a$ ; Б)  $\frac{a}{2}$ ; В)  $a\sqrt{2}$ ; Г)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .
- 
- Через точку  $O$  пересечения диагоналей квадрата  $ABCD$ , изображенного на рисунке, проведена прямая  $MO$ , перпендикулярная плоскости квадрата, точка  $K$  — середина отрезка  $CD$ . Какая из данных плоскостей перпендикулярна плоскости  $МОК$ ?  
 А) плоскость  $МОС$ ; В) плоскость  $СМD$ ;  
 Б) плоскость  $МОD$ ; Г) ни одна из данных плоскостей.
  - Через точку  $O$ , лежащую внутри треугольника  $ABC$ , изображенного на рисунке, проведена прямая  $MO$ , перпендикулярная плоскости треугольника. Укажите угол между прямой  $MC$  и плоскостью треугольника.  
 А)  $\angle MCA$ ; Б)  $\angle MCB$ ; В)  $\angle CMO$ ; Г)  $\angle MCO$ .
  - Из точки  $M$  к плоскости  $\alpha$  проведена наклонная  $MN$  под углом  $45^\circ$  к плоскости. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости, если длина наклонной равна 14 см.  
 А)  $7\sqrt{2}$  см; Б) 7 см; В)  $28\sqrt{2}$  см; Г) 14 см.
- 
- 

8. Через вершину  $C$  квадрата  $ABCD$ , изображенного на рисунке, проведена прямая  $MC$ , перпендикулярная плоскости квадрата. Укажите угол между плоскостью квадрата и плоскостью  $BMD$ .



- А)  $\angle BMD$ ; Б)  $\angle MBC$ ; В)  $\angle MOD$ ; Г)  $\angle MOC$ .
9. Площадь ортогональной проекции многоугольника равна  $6\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>, а угол между плоскостями многоугольника и его проекции равен  $30^\circ$ . Найдите площадь данного многоугольника.

- А)  $12\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>; Б) 12 см<sup>2</sup>; В)  $9\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>; Г) 9 см<sup>2</sup>.
10. На рисунке изображен куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .



- Найдите угол между прямыми  $AC$  и  $C_1 D$ .
- А)  $30^\circ$ ; Б)  $45^\circ$ ; В)  $60^\circ$ ; Г)  $90^\circ$ .

### Часть вторая

Решите задания 11 – 14. Запишите ответ в бланк ответов.

11. Точка  $F$  находится на расстоянии 9 см от каждой из вершин квадрата  $ABCD$ , сторона которого равна 8 см. Найдите расстояние от точки  $F$  до плоскости квадрата.
12. Из точки  $M$  к плоскости  $\alpha$  проведены перпендикуляр  $MO$  и наклонные  $MA$  и  $MB$ , разность которых равна 2 см. Проекции наклонных на плоскость  $\alpha$  равны 9 см и 5 см. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\alpha$ .
13. Концы отрезка, длина которого равна 25 см, принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, а расстояния от его концов до линии пересечения плоскостей равны 16 см и 15 см. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из концов отрезка на линию пересечения плоскостей.
14. Сторона правильного треугольника равна  $6\sqrt{3}$  см. Точка  $M$  равноудалена от сторон треугольника и находится на расстоянии  $6\sqrt{2}$  см от его плоскости. Найдите расстояние от точки  $M$  до сторон треугольника.

**Часть третья**

Решение задач 15 и 16 должно содержать обоснование, в нем надо записать последовательные логические действия и объяснения.

15. Треугольник  $ABC$  – равнобедренный прямоугольный с прямым углом  $C$  и гипотенузой 6 см. Отрезок  $CK$  перпендикулярен плоскости треугольника. Расстояние от точки  $K$  до прямой  $AB$  равно 5 см. Найдите длину отрезка  $CK$ .
16. Через вершину  $C$  прямоугольника  $ABCD$  проведен перпендикуляр  $MC$  к плоскости прямоугольника. Угол между прямой  $MA$  и плоскостью прямоугольника равен  $45^\circ$ ,  $AD = 2$  см,  $DC = 2\sqrt{2}$  см. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $ABM$ .

**ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ  
К ТРЕНИРОВОЧНЫМ УПРАЖНЕНИЯМ**

**Вариант 1**

10.  $9^\circ$ . 11.  $20^\circ$ ,  $60^\circ$ . 12.  $24^\circ$ . 15. *Указание.* Докажите, что  $BE \parallel DF$ , и воспользуйтесь теоремой Фалеса. 16. 2 см. *Указание.* На рисунке 151  $CC_1 = CC_2 - C_1C_2 = \frac{BB_2}{2} - C_1C_2$ . 19. 2 см. 24. 13 см и 15 см. 26. 21 см и 28 см. 27. 9 см. 32. 7,2 см. 35.  $22\sqrt{14}$  см<sup>2</sup>. 36. 18 см. 37. 5 см, 3 см.
38.  $\frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)} \cdot \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$ . 39.  $\frac{c \sin \alpha \cos \alpha}{\sin(45^\circ + \alpha)}$ . 40. 18 см, 24 см. 42. 216 см<sup>2</sup>.
45.  $\frac{160\sqrt{3}}{3}$  см<sup>2</sup>. 46.  $64^\circ$ ,  $64^\circ$ ,  $116^\circ$ ,  $116^\circ$ . 47. 9 см и 23 см. 48. 8,5 см.
54.  $40^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $60^\circ$ . 56. 180 см<sup>2</sup>. 60. 24 см. 62.  $\frac{100\pi}{9}$  см<sup>2</sup>. 67. 48 см<sup>2</sup>.
69. (2; 0). 74.  $C(2; -1.5)$ . 82. 1)  $\sqrt{19}$ . *Указание.*  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2$ .
87. *Указание.* Примените метод доказательства от противного.
93. *Указание.* Проведите прямую, пересекающую каждую из трех данных прямых, и выберите точку, не принадлежащую плоскости  $\alpha$ . Плоскость, проходящая через проведенную прямую и выбранную точку, — искомая.
95. *Указание.* Примените метод доказательства от противного.
98. *Указание.* Проведите плоскость через две произвольные прямые. Примените теорему о принадлежности прямой плоскости.
101. *Указание.* Точки  $M$ ,  $D$  и  $K$  лежат на прямой пересечения плоскостей  $ABC$  и  $\alpha$ .
102. Прямые  $MN$  и  $KP$  (рис. 152) — искомые.
107. Да.
108. *Указание.* Указанные точки лежат на линии пересечения плоско-

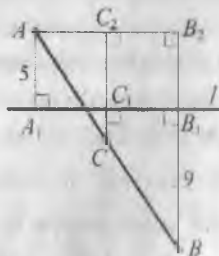


Рис. 151



Рис. 152

стей  $\beta$  и  $MNK$ . 111.  $\frac{3a}{2}, \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ . 112. Указание. 1) Пусть данные точки  $M$  и  $K$  принадлежат соответственно боковым ребрам  $AA_1$  и  $BB_1$  призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Тогда искомая точка является точкой пересечения прямых  $MK$  и  $AB$ ; 2) пусть данные точки  $M$  и  $K$  принадлежат соответственно боковым ребрам  $AA_1$  и  $CC_1$  призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Тогда искомая точка является точкой пересечения прямых  $MK$  и  $AC$ ; 3) пусть данные точки  $M$  и  $K$  принадлежат соответственно боковому ребру  $AA_1$  и грани  $CC_1 D_1 D$ . В плоскости грани  $CC_1 D_1 D$  через точку  $K$  проведем прямую, параллельную  $CC_1$ , которая пересечет прямую  $CD$  в точке  $N$ . Тогда искомая точка является точкой пересечения прямых  $MK$  и  $AN$ . 113. Указание. Найдите точку  $T$  пересечения прямых  $MK$  и  $AB$ . Тогда прямая  $PT$  — линия пересечения плоскости сечения и плоскости  $ABC$ . 114. Указание. Найдите точку  $M$  пересечения прямых  $BC$  и  $AD$ . Точка пересечения прямой  $MD_1$  и ребра  $AA_1$  является точкой пересечения секущей плоскости  $BCD_1$  и ребра  $AA_1$ . 115. Указание. Найдите точку  $P$  пересечения прямых  $FE$  и  $CC_1$ . Тогда прямая  $AP$  — линия пересечения плоскости сечения и плоскости грани  $AA_1 C_1 C$ . 116. Указание. Найдите точку  $E$  пересечения прямых  $D_1 F$  и  $AD$ . Тогда прямая  $CE$  — линия пересечения плоскости сечения и плоскости основания  $ABCD$ . 129. Указание. Докажите, что четырехугольник  $MNQP$  — параллелограмм. 130. 5 см. 140.  $8\frac{1}{3}$  см. 141. Указание. Через точку  $E$  проведите прямые, параллельные прямым  $MN$  и  $KP$ . 142. 2 см. 152. 6 см. 156. Указание. Проведите в плоскости  $\alpha$  прямую  $b$ , параллельную прямой  $a$ , а в плоскости  $\beta$  — прямую  $c$ , параллельную прямой  $b$ . 157. Указание. Выберите на плоскости  $\alpha$  произвольную точку и проведите плоскость через эту точку и прямую  $b$ . 158.  $(10 + 9\sqrt{2})$  см. 160. Указание. В плоскости грани  $AA_1 D_1 D$  через точку  $K$  проведите прямую, параллельную прямой  $AA_1$ . Пусть  $K_1$  — точка пересечения проведенной прямой и ребра  $AD$ . Найдите точку  $P$  пересечения прямых  $K_1 B$  и  $KF$ . Далее найдите точки пересечения прямой  $PE$  с прямыми  $BC$  и  $AD$ . 161. Ука-

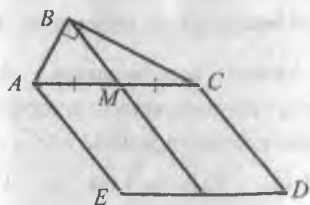


Рис. 153

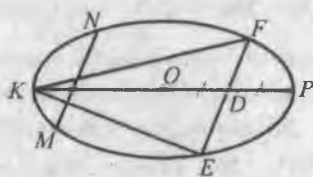


Рис. 154

зание. В плоскости грани  $AA_1B_1B$  через точку  $H$  проведите прямую, параллельную  $AA_1$ . Пусть эта прямая пересекает  $AB$  в точке  $H_1$ . Аналогично  $M_1$  — точка пересечения  $CD$  и прямой, которая параллельна  $CC_1$  и проходит через точку  $M$ . Найдите точку  $F$  пересечения прямых  $NM$  и  $H_1M_1$ . Далее проведите прямую  $FE$  и найдите точки ее пересечения с прямыми  $AB$  и  $CD$ . 166. Нет. 171. Квадрат. 173. Указание. Искомая проекция биссектрисы делит отрезок  $A_1C_1$  в отношении  $3 : 5$ , считая от точки  $A_1$ . 174. 3 решения. Указание. Постройте точку, симметричную одной из данных точек относительно середины отрезка, соединяющего две другие точки. 175. Указание. Стороны  $AE$  и  $CD$  проекции квадрата  $ACDE$  (рис. 153) параллельны и равны удвоенной медиане  $BM$  треугольника  $ABC$ . 177. Указание. Проведите произвольную хорду  $MN$  окружности (рис. 154). Через ее середину и центр окружности проведите диаметр  $KP$ . Через середину  $D$  отрезка  $OP$  проведите хорду  $EF$ , параллельную  $MN$ . Треугольник  $KFE$  — искомый. 178. Указание. Через точки  $A$  и  $C$  проведите прямые, параллельные прямым  $BC$  и  $AB$  соответственно. Точка пересечения этих прямых — центр искомого правильного шестиугольника. 179. Указание. Искомые высоты параллельны прямой, проходящей через середины оснований трапеции. 180. Указание. При параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой. Примените свойство биссектрисы треугольника. 181. Указание. Искомая прямая проходит через точки пересечения прямых  $AB$  и  $A_1B_1$  и прямых  $BC$  и  $B_1C_1$ . 188. Прямоугольный. 191. 16 см. 192. 19,5 см. 193.  $4\sqrt{5}$  см. 194.  $3\sqrt{6}$  см. 198.  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\sqrt{2a^2 + b^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

199.  $30^\circ$ . 200.  $\frac{2}{3}\sqrt{55}$ . Указание. Проекция точки  $M$  на плоскость  $ABC$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .
201. Указание. Проведите прямую  $OF$ , перпендикулярную плоскости  $ABC$ . Докажите, что прямая  $BD$  перпендикулярна прямым  $FO$  и  $AC$ .
202.  $90^\circ$ . 203. 10 см. 204. 6 см. 210. 6 см. 211.  $4\sqrt{3}$  см и 4 см.
212. 12 см. 215. 6 см. 217. 4 см и 8 см. 218.  $4\sqrt{7}$  см. 219. 1,5 см; 22,5 см. 220. 12 см. 221.  $45^\circ$ . 222. 10 см или  $\sqrt{145}$  см. 223.  $7\sqrt{5}$  см.
- Указание. Воспользуйтесь свойством параллелограмма:  $2(AB^2 + AD^2) = AC^2 + BD^2$ .
224. Указание. Из подобия треугольников  $CMA$  и  $AMB$  (рис. 155) имеем:  $\frac{AC}{AB} = \frac{AM}{MB}$  и  $\frac{AC}{AB} = \frac{MC}{AM}$ .
- Перемножив эти равенства, получим:  $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{MC}{MB}$ .
227.  $\sqrt{b^2 - a^2}$ .

230.  $\sqrt{n^2 + a^2} \cos^2 \beta$ . 233. Указание. Проекция искомого перпендикуляра параллельна сторонам  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ .
235. 12 см.
236. 5 см,  $\sqrt{41}$  см. Указание. Высота параллелограмма, проведенная к стороне  $CD$ , равна 10 см, откуда  $OK = 5$  см (рис. 156). Из  $\triangle MOK$  найдите расстояние от точки  $M$  до стороны  $CD$ . Аналогично найдите расстояние от точки  $M$  до стороны  $AD$ .
237. 5 см. 238. 20 см.
239. 12 см. 240.  $2\sqrt{3}$  см. 241. 8 см. Указание. Воспользуйтесь свойством сторон четырехугольника, в который вписана окружность.
242. 7,8 см. 243. 6,4 см. 244.  $\frac{1}{2}\sqrt{S \sin \alpha + 4m^2}$ . 245. Указание. Докажите, что луч  $CO$  — биссектриса угла  $ACB$ .
246. 10 см. 247.  $2\sqrt{6}$  см.
- Указание. Пусть  $DE = x$  см, тогда из  $\triangle BAD$ :  $16 - x^2 + 81 - x^2 = 49$ .
248.  $\cos \alpha \cos \beta$ . Указание. Проведите  $DB \perp m$  (рис. 157), тогда  $OB \perp AB$ .

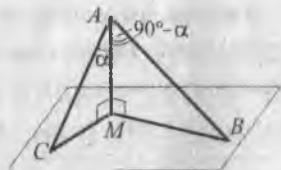


Рис. 155

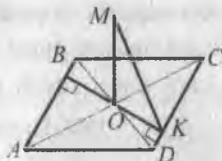


Рис. 156



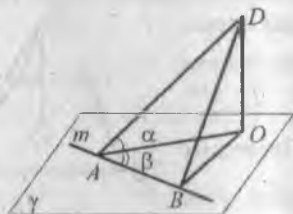


Рис. 157

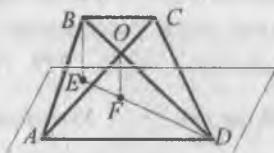


Рис. 158

Из  $\triangle ADO$ :  $AO = AD \cos \alpha$ . Из  $\triangle AOB$ :  $AB = AO \cos \beta = AD \cos \alpha \cos \beta$ . Из  $\triangle ADB$ :  $\cos \angle DAB = \frac{AB}{AD} = \cos \alpha \cos \beta$ . **249.**  $\sqrt{546}$  см. *Указание.* Проекция наклонной — биссектриса угла  $B$  треугольника  $ABC$ . **250.** 4,5 см. *Указание.* Из вершины  $B$  и точки  $O$  пересечения диагоналей опустите перпендикуляры на проведенную плоскость (рис. 158). Далее воспользуйтесь подобием треугольников  $BED$  и  $OFD$ . **255.**  $4\sqrt{2}$  см. **259.**  $7\frac{1}{17}$  см. **260.**  $4\sqrt{5}$  см. **261.**  $16\sqrt{2}$  см. **262.**  $\sqrt{193}$  см и 13 см или  $\sqrt{249}$  см и  $\sqrt{281}$  см. **263.**  $0,4\sqrt{337}$  см. *Указание.*

Из  $\triangle ABC$ :  $BF = \frac{AB \cdot BC}{AC}$ ,  $BF = 4,8$  см (рис. 159).

Из  $\triangle BFC$ :  $FC = 3,6$  см.  $EF = AC - 2FC = 2,8$  см.

Из  $\triangle EFD$ :  $DF^2 = DE^2 + EF^2$ ,  $DF^2 = 30,88$ . Из

$\triangle BFD$ :  $BD = \sqrt{BF^2 + FD^2}$ . **264.** *Указание.* Если

плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны плоскости  $\gamma$ ,

то линия пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$

перпендикулярна плоскости  $\gamma$ . **265.** 1)  $a$ ;

2)  $0,5a$ . **266.**  $4\frac{8}{13}$  см. **267.** 9,6 см. **269.** 9 см.

*Указание.* Проведите  $AD \perp b$ . Рассмотрите

трапецию  $AOBD$ . **270.**  $5\sqrt{3}$  см. **271.** 3 см.

**273.**  $2\sqrt{10}$  см. *Указание.* Проведите

$BB_2 \perp \alpha$  (рис. 160). Высота  $A_1K$  треугольника  $A_1B_1B_2$  — искомое

расстояние между скрещивающимися прямыми. **274.**  $7\frac{1}{17}$  см. *Указа-*

*ние.* Искомое расстояние равно высоте треугольника  $CBE$ , проведен-

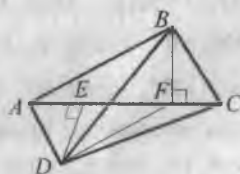


Рис. 159

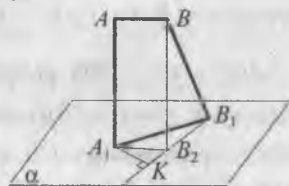


Рис. 160

ной из вершины  $B$ . **275.**  $\sqrt{2}$  см. *Указание.* Искомое расстояние равно расстоянию между прямой  $AB$  и плоскостью  $DB_1C$ . **279.** 1)  $90^\circ$ ; 2)  $45^\circ$ ;

3)  $60^\circ$ . **280.**  $\arccos \frac{\sqrt{6}}{6}$ . *Указание.* Проведите  $EF \parallel AC$  (рис. 161). Искомый угол равен углу  $MEF$ .

**286.**  $3\sqrt{21}$  см. **287.**  $60^\circ$ . **288.**  $45^\circ$  и  $30^\circ$ .

**289.** 4 см. **290.** 54 см. **291.**  $\arccos \frac{1}{3}$ . **292.**  $45^\circ$ . **293.**  $60^\circ$ . *Указание.*

Проведем плоскость  $\gamma$ , перпендикулярную прямой  $m$ . Пусть она пересекает прямые  $a$ ,  $b$  и  $m$  в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно. Из треугольника  $ABC$ :  $\cos \angle ACB = -0,5$ , откуда  $\angle ACB = 120^\circ$ . Тогда

угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  равен  $60^\circ$ . **294.**  $\sqrt{3}$  см.

**295.**  $3\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$  см. **296.**  $30^\circ$ . **297.** 2,4 см. **298.**  $\sqrt{61}$  см. **299.**  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

**300.**  $30^\circ$ . **302.**  $30^\circ$ . **303.** 8 см. *Указание.* Проведите  $M_1D \perp a$ ,  $M_1D = K_1K$  (рис. 162).  $MK^2 = MD^2 + DK^2$ . **304.**  $60^\circ$ . **305.** 3 см.

**306.**  $60^\circ$ . *Указание.* Проведите  $MK \perp a$  и  $MM_1 \perp AB$ . Выразите отрезок  $MM_1$  через  $MK$ . **307.**  $45^\circ$ . *Указание.* Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — данные в условии плоскости, прямая  $a$  — линия их пересечения (рис. 163). Прямая  $AB$ , проведенная в плоскости  $\alpha$ , образует с прямой  $a$  угол  $45^\circ$ , а с плоскостью  $\beta$  — угол  $30^\circ$ . Из точки  $A$  опустим перпендикуляр  $AC$  на

плоскость  $\beta$ . Из  $\triangle ABC$ :  $AB = 2AC$ . Из  $\triangle ABD$ :  $AD = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$ . Из  $\triangle ADC$ :

$\angle ADC = 45^\circ$ . **308.**  $\arctg(\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha)$ . **309.**  $2\arccotg(\sqrt{3} \sin \beta)$ . *Указание.*

Искомый угол — это угол между высотами треугольников  $APC$  и  $BPC$ , проведенными к общей стороне  $PC$ . **313.**  $24\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>. **314.**  $60^\circ$ .

**315.**  $45^\circ$ . **316.**  $30^\circ$ .

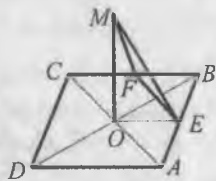


Рис. 161

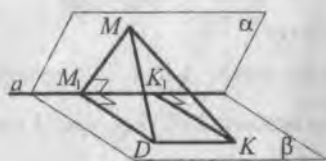


Рис. 162

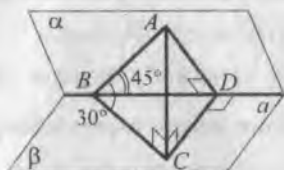


Рис. 163

Вариант 2

10.  $21^\circ$ . 11.  $60^\circ, 50^\circ$ . 12.  $64^\circ, 26^\circ$ . 13. Указание. Докажите, что  $EF \parallel AC$  и  $FK \parallel BD$ . 19. 12 см. 22. 4 см. 24.  $2\sqrt{6}$  см. 26. 168 см. 32.  $9\frac{3}{13}$  см.

35.  $10\sqrt{110}$  см<sup>2</sup>. 36. 60 см. 37. 15 см, 40 см. 39.  $\frac{1 \sin 3\alpha}{\sin \alpha}, \frac{1 \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$ .

40. 6 см, 15 см. 42. 600 см<sup>2</sup>. 45. 360 см<sup>2</sup>. 47. 68 см. 54.  $144^\circ, 86^\circ, 36^\circ, 94^\circ$ . 56. 320 см<sup>2</sup>. 60. 4 см. 62.  $264\frac{1}{6}\pi$  см<sup>2</sup>,  $64\pi$  см<sup>2</sup>. 67.  $72\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>.

69.  $(0; -1,75)$ . 74.  $K(-3; 2,5)$ . 82. 1)  $\sqrt{41+20\sqrt{2}}$ . 99. Нет. Указание.

Проведем две плоскости — через прямые  $a$  и  $c$  и через прямые  $b$  и  $c$ . Если предположить, что такая прямая существует, то она должна принадлежать каждой из двух проведенных плоскостей, а это значит, что она совпадает с прямой  $c$ .

101. Указание. Точки  $M, D$  и  $N$  лежат на прямой пересечения плоскостей  $ABC$  и  $\alpha$ .

102. Прямые  $AC$  и  $BM$  — искомые (рис. 164).

106. Указание. Проведите плоскость через три точки фигуры, не принадлежащие одной прямой. Тогда каждая из остальных точек фигуры будет лежать с этими тремя точками в одной плоскости.

108. Указание. Указанные точки лежат на прямой пересечения плоскостей  $ABC$  и  $\alpha$ .

111.  $\frac{3a\sqrt{2}}{2}, \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ . 112. Указание. 1) Пусть данные точки  $M$  и  $K$  принадлежат соответственно боковым ребрам  $SA$  и  $SB$  пирамиды  $SABCD$ .

Тогда искомая точка является точкой пересечения прямых  $MK$  и  $AB$ ;

3) пусть данные точки  $M$  и  $K$  принадлежат соответственно боковому ребру  $SA$  и грани  $SCD$ ,  $N$  — точка пересечения прямых  $SK$  и  $CD$ . Тогда искомая точка является точкой пересечения прямых  $MK$  и  $AN$ .

114. Указание. Найдите точку  $K$  пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ . Точка пересечения прямой  $MK$  и ребра  $CC_1$  является точкой пересечения

секущей плоскости  $ABM$  и ребра  $CC_1$ . 115. Указание. Найдите точку  $K$  пересечения прямых  $MP$  и  $AA_1$ . Тогда прямая  $CK$  — линия пере-

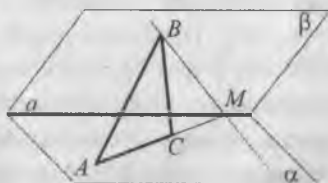


Рис. 164

сечения плоскости сечения и плоскости грани  $AA_1C_1C$ . **128.** Указание.

Примените метод доказательства от противного. **130.** 11 см и 7 см.

**134.** Указание. Выберите на прямой пересечения плоскостей произвольную точку и проведите плоскость через прямую  $a$  и эту точку. Докажите, что эта плоскость содержит прямую пересечения данных плоскостей. **138.** Указание. Примените метод доказательства от противного. **140.** 1 : 3. **142.** 2,4 см. **152.** 4,8 см. **157.** Указание. Через

прямую  $a$  и точку  $B$  проведите плоскость. **158.**  $30 \text{ см}^2$ . **171.** Указание. Основание высоты — середина стороны  $AD$ . **173.** Указание. Искомая

точка делит медиану  $B_1D_1$  в отношении 5 : 4, считая от точки  $B_1$ .

**174.** 3 решения. **176.** Указание. Чтобы построить проекцию диаметра окружности, надо провести две параллельные хорды и провести хорду

через их середины. **177.** Указание. Проведите произвольный диаметр  $AB$  окружности

(рис. 165). Проведите хорду  $MN$ , параллельную  $AB$ . Через середину хорды  $MN$  и центр

окружности проведите диаметр  $CD$  окружности. Четырехугольник  $ACBD$  — изобра-

жение квадрата. **178.** 3 решения. Указание. Пусть  $A$  и  $B$  — вершины квадрата,  $O$  — его центр. Постройте точки, симметричные точкам  $A$  и  $B$  относительно центра  $O$ . **179.** Указание. Серединные перпендикуляры сторон треугольника параллельны его соответствующим

высотам. **180.** Указание. Пусть в прямоугольнике  $ABCD$   $AB : BC = 3 : 1$ . Тогда основание высоты  $BE$  треугольника  $ABC$  делит

сторону  $AC$  в отношении 9 : 1, считая от точки  $A$ . **181.** Указание. Через точки пересечения отрезков  $A_1B_1$  и  $C_1B_1$  с прямой  $p_1$  проведите пря-

мые, параллельные прямой  $BB_1$ . Их точки пересечения с прямыми  $AB$  и  $BC$  — точки прямой  $p$ . **189.** Указание. Проведите прямую  $MO_1$ , пер-

пендикулярную плоскости  $ABC$ . Докажите, что точка  $O_1$  совпадает с

точкой  $O$ . **192.**  $KA = 12 \text{ см}$ ,  $KB = KC = 24 \text{ см}$ . **193.**  $\sqrt{217} \text{ см}$ .

**198.**  $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ . **199.**  $45^\circ$ . **200.** 12 см. **202.**  $60^\circ$ . **203.** 6,5 см.

**205.** Указание. Через точку  $B$  проведите прямую, параллельную прямой  $AC$ . **211.**  $MK = 12 \text{ см}$ ,  $MC = 12\sqrt{3} \text{ см}$ . **212.** 50 см и 52 см.

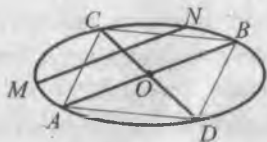


Рис. 165

215.  $\sqrt{6}$  см. 217. 8 см, 8 см,  $8\sqrt{3}$  см. *Указание.* Проведите прямую  $MO$ , перпендикулярную плоскости  $ABC$ ,  $OA$  — радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . 218.  $\sqrt{19}$  см,  $2\sqrt{19}$  см. 219. 13 см, 15 см. 220. 8 см. 221.  $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$ . 222.  $2\sqrt{65}$  см. 223.  $\sqrt{51}$  см. 224. *Указание.*  $\frac{MA}{AC} = \frac{AB}{MA}$ , откуда  $\triangle MAB \sim \triangle CAM$  и  $\angle BMA = 90^\circ - \angle AMC$ .
227.  $0,5\sqrt{4a^2 + 4b^2 - c^2}$ . 230.  $\sqrt{d^2 + c^2 \sin^2 \alpha}$ . 234. *Указание.* Проекция искомого перпендикуляра на плоскость  $ABC$  параллельна диагонали  $AC$  шестиугольника. 235. 9 см. 236. 5,2 см. 237. 10 см. 238.  $3\sqrt{5}$  см. 239. 4 см. 240.  $8\sqrt{30}$  см. 241.  $\sqrt{43}$  см. *Указание.* Воспользуйтесь свойством сторон четырехугольника, в который вписана окружность.
242. 10 см. 243. 24 см. 244.  $0,5\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + 4b^2}$ . 246. 5,2 см. 247. 7 см. 248.  $\arccos \frac{\cos \varphi}{\cos \gamma}$ . 249. 12 см и 14 см. 250. 1,6 см. 255.  $5\sqrt{6}$  см.
258. *Указание.* Проекция точки  $M$  на плоскость  $ABC$  принадлежит прямой, проходящей через середины сторон  $AB$  и  $CD$  прямоугольника  $ABCD$ . 259. 12 см; 9,6 см. 260. 12 см. 261.  $\sqrt{205}$  см. 262. 8 см.
263.  $2\sqrt{337}$  см. 265. 1)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ; 2)  $0,5a$ . 266. 24 см. 267. 12 см.
268. 2,4 см. 269.  $\sqrt{39}$  см. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что угол между хордой и касательной, проведенной через конец хорды, равен вписанному углу, опирающемуся на эту хорду. 270.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$  см.
271.  $4\sqrt{3}$  см. 273.  $\frac{16\sqrt{2}}{3}$  см. *Указание.* Искомое расстояние равно высоте треугольника  $DC'K$ , проведенной к стороне  $DK$ . 274.  $3\sqrt{2}$  см. *Указание.* Искомое расстояние равно высоте треугольника  $C_1BC$ , проведенной из вершины  $B$ . 275.  $2\sqrt{2}$  см. *Указание.* Искомое расстояние равно расстоянию между прямой  $BB_1$  и плоскостью  $AC_1C$ . 278. *Указание.* Прямые  $AB$  и  $FC$  параллельны. 279. 1)  $90^\circ$ ; 2)  $45^\circ$ ;

- 3)  $60^\circ$ . 280.  $\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{5}}{3}$ . Указание. Угол между прямыми  $AB$  и  $FD$  равен углу между прямыми  $FD$  и  $DC$ . С  $\triangle FBC$ :  $FC = 6\sqrt{5}$  см. Далее находим угол  $FDC$  из треугольника  $FDC$ . 283.  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 286.  $6\sqrt{4 + \sqrt{6}}$  см. 287.  $45^\circ$ . 288.  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . 289.  $30^\circ$ . 290.  $\frac{c \cos \alpha}{\cos \beta}$ . 291.  $45^\circ$ . 292.  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ . 293.  $2\sqrt{7}$  см. 294.  $5\sqrt{3}$  см. 295.  $60^\circ$ . 296.  $60^\circ$ . 297.  $6\sqrt{2}$  см. 298.  $2\sqrt{21}$  см. 299.  $45^\circ$ . 300.  $\arccos \frac{7}{8}$ . 302.  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$ . 303. 9 см. 304.  $30^\circ$ . 305. 6 см. Указание.  $MP$  — проекция  $OM$  на плоскость  $MAB$  (рис. 166),  $MP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  см. 306.  $\operatorname{arctg} 2\sqrt{7}$ . Указание. Пусть  $MO = a$  (рис. 167). Тогда  $AO = a$ ,  $BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Из  $\triangle AOB$ :  $AB = \frac{a\sqrt{21}}{3}$ ,  $OK = \frac{2S_{AOB}}{AB}$ ,  $OK = \frac{a}{2\sqrt{7}}$ . Из  $\triangle MOK$ :  $\operatorname{tg} \angle MKO = 2\sqrt{7}$ . 307.  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ . 308.  $\operatorname{arctg} \left( \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{3}} \right)$ . 309.  $2 \operatorname{arctg}(\sin \beta)$ . Указание. Искомый угол равен углу между высотами треугольников  $AKB$  и  $AKD$ , проведенными к их общей стороне  $AK$ . 313.  $30^\circ$ . 314. 8 см. 315.  $30^\circ$ . 316.  $72 \text{ см}^2$ .

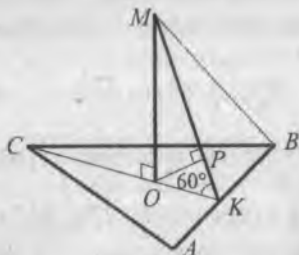


Рис. 166

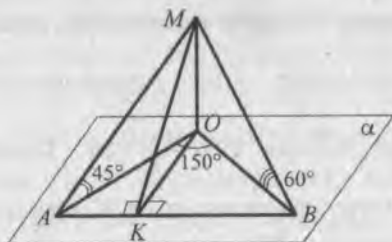


Рис. 167

**Бланк ответов**  
**итоговой контрольной работы № \_\_\_\_\_**  
**по геометрии**  
 ученика / ученицы 10 \_\_\_\_\_ класса

название учебного заведения

фамилия, имя, отчество ученика (ученицы)

Вариант № \_\_\_\_\_

**Внимание!** Отмечайте только один вариант ответа в строке вариантов ответов к каждому заданию. Любые исправления в бланке недопустимы.

Если Вы решили изменить ответ в некоторых заданиях, то правильный ответ можно разместить в специально отведенном месте, расположенном внизу бланка ответов.

В заданиях 1 – 10 правильный ответ отмечайте только так:

	А	Б	В	Г
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	А	Б	В	Г
5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	А	Б	В	Г
9	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

В заданиях 11 – 14 впишите ответ.

11. \_\_\_\_\_

13. \_\_\_\_\_

12. \_\_\_\_\_

14. \_\_\_\_\_

Чтобы исправить ответ к заданию, запишите его номер в специально отведенных клеточках, а правильный, по Вашему мнению, ответ — в соответствующем месте.

**Задания 1 – 10**

**Задания 11 – 14**

номер задания

А Б В Г

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

номер задания

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Содержание

От авторов .....	3
Тематическое распределение тренировочных упражнений .....	6
Тренировочные упражнения.....	7
Вариант 1 .....	7
Вариант 2 .....	38
Вариант 3 .....	68
Контрольные работы .....	99
Вариант 1 .....	99
Вариант 2 .....	104
Итоговые контрольные работы .....	109
Итоговая контрольная работа №1 .....	109
Итоговая контрольная работа №2 .....	121
Ответы и указания к тренировочным упражнениям .....	133
Вариант 1 .....	133
Вариант 2 .....	139
Бланк ответов итоговой контрольной работы.....	143

### Навчальне видання

**Мерзляк Аркадій Григорович, Половський Віталій Борисович  
Рабінович Юхим Михайлович, Якір Михайло Семенович**

### Геометрія

10 клас

**Збірник задач і контрольних робіт  
(Російською мовою)**

Редактор *Г. Ф. Висоцька*. Коректор *Г. Е. Цента*. Комп'ютерне верстання *О. О. Удалова*

Формат 60х90/16 Гарнітура шкільна. Ум. друк. арк. 9,00

Тираж 5000 прим. Замовлення № **74S**.

ТОВ ГО «Гімназія».

вул. Восьмого Березня, 31 м. Харків 61052

Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25 10 2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ГО «Гімназія», у друкарні ПП «Модем»,  
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052. Тел. (057) 758-15-80  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003